Тема: Статистическая проверка гипотез.

Принимая решение в условиях неопределенности, мы вынуждены высказывать некоторые гипотезы или предположения и доказывать их с определенной степенью надежности.

Статистической называют гипотезу о свойствах или признаках генеральной совокупности, которая проверяется на основе выборки.

В математической статистике выделяют два основных вида статистических гипотез:

1) гипотезы о законе распределения вероятностей случайной величины (признака генеральной совокупности);
2) гипотезы о значении параметров распределения случайной величины (признак генеральной совокупности).

Статистические гипотезы первого типа называются непараметрическими, а второго типа – параметрическими.

Нулевой (основной) называют выдвинутую гипотезу H_0.

Конкурирующей или **альтернативной** называют гипотезу H_1, которая противоречит нулевой.

$H_0 : a = 10$

$H_1 : a \neq 10$

Простой называют гипотезу, содержащую только одно предположение. **Сложной** называют гипотезу, которая состоит из конечного или бесконечного числа простых гипотез. Простая гипотеза, в отличие от сложной, полностью определяет теоретическую функцию распределения случайной величины. Например, гипотезы «вероятность появления события в схеме Бернулли равна 1/2», «закон распределения случайной величины – нормальный с параметрами a = 0, σ = 1 » - являются простыми, а гипотезы «вероятность появления события в схеме Бернулли заключена между 0,3 и 0,6», «закон распределения не является нормальным» - сложными.

В результате статистической проверки гипотезы может быть принято одно из двух правильных решений:

1) гипотеза принимается и она истинна;
2) гипотеза отклоняется и она не истинна.

Наряду с этим в результате статистической проверки гипотез, могут быть допущены ошибки (приняты неправильные решения) 2-х типов:

1) гипотеза отклонена, но она истинна (ошибка первого рода);
2) гипотеза принимается, но она не истинна (ошибка второго рода).

Вероятность допустить ошибку первого рода называется ***уровнем значимости*** и обозначается: $P(H_1/H_0) = \alpha$. Число α задается наперед и обычно равно 0.1; 0.05; 0.01.

Статистическим критерием называют случайную величину K, которая служит для проверки нулевой гипотезы. K выбирают такой, чтоб её закон распределения был известен.

Значение случайной величины K, вычисленное по выборке, называют наблюдаемым значением и обозначается $K_{наблюд.}$.

Тема: <u>Критическая область. Область принятия гтпотезы.</u>

Критической областью называют совокупность значений критерия K, при которых нулевую гипотезу H_0 отклоняют.

Областью принятия гипотезы или **областью допустимых значений** называют совокупность значений критерия K, при которых гипотезу H_0 принимают.

Правило проверки гипотез:

- если наблюдаемое значение критерия $K_{наблюд.}$ принадлежит критической области – гипотезу H_0 отклоняют;
- если наблюдаемое значение критерия $K_{наблюд.}$ принадлежит области принятия гипотезы – гипотезу H_0 принимают.

Критическими точками (границами) $K_{кр.}$ называют точки, отделяющие критическую область от области принятия гипотезы.

Правосторонней называют критическую область, определяемую неравенством:

$K > K_{кр.}$, $K_{кр.} > 0$.

Левосторонней называют критическую область определяемую неравенством:

$K < K_{кр.}$

$K_{кр.}$ – отрицательное число

Односторонней называют правостороннюю или левостороннюю критическую область.

Двухсторонней называют критическую область, определяемую неравенством:

$K < K_1; K > K_2; K_2 > K_1$

Если критические точки симметричны относительно нуля, то мы имеем:

$K < -K_{кр.}$; $K > K_{кр.}$

Для нахождения критической области задаются уровнем значимости α. Ищут критическую точку $K_{кр.}$ исходя из требования

для правосторонней критической области, чтобы:

$$P\left(K > K_{кр.}\right) = \alpha . \qquad (1)$$

Для левосторонней области должно выполняться, что

$$P\left(K < K_{кр.}\right) = \alpha . \qquad (2)$$

И в случае двухсторонней области получаем:

$$P\left(K < K_1\right) + P\left(K > K_2\right) = \alpha . \qquad (3)$$

Для уравнения (1) область $K > K_{кр}$ называется **критической** областью. **Если значение $K_в$ попадает в критическую область, то гипотеза H_0 отвергается**.

Для уравнения (1) область $K < K_{кр}$ называется **областью принятия гипотезы**. **Если значение $K_в$ попадает в область принятия гипотезы, то гипотеза H_0 принимается**.

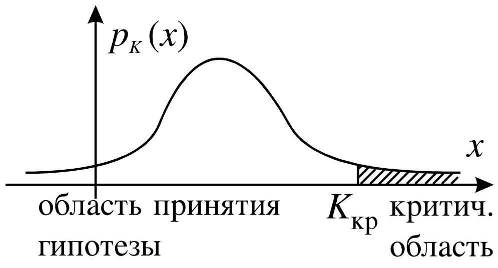

Рис. 1.

