О.В. Козьменко, О.В. Кузьменко

АКТУАРНІ РОЗРАХУНКИ

Навчальний посібник

Суми
Ділові перспективи
2011

УДК

Рекомендовано до друку вченою радою Державного вищого навчального закладу «Українська академія банківської справи Національного банку України», протокол №___від____________.

Рецензенти:
д-р екон. наук, проф., зав. кафедрою
Гаманкова

д-р екон. наук, проф., зав. кафедрою

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

В сучасних умовах розвитку економіки ефективність функціонування суб'єктів господарювання в цілому та страхових і перестрахових компаній зокрема обумовлена тактичними і стратегічними напрямками їх діяльності, обґрунтованістю прийнятих управлінських рішень та рівнем узгодженості взаємовідносин суб'єктів страхового і перестрахового ринків в межах існуючого конкурентного середовища.

Базовим інструментом забезпечення дієвості зазначених заходів виступає використання системи статистичних і економіко-математичних методів розрахунку тарифних ставок та ідентифікація основних аспектів фінансових взаємовідносин страховика і страхувальника, що пропонується у даному навчальному посібнику.

У навчальному посібнику «Актуарні розрахунки» висвітлюються основні положення страхування та ризикології, деякі підходи теорії ймовірностей і математичної статистики з метою аналізу економічних процесів. Видання адресоване студентам п'ятого курсу вищих учбових закладів економічних та соціальних напрямків. Зміст навчального посібника відповідає вимогам «Освітньо-професійної програми підготовки спеціаліста напрямку 0501 – «Економіка і підприємництво» Галузевого стандарту вищої освіти (Київ 2002).

Книга складається з передмови авторів, змісту, 11 тем, додатків, що містять усі необхідні статистичні таблиці, статистичну звітність, предметний покажчик, який дозволяє зручно працювати з підручником, і формули. Структура кожної теми залишається незмінною. Вона включає в себе: анотацію, зміст, множину прикладів, пов'язаних з практичною діяльністю страхових компаній, деякі необхідні з точки зору авторів питання теорії імовірностей, математичної статистики та математичного аналізу. В завершенні кожної теми містяться практичні завдання, тести та контрольні запитання.

Основною задачею авторів було висвітлення питань, пов'язаних з виявленням та кількісною оцінкою ризиків в межах страхової сукупності; визначенням статистичних показників страхової діяльності (імовірності настання страхового випадку, обсягів збитків та ін..), дослідженням порядку та джерел формування резервних фондів, вивченням залежностей між розміром брутто-ставки та параметрів її формування; розкриттям існуючих підходів (статичних та динамічних) до ідентифікації фінансового стану страховиків; дослідженням особливостей перестрахування. У запропонованому навчальному посібнику подаються основи актуарних розрахунків із додатком математичних методів. Автори намагались, виходячи з педагогічного досвіду, зробити зручним цей підручник для студентів економічних вузів 4-го рівня акредитації.

Даний навчальний посібник корисний, в першу чергу спеціалістам-практикам в галузі страхування, студентам економічних спеціальностей, викладачам та аспірантам вищих навчальних закладів, які займаються вивченням на теоретичному рівні та дослідженням практичних рекомендацій в розрізі використання математичного та статистичного апарату для розрахунків та аналізу тарифних ставок у страхуванні. Книга відрізняється значним опрацюванням матеріалу, висвітленого на досить простому рівні. Даний навчальний посібник може бути використаний для повторення пройденого матеріалу та для початкового знайомства тих, хто починає вивчати теорію страхування та особливості застосування її основних концепцій та методик з використанням елементів математичного апарату.

Автори навчального посібника – професор кафедри економічної кібернетики, д.е.н. Козьменко Ольга Володимирівна та доцент кафедри економічної кібернетики, к.е.н. Кузьменко Ольга Віталіївна, які працюють у Вищому державному навчальному закладі «Українська академія банківської справи Національного банку України».

Автори даного навчального посібника звертаються до читача з проханням надати свої пропозиції та рекомендації з метою покращення структури, складу та змісту. Створюючи навчальний посібник, авторський колектив намагалися побудувати структуру, викласти зміст та навести приклади практичного характеру таким чином, щоб надана інформація викликала інтерес і легко сприймалась читачами. Одним з головних напрямків роботи авторів є максимально можлива економічна інтерпретація тих підходів та методик, які викладені у підручнику.

Тема 1. СУТНІСТЬ АКТУАРНИХ РОЗРАХУНКІВ. ТАРИФНА СТАВКА ТА СТРАХОВА СТАТИСТИКА

1. ІСТОРІЯ ВИНИКНЕННЯ АКТУАРНИХ РОЗРАХУНКІВ

   Етимологія поняття «актуарій». Завдання актуарних служб

2. ЗАДАЧІ ТА КЛАСИФІКАЦІЯ АКТУАРНИХ РОЗРАХУНКІВ

   Основні визначення. Страхова калькуляція. Класифікація актуарних розрахунків

3. СТРУКТУРА ТАРИФНОЇ СТАВКИ. СТРАХОВИЙ ВНЕСОК

   Тарифна ставка та її структура. Витрати на ведення страхової справи. Страховий внесок (страхова премія). Поділ страхового внеску за призначенням, за характером ризиків, за формою сплати, за часом сплати, за відображення у блансі страховика

4. ПОКАЗНИКИ СТРАХОВОЇ СТАТИСТИКИ

   Страхова статистика як аналіз певних показників. Визначення розрахункових показників

1. ІСТОРІЯ ВИНИКНЕННЯ АКТУАРНИХ РОЗРАХУНКІВ

Історія страхування в цілому нараховує щонайменше 2000 років. Однак воно могло одержати широкий розвиток лише з початком застосування основних положень математичної теорії ймовірностей і нагромадження досить надійних статистичних даних. З появою цих передумов відкрилася можливість розробки техніки страхових розрахунків по довгостроковим і короткостроковим операціям страхування життя і майна, чи, як їх коротше називають, актуарних розрахунків.

Слово «*актуарій*» походить від латинського «*actuarius*», що спочатку означало службовця відділу запису актів громадянського стану. Пізніше воно закріпилося за визначеною професійною групою працівників страхової системи.

Основи теорії актуарних розрахунків були закладені у XVII ст. роботами Д. Граунта, Яна де Вітта, Є. Галлея. Розвитку актуарної техніки сприяло відкриття 1762 р. у Лондоні страхового товариства «Еквітебл». На противагу раніше діючим страховим товариствам, «Еквітебл» запровадив у страхуванні на випадок смерті диференційовані по вікових групах тарифи страхових платежів, побудовані на основі таблиць смертності. На основі прикладу товариства «Еквітебл» почали діяти інші страхові товариства спочатку в Англії, а потім і в інших країнах.

Широкий розвиток страхування отримало, починаючи із середини XIX ст. Із розширенням кола проблем, які стали предметом актуарних розрахунків та представляли інтерес для всіх страхових компаній у 1889 р. була створена Міжнародна асоціація актуаріїв (IAA). У 1895 р. під її керівництвом у Брюсселі відбувся І Міжнародний конгрес актуаріїв.

Міжнародні конгреси актуаріїв (ICA) – одна з найважливих подій у галузі страхової науки. Вони проводяться раз у три-чотири роки. До їх функцій входить обмін провідним досвідом у галузі актуарної теорії, уніфікація методів актуарних розрахунків і актуарної символіки (останній варіант такої символіки був прийнятий на XIV конгресі, що відбувся у Мадриді у 1954 р.).

Завдання актуарних служб – розробка комплексу спеціальних економіко-математичних методів калькулювання тарифних ставок і внесків із усіх видів особового та майнового страхування, визначення нормативів у галузі перестрахування, організація оптимальної інвестиційної політики за рахунок фондів особового і пенсійного страхування тощо.

Зараз у промислово розвинених країнах актуарії працюють у компаніях зі страхування життя, у компаніях, які займаються майновим страхуванням, у пенсійних фондах, у перестрахувальних товариствах та в органах страхового нагляду.

Важливу роль вірігрaє актуарна служба в діяльності перестрахувальних компаній. Як відомо, *перестрахування* – це така система економічних відносин, при якій страховик, приймаючи на страхування ризики, частину відповідальності за ними передає іншим страховикам з метою створення збалансованого портфеля договорів страхування та забезпечення фінансової стійкості страхових операцій.

Конкретний обсяг відповідальності, переданий страховою компанією іншому страховику (перестрахувальникові), обумовлюється її фінансовими можливостями.

На актуаріях перестрахувальної компанії лежить відповідальність за проведення ефективної перестрахувальної політики. Складність цього завдання обумовлюється певною суперечливістю самого процесу перестрахування. Перестрахування супроводжується передачею перестрахувальникові частини внесків, які надійшли, що – до страхової компанії погіршує фінансово-економічні результати її діяльності.

Ще однією важливою ділянкою діяльності актуаріїв є *служба державного страхового нагляду*, яка видає дозволи на створення нових страхових компаній. При цьому актуарії аналізують статут і інші документи по створенню компанії, калькуляційні відомості з розрахунку тарифів. У ряді випадків, наприклад, внаслідок недостатнього валютного забезпечення передбачуваних страхових операцій, який визначається на основі теорії страхового ризику Готендорфа-Пероццо, актуарна служба органу страхового нагляду може не дати дозвіл на створення страхової компанії.

Актуарні служби страхового нагляду роблять висновок про можливість надання існуючій компанії права займатися новими видами страхування, територіального розширення проведених страхових операцій, зміни умов страхування, а також зміни розмірів тарифних ставок.

2. ЗАДАЧІ ТА КЛАСИФІКАЦІЯ АКТУАРНИХ РОЗРАХУНКІВ

Актуарні розрахунки — система математичних і статистичних закономірностей, яка регламентує взаємовідносини між страховиком та страхувальником.

Під час здійснення актуарних розрахунків визначають витрати, необхідні для страхування певного об'єкта, та собівартість і вартість послуги, яку надає страховик страхувальнику. За допомогою актуарних розрахунків визначають частку участі кожного страхувальника у створенні страхового фонду, тобто визначають розміри тарифних ставок.

