

ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВОГО ВАРІАНТУ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

Завдання №1

а) Початкову суму 3246 грн. розміщено в банку на термін 0,25 років під 12,5% річних (відсотки прості). Знайти нарощену суму, еквівалентні значення простої облікової ставки, складної процентної ставки, складної номінальної процентної ставки (відсотки нараховуються 12 раз на рік). Рівень інфляції за період, який розглядається, виявився рівним 2,67%. Яка реальна прибутковість операції?

б) Початкова сума 3246 грн., нарощена сума 4163 грн., процентна ставка 12,5% річних (відсотки прості). Знайти період нарахування.

в) Початкова сума 3246 грн., нарощена сума 4163 грн., період нарахування 0,25 років. Знайти просту процентну ставку.

г) Початкова сума 3246 грн. покладена в банк на термін з 20.03 по 06.08 під 12,5% річних (відсотки прості). Знайти нарощену суму в англійській, німецькій та французькій практиках.

Розв'язання.

а) Спочатку обчислимо нарощену суму :

$$S = P \left(1 + \frac{i}{12} k \right) = 3246 \cdot \left(1 + \frac{0,125}{12} \cdot 3 \right) = 3347,438 \text{ грн..}$$

Значення простої облікової ставки

$$d = \frac{i}{1 + ni} = \frac{0,125}{1 + 0,125 \cdot \frac{1}{4}} = 0,1212 \text{ або } 12,12\%.$$

Таким чином, облікова ставка 12,12% річних забезпечує за квартал таке ж нарощення простими процентами, як й процентна ставка 12,5% річних.

Складна процентна ставка:

$$i = m \cdot \left(mn \sqrt[m]{\frac{S}{P}} - 1 \right) = 12 \cdot \left(12 \cdot 0,25 \sqrt[12]{\frac{3347,438}{3246}} - 1 \right) = 0,1237 \text{ або } 12,37\%.$$

Складна номінальна процентна ставка

$$j = 12 \left(\left(1 + 0,125 \right)^{\frac{1}{12}} - 1 \right) = 0,1184, \text{ тобто } 11,84\%.$$

Визначимо реальну прибутковість операції у вигляді процентної ставки при розміщенні грошових коштів на 0,25 року (1 квартал) при рівні інфляції 2,67%:

$$i = \frac{1}{n} \left(\frac{1 + nr}{(1 + h)^n} - 1 \right) = 4 \cdot \left(\frac{1 + 0,125 \cdot 0,25}{(1 + 0,0267)^{0,25}} - 1 \right) = 0,0979 \text{ або } 9,79\%,$$

тобто реальний дохід від фінансової операції складатиме 9,79% від кожної одиниці вкладених коштів.

б) Початкова сума 3246 грн., нарощена сума 4163 грн., процентна ставка 12,5% річних (відсотки прості) з щомісячним нарахуванням. Знайдемо період нарахування:

$$n = \frac{\log\left(\frac{S}{P}\right)}{m \cdot \log\left(1 + \frac{j}{m}\right)} = \frac{\ln\left(\frac{4163}{3246}\right)}{12 \cdot \ln\left(1 + \frac{0,125}{12}\right)} = 2 \text{ роки.}$$

в) Початкова сума 3246 грн., нарощена сума 4163 грн., період нарахування 0,25 років. Знайдемо просту процентну ставку з щомісячним нарахуванням:

$$i = \frac{S - P}{Pn} = \frac{4163 - 3246}{3246 \cdot \frac{0,25}{12}} = 0,0942 \text{ або } 9,42\%.$$

г) Початкова сума 3246 грн. покладена в банк на термін з 20.03 по 06.08 під 12,5% річних (відсотки прості). Знайдемо нарощену суму в англійській, німецькій та французькій практиках.

– при германській практиці розрахункова кількість днів буде дорівнювати:

$$k = 11(\text{днів в березні}) + 120(4 \text{ місяці по } 30 \text{ днів}) + 6(\text{днів в серпні}) = 137 \text{ днів.}$$

Тоді, $S = 3246 \left(1 + \frac{137}{360} \cdot 0,125\right) = 3400,41 \text{ грн.}$

– при французькій практиці кількість днів дорівнює:

$$k = 11 + 31 \cdot 2 + 30 \cdot 2 + 6 = 139 \text{ днів.}$$

Тоді, $S = 3246 \left(1 + \frac{139}{360} \cdot 0,125\right) = 3402,66 \text{ грн.}$

– при англійській практиці кількість днів така ж, як и при французькій, тобто $k = 139$ днів, тривалість року 365 днів. Тоді,

$$S = 3246 \left(1 + \frac{139}{365} \cdot 0,125\right) = 3400,52 \text{ грн.}$$

Завдання №2

а) Початкова сума 3246 грн. покладена в банк на термін 0,25 років під просту облікову ставку 12,5% річних. Знайти нарощену суму, еквівалентні значення простої процентної ставки, складної процентної ставки, складної номінальної процентної ставки (відсотки нараховуються 12 раз на рік).