Рисунок 1. иллюстрирует решение уравнения (1). Здесь $p_K(x)$ – известная плотность распределения случайной величины K при условии справедливости гипотезы H_0.

Пусть выбрано некоторое малое значение вероятности α, по нему определено значение $K_{кр}$ и по выборочным данным определено значение $K_в$, которое попало в критическую область. В этом случае гипотеза H_0 отвергается, но она может оказаться справедливой, просто случайно произошло событие, которое имеет очень малую вероятность α. В этом смысле α есть вероятность отвержения правильной гипотезы H_0.

Отвержение правильной гипотезы называется **ошибкой первого рода**. Вероятность α называется уровнем значимости. Таким образом, **уровень значимости – это вероятность совершения ошибки первого рода**.

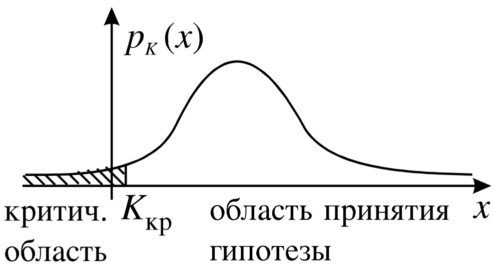

Рис. 2.

Уравнение (2) определяет **левосторонюю критическую область**.

Отметим, что каждая из заштрихованных фигур на рисунках 1. и 2. имеет площадь, равную α.

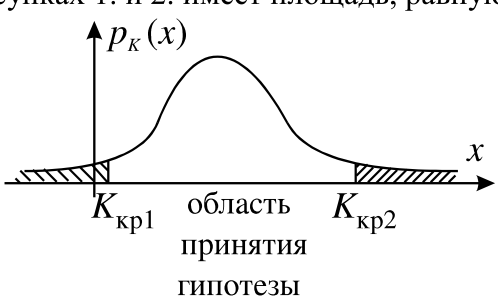

Рис. 3.

Уравнение (3) определяет **двусторонюю критическую область**. Такая область изображена на рисунке 3. Здесь критическая область состоит из двух частей. В случае двусторонней критической области границы ее частей $K_{кр1}$ и $K_{кр2}$ определяются таким образом, чтобы выполнялось условие:

$$P(K \le K_{кр}) = P(K \ge K_{кр}) = \alpha / 2.$$

На рисунке 3. площадь каждой из заштрихованных фигур равна $\alpha / 2$.

Чем меньше уровень значимости, тем меньше вероятность отвергнуть проверяемую гипотезу H_0, когда она верна, то есть совершить ошибку первого рода. Но с уменьшением уровня значимости расширяется область принятия гипотезы H_0 и увеличивается вероятность принятия проверяемой гипотезы, когда она неверна, то есть когда предпочтение должно быть отдано конкурирующей гипотезе.

Пусть при справедливости гипотезы H_0 статистический критерий K имеет плотность распределения $p_0(x)$, а при справедливости конкурирующей гипотезы H_1 – плотность распределения $p_1(x)$. Графики этих функций приведены на рисунке 4. При некотором уровне значимости находится критическое значение $K_{кр}$ и правостороняя критическая область. Если значение $K_в$, определенное по выборочным данным, оказывается меньше, чем $K_{кр}$, то гипотеза H_0 принимается. Предположим, что справедлива на самом деле конкурирующая гипотеза H_1. Тогда вероятность попадания критерия в область принятия гипотезы H_0 есть некоторое число β, равное площади фигуры, образованной графиком функции $p_1(x)$ и полубесконечной частью горизонтальной координатной оси, лежащей слева от точки $K_{кр}$. Очевидно, что β – это вероятность того, что будет принята неверная гипотеза H_0.

Принятие неверной гипотезы называется ошибкой второго рода. В рассмотренном случае число β – это вероятность ошибки второго рода. **Число** $1 - \beta$, **равное вероятности того, что не совершается ошибка второго рода, называется мощностью критерия**. На рисунке 4 мощность критерия равна площади фигуры, образованной графиком функции $p_1(x)$.и полубесконечной частью горизонтальной координатной оси, лежащей справа от точки $K_{кр}$.

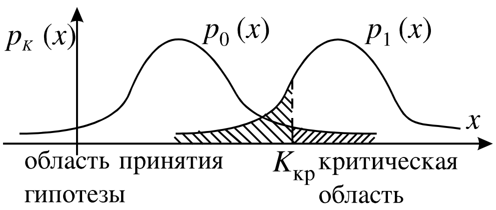

Рис. 4.