Мета актуарних розрахунків	формування системи фундаментальних знань щодо сутності, побудови та аналізу математичних моделей і методів, що регламентують відносини між страховиками і страхувальниками.
Предмет актуарних розрахунків	економіко-математичні моделі розрахунків страхових премій, запасів та резервів, динаміки фінансового стану страхових компаній.
Страховик	страхова компанія, тобто юридична особа, яка здійснює страхування і приймає на себе зобов'язання відшкодувати збитки або виплатити страхову суму при настанні певних страхових випадків.
Страхувальник	страхує свої майнові інтереси, може бути як юридичною, так і фізичною особою.
Застрахований	фізична особа, життя та здоров'я якого виступають об'єктом страхового захисту, яка може бути одночасно і страхувальником.

Форма, в якій розраховуються витрати на проведення певного випадку страхування, називають *страховою (актуарною) калькуляцією.*

Актуарна калькуляція допомагає визначати страхові платежі по конкретному договору страхування.

Основними задачами актуарних розрахунків є:

- дослідження та групування ризиків у межах страхової сукупності, тобто наукова класифікація ризиків з метою створення гомогенної підсукупності в межах загальної страхової сукупності;
- обчислення математичної ймовірності настання страхового випадку, визначення частоти та ступеня тяжкості його наслідків як в окремих ризикових групах, так і в цілому по страховій сукупності;
- математичне обґрунтування необхідних витрат на ведення справи страховиком та прогнозування тенденцій їхнього розвитку;
- математичне обґрунтування розміру необхідних резервних фондів страховика, пропозиції щодо конкретних методів і джерел їхнього формування.

Актуарні розрахунки класифікують за такими ознаками: галузь страхування, час проведення, ієрархічна рівність (рис. 1.1).

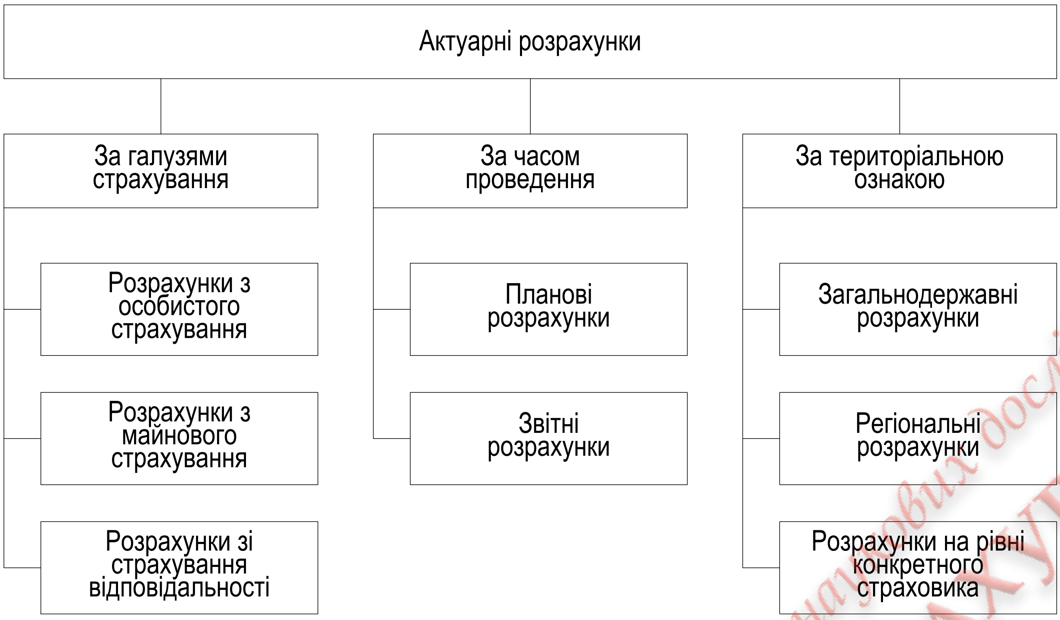


Рис. 1.1. Класифікація актуарних розрахунків

3. СТРУКТУРА ТАРИФНОЇ СТАВКИ. СТРАХОВИЙ ВНЕСОК

Тарифна ставка ціна страхового ризику та інших витрат; адекватне грошове вираження зобов'язань страховика з укладеного договору страхування.

Тарифна ставка, за якою укладають договір страхування, називається *брутто-ставкою.* Брутто-ставка складається з двох частин: *нетто-ставки* та *навантаження.* Нетто-ставка виражає ціну страхового ризику: пожежі, повені, вибуху тощо. Навантаження покриває витрати страховика з організації та проведення страхової справи, враховує відрахування в резервні фонди, містить елементи прибутку. В основу побудови нетто-ставки за будь-яким видом страхування покладено ймовірність настання страхової події.

Ймовірністю події A – позначається $P(A)$ – називається відношення кількості позитивних для нього випадків M до загальної кількості усіх рівно можливих випадків N. Оскільки ймовірність події виражається правильним дробом, тобто тим, в якому чисельник менший знаменника (M завжди менше або дорівнює N), зрозуміло, що $0 < P(A) < 1$. Якщо $P(A)$ дорівнює 0, то подія A вважається неможливою. Якщо воно дорівнює 1, то це – достовірна подія.

Отже, ймовірність події знаходиться в межах від 0 до 1. Якщо вона досягає своїх крайніх меж, то страхування на випадок настання цієї події проводитися не може. Страхові відносини укладають лише тоді, коли завчасно невідомо, відбудеться у цьому періоді та чи інша подія чи ні, тобто має місце випадок.

Сума страхового відшкодування, яку виплачують потерпілим об'єктам у переважній більшості випадків, відрізняється від страхової суми за ними.

$$T_n = P(A) \cdot K \cdot 100, \qquad (1.1)$$

де T_n – тарифна нетто-ставка;

$P(A)$ – ймовірність страхової події;

A – страховий випадок;

K – показник співвідношення середньої виплати до середньої страхової суми на один договір страхування.

Наведена формула (1.1) дає змогу розмежувати поняття «ймовірність страхової події» і «ймовірність збитку». Ймовірністю збитку називається добуток ймовірності страхової події *P(A)* на коефіцієнт *K*.

Подамо формулу для розрахунку нетто-ставки зі 100 грн страхової суми в розгорнутому вигляді

$$P(A) = \frac{M}{N} = \frac{K_B}{K_Д};\ K = \frac{C_B}{C_C}, \qquad (1.2)$$

де K_B – кількість виплат за той чи інший період (за рік);

$K_Д$ – кількість укладених договорів страхування у цьому періоді (році);

C_B – середня виплата на один договір;

C_C – середня страхова сума на один договір.

У результаті формула для розрахунку нетто-ставки зі 100 грн страхової суми набуває вигляду

$$T = \frac{K_B \cdot C_B}{K_Д \cdot C_B} \cdot 100 \text{ або } T = \frac{B}{C} \cdot 100, \qquad (1.3)$$

де B – загальна сума виплат страхового відшкодування;

C – загальна страхова сума застрахованих об'єктів.

Відношення кількості виплат (K_B) до кількості укладених договорів ($K_Д$) визначає частоту страхових подій (частоту страхових випадків).

Відношення середньої виплати на один договір (C_B) до середньої страхової суми на один договір (C_C) є аналогом показника співвідношення середньої виплати до середньої страхової суми на один договір страхування у формулі для розрахунку нетто-ставки зі 100 грн страхової суми.

Дані розрахунки проводятся як за видами страхування у цілому, так і за окремими страховими ризиками. За цими даними визначають розмір нетто-ставки. Після його розрахунку визначають розмір сукупної тарифної ставки або брутто-ставки. Для обчислення розміру брутто-ставки до нетто-ставки додають навантаження.

Витрати на ведення справи зазвичай розраховують на 100 грн страхової суми (аналогічно до нетто-ставки), інші навантаження визначають у відсотках до брутто-ставки. Розмір сукупної брутто-ставки розраховують за формулою

$$T_b = T_n + F_{abc}, \tag{1.4}$$

де T_b – брутто-ставка;
T_n – нетто-ставка;
F_{abc} – навантаження.

Величини T_b, T_n, F_{abc} подають в абсолютному розмірі, тобто в гривнях зі 100 грн страхової суми. Оскільки багато статей навантаження визначають у відсотках до брутто-ставки, то її на практиці визначають за формулою

$$T_b = T_n + F_{abc} = T_n + F_{abc} + F_{k/z} \cdot T_b, \tag{1.5}$$

де F_{abc} – навантаження, передбачене у тарифі у гривнях зі 100 грн страхової суми;

$F_{k/z}$ – частка навантаження, яка закладається у тариф у відсотках до брутто-ставки.

Звідси після нескладних перетворень маємо

$$T_b = \frac{(T_n + F'_{abc})}{(1 - F_{k/z})}. \tag{1.6}$$

Якщо всі елементи навантаження визначені у відсотках до брутто-ставки, то величина $F'_{abc} = 0$. У цьому випадку формула спрощується та набуває вигляду

$$T_b = \frac{T_n}{(1 - F_{k/z})}. \tag{1.7}$$

Головний елемент навантаження – *витрати на ведення справи.* До них належать витрати, пов'язані з укладанням та обслуговуванням договору страхування.

У страховій практиці розрізняють витрати на ведення справи внутрішньою службою страхової організації та витрати на ведення справи зовнішньою мережею страхової організації.

Виділяють також постійні та змінні витрати на ведення справи страховиком.

Змінні витрати на ведення справи відносять на окреме страхування (вид страхування, окремий страховий поліс). *Постійні витрати* розподіляють на весь портфель укладених договорів страхування.

Складаючи страхові тарифи, треба брати до уваги той факт, що страховими внесками треба покривати не тільки страхові суми і відшкодування, а й витрати на утримання страхової організації. З огляду на це, витрати на ведення справи можна класифікувати таким чином: *аквізиційні, інкасаційні, ліквідаційні, організаційні, управлінські.*

Аквізиційні витрати	виробничі витрати страхової організації, пов'язані із залученням нових страхувальників та укладанням нових договорів страхування за посередництвом страхових агентів.
Інкасаційні витрати	витрати, пов'язані з обслуговуванням готівкового обороту надходження страхових платежів. Це витрати на виготовлення бланків квитанцій про прийом страхових платежів та облікових реєстрів (відомостей, довідок тощо).
Ліквідаційні витрати	витрати з ліквідації збитків, нанесених страховою подією (заробітна плата осіб, які займаються ліквідацією збитків, судові витрати, поштово-телеграфні витрати і витрати, пов'язані з виплатою страхового відшкодування).
Організаційні витрати	пов'язані із заснуванням страхової компанії. Їх відносять до активів страховика, бо вони є інвестиціями.
Управлінські витрати	поділяють на загальні витрати управління та витрати управління майном.