б) Початкова сума 3246 грн., нарощена сума 4163 грн., проста облікова ставка 12,5% річних. Знайти період нарахування.

в) Початкова сума 3246 грн., нарощена сума 4163 грн., період нарахування 0,25 років. Знайти просту облікову ставку.

Розв'язання.

а) Спочатку обчислимо нарощену суму за формулою нарощення за простою обліковою ставкою:

$$S = \frac{P}{1 - nd} = \frac{3246}{1 - 0,25 \cdot 0,125} = 3350,71 \text{ грн.}$$

Обчислимо значення простої процентної ставки

$$i = \frac{d}{1 - nd} = \frac{0,125}{1 - 0,25 \cdot 0,125} = 0,1290 \text{ або } 12,9\%.$$

Складна процентна ставка:

$$i_c = \frac{1}{\sqrt[n]{1 - nd}} - 1 = \frac{1}{(1 - 0,25 \cdot 0,125)^4} - 1 = 0,1354 \text{ або } 13,54\%.$$

Складна номінальна процентна ставка

$$j = m \left(1 - \sqrt[mn]{1 - nd} \right) = 12 \left(1 - \sqrt[3]{1 - 0,25 \cdot 0,125} \right) = 0,1263, \text{ тобто } 12,63\%.$$

б) Початкова сума 3246 грн., нарощена сума 4163 грн., проста облікова ставка 12,5% річних. Знайдемо період нарахування:

$$n = \frac{S - P}{Sd} = \frac{4163 - 3246}{4163 \cdot 0,125} = 1,76 \text{ років}$$

або 2 роки або приблизно 21 місяць.

в) Початкова сума 3246 грн., нарощена сума 4163 грн., період нарахування 0,25 років. Знайдемо просту облікову ставку:

$$d = \frac{S - P}{Sn} = \frac{4163 - 3246}{4163 \cdot 0,25} = 0,8811 \text{ або } 88,11\%.$$

Завдання №3

а) Початкова сума 3246 грн. покладена в банк на термін 5 років під 12,5% річних (відсотки складні). Знайти нарощену суму, еквівалентні значення простої облікової ставки, простої процентної ставки, складної номінальної процентної ставки (відсотки нараховуються 12 раз на рік).

б) Початкова сума 3246 грн., нарощена сума 4163 грн., процентна ставка 12,5% річних (відсотки складні). Знайти період нарахування.

в) Початкова сума 3246 грн., нарощена сума 4163 грн., період нарахування 5 років. Знайти складну процентну ставку.

г) Початкова сума 3246 грн. покладена в банк на термін 5 років під 12,5% річних (відсотки складні). Знайти нарощену суму у випадку неперервного нарахування відсотків.

д) Початкова сума 3246 грн. покладена в банк на термін 5 років під 12,5% річних (відсотки складні). Процентна ставка неперервна та змінюється, приріст

за рік складає 2,67%. Строк нарощення 5 років. Знайти нарощену суму у випадку неперервного нарахування відсотків (розглянути випадки лінійної та експоненціальної залежностей зі збільшенням та зі зменшенням).

Розв'язання.

а) Спочатку обчислимо нарощену суму:

$$S = P \left(1 + \frac{i}{12} \right)^{12n} = 3246 \cdot \left(1 + \frac{0,125}{12} \right)^{12 \cdot 5} = 6044,75 \text{ грн..}$$

Значення простої облікової ставки

$$d = \frac{1}{n} \cdot \left(1 - \left(1 + \frac{i_c}{12} \right)^{-12n} \right) = \frac{1}{5} \cdot \left(1 - \left(1 + \frac{0,125}{12} \right)^{-12 \cdot 5} \right) = 0,0926 \text{ або } 9,26\%.$$

Проста процентна ставка:

$$i = \frac{1}{n} \cdot \left(\left(1 + \frac{i_c}{m} \right)^{mn} - 1 \right) = \frac{1}{5} \cdot \left(\left(1 + \frac{0,125}{12} \right)^{12 \cdot 5} - 1 \right) = 0,1724 \text{ або } 17,24\%.$$