Мощностью критерия γ называют вероятность попадания критерия в критическую область при условии, что справедлива конкурирующая гипотеза:

$$\gamma = 1 - \beta,$$

$$P(H_0/H_1) = \beta$$ – ошибка второго рода.

То есть, мощность критерия (насколько хорош выбранный критерий) определяется, как вероятность не допустить ошибку второго рода.

Выбор статистического критерия и вида критической области осуществляется таким образом, чтобы мощность критерия была максимальной.

Ошибки при проверке гипотез

	Решение	
	Принять H_0	Принять H_1
Справедлива H_0	Правильное с вероятностью $1-\alpha$ (достаточная статистическая мощность)	Ошибочное с вероятностью α (ошибка I рода)
Справедлива H_1	Ошибочное с вероятностью β (ошибка II рода)	Правильное с вероятностью $1-\beta$

Схема проверки статистической гипотезы:

1. формулировка гипотезы H_0, гипотезы H_1, задание уровня значимости α для проверки H_0;
2. определение критерия K для проверки гипотезы H_0, который является случайной величиной с известным распределением вероятности;
3. определение критической области относительно данного критерия K и уровня значимости α, нахождение $K_{кр.}$;
4. нахождение $K_{наблюд.}$ на основании данных конкретной выборки;
5. принятие решения: если $K_{наблюд.}$ попадает в критическую область – гипотезу H_0 отклоняют; если $K_{наблюд.}$ попадает в область допустимых значений, гипотезу H_0 принимают.

Замечание: если уровень значимости α выбран, критическую область целесообразно строить так, чтобы мощность критерия была максимальной. Выполнение этого требования обеспечивает минимизацию ошибки второго рода.

Тема: Проверка непараметрических гипотез.

Проверка гипотезы о предполагаемом законе неизвестного распределения производится при помощи специально подобранной случайной величины – критерия согласия.

Критерием согласия называется критерий проверки гипотезы о предполагаемом законе неизвестного распределения.

Существует несколько критериев согласия:

- критерий Пирсона;
- критерий Колмагорова;
- критерий Смирнова.

Критерий χ^2 Пирсона позволяет проверять гипотезу о согласовании данных выборки с конкретными теоретическими распределениями для любой случайной величины (т.е. с любым законом распределения, непрерывной и дискретной).

Критерий χ^2 Пирсона:

Пусть данные выборки $x_1, x_2, ..., x_n$ получены в результате n независимых наблюдений над случайной величиной X. По данным построенного статистического распределения выборки и при заданном уровне значимости α необходимо проверить гипотезу $H_0 : F(x, \theta_j) \in \Omega$ (случайная величина X имеет функцию распределения F, принадлежащую некоторому классу функций определенного вида).

При конкурирующей гипотезе H_1: случайная величина X имеет функцию распределения F, не принадлежащую этому классу ($H_1 : F(x, \theta_j) \notin \Omega$).

Согласно критерию Пирсона введем статистику

$$K = \chi^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{\left(n_i - n_i'\right)^2}{n_i'} \quad (1),$$

Где m - число групп в статистическом распределении выборки, n_i – эмпирическая частота признака X в i- ой группе. n_i' – теоретическая частота.

Если нулевая гипотеза верна, то при $n \to \infty$ закон распределения данной статистики χ^2 не зависит от закона $F\left(x, \theta_j\right)$ и стремится к χ^2 распределению с числом степеней свободы $k = m - s - 1$, где m - число интервалов, а s - число параметров гипотетической функции $F\left(x, \theta_j\right)$, которые оцениваются на основе данных наблюдений.

Например: если проверяется предлагаемое нормальное распределение, то оценивают два параметра: математическое ожидание и средне – квадратичное отклонение; поэтому $s = 2; k = m - 3$. Для равномерного распределения $s = 2; k = m - 3$. Если предлагают, что генеральная совокупность распределена по закону Пуассона, то оценивают один параметр $\lambda : s = 1$ и $k = m - 2$.

Вычислив по формуле (1) $K_{эмп.} = \chi^2{}_{эмп.}$ и определив по заданному уровню значимости α и числу степени свободы $K : \chi^2_{кр.}\left(\alpha, k\right) = K_{кр.}$ (используя таблицу) делаем следующие выводы:

1. если $K_{эмп.} \geq K_{кр.}$ гипотезу H_0 отклоняют;
2. если $K_{эмп.} < K_{кр.}$ гипотезу H_0 принимают.

Применение критерия χ^2 требует соблюдения следующих условий:

1. независимость экспериментальных данных, то есть выборка должна быть случайной;
2. объем выборки должен быть достаточно большим (не меньше 50), каждая группа должна содержать не менее 5-8 вариант; малочисленные группы следует объединить в одну, суммируя частоты.