Страховий внесок, або страхову премію, можна розглядати з економічної, юридичної та математичної точки зору.

Економічна сутність страхового внеску виявляється в тому, що він є частиною національного доходу, яку виділяє страхувальник з метою гарантування його інтересів від впливу негативних подій.

З юридичного погляду страховий внесок можна визначити як грошовий вираз страхового зобов'язання, обумовленого та підтвердженого шляхом укладання договору страхування між його учасниками.

У математичному розумінні страховий внесок – це платіж страхувальника страховику, який періодично повторюється.

Якщо прийняти загальний розмір зобов’язань страховика зі страхування життя за *B*, вартість однієї ренти – A_x x – вік особи, яка сплачує страховий внесок P_x, то отримаємо, що $P_x = \dfrac{B}{A_x}$ (в тому випадку, якщо страховий внесок сплачується пожиттєво), або $P_x = \dfrac{B}{L_t A_x}$ (у тому випадку, якщо страхові внески мають строковий характер), де $L_t A_x$ виражає вартість однієї термінової ренти.

Наведені формули свідчать про те, що страховий внесок у математичному розумінні може бути виражений тільки як середня величина, тобто як частина, що припадає на один поліс страхового портфеля від усіх зобов’язань страховика.

У майновому страхуванні страховий внесок можна розглядати як середню величину, отриману як відношення між загальною прогнозною величиною платежів страхувальника $\sum Q$ за певний період і загальною кількістю застрахованих об’єктів *n*, тобто $\dfrac{\sum Q}{n}$.

За своїм призначенням страховий внесок поділяють *на ризикову премію, накопичуваний внесок, нетто-премію, достатній внесок, брутто-премію.*

Ризикова премія (чиста нетто-премія)	частина страхового внеску у грошовій формі, призначеного для покриття ризику.

Величина ризикової премії залежить від ймовірності настання страхового випадку. Ризиковий внесок можна розглядати як функцію, похідну від імовірності реалізації ризику в часі та просторі.

Накопичуваний внесок	призначений для покриття платежів страхування у разі закінчення терміну страхування.

Під час дії договору страхування розмір накопичувального внеску змінюється.

Нетто-премія	частина страхового внеску, яка потрібна для покриття страхових платежів за певний проміжок часу за певним видом страхування.

Величина нетто-премії прямо залежить від розвитку ризику. Нетто-премія дорівнюватиме ризиковій премії у випадках, якщо простежується планомірний розвиток ризику.

Нетто-премія в майновому та особовому (особистому) страхуванні має різну структуру, зумовлену характером видів страхування та їхнім призначенням. Нетто-премія майнового страхування складається з ризикової премії та стабілізаційного навантаження (надбавки). У актуарних розрахунках особистого страхування нетто-премія складається з ризикової премії та накопичувального внеску. Інколи до них додають стабілізаційне навантаження (надбавки).

Достатній внесок	дорівнює сумі нетто-премії та навантаження, віднесених до витрат страховика.

Достатній внесок можна розглядати як брутто-премію або тарифну ставку.

Брутто-премія	тарифна ставка страховика.

Брутто-премія складається з достатнього внеску та надбавок на покриття витрат, пов'язаних із проведенням попереджувальних заходів, реклами, витрат на покриття збиткових видів страхування тощо. Кожний елемент, введений до брутто-премії, призводить до збільшення всієї тарифної ставки (страхового тарифу).

За характером ризиків страхові внески поділяють на *натуральні* та *постійні* премії.

Натуральна премія	премія, призначена для покриття ризику за певний проміжок часу.

Натуральна премія відповідає фактичному розвитку ризику. Вона в певний період дорівнює ризиковій премії. З часом натуральна премія змінюється. За різними видами страхування вона виражається різними ставками. У договорах страхування, розрахованих на тривалий час, ризикова премія не залишається незмінною. Вона повторює щорічні зміни ризику.

Постійні (фіксовані) внески	страхові внески, які з часом не змінюються, а залишаються постійними.

За формою сплати страхові внески поділяють на *одночасні, поточні* та *річні.*

Одночасний внесок	страхова премія, яку страхувальник сплачує страховику за весь період страхування наперед.

Суму одночасного внеску визначають до моменту укладання договору страхування.

Поточний внесок	частина від загальних зобов'язань страхувальника стосовно страховика, тобто частина одночасного внеску.

Сума поточних внесків за цим видом страхування буде більшою одночасного внеску.

Річний внесок (премія)	Одночасний страховий внесок, що зазвичай вносять за договором, який має річний термін дії.

За часом сплати страхові внески поділяють на *авансові платежі* та *попередню премію.*

Авансові платежі	платежі, які страхувальник сплачує страховикові завчасно – до настання терміну їхньої сплати, зазначеного в укладеній угоді. Авансові платежі зазвичай вносять за весь термін дії договору.
Попередня премія	платіж, унесений страхувальником до настання терміну сплати.

Залежно від того, як страхові внески відображаються у балансі страховика, вони поділяються на *перехідні платежі, ефективну премію* та *результативну премію.*

Страхові угоди досить часто укладаються на один рік або кілька років. Здебільшого простежується незбігання календарного та страхового року. У випадку, коли річний страховий внесок сплачують у поточному календарному році, але відносять на період, який охоплює наступний календарний рік, треба провести розподіл страхової премії. У цьому випадку застосовують поняття перехідного платежу.

Перехідні платежі	частина страхової премії, яка розподілена на наступний календарний рік.
Ефективна премія	сума результативної премії та перехідних платежів, зарезервованих у поточному році та перенесених на наступний рік. Це вся сума поточних страхових платежів, якими володіє страховик у поточному році.
Результативна премія	це різниця між річною нетто-премією та перехідними платежами поточного року, які віднесено на наступний рік.

Величина результативної премії при інших рівних умовах залежить від періодичності сплати страхових платежів.

4. ПОКАЗНИКИ СТРАХОВОЇ СТАТИСТИКИ

У практиці актуарних розрахунків широко використовують страхову статистику – систематизоване вивчення та узагальнення наймасовіших і типових страхових операцій на основі вироблених статистичною наукою методів обробки узагальнених підсумкових натуральних і вартісних показників, які характеризують страхову справу. Усі показники, які підлягають статистичному вивченню, поділяються на дві групи. Перша група відображає процес формування страхового фонду, друга – його використання.

Страхову статистику можна звести до аналізу таких показників:

- кількість об'єктів страхування – n;
- кількість страхових подій – e;
- кількість об'єктів, які постраждали в результаті страхових подій – m;
- сума зібраних страхових платежів –$\sum p$;
- сума виплаченого страхового відшкодування –$\sum Q$;
- страхова сума для будь-якого об'єкта страхування –$\sum S_n$;
- страхова сума, що припадає на пошкоджений об'єкт сукупності, який досліджують –$\sum S_m$.

Розрахункові показники страхової статистики такі.

Частота страхових подій	дорівнює співвідношенню між кількістю страхових подій та кількістю застрахованих об'єктів, тобто частота страхових подій засвідчує, скільки страхових випадків припадає на один об'єкт страхування. Наведене співвідношення можна представити і кількісно – як величину, меншу одиниці, Це означає, що одна страхова подія може спричинити кілька страхових випадків. Звідси випливає термінологічна відмінність між поняттями страховий випадок і страхова подія. Страховою подією може бути град, ураган тощо, які охоплюють своїм шкідливим впливом численні об'єкти страхування.
Спустошеність страхової події (коефіцієнт кумуляції ризику)	відношення кількості об'єктів страхування, які постраждали до кількості страхових подій, тобто – $\frac{m}{n}$. Коефіцієнт кумуляції ризику засвідчує, скільки страхових випадків настане. Мінімальний коефіцієнт кумуляції ризику дорівнює одиниці.
Коефіцієнт (ступінь) збитковості	виражає співвідношення між сумою виплаченого страхового відшкодування і страховою сумою всіх об'єктів, що постраждали, тобто $\frac{\sum Q}{\sum S_m}$. Цей показник

менший або дорівнює одиниці. Зворотню ситуацію можна вважати неможливою, оскільки вона означає можливість знищення всіх застрахованих об’єктів більше, ніж один раз.

Середня страхова сума на один об’єкт (договір) страхування – відношення загальної страхової суми всіх об’єктів страхування до кількості всіх об’єктів страхування, тобто $\frac{\sum S_n}{n}$.

Середня страхова сума на один об’єкт, який постраждав – дорівнює страховій сумі всіх об’єктів, що постраждали, поділеній на кількість цих об’єктів, тобто $\frac{\sum S_n}{m}$.

Збитковість страхової суми – дорівнює сумі виплаченого страхового відшкодування, поділеній на страхову суму всіх об’єктів страхування, тобто $\frac{\sum Q}{\sum S_n}$.

Норма збитковості – це співвідношення суми виплаченого страхового відшкодування до суми зібраних страхових платежів, виражене в процентах, тобто $\frac{\sum Q}{\sum P} \cdot 100$.

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. Охарактеризуйте походження слова «актуарій».
2. У чому полягає головне завданням актуарних служб?
3. Дайте визначення поняття актуарних розрахунків.
4. Назовіть основні задачі актуарних розрахунків.
5. За якими критеріями здійснюється класифікація актуарних розрахунків?
6. Дайте визначення поняття тарифна ставка.
7. Складові тарифної ставки.
8. Формули розрахунку нетто- та брутто-ставок.
9. Види витрат на ведення страхової справи.
10. У чому полягає економічний, математичний та юридичний зміст страхового внеску.
11. Складові страхового внеску.
12. Охарактеризуйте основні показники страхової статистики.
13. Групи показників страхової статистики.
14. Наведіть формули розрахунку показників страхової статистики.

ТЕСТИ

1.Завдання актуарних служб страхових компаній полягає у:

а) розробці комплексу спеціальних економіко-математичних методів калькулювання системи тарифних ставок і резервів внесків із усіх видів особового та майнового страхування;
б) визначенні системи нормативів у галузі перестрахування;
в) організації оптимальної інвестиційної політики за рахунок коштів фондів особового і пенсійного страхування.