Складна номінальна процентна ставка

$$j = 12 \left(\left(1 + 0,125 \right)^{\frac{1}{12}} - 1 \right) = 0,1184, \text{ тобто } 11,84\%.$$

б) Початкова сума 3246 грн., нарощена сума 4163 грн., процентна ставка 12,5% річних (відсотки складні). Знайдемо період нарахування:

$$n = \frac{\log \left(\frac{S}{P} \right)}{\log(1+i)} = \frac{\ln \left(\frac{4163}{3246} \right)}{\ln(1+0,125)} = 2,11 \text{ років.}$$

в) Початкова сума 3246 грн., нарощена сума 4163 грн., період нарахування 5 років. Знайдемо складну процентну ставку:

$$i = \sqrt[n]{\frac{S}{P}} - 1 = \sqrt[5]{\frac{4163}{3246}} - 1 = 0,051 \text{ або } 5,1\%.$$

г) Початкова сума 3246 грн. покладена в банк на термін 5 років під 12,5% річних (відсотки складні). Знайдемо нарощену суму у випадку неперервного нарахування відсотків.

$$S = Pe^{\delta n} = Pe^{nj} = Pe^{5(\sqrt[5]{1+0,125}-1)} = 3656,86 \text{ грн..}$$

д) Початкова сума 3246 грн. покладена в банк на термін 5 років під 12,5% річних (відсотки складні). Процентна ставка неперервна та змінюється, приріст за рік складає 2,67%. Строк нарощення 5 років. Знайти нарощену суму у

випадку неперервного нарахування відсотків (розглянути випадки лінійної та експоненціальної залежностей зі збільшенням та зі зменшенням).

Знайдемо нарощену суму у випадку лінійної залежності зі збільшенням ($a = 0,0267$):

$$S = Pe^{\frac{\delta n + \frac{an^2}{2}}{2}} = 3246 \cdot e^{5(\sqrt[5]{1+0,125}-1) + \frac{0,0267 \cdot 5^2}{2}} = 5105,69 \text{ грн.}$$

У разі, коли сила зростання лінійно зменшується, тобто $a = -0,0267$, будемо мати

$$S = Pe^{\frac{\delta n + \frac{an^2}{2}}{2}} = 3246 \cdot e^{5(\sqrt[5]{1+0,125}-1) - \frac{0,0267 \cdot 5^2}{2}} = 2619,16 \text{ грн..}$$

Знайдемо нарощену суму у випадку експоненціальної залежності зі збільшенням ($a = 1 + 0,0267 = 1,0267$):

$$S = Pe^{\frac{\delta}{\ln a} \cdot (a^n - 1)} = 3246 \cdot e^{\frac{\sqrt[5]{1+0,125}-1}{\ln 1,0267} \cdot (1,0267^5 - 1)} = 3687,00 \text{ грн.}$$

У разі, коли сила зростання експоненціально зменшується, тобто $a = 1 - 0,0267 = 0,9733$, будемо мати

$$S = Pe^{\frac{\delta}{\ln a} \cdot (a^n - 1)} = 3246 \cdot e^{\frac{\sqrt[5]{1+0,125}-1}{\ln 0,9733} \cdot (0,9733^5 - 1)} = 3628,77 \text{ грн..}$$

Завдання №4 Розрахунки в умовах інфляції

Відомий приріст цін за перші три місяці поточного року: січень – 0,4%, лютий – 0,96%, березень – 1,1%. Вклад в сумі 3246 грн. внесено в банк 1 січня поточного року під 12,5% річних.

а) Визначити темп та індекс інфляції за 1-й квартал року.

б) Визначити темп та індекс інфляції за період 5 років за умови постійного поквартального рівня інфляції.

в) Визначити середньорічний темп та індекс інфляції по приросту цін за перші три місяці.

г) Розрахувати нарощену суму через період 5 років при нарахуванні процентів по схемі простих процентів та прогнозованій інфляції.

д) Розрахувати нарощену суму через період 5 років при нарахуванні процентів по схемі складних процентів та прогнозованій інфляції.

е) Розрахувати бруто-ставки для схеми простих та складних процентів.

Розв'язання.