2. Які відповіді визначають витрати на ведення страхової справи – аквізиційні, інкасаційні, ліквідаційні, організаційні?

а) пов’язані із заснуванням страхового товариства;
б) витрати, пов’язані з обслуговуванням готівкового обороту надходження страхових платежів;
в) виробничі витрати страхової організації, пов’язані із залученням нових страхувальників та укладанням нових договорів страхування за посередництвом страхових агентів;
г) витрати з ліквідації збитків, нанесених страховою подією.

3. Які відповіді визначають актуарні розрахуки, їх мету і предмет?

а) формування системи фундаментальних знань щодо сутності, побудови та аналізу математичних моделей і методів, що регламентують відносини між страховиками і страхувальниками;
б) система математичних і статистичних закономірностей, яка регламентує визначення витрат, необхідних на страхування певного об’єкта, та собівартість і вартість послуги, яку надає страховик страхувальникові;
в) економіки-математичні моделі розрахунків страхових премій, запасів та резервів, динаміки фінансового стану страхових компаній.

4. Різниця між річною нетто-премією та перехідними платежами поточного року, які віднесено на наступний рік – це:

а) ризикова премія;
б) накопичуваний внесок;
в) нетто-премія;
г) достатній внесок;
д) брутто-премія;
е) натуральна премія;
ж) попередня премія;

з) авансовий платіж;
и) результативна премія.

5. Формула $T_n = P(A) \cdot K \cdot 100$ дає можливість обрахувати:
   а) ймовірність страхової події;
   б) тарифну брутто-ставку;
   в) навантаження;
   г) тарифну нетто-ставку.

6. У формулі для розрахунку нетто-ставки зі 100 грн страхової суми співвідношення $K_В$ / $K_Д$
   а) визначає частоту страхових подій (частоту страхових випадків);
   б) є аналогом коефіцієнта співвідношення середньої виплати до середньої страхової суми на один договір страхування;
   в) є аналогом коефіцієнта співвідношення середньої виплати до частоти страхових подій на один договір страхування.

7. Тарифна ставка – це:
   а) форма, в якій розраховуються витрати на проведення певного страхування;
   б) ціна страхового ризику та інших витрат, адекватне грошове вираження зобов'язань страховика з укладеного договору страхування;
   в) математичне обґрунтування необхідних витрат на ведення справи страховиком та прогнозування тенденцій їхнього розвитку.

8. До абсолютних показників страхової статистики можна віднести:
   а) кількість об'єктів страхування;
   б) кількість страхових подій;
   в) кількість об'єктів, які постраждали в результаті страхових подій;
   г) частота страхових подій;
   д) страхова сума, що припадає на пошкоджений об'єкт сукупності, яку досліджують;
   е) спустошеність страхової події (коефіцієнт кумуляції ризику);
   ж) коефіцієнт (ступінь) збитковості;
   з) середня страхова сума на один об'єкт (договір) страхування;
   и) норма збитковості.

9. Актуарні розрахунки класифікують за галуззю страхування на:
   а) розрахунки з особистого страхування;

б) звітні розрахунки;
в) розрахунки з майнового страхування;
г) регіональні розрахунки;
д) розрахунки зі страхування відповідальності;
е) планові розрахунки.

10.Частина страхового внеску, яка потрібна для покриття страхових платежів за певний проміжок часу за певним видом страхування – це:
а) ризикова премія;
б) накопичуваний внесок;
в) нетто-премія;
г) достатній внесок;
д) брутто-премія;
е) натуральна премія;
ж) попередня премія;
з) авансовий платіж;
и) результативна премія.

Тема 2. ІНСТРУМЕНТАРІЙ АКТУАРНИХ РОЗРАХУНКІВ

1. ЕФЕКТИВНА ВІДСОТКОВА СТАВКА

   Поняття ефективної відсоткової ставки. Дохід від інвестування. Нарощена (накопичена) сума

2. СХЕМА ПРОСТИХ ВІДСОТКІВ

   Сумарниий дохід. Накопичена сума. Підсумкова відсоткова ставка. Формула простих відсотків

3. СХЕМА СКЛАДНИХ ВІДСОТКІВ

   Формула складних відсотків

4. ЕФЕКТИВНА ВІДСОТКОВА СТАВКА НА ЧАСТКОВОМУ ЧАСОВОМУ ПРОМІЖКУ

   Поняття ефективної відсоткової ставки на частковому часовому проміжку. Процеси нагромадження

5. НОМІНАЛЬНА ВІДСОТКОВА СТАВКА

   Поняття номінальної відсоткової ставки. Період нарахування відсотків (період оберту, період конвертації)

6. ІНТЕНСИВНІСТЬ ВІДСОТКІВ

   Поняття інтенсивності відсотків (сила росту, сила відсотку)

1. ЕФЕКТИВНА ВІДСОТКОВА СТАВКА

У страхових операціях премії і страхові виплати пов'язуються з конкретними моментами чи періодами часу. У договорах страхування фіксуються терміни, дати, періодичності виплат. Необхідність обліку часового фактора очевидна – ясно, що отримані страховою компанією у вигляді премій суми якийсь час «працюють» (суми «накопичуються»), і страховий тариф повинен визначатися з урахуванням цієї «роботи». Наша мета – розгляд механізмів нарощення отриманих страхових сум.

Почнемо з найважливішого параметру фінансових обчислень – *ефективної відсоткової ставки.*

Нехай у момент часу t сума S інвестується в якийсь проект, що завершується через час h, приносячи дохід ΔS. Звичайно його вимірюють у відносних одиницях, розглядаючи відношення $i = \Delta S / S$, що називається *ефективною відсотковою ставкою* за розглянутий проміжок часу. «Ефективна» у цьому контексті означає «реальна», «фактична». Як правило, ця характеристика опускається, і параметр i називають відсотковою ставкою. Крім того, i називають також ставкою інвестиційного доходу або нормою прибутковості.

Час h називають періодом *нарахування (нагромадження, нарощення).* У страхових операціях це, як правило, один рік, однак, використовують й інші тимчасові проміжки – півріччя, квартал, місяць і навіть день.

Повертаючись до розглянутого приклада, відмітимо, що дохід $\Delta S = i \cdot S$, а отримана в результаті операції *нарощена (накопичена) сума* $S = S_0 + \Delta S = S_0 \cdot (1 + i)$.

Для актурарних розрахунків, як правило, інтерес представляє процес нагромадження суми на об'єднанні тимчасових проміжків при заданих відсоткових ставках на кожному з них. Дві схеми такого процесу розглядаються нижче.

Відсоткова ставка i може залежати від моменту інвестування t, суми S, що інвестується, і тривалості періоду нарахування h, тобто, $i = i(t, S, h)$. Однак, як достатнє для страхової практики наближення, ми будемо припускати, що i не залежить від t і S.

Відсоткова ставка i, як правило, визначається у відсотках, однак, обчислення проводяться з величиною i / 100. Наприклад, речення «річна відсоткова ставка дорівнює 20%» означає, що в розрахунках використовується величина $i = 0{,}2$.

2. СХЕМА ПРОСТИХ ВІДСОТКІВ

Нехай початковий капітал S_0 інвестується у два послідовних проміжки часу (t_0, t_1) і (t_1, t_2). Відсоткові ставки на цих проміжках є i_1 та i_2, відповідно.

Нагромадження суми за схемою *простих відсотків* припускає, що відсотки нараховуються тільки на початковий капітал S_0. Тому збільшення капіталу (доходу) на першому інтервалі складатиме $\Delta S_1 = S_0 \cdot i_1$, на другому – $\Delta S_2 = S_0 \cdot i_2$. Сумарний дохід $\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = S_0 \cdot (i_1 + i_2)$, а накопичена сума $S = \Delta S_0 + \Delta S = S_0 \cdot (1 + i_1 + i_2)$.

Відмітимо, що відсоткова ставка на об'єднаному проміжку (t_0, t_2) $i = \Delta S / \Delta S_0 = i_1 + i_2$.

Узагальнюючи отриманий результат на об'єднання n проміжків, одержуємо накопичену суму

$$S = S_0 \cdot (1 + i_1 + i_2 + \ldots + i_n), \qquad (2.1)$$

та підсумкову відсоткову ставку $i = i_1 + i_2 + \ldots + i_n$.

У важливому окремому випадку фіксованої відсоткової ставки $i_k = i$, $k = 1, 2, \ldots, n$ одержуємо для накопиченої суми вираз

$$S = S_0 \cdot (1 + ni), \qquad (2.2)$$

який називають *формулою простих відсотків*.

Схеми нагромадження (1) і (2) дозволяють одержати накопичену суму у випадку, коли різні ставки $i_1, i_2, \ldots, i_m$ фіксуються на періоди $n_1, n_2, \ldots, n_m$ відповідно

$$S = S_0(1 + n_1 i_1 + n_2 i_2 + \ldots + n_m i_m), \qquad (2.3)$$

За звичай до нагромадження за представленою схемою удаються при короткотермінових (на термін до одного року) інвестиційних проектах. При довготермінових фінансових операціях (при страхуванні життя, у пенсійних схемах) використовують іншу схему нагромадження, за якою відсотки нараховуються на капітал, що накопичується.

3. СХЕМА СКЛАДНИХ ВІДСОТКІВ

Розглянемо приклад із двома послідовними часовими проміжками. Позначення попередні.

Нагромадження суми за схемою *складних відсотків* припускає, що на кожному часовому проміжку відсотки нараховуються на суму, накопичену до кінця попереднього проміжку.

У нашому випадку сума, накопичена до кінця першого проміжку, дорівнює $S_1 = S_0(1 + i_1)$, а сума, накопичена до кінця другого проміжку – $S_2 = S_1(1+i_2) = S_0(1+i_1)(1+i_2)$ $S_2 = S_1(1 + i_2) = S_0(1 + i_1)(1 + i_2)$.

Відсоткова ставка i на об'єднаному проміжку (t_0, t_2) визначається виходячи з умови $1 + i = (1 + i_1)(1 + i_2)$, тобто $i = i_1 + i_2 + i_1 i_2$.

Узагальнюючи отриманий результат на об'єднання n проміжків, одержуємо накопичену суму

$$S = S_0(1 + i_1)(1 + i_2) \cdot \ldots \cdot (1 + i_n), \qquad (2.4)$$

та підсумкову відсоткову ставку $i = (1 + i_1)(1 + i_2) \cdot \ldots \cdot (1 + i_n) - 1$. У важливому окремому випадку фіксованої відсоткової ставки $i_k = i$, $k = 1, 2, \ldots, n$, одержуємо такий вираз для накопиченої суми

$$S = S_0(1 + i)^n, \qquad (2.5)$$

який називають *формулою складних відсотків*.

Схеми нагромадження (4) і (5) дозволяють одержати накопичену суму у випадку, коли послідовні в часі ставки $i_1, i_2, \ldots, i_m$ фіксуються на періоди $n_1, n_2, \ldots, n_m$ відповідно

$$S = S_0(1+i_1)^{n_1}(1+i_2)^{n_2} \cdot \ldots \cdot (1+i_m)^{n_m}. \qquad (2.6)$$

4. ЕФЕКТИВНА ВІДСОТКОВА СТАВКА НА ЧАСТКОВОМУ ТИМЧАСОВОМУ ПРОМІЖКУ

Зафіксуємо одиничний часовий проміжок (наприклад, один рік) і розіб'ємо його на m рівних частин (у страховій практиці, як правило, $m = 2; 4; 12$, тобто частинами є півріччя, квартал, місяць).

Нехай i – ефективна відсоткова ставка на одиничному проміжку. Позначимо через $i^{(m)}$ ефективну відсоткову ставку на m частковому часовому проміжку.

Завдання полягає у визначенні $i_{\bullet}^{(m)}$ так, щоб «робота» грошей на об'єднанні проміжків довжиною кожного $1/m$ приводила до такої ж накопиченої суми, що й ефективна відсоткова ставка i на одиничному проміжку.

Схема простих відсотків. З огляду на (2.2), маємо $S_0(1+mi_{\bullet}^{(m)}) = S_0(1+i)$, звідки виходить $i_{\bullet}^{(m)} = i/m$.

Нехай тепер період нагромадження n/m – раціональне число. Накопичена за цей проміжок часу сума $S = S_0(1+ni_{\bullet}^{(m)}) = S_0(1+n\dfrac{i}{m}) = S_0(1+ti)$.

Враховуючи, що будь-яке матеріальне число може бути з якою завгодно точністю апроксимоване раціональним числом, для довільного періоду нагромадження t маємо формулу нагромадження

$$S(t) = S_0(1 + ti). \tag{2.7}$$

Схема складних відсотків. Враховуючи (2.5), маємо $S_0(1+i_{\bullet}^{(m)})^m = S_0(1+i)$, звідки виходить

$$i_{\bullet}^{(m)} = (1+i)^{1/m} - 1. \tag{2.8}$$

Аналогічно попередньому, при $t = n/m$ маємо $S = S_0(1+i_{\bullet}^{(m)})^n = S_0(1+i)^{n/m} = S_0(1+i)^t$. Для довільного t формула нагромадження за схемою складних відсотків має вид

$$S(t) = S_0(1 + i)^t. \tag{2.9}$$

Формула (2.9) є однією з основних формул фінансової математики.

На закінчення порівняємо різні схеми нагромадження.

Можна бачити, що при фіксованій ефективній відсотковій ставці на одиничному ($t = 1$) проміжку для $0 < t < 1$ маємо $(1 + i)^t < (1 + ti)$. Звідси нагромадження за схемою простих відсотків вище, ніж за схемою складних, а для $t > 1$маємо протилежний результат.

Відповідна графічна ілюстрація наведена на рис. 2.1. Графіки ілюструють процеси нагромадження по схемах (2.7) і (2.9).

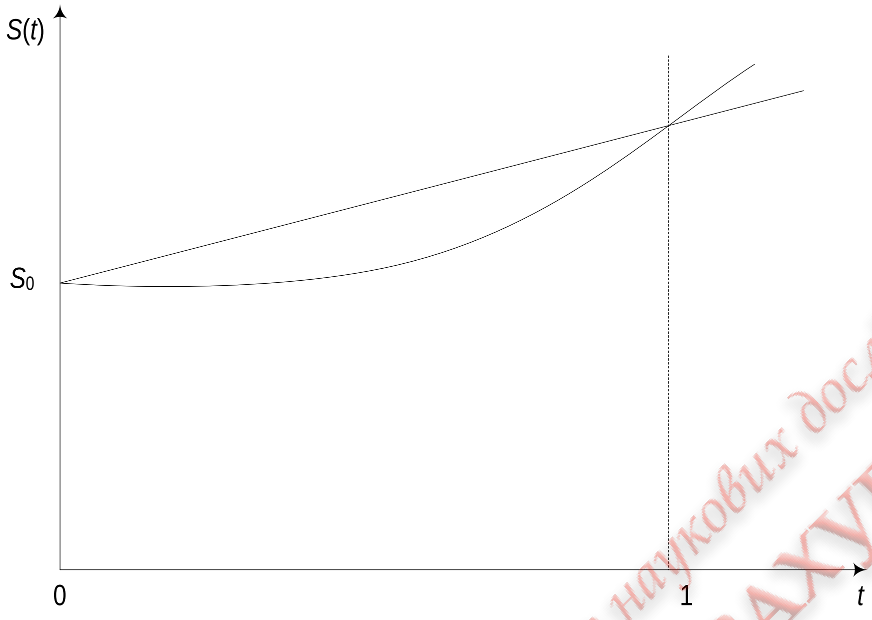


Рис. 2.1. Процес нагромадження

Скрізь надалі, незалежно від величини t, будемо припускати, що процес нагромадження йде за схемою складних відсотків (формула (2.9), однак помітимо, що іноді використовують змішану схему. Для цілого числа років користуються формулою (2.9), для дробової частини періоду нагромадження – формулою (2.7). А саме, якщо $t = n + a$, де n –ціла, а a – дробова частини t, то $S(t) = S_0(1 + i)^n(1 + \alpha i)$.

5. НОМІНАЛЬНА ВІДСОТКОВА СТАВКА

Як відзначалося, у фінансових операціях фіксується одиничний часовий проміжок, як правило, один рік. Однак нарахування відсотків доводиться робити кілька разів на рік по півріччях, кварталах тощо. Ця операція легко здійснюється за допомогою ефективної відсоткової ставки на відповідному проміжку, яка може бути або задана безпосередньо, або визначена по ефективній відсотковій ставці на одиничному проміжку. Однак у фінансовій практиці прийняте інше. Як правило, задається фіктивна річна відсоткова ставка $i^{(p)}$, у позначенні якої p– період нарахування відсотків (період оберту, конвертації), а ефективна відсоткова ставка за період 1 / p пов’язана із $i^{(p)}$ співвідношенням

$$i_{\bullet}^{(p)} = i^{(p)} / p\,. \tag{2.10}$$

Ставка $i^{(p)}$ називається *номінальною відсотковою ставкою*, яка обертається (конвертується) з частотою p чи, лаконічніше, номінальною відсотковою ставкою.

Як приклад, приведемо речення з договору страхування: «18% річних з поквартальним нарахуванням відсотків». Це означає, що, $i^{(4)} = 18\%$, $i_{\bullet}^{(4)} = 4{,}5\%$.

Приведемо співвідношення, що зв'язує номінальну відсоткову ставку з ефективною

$$i^{(p)} = p i_{\bullet}^{(p)} = p(1+i)^{1/p} - 1. \qquad (2.11)$$

На закінчення ще раз підкреслимо, що номінальна ставка є лише зручним способом опису реально застосовуваної ефективної ставки.

6. ІНТЕНСИВНІСТЬ ВІДСОТКІВ

Розглянемо дуже важливу локальну характеристику процесу нагромадження суми у страхуванні.

Нагадаємо, що похідна $f'(t)$ функції $f(t)$ характеризує швидкість зміни функції в момент часу t, а відношення $f'(t)/f(t)$ – відносну швидкість зміни функції.

Нехай $S(t)$ – сума, накопичена до моменту t. Тоді відносна швидкість нагромадження суми

$$\delta(t) = S'(t)/S(t). \qquad (2.12)$$

Функція $\delta(t)$ називається *інтенсивністю відсотків* (інші терміни – *сила росту, сила відсотка).*

Вважаючи $S(t_0) = S_0$ й інтегруючи диференціальне рівняння (2.12), одержуємо опис процесу нагромадження у виді

$$S(t) = S_0 \exp\left(\int_{t_0}^{t} \delta(u)du\right). \qquad (2.13)$$

У практично дуже важливому випадку (яким ми надалі й обмежимося) постійної інтенсивності відсотків $\delta(t) = \delta$ з (2.13), позначивши період нагромадження $t - t_0$ через t, одержуємо формулу нагромадження

$$S(t) = S_0 e^{\delta t}. \qquad (2.14)$$

Порівнюючи (2.9) і (2.14), одержимо співвідношення, що зв'язує δ і i.

Дійсно, маємо, $S_0 e^{\delta t}. = S_0(1 + i)^t$, звідки $1 + i = e^{\delta}$, а

$$i = e^{\delta} - 1, \qquad (2.15)$$

чи

$$\delta = \ln(1 + i). \qquad (2.16)$$

Використовуючи (2.11) і (2.15), виразимо номінальну відсоткову ставку через параметр δ

$$i^{(p)} = (e^{\delta / p} - 1). \qquad (2.17)$$

На закінчення відзначимо, що ефективна відсоткова ставка i більше δ, але при малих i вони близькі. Так, при i = 3% δ = 0,02956, і відносна погрішність наближеної рівності $\delta = i$ становить 1,5%. Цю обставину корисно враховувати, тому що формули розрахунку страхових тарифів для різних схем страхування життя містять множник i / δ, що при малих i може бути замінений на 1.

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. Дайте визначення ефективної відсоткової ставки.
2. Період нарахування.
3. Нарощена (накопичена) сума та формула її розрахунку.
4. Схема простих відсотків.
5. Схема складних відсотків.
6. Поняття ефективної відсоткової ставки на частковому тимчасовому проміжку.
7. Охарактеризуйте формули нагромадження за схемами простих та складних відсотків.
8. Що є номінальною відсотковою ставкою?
9. Наведіть співвідношення, що зв'язує номінальну відсоткову ставку з ефективною.
10. Інтенсивність відсотків (сила росту, сила відсотків).