а) Визначимо індекс інфляції за 1-й квартал року

$$J_p = (1 + h_1)(1 + h_2)(1 + h_3) = (1 + 0,004)(1 + 0,0096)(1 + 0,011) = 1,0248$$

або 102,48% та темп інфляції за 1-й квартал року:

$$h = J_p - 1 = 1,0248 - 1 = 0,0248 \text{ або } 2,48\%.$$

б) Визначимо індекс інфляції за період 5 років за умови постійного поквартального рівня інфляції:

$$J_p = (1 + h)^n = (1 + 0,025)^5 = 1,1302 \text{ або } 113,02\%$$

та темп інфляції:

$$h = J_p - 1 = 1,13 - 1 = 0,1302 \text{ або } 13,02\%.$$

в) Визначимо середньорічний індекс інфляції по приросту цін за перші три місяці:

$$J_{p_сер/річн} = [(1 + h_1)(1 + h_2)(1 + h_3)]^4 = 1,0248^4 = 1,1029 \text{ або } 110,29\%$$

та відповідний темп інфляції:

$$h = J_{p_сер/річн} - 1 = 1,1029 - 1 = 0,1029 \text{ або } 10,29\%.$$

г) Розрахуємо нарощену суму через період 5 років при нарахуванні процентів по схемі простих процентів та прогнозованій інфляції:

$$C = \frac{P(1 + ni)}{J_p} = \frac{3246(1 + 5 \cdot 0,125)}{1,1302} = 4666,925 \text{ грн..}$$

д) Розрахуємо нарощену суму через період 5 років при нарахуванні процентів по схемі складних процентів та прогнозованій інфляції:

$$C = P \frac{(1 + i)^n}{J_p} = 3246 \cdot \frac{(1 + 0,125)^5}{1,1302} = 5175,354 \text{ грн..}$$

е) Розрахуємо бруutto-ставки для схеми простих

$$r = \frac{(1 + ni)J_p - 1}{n} = \frac{(1 + 5 \cdot 0,125) \cdot 1,1029 - 1}{5} = 0,1584 \text{ або } 15,84\%$$

та складних процентів:

$$r = i + h + ih = 0,125 \cdot (1 + 0,1029) + 0,1029 = 0,2408 \text{ або } 24,08\%.$$

Завдання №5 Застосування простих і складних процентів в банківській практиці

Вклад в сумі 3246 грн. внесено в банк під 12,5% річних 29.04.11. Розрахувати та проаналізувати граничні суми виплат на дати вилучення 27.07.12 та 02.10.13 (365/360) при нарахуванні:

- а) простих процентів;
- б) складних процентів;
- в) неперервному нарахуванні процентів;
- г) капіталізації складних процентів 12 раз на рік.

Розв'язання.

Спочатку розрахуємо кількість днів при французькій практиці (365/360) на дати вилучення:

– з 29.04.11 по 27.07.12:

$$k_1 = 366 + 1 + 31 + 30 + 27 = 455 \text{ днів};$$

– з 29.04.11 по 02.10.13:

$$k_2 = 366 + 365 + 1 + 31 \cdot 3 + 30 \cdot 2 + 2 = 887 \text{ днів}.$$

Тоді граничні суми виплат на дати вилучення будуть

а) при нарахуванні простих процентів:

$$S_1 = 3246 \left(1 + \frac{455}{360} \cdot 0,125 \right) = 3758,82 \text{ грн.},$$

$$S_2 = 3246 \left(1 + \frac{887}{360} \cdot 0,125 \right) = 4245,72 \text{ грн.};$$

б) при нарахуванні складних процентів:

$$S_1 = 3246 \left(1 + \frac{12,5}{100} \right)^{\frac{455}{360}} = 3767,03 \text{ грн.},$$

$$S_2 = 3246 \left(1 + \frac{12,5}{100} \right)^{\frac{887}{360}} = 4338,93 \text{ грн.};$$

в) при неперервному нарахуванні процентів:

$$S_1 = 3246 \cdot e^{0,125 \cdot \frac{455}{360}} = 3801,55 \text{ грн.},$$

$$S_2 = 3246 \cdot e^{0,125 \cdot \frac{887}{360}} = 4416,77 \text{ грн.};$$

г) при капіталізації складних процентів 12 раз на рік.

$$S_1 = 3246 \left(1 + \frac{0,125}{12} \right)^{12 \cdot \frac{455}{360}} = 3798,45 \text{ грн.},$$

$$S_2 = 3246 \left(1 + \frac{0,125}{12} \right)^{12 \cdot \frac{887}{360}} = 4409,74 \text{ грн..}$$

Завдання №6 Операції з валютою

Передбачається розмістити $P_{\text{дол.}} = 3,2$ тисяч доларів на гривневому депозиті. Курс продажу на початок строку депозиту $K_0 = 26,45$ грн. за 1 долар; курс покупки долара в кінці операції $K_1^{(1)} = 26,87$ ($K_1^{(2)} = 27,01$) грн. Процентні ставки $i_{\text{грн.}} \% = 12,5$, $i_{\text{дол.}} \% = 6,3$. Строк депозиту 18 місяців. Розрахувати кінцеву суму при подвійній конверсії та при прямому нарахуванні по валютній ставці простих та складних відсотків.

Необхідно розмістити на валютному депозиті суму в $P_{\text{грн.}} = 4,3$ тисячах грн., конвертувавши її попередньо в долари. Знайти нарощену вартість вкладів при подвійній конверсії та при прямому нарахуванні по гривневій ставці простих та складних відсотків.

Визначити вид найбільш вигіднішого розміщення вкладу для кожного з випадків.

Розв'язання.

Передбачається розмістити $P_{\text{дол.}} = 3,2$ тисяч доларів на гривневому депозиті. Проведемо розрахунок при нарахуванні простих відсотків:

– при подвійній конверсії **СКВ** → **грн.** → **грн.** → **СКВ**:

$$S_{v-1} = P_v \frac{K_0}{K_1^{(1)}} \left(1 + i \cdot \frac{m}{12}\right) = 3,2 \cdot \frac{26,45}{26,87} \left(1 + 0,125 \cdot \frac{18}{12}\right) = 3,7406 \text{ тис. доларів,}$$

$$S_{v-2} = P_v \frac{K_0}{K_1^{(2)}} \left(1 + i \cdot \frac{m}{12}\right) = 3,2 \cdot \frac{26,45}{27,01} \left(1 + 0,125 \cdot \frac{18}{12}\right) = 3,7212 \text{ тис. доларів;}$$

– при прямому нарахуванні по валютній ставці простих відсотків:

$$S_v = P_v \left(1 + i_v \cdot \frac{m}{12}\right) = 3,2 \cdot \left(1 + 0,063 \cdot \frac{18}{12}\right) = 3,5024 \text{ тис. доларів.}$$

Проведемо розрахунок при нарахуванні складних відсотків:

– при подвійній конверсії **СКВ** → **грн.** → **грн.** → **СКВ**:

$$S_{v-1} = P_v \frac{K_0}{K_1^{(1)}} (1 + i)^{\frac{m}{12}} = 3,2 \cdot \frac{26,45}{26,87} (1 + 0,125)^{\frac{18}{12}} = 3,7587 \text{ тис. доларів,}$$

$$S_{v-2} = P_v \frac{K_0}{K_1^{(2)}} (1 + i)^{\frac{m}{12}} = 3,2 \cdot \frac{26,45}{27,01} (1 + 0,125)^{\frac{18}{12}} = 3,7392 \text{ тис. доларів;}$$

– при прямому нарахуванні по валютній ставці складних відсотків:

$$S_v = P_v \left(1 + i_v \cdot \frac{m}{12}\right) = 3,2 \cdot \left(1 + 0,063 \cdot \frac{18}{12}\right) = 3,5071 \text{ тис. доларів.}$$

Визначимо вид найбільш вигіднішого розміщення вкладу: подвійна конверсія **СКВ** → **грн.** → **грн.** → **СКВ** або пряме нарахування по валютній ставці простих та складних відсотків:

– при нарахуванні простих відсотків:

$$i_{d-1} = \frac{S_{v-1} - P_v}{P_v n} = \frac{3,7406 - 3,2}{3,2 \cdot \frac{18}{12}} = 0,1126,$$

$$i_{d-2} = \frac{S_{v-2} - P_v}{P_v n} = \frac{3,7212 - 3,2}{3,2 \cdot \frac{18}{12}} = 0,0278;$$

За умовою задачі, при нарахуванні простих відсотків доходність валютного депозиту 6,3%, доходність операцій з подвійною конверсією 11,26% та 2,78% відповідно. Отже, для першої операції вигідніша подвійна конверсія **СКВ → грн. → грн. → СКВ**, а для другої – доларовий депозит.