ТЕСТИ

1. Формула $i = \Delta S / S$ використовується для визначення:
   а) ефективної відсоткової ставки;
   б) номінальної відсоткової ставки;
   в) реальної відсоткової ставки.

2. Формула $S = S_0(1 + n_1 i_1 + n_2 i_2 + \ldots + n_m i_m)$ називається:
   а) формулою простих відсотків;
   б) формулою складних відсотків;
   в) формулою змішаних відсотків.

3. Формула $S(t) = S_0(1 + i)^n(1 + \alpha i)$ використовується, коли:
   а) n – ціла, a – дробова частини;
   б) a – ціла, n – дробова частини;
   в) n і a – дробові частини;
   г) n і a – цілі частини.

4. «36% річних з поквартальним нарахуванням відсотків». Це означає, що номінальна відсоткова ставка дорівнює 36%, а ефективна – 9%:
   а) так;
   б) ні.

5. Співвідношення $i^{(p)} = pi^{p} = p((1+i)^{1/p} - 1)$ зв'язує:
   а) номінальну відсоткову ставку з ефективною;
   б) номінальну відсоткову ставку з реальною;
   в) реальну відсоткову ставку з ефективною.

6. Функція $\delta(t) = S'(t) / S(t)$ має назву:
   а) інтенсивність відсотків;
   б) сила росту;
   в) сила відсотку.

7. За допомогою співвідношення $S(t) = S_0 \exp\left(\int_{t_0}^{t} \delta(u)du\right)$ ми можемо одержати:
   а) опис процесу нагромадження;
   б) номінальну відсоткову ставку через інтенсивність відсотків;
   в) відносну швидкість зміни функції нагромадження відсотків.

8. Ефективну відсоткову ставку ще називають:
   а) ставкою інвестиційного доходу;
   б) реальною відсотковою ставкою;
   в) нормою прибутковості.

9. Речення «річна відсоткова ставка дорівнює 20%» означає, що в розрахунках використовується величина i = 0,05:
   а) так;
   б) ні.

10. При довготермінових фінансових операціях, використовують:
   а) схему нагромадження простих відсотків;
   б) схему нагромадження складних відсотків;
   в) змішану схему нагромадження відсотків.

Тема 3. ДИСКОНТУВАННЯ ТА ФІНАНСОВІ РЕНТИ

1. ДИСКОНТУВАННЯ

   Поняття сучасної (поточної, приведеної) вартості. Поняття дисконту. Коефіцієнт дисконтування. Ставка дисконтування. Ефективна ставка дисконтування

2. ФІНАНСОВІ РЕНТИ

   Поняття потоку платежів. Поняття члену потоку платежів. Фінансова рента (ануїтет). Період ренти. Термін ренти. Види фінансових рент. Фінансова еквівалентність. Рівняння еквівалентності. Ренти пренумерандо і постнумерандо. Вартості рент пренумерандо і постнумерандо. Відстрочені ренти. Відстрочені ренти постнумерандо і пренумерандо. Приведення ренти до кінця періоду. *P*-термінові ренти. *P*-термінові ренти постнумерандо і пренумерандо. Сучасна і накопичена вартість р-термінових рент постнумерандо і пренумерандо. *P*-термінові відстрочені ренти. Перемінні (зростаючі) ренти. Негайні зростаючі ренти. Зростаюча рента постнумерандо і пренумерандо. Сучасна вартість зростаючої ренти простумерандо і пренумерандо. Сучасна вартість об'єднаної ренти. Відсрочені зростаючі ренти. Відсрочені зростаючі ренти постнумерандо і пренумерандо. Приведення зростаючої ренти до кінця терміну. *P*-термінові зростаючі ренти. *P*-термінова зростаюча рента постнумерандо і пренумерандо. Безупинні постійні ренти. Безупинні перемінні ренти. Сучасна вартість рент

1. ДИСКОНТУВАННЯ

У страховій практиці при визначенні страхової премії у відповідний момент часу використовується сума $P(t)$, щоб через t років накопичена сума (при відомій постійній ефективній відсотковій ставці i) становила $S(t)$.

Зв'язок між $P(t)$ і $S(t)$ описується співвідношенням $S(t) = P(t)(1 + i)^t$, звідки

$$P(t) = S(t)(1 + i)^{-t}. \qquad (3.1)$$

Величина $P(t)$ називається *сучасною (поточною, приведеною) вартістю* (величиною) (present value) суми $S(t)$, а процес відшукання сучасної вартості суми називається дисконтуванням (приведенням до моменту $t = 0$). Різницю $(S – P)$ називають *дисконтом* (discount).

Приведена вартість одиничної суми ($S(t) = 1$) позначається $v(t)$. Таким чином, $v(t) = (1 + i)^{-t}$.

Величина

$$v = (1 + i)^{-1}, \qquad (3.2)$$

називається *коефіцієнтом дисконтування* (дисконтуючим множником). За його допомогою сучасна вартість суми $S(t)$ приймає вигляд

$$P(t) = S(t)v^t. \qquad (3.3)$$

Термін «*дисконтування*» вживається у більш широкому значенні – як відшкодування вартості суми $S(t)$ у будь-який попередній момент часу.

Якщо $S(t)$ – сума в момент t_2, то її вартість у момент t_1 ($t_2 < t_2$) визначається як $P(t_1) = S(t_2)v^{t_2 - t_1}$.

У таких випадках кажуть, що сума $S(t_2)$ приведена (дисконтована) до моменту t_1.

Термін «*приведення*» зручно поширити і на процес нагромадження. У цьому випадку сума «приводиться» до більш пізнього моменту часу.

Будь-які операції над грошовими сумами можливі тільки в тому випадку, якщо суми приведені до одного моменту часу.

Відзначимо, що при $\delta(t)= \delta v = e^{-\delta}$, сучасна вартість суми $S(0)$.

$$P(t) = S(t)\, e^{-\delta t}. \qquad (3.4)$$

Нехай фіксований одиничний проміжок часу складе один рік. Сума накопичень до кінця терміну – $S = 1 + i$. Таким чином i відіграє роль доходу на капітал, що інвестується (дорівнює 1).

Рис. 3.1. Процес нагромадження

Отже, якщо сучасна вартість відсотків на капітал дорівнює 1, то відповідна їй вартість ефективної відсоткової ставки називається *ефективною ставкою дисконтування* (effective rate of discount) або просто ставкою дисконтування.

Позначаючи ставку дисконтування через d, маємо наступні співвідношення

$$d = iv = i\,/\,(1 + i) = ie^{-\delta} = 1 - v = 1 - e^{-\delta}. \qquad (3.5)$$

Відзначимо також, що

$$v = 1 - d,\ i = d\,/\,(1 - d). \qquad (3.6)$$

Таким чином, визначені чотири основні параметри, що використовуються у фінансовій математиці: i, δ, v, d.

Розіб'ємо одиничний проміжок на p рівних частин. Позначимо через $d_{\bullet}^{(p)}$ ефективну ставку дисконтування за час $1 / p$ і позначимо її через d.

Використовуючи ефективну ставку дисконтування і вищенаведені співвідношення, послідовно маємо

$$\begin{aligned} d_{\bullet}^{(p)} &= i_{\bullet}^{(p)} v^{1/p} = ((1+i)^{1/p} - 1)v^{1+p} = (v^{-1/p} - 1)v^{1/p} = \\ &= 1 - v^{1/p} = 1 - 1(1-d)^{1/p}. \end{aligned} \qquad (3.7)$$

На практиці використовують не реальну ефективну ставку дисконтування, а номінальну (умовну) ставку дисконтування (nominal rate of discount)

$$d_{\bullet}^{(p)} = pd_{\bullet}^{(p)} = p(1-(1-d)^{1/p}). \qquad (3.8)$$

2. ФІНАНСОВІ РЕНТИ

Потоки платежів.

Страхові операції дуже часто пов'язані не з разовими платежами, а з деякою послідовністю їх в часі. Прикладами можуть слугувати сплата премій, виплата пенсій, надходження доходів від інвестицій тощо. Такі послідовності платежів називають *потоками платежів* (cash flows). Окремий платіж називається членом потоку.

Потік платежів, усі члени якого позитивні, а часовий інтервал між членами однаковий, називається *фінансовою рентою* (рентою), або ануїтетом (annuity), незалежно від призначення походження платежів. Сплата премій у розстрочку і виплата пенсій – приклади ренти.

Член ренти	розмір окремого платежу.
Період ренти	часовий проміжок між двома послідовними платежами.
Термін ренти	часовий проміжок від початку першого періоду до кінця останнього.
Річні ренти	виплати проводяться один раз на рік.
Р – термінові ренти	*p*-кількість виплат у році.
Постійні ренти	розмір платежів однаковий.
Перемінні ренти	розміри платежів змінюються за яким-небудь законом.
Вірні ренти	сплата платежів здійснюється безумовно, а число членів такої ренти заздалегідь відомо.
Умовна рента	ставиться в залежність від настання деякої випадкової події, число її членів заздалегідь невідомо.

Рівняння еквівалентності.

Розглянемо потік платежів, коли у моменти $t_1, t_2, \dots, t_n$ проводяться виплати $b_1, b_2, \dots, b_n$ відповідно. Назвемо таку серію виплат пенсією. Необхідно визначити сучасну вартість A такої пенсії.

Нехай v – множник, що дисконтує. Відповідно до (3.1) маємо

$$A = b_1 v^{t_1} + b_2 v^{t_2} + \dots + b_n v^{t_n}. \qquad (3.9)$$

Сучасна вартість пенсії *A* може розглядатися як сума, яку певна особа повинна внести до пенсійного фонду у момент укладення договору (цей момент зазвичай приймається за початок відліку) для того, щоб у майбутньому (при фіксованій відсотковій ставці) забезпечити собі цю пенсію. Дані відношення проілюстровані на рис. 3.2.

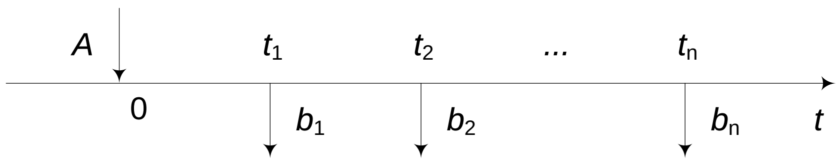


Рис. 3.2. Відношення при сплаті пенсії

У розглянутому випадку плата *A* за пенсію проводиться у вигляді разового внеску в момент укладення договору. Однак, як правило, ця плата здійснюється у вигляді серії внесків $c_1, c_2, \ldots, c_k$ в моменти $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k$ (у пенсійній практиці $\tau_k < t_1$).