– при нарахуванні складних відсотків:

$$i_{d-1} = \frac{S_{v-1} - P_v}{P_v n} = \frac{3,7587 - 3,2}{3,2 \cdot \frac{18}{12}} = 0,11639,$$

$$i_{d-2} = \frac{S_{v-2} - P_v}{P_v n} = \frac{3,7392 - 3,2}{3,2 \cdot \frac{18}{12}} = 0,1123;$$

За умовою задачі, при нарахуванні складних відсотків доходність валютного депозиту 6,3%, доходність операцій з подвійною конверсією 11,64% та 11,23% відповідно. Отже, для обох операцій вигідніша подвійна конверсія **СКВ → грн. → грн. → СКВ**.

Передбачається розмістити $P_{\text{грн.}} = 4,3$ тисяч грн. на доларовому депозиті.

Проведемо розрахунок при нарахуванні простих відсотків:

– при подвійній конверсії **грн. → СКВ → СКВ → грн.**:

$$S_{ua-1} = P_{ua} \frac{K_1^{(1)}}{K_0} \left(1 + j \cdot \frac{m}{12}\right) = 4,3 \cdot \frac{26,87}{26,45} \left(1 + 0,063 \cdot \frac{18}{12}\right) = 4,7811 \text{ тис. грн.},$$

$$S_{ua-2} = P_{ua} \frac{K_1^{(2)}}{K_0} \left(1 + j \cdot \frac{m}{12}\right) = 4,3 \cdot \frac{27,01}{26,45} \left(1 + 0,063 \cdot \frac{18}{12}\right) = 4,8060 \text{ тис. грн.};$$

– при прямому нарахуванні по валютній ставці простих відсотків:

$$S_{ua} = P_{ua} \left(1 + i_{ua} \cdot \frac{m}{12}\right) = 4,3 \cdot \left(1 + 0,125 \cdot \frac{18}{12}\right) = 5,1063 \text{ тис. грн.}$$

Проведемо розрахунок при нарахуванні складних відсотків:

– при подвійній конверсії **грн. → СКВ → СКВ → грн.**:

$$S_{ua-1} = P_{ua} \frac{K_1^{(1)}}{K_0} (1 + j)^{\frac{m}{12}} = 4,3 \cdot \frac{26,87}{26,45} (1 + 0,063)^{\frac{18}{12}} = 4,7875 \text{ тис. грн.},$$

$$S_{ua-2} = P_{ua} \frac{K_1^{(2)}}{K_0} (1 + j)^{\frac{m}{12}} = 4,3 \cdot \frac{27,01}{26,45} (1 + 0,063)^{\frac{18}{12}} = 4,8125 \text{ тис. грн.};$$

– при прямому нарахуванні по валютній ставці складних відсотків:

$$S_{ua} = P_{ua} (1 + i_{ua})^{\frac{m}{12}} = 4,3 \cdot (1 + 0,125)^{\frac{18}{12}} = 5,1309 \text{ тис. грн.}$$

Визначимо вид найбільш вигіднішого розміщення вкладу: подвійна конверсія **грн.** → **СКВ** → **СКВ** → **грн.** або пряме нарахування по валютній ставці простих та складних відсотків:

– при нарахуванні простих відсотків:

$$i_{d_1} = \frac{S_{ua_1} - P_{ua}}{P_{ua}n} = \frac{4,7811 - 4,3}{4,3 \cdot \frac{18}{12}} = 0,07459,$$

$$i_{d_2} = \frac{S_{ua_2} - P_{ua}}{P_{ua}n} = \frac{4,8060 - 4,3}{4,3 \cdot \frac{18}{12}} = 0,07845;$$

За умовою задачі, при нарахуванні простих відсотків доходність гривневого депозиту 12,5%, доходність операцій з подвійною конверсією 7,46% та 7,85% відповідно. Отже, вигідніше розмістити гривневий депозит.

– при нарахуванні складних відсотків:

$$i_{d_1} = \frac{S_{v_1} - P_v}{P_v n} = \frac{3,7587 - 3,2}{3,2 \cdot \frac{18}{12}} = 0,07558,$$

$$i_{d_2} = \frac{S_{v_2} - P_v}{P_v n} = \frac{3,7392 - 3,2}{3,2 \cdot \frac{18}{12}} = 0,07945;$$

За умовою задачі, при нарахуванні простих відсотків доходність гривневого депозиту 12,5%, доходність операцій з подвійною конверсією 7,56% та 7,95% відповідно. Отже, вигідніше розмістити гривневий депозит.

Завдання №7 Розрахунок параметрів постійних рент

1) Розмір щорічних платежів 3246 грн., строк 5 років, проценти нараховуються по складній процентній ставці 12,5% річних. Знайти нарощену суму та сучасну вартість простих рент постнумерандо.

2) Знайти нарощену суму та сучасну вартість простих рент постнумерандо, якщо розмір щорічних платежів 3246 грн., строк 5 років, проценти нараховуються по складній процентній ставці 12,5% річних:

а) 4 рази на рік по ставці 3,125%;

б) 3 платежі на рік;

в) 4 рази на рік по ставці 3,125%, 3 платежі на рік.

3) Визначити розмір щорічних платежів в кінці року по складній процентній ставці 12,5% річних для накопичення через 5 років суми 41630 грн.

4) Визначити розмір щорічних платежів в кінці року по складній процентній ставці 12,5% річних для погашення впродовж 5 років боргу 41630 грн.

5) Розмір щорічних платежів – 3246 грн., складна процентна ставка – 12,5% річних, нарощена сума – 41630 грн. Визначити строки в днях ($T=360$) простих рент постнумерандо.

6) Розмір щорічних платежів – 3246 грн., складна процентна ставка – 12,5% річних, сучасна вартість – 4163 грн. Визначити строки в днях ($T=360$) простих рент постнумерандо.

7) Визначити під яку процентну ставку треба вносити щорічно 3246 грн., щоб через 5 років накопити суму 41630 грн. (для рент постнумерандо).

8) Визначити під яку процентну ставку треба вносити щорічно 3246 грн., щоб через 5 років погасити борг 4163 грн. (для рент постнумерандо).

Розв'язання.

1) Розмір щорічних платежів 3246 грн., строк 5 років, проценти нараховуються по складній процентній ставці 12,5% річних. Знайдемо нарощену суму простих рент постнумерандо:

$$S = R \frac{(1+i)^n - 1}{i} = 3246 \cdot \frac{(1+0,125)^5 - 1}{0,125} = 20827,18 \text{ грн.}$$

та сучасну вартість простих рент постнумерандо:

$$A = R \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} = 3246 \cdot \frac{1 - (1+0,125)^{-5}}{0,125} = 11557,60 \text{ грн.}$$

2) Знайдемо нарощену суму та сучасну вартість простих рент постнумерандо, якщо розмір щорічних платежів 3246 грн., строк 5 років, проценти нараховуються по складній процентній ставці 12,5% річних:

а) 4 рази на рік по ставці 3,125%:

$$S = R \frac{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mn} - 1}{i} = 3246 \cdot \frac{(1+0,03125)^{4 \cdot 5} - 1}{0,125} = 22084,69 \text{ грн.,}$$

$$A = R \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{-mn}}{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^m - 1} = 3246 \cdot \frac{1 - (1+0,03125)^{-4 \cdot 5}}{(1+0,03125)^4 - 1} = 11389,62 \text{ грн.};$$

б) 3 платежі на рік:

$$S = \frac{R}{p} \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1} = \frac{3246}{3} \cdot \frac{(1+0,125)^5 - 1}{(1+0,125)^{\frac{1}{3}} - 1} = 21672,27 \text{ грн.,}$$

$$A = \frac{R}{p} \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n}}{(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1} = \frac{3246}{3} \cdot \frac{1 - (1+0,03125)^{-5}}{\sqrt[3]{1+0,03125} - 1} = 12026,57 \text{ грн.};$$

в) 4 рази на рік по ставці 3,125%, 3 платежі на рік.

$$S = \frac{R}{p} \cdot \frac{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mn} - 1}{\frac{m}{p} - 1} = \frac{3246}{3} \cdot \frac{(1+0,03125)^{4 \cdot 5} - 1}{\frac{4}{3} - 1} = 21971,05 \text{ грн.},$$

$$A = \frac{R}{p} \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{-mn}}{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1} = \frac{3246}{3} \cdot \frac{1 - (1+0,03125)^{-4 \cdot 5}}{(1+0,03125)^{\frac{4}{3}} - 1} = 11873,30 \text{ грн..}$$

3) Визначимо розмір щорічних платежів в кінці року по складній процентній ставці 12,5% річних для накопичення через 5 років суми 41630 грн.:

$$R = \frac{S}{s_{n,i}} = \frac{Si}{(1+i)^n - 1} = \frac{41630 \cdot 0,125}{(1+0,125)^5 - 1} = 6488,204 \text{ грн.}$$

4) Визначимо розмір щорічних платежів в кінці року по складній процентній ставці 12,5% річних для погашення впродовж 5 років боргу 41630 грн.