Необхідно установити справедливе співвідношення між двома потоками платежів – пенсією і серією внесків. Принципом, на підставі якого встановлюється таке співвідношення, є *фінансова еквівалентність,* відповідно до якої еквівалентними вважаються такі платежі, у яких рівні приведені до одного моменту часу.

Порівнюючи сучасні вартості пенсії і серії внесків, одержуємо співвідношення

$$c_1 v^{t_1} + c_2 v^{t_2} + \ldots + c_k v^{t_k} = b_1 v^{t_1} + b_2 v^{t_2} + \ldots + b_k v^{t_k}, \qquad (3.10)$$

яке має назву рівняння еквівалентності**.**

Підкреслимо, що приведення може здійснюватися до будь-якого моменту часу, однак, найчастіше такими моментами є початок чи кінець терміну ренти.

Якщо моменти $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k, t_1, t_2, \ldots, t_n$ об’єднати в одну послідовність, тобто розглядати один потік платежів (величини *c* необхідно при цьому замінити на мінус c_i), то алгебраїчна сума приведених вартостей членів потоку дорівнює нулю. Ця обставина пояснює зміст виразу «принцип нуля», яким часто називають співвідношення (3.10).

У реальній пенсійній практиці потік виплат має характер ренти, тобто $t_k - t_{k-1} = \text{const}$, а члени потоку b_k. або постійні, або змінюються відповідно до деякого закону.

Постійні ренти.

Розглядаємо тільки вірні ренти. Проаналізуємо різні варіанти таких рент і їхньої вартості в початковий і кінцевий моменти терміну ренти. Надалі i, v, d, $i(p)$, $d(p)$ – визначені раніше фінансові константи на одиничному часовому проміжку.

Термінові ренти.

Розглянемо n послідовних одиничних (один рік) проміжків часу (0, 1), (1, 2), …, (n – 1, n).

Рента постнумерандо серія з n виплат, розміри яких дорівнюють 1, здійснюваних наприкінці кожного проміжку часу.

Рента пренумерандо серія з n виплат, розміри яких дорівнюють 1, що здійснюються на початку кожного проміжку часу.

Сучасні вартості рент постнумерандо і пренумерандо позначаються символам $a_{\overline{n}|}$ і $\ddot{a}_{\overline{n}|}$ відповідно.

Очевидно

$$a_{\overline{n}|} = v + v^2 + \ldots + v^n = \frac{v - v^{n+1}}{1-v} = \frac{1-v^n}{i}, \tag{3.11}$$

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = 1 + v + \ldots + v^{n-1} = \frac{a_{\overline{n}|}}{v} = \frac{1-v^n}{d}. \tag{3.12}$$

Визначимо, що $a_{\overline{n}|} = \ddot{a}_{\overline{n}|}$.

Відсрочені ренти.

Розглянемо проміжок часу (0, 1), (1, 2), …, (m – 1, m), (m, m + 1), …, (m + n – 1, m + n).

Відстрочена рента постнумерандо серія з n одиничних виплат, зроблених у момент $t = m + 1$, $t = m + 1, \ldots, t = m + n$

Її сучасна вартість позначається символом $m|^{a_{\overline{n}|}}$.

Відстрочена рента пренумерандо серія з n виплат, розміри яких дорівнюють 1, що здійснюються на початку кожного проміжку часу.

Позначення її сучасної вартості $m|^{\ddot{a}_{\overline{n}|}}$.

Очевидно, що:

$$ {}_{m|}a_{\overline{n|}} = a_{\overline{n|}} v^m;\ \ {}_{m|}\ddot{a}_{\overline{n|}} = \ddot{a}_{\overline{n|}} v^m. $$

Крім того,

$$ {}_{m|}a_{\overline{n|}} = a_{\overline{n+m|}} - a_{\overline{m|}}; $$

$$ {}_{m|}\ddot{a}_{\overline{n|}} = a_{\overline{n+m|}} - \ddot{a}_{\overline{n|}}. $$

Приведення ренти до кінця терміну.

Розглянемо тимчасові проміжки з розділу «Негайні ренти». Часто виникає необхідність у визначенні вартості ренти в момент $t = n$ (тобто накопичених сум). Позначимо через $S_{\overline{n|}}$ вартість ренти постнумерандо в момент $t = n$ (момент останнього платежу) і через $\ddot{S}_{\overline{n|}}$, вартість ренти пренумерандо в момент $t = n$ (тобто через одиницю часу після останнього платежу).

Використовуючи (3.3), одержимо

$$ S_{\overline{n|}} = (1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \ldots + 1 = \frac{(1+i)^n - 1}{i}, \qquad (3.13) $$

$$ \ddot{S}_{\overline{n|}} = (1+i)^n + (1+i)^{n-1} + \ldots + (1+i) = (1+i)S_{\overline{n|}} = \frac{(1+i)^n - 1}{d}. \qquad (3.14) $$

Очевидно, що ці ж вирази можуть бути отримані приведенням до моменту $t = n$ сучасних вартостей відповідних рент

$$ S_{\overline{n|}} = a_{\overline{n|}}(1+i)^n; \ddot{S}_{\overline{n|}} = \ddot{a}_{\overline{n|}}(1+i)^n. \qquad (3.15) $$

Відмітимо, що значення $S_{\overline{n|}}$ для різних i і n також приводяться в актуарних таблицях.

Приведення відстроченої ренти до кінця терміну здійснюється, так само, тобто сучасна вартість перемножується на $(1 + i)^{m+n}$. Спеціальні позначення для накопичених сум не потрібні.

Введені величини зв'язані різноманітними співвідношеннями. Приведемо деякі з них

$$ \begin{aligned} &ia_{\overline{n|}} + v^n = 1 \ (a),\ \ iS_{\overline{n|}} + 1 = (1+i)^n,\ (b) \\ &d\ddot{a}_{\overline{n|}} + v^n = 1 \ (c),\ \ d\ddot{S}_{\overline{n|}} + 1 = (1+i)^n.\ (d) \end{aligned} \qquad (3.16) $$

Алгебраїчна перевірка цих співвідношень є тривіальною. З'ясуємо фінансове трактування деяких з них.

Таблиця 3.1

Таблиця складних відсотків та значень ануїтетів при 15,0%

n	$(1 + i)^n$	v^n	$a_{\overline{n}\rceil}$	Функція	Значення
1	1,15000	0,86957	0,8696	i	0,150000
2	1,32250	0,75614	1,6257	$i^{(2)}$	0,144761
3	1,52088	0,67752	2,2832	$i^{(4)}$	0,142232
4	1,74901	0,57175	2,8550	$i^{(12)}$	0,140579
5	2,01136	0,49718	3,3522	δ	0,139762
6	2,31306	0,43233	3,7845	–	–
7	2,66002	0,37594	4,1604	–	–
8	3,05902	0,32690	4,4873	d	0,130435
9	3,51788	0,28426	4,7716	$d^{(2)}$	0,134990
10	4,04556	0,24718	5,0188	$d^{(4)}$	0,137348
11	4,65239	0,21494	5,2337	$d^{(12)}$	0,128951
12	5,35025	0,18691	5,4206	–	–
13	6,15279	0,16253	5,5831	$i / i^{(2)}$	1,036190
14	7,07571	0,14133	5,7274	$i / i^{(4)}$	1,054613
15	8,13706	0,12289	5,8474	$i / i^{(12)}$	1,067016
16	9,35762	0,10686	5,9542	i / δ	1,073254
17	10,76126	0,09293	6,0472	–	–
18	12,37545	0,08081	6,1280	$i / d^{(2)}$	1,111190
19	14,23177	0,07027	6,1982	$i / d^{(4)}$	1,092113
20	16,36654	0,06110	6,2593	$i / d^{(12)}$	1,079516

Співвідношення (a) може бути інтерпретоване в такий спосіб (рис. 3.3). Одинична грошова сума, інвестована в момент t = 0, породжує наступний потік платежів.

Рис. 3.3. Фінансове трактування співвідношення (*a*)

Сучасна вартість потоку складається з двох доданків: перший породжено платежами і дорівнює $ia_{\overline{n}\rceil}$; другий – вартість одиничного платежу в момент $t = n$, дорівнює v^n. Таким чином, $A = ia_{\overline{n}|} + v^n$. З іншого боку, відомо, що інвестувалася 1, тобто $A = 1$.

Цікаво відзначити, що граничним переходом $y(a)$ при $n \to \infty$ одержуємо вартість так званої «довічної ренти» $a_{\overline{\infty}|} = 1/i$, тобто сума $1 / i$, інвестована в момент $t = 0$, породжує нескінченний потік одиничних платежів.

Співвідношення (*c*) може бути отримане, якщо перший доданок розглянутого вище потоку трактувати як сучасну вартість ренти пренумерандо з розміром платежів, рівним d.

Р-термінові ренти.

У розглянутих раніше рентах виплата платежів проводилась один раз – на початку чи наприкінці прийнятого за 1 проміжку часу. У страховій практиці поширені ситуації, у яких при фіксованій на одиничному проміжку ефективній відсотковій ставці платежі здійснюються p раз в одиницю часу. Прикладами можуть слугувати сплата страхових внесків та виплат, помісячна виплата пенсії тощо. Такі ренти називаються p-терміновими.

Введемо необхідну термінологію і позначення.

Розглянемо n послідовних проміжків часу (0, 1), (1, 2), …, (n – 1, n) i – ефективна відсоткова ставка на кожному з них. Розіб'ємо кожен проміжок на p рівних частин (часткові проміжки) довжини $1 / p$. Найпоширеніший на практиці випадок, коли одиницею часу є рік, а значенням p = 12, 4, 2 відповідають місяць, квартал, півріччя, відповідно (що відмічалось вище).

Р-термінова рента постнумерандо – серія з np виплат величиною $1 / p$, зроблених наприкінці кожного часткового проміжку.

Її сучасна вартість позначається символом $a^{(p)}_{\overline{n}|}$, а вартість, приведена до кінця терміну (тобто до моменту $t = n$) – $S^{(p)}_{\overline{n}|}$.