$$R = \frac{A}{a_{n,i}} = \frac{Ai}{1 - (1+i)^{-n}} = \frac{41630 \cdot 0,125}{1 - (1+0,125)^{-5}} = 11691,95 \text{ грн.}$$

5) Розмір щорічних платежів – 3246 грн., складна процентна ставка – 12,5% річних, нарощена сума – 41630 грн. Визначимо строки в днях (T=360) простих рент постнумерандо.

$$n = \frac{\ln\left(\frac{S}{R}i + 1\right)}{\ln(1+i)} = \frac{\ln\left(\frac{41630}{3246} \cdot 0,125 + 1\right)}{\ln(1+0,125)} \cdot 360 = 2924 \text{ дні.}$$

6) Розмір щорічних платежів – 3246 грн., складна процентна ставка – 12,5% річних, сучасна вартість – 4163 грн. Визначимо строки в днях (T=360) простих рент постнумерандо.

$$n = \frac{-\ln\left(1 - \frac{A}{R}i\right)}{\ln(1+i)} = \frac{-\ln\left(1 - \frac{4163}{3246} \cdot 0,125\right)}{\ln(1+0,125)} \cdot 360 = 534 \text{ дні.}$$

7) Для визначення процентної ставки, під яку треба вносити щорічно 3246 грн., щоб через 5 років накопити суму 41630 грн. (для рент постнумерандо) необхідно розв'язати нелінійне рівняння:

$$41630 = 3246 \cdot \frac{(1+i)^5 - 1}{i}.$$

1 спосіб. Коренями будуть (Maple):

$$0.4848739136, -1.205126549 + 1.948468100 I, -3.074620816, \\ -1.205126549 - 1.948468100 I$$

Отже, $i = 0,48487$ або 48,49%.

2 спосіб. Згідно формулі $s_{n,i} = \frac{S}{R} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{41630}{3246} = 12,825.$

Визначимо $s_{n,i}$, для декількох довільних значень процентних ставок. Так для $i = 0,48$

$$s_{5;0,48} = \frac{(1+0,48)^5 - 1}{0,48} = 12,710.$$

Для $i = 0,49$

$$s_{5;0,49} = \frac{(1+0,49)^5 - 1}{0,49} = 12,947$$

Дійсне значення процентної ставки лежить в інтервалі $0,48 < i < 0,49$, так як $12,710 < 12,825 < 12,947$.

Знайдемо дійсне значення процентної ставки:

$$i = 0,48 + \frac{12,825 - 12,710}{12,947 - 12,710}(0,49 - 0,48) = 0,485.$$

Перевіримо правильність знаходження дійсної процентної ставки:

$$\frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{(1+0,485)^5 - 1}{0,485} = 12,825$$

Таким чином, процентна ставка повинна складати $i = 48,5\%$.

8) Для визначення процентної ставки, під яку треба вносити щорічно 3246 грн., щоб через 5 років погасити борг 4163 грн. (для рент постнумерандо) необхідно розв'язати нелінійне рівняння:

$$4163 = 3246 \cdot \frac{1 - (1+i)^{-5}}{i}.$$

1 спосіб. Коренями будуть (Maple):

$$0.7293089013, -0.8164538516 + 0.8260407451 I, -1.658337520 + 0.4430532736 I, \\ -1.658337520 - 0.4430532736 I, -0.8164538516 - 0.8260407451 I$$

Отже, $i = 0,7293$ або 72,93%.

2 спосіб. Згідно формулі $a_{n,i} = \frac{A}{R} = \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} = \frac{4163}{3246} = 1,2825$.

Визначимо $a_{n,i}$, для декількох довільних значень процентних ставок. Так для $i = 0,74$

$$a_{5;0,74} = \frac{1 - (1 + 0,74)^{-5}}{0,74} = 1,267.$$

Для $i = 0,72$

$$a_{5;0,72} = \frac{1 - (1 + 0,72)^{-5}}{0,72} = 1,297$$

Дійсне значення процентної ставки лежить в інтервалі $0,72 < i < 0,74$, так як $1,267 < 1,2825 < 1,297$.

Знайдемо дійсне значення процентної ставки:

$$i = 0,72 + \frac{1,2825 - 1,267}{1,297 - 1,267} (0,74 - 0,72) = 0,7306.$$

Перевіримо правильність знаходження дійсної процентної ставки:

$$\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} = \frac{1 - (1 + 0,7306)^{-5} - 1}{0,7306} = 1,2806$$

Таким чином, процентна ставка повинна складати $i = 73,06\%$.