Відзначимо, що величина кожного члена ренти дорівнює $1 / p$, отже, як одиниця виміру грошових сум виступає сума усіх виплат за одиницю часу.

Наприклад, якщо протягом 5 років наприкінці кожного місяця виплачується 100 грн, і рік прийнятий за одиницю часу, то одиницею виміру грошових сум є 1 200 грн. При цьому сучасна вартість зазначеної ренти є $1\,200\,a^{(12)}_{\overline{5}|}$, а вартість, накопичена до кінця 5-річного терміну, – $1\,200\,S^{(p)}_{\overline{n}|}$.

Р-термінова рента пренумерандо — серія з *np* виплат величиною 1/*p*, зроблених на початку кожного часткового проміжку.

Її сучасна вартість – $\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|}$, накопичена – $\ddot{S}^{(p)}_{\overline{n}|}$.

Сучасна і накопичена вартості *p*-термінових рент легко виражаються через основні фінансові константи на одиничному тимчасовому проміжку і через вартості відповідних звичайних рент.

Відзначимо спочатку очевидні співвідношення

$$\begin{aligned} a^{(p)}_{\overline{n}|} &= S^{(p)}_{\overline{n}|}\cdot v^n;\ S^{(p)}_{\overline{n}|} = a^{(p)}_{\overline{n}|}\cdot(1+i)^n; \\ \ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|} &= \ddot{S}^{(p)}_{\overline{n}|}\cdot v^n;\ \ddot{S}^{(p)}_{\overline{n}|} = \ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|}\cdot(1+i)^n. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Помітимо також, що сучасні вартості *p*-термінових рент постнумерандо і пренумерандо зв’язані співвідношенням:

$$a^{(p)}_{\overline{n}|} = \ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|} - \frac{1}{p} + \frac{1}{p}\cdot v^n. \tag{3.18}$$

Таким чином, досить виразити $\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|}$, через основні константи, щоб одержати інші необхідні формули. Це легко зробити, якщо розглядати *p-термінову ренту* як звичайну з одиницею часу 1 / *p*, ефективною відсотковою ставкою $i_\bullet^{(p)}$, членом ренти 1 / *p* і терміном ренти *np,* то маємо

$$a^{(p)}_{\overline{n}|@i} = \frac{1}{p}\cdot \ddot{a}_{\overline{np}|@i_\bullet^{(p)}}. \tag{3.19}$$

З огляду на (3.19) (3.17) і (3.14)

$$\ddot{a}_{\overline{n}|@i} = \frac{1}{p}\cdot\frac{1+(v_\bullet^{(p)})^{np}}{d_\bullet^{(p)}} = \frac{1}{p}\cdot\frac{1-(1-d)^n}{d_\bullet^{(p)}} = \frac{1-v^n}{d_\bullet^{(p)}}, \tag{3.20}$$

де номінальну ставку дисконтування $d^{(p)}$ представлено через ефективну ставку дисконтування

$$d^{(p)} = p(1-(1-d)^{1/p}) = p(1-v^{1/p}). \tag{3.21}$$

Остаточно отримуємо формулу

$$\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|i} = \frac{1-v^n}{p(1-v^{1/p})}. \tag{3.22}$$

Поряд з (3.22) використовується вираз $\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|}$ через $\ddot{a}_{\overline{n}|}$. З (3.21) легко одержуємо

$$\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|} = \frac{d}{d^{(p)}} \cdot \ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|}. \tag{3.23}$$

Тепер для $a^{(p)}{}_n$ одержимо, використовуючи:

$$a^{(p)}_{\overline{n}|} = \frac{1-v^n}{d^{(p)}} - \frac{1-v^n}{p} = \frac{(1-v^n)(p-d^{(p)})}{pd^{(p)}} = (1-v^n)\frac{p(1-d_{\bullet}^{(p)})}{p \cdot pd_{\bullet}^{(p)}} =$$

$$= (1-v^n)\frac{v_{\bullet}^{(p)}}{pd_{\bullet}^{(p)}} = \frac{1-v^n}{i^{(p)}}.$$

Тобто

$$a^{(p)}_{\overline{n}|} = \frac{1-v^n}{i^{(p)}}. \tag{3.24}$$

З (3.24) випливає вираз $a^{(p)}_{\overline{n}|}$ через $a_{\overline{n}|}$

$$a^{(p)}_{\overline{n}|} = \frac{i}{i^{(p)}} \cdot a_{\overline{n}|}. \tag{3.25}$$

Накопичені *вартості p-термінових рент* тепер можуть бути визначені за допомогою співвідношень (3.25).

Формули обчислення сучасних вартостей *p-термінових рент* отримані виходячи з припущення, що n – натуральне число. Однак процедура одержання цих формул, що базується на співвідношенні (3.25), легко узагальнюється на випадок $t = n + k / p$, $0 \le k \le n - 1$. Обираючи як одиничний тимчасовий проміжок довжини $1 / p$, за аналогією з (3.25) маємо

$$\ddot{a}^{(p)}_{\overline{t}|i} = \frac{1}{p} \cdot \ddot{a}_{\overline{np+k}|i_{\bullet}^{(p)}}. \tag{3.26}$$

Повторюючи попередні викладення, аналогічно одержуємо

$$\ddot{a}^{(p)}_{\overline{t}|@i} = \frac{1-v^t}{d^{(p)}},$$
$$a^{(p)}_{\overline{t}|@i} = \frac{1-v^t}{i^{(p)}}. \qquad (3.27)$$

При застосуванні формул (3.27) не слід забувати, що одиницею виміру грошових сум є сума усіх виплат за одиницю часу. Відмітимо також, що обчислення, пов'язані з *p-терміновими рентами,* стають прозоріші, якщо за одиницю виміру прийняти проміжок часу довжини $1/p$.

За аналогією зі звичайною відстроченою рентою вводяться і *p-термінові відстрочені ренти.* Позначення сучасних (у момент t = 0) вартостей таких рент $m|a^{(p)}_{\overline{n}|}, m|\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|}$, Маємо

$$m|a^{(p)}_{\overline{n}|} = v^m a^{(p)}_{\overline{n}|}, m|\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|} = v^m \ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|}. \qquad (3.28)$$

Перемінні (зростаючі) ренти.

Перемінна рента — рента, розміри платежів якої змінюються за деяким законом.

Негайні зростаючі ренти.

Розглянемо, як і раніше, послідовність одиничних проміжків часу (0, 1), (1, 2), …, (n – 1, n).

Зростаюча рента постнумерандо — потік платежів, розміри яких становлять k одиниць у моменти $t = k$, k = 1, 2,…, n.

Сучасна вартість зростаючої ренти постнумерандо позначається символом $(Ia)_{\overline{n}|}$ і визначається так

$$(Ia)_{\overline{n}|} = v + 2v^2 + \ldots + nv^n = v(1 + 2v + \ldots + nv^{n-1}) =$$
$$= v(v + v^2 + \ldots + v^n) = v\left(\frac{v - v^{n+1}}{1-v}\right)' = v\frac{1-(n+1)v^n + nv^{n+1}}{(1-v)^2}. \qquad (3.29)$$

Сучасна вартість зростаючої ренти постнумерандо легко виражається через вартість звичайної ренти. З огляду на те, що $i = (1 – v) / v$, перепишемо (3.29)

$$(Ia)_{\overline{n}|} = \frac{1-v^n}{i(1-v)} - v\frac{nv^n(1-v)}{(1-v)^2} = \frac{a_{\overline{n}|}}{d} - \frac{nv^n}{i}, \tag{3.30}$$

або

$$(Ia)_{\overline{n}|} = \frac{a_{\overline{n}|}}{d} - \frac{nv^n}{i}. \tag{3.31}$$

Зростаюча рента пренумерандо потік платежів, розміри яких становлять k одиниць у моменти $t = k - 1$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Сучасна вартість зростаючої ренти пренумерандо позначається символом $(I\ddot{a})_{\overline{n}|}$ і визначається як

$$(I\ddot{a})_{\overline{n}|} = 1 + 2v + \ldots + nv^{n-1} = \frac{1-(n+1)v^n + nv^{n+1}}{(1-v)^2}. \tag{3.32}$$

З (3.32) одержуємо

$$(I\ddot{a})_{\overline{n}|} = \frac{1-v^n}{(1-v)^2} - \frac{nv^n}{1-v} = \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|} - nv^n}{d}. \tag{3.33}$$

На практиці величини платежів зростаючої ренти можуть утворювати довільну арифметичну прогресію. Цей випадок цілком описується уже розглянутими. Дійсно, нехай, наприклад, величини платежів ренти пренумерандо $b_k = a + \beta k$, $k = 0, 1, \ldots, n - 1\ldots$. Представимо їх у виді $b_k = (a - \beta) + \beta(k + 1)$, $k = 0, 1, \ldots, n - 1\ldots$

Такий потік платежів можна розглядати як об’єднання двох рент. Сучасна вартість об’єднаної ренти:

$$A = (a-\beta)\ddot{a}_{\overline{n}|} + \beta(I\ddot{a})_{\overline{n}|}.$$

Відстрочені зростаючі ренти.

Розглянемо проміжки часу (0, 1), (1, 2), …, $(m - 1, m)$, $(m, m + 1)$, …, $(m + n - 1, m + n)$.

Відсрочена зростаюча рента постнумерандо потік платежів, що здійснюється у моменти $t_k = m + k$ з відповідними розмірами виплат $b_k = k$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Сучасна вартість такої ренти позначається символом $m\,|\,(Ia)_{\overline{n}|}$ і пов'язана із сучасною вартістю негайної зростаючої ренти постнумерандо очевидним співвідношенням

$$(I\ddot{a})_{\overline{n}|} = \frac{1-v^n}{(1-v)^2} - \frac{nv^n}{1-v} = \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|} - nv^n}{d}. \qquad (3.34)$$

Відсрочена зростаюча рента пренумерандо — потік платежів, що здійснюється у моменти $t_k = m + k - 1$ з відповідними розмірами виплат $b_k = k$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Сучасна вартість такої ренти позначається символом $m\,|\,(I\ddot{a})_{\overline{n}|}$ і пов'язана Із сучасною вартістю негайної зростаючої ренти пренумерандо співвідношенням

$$m\,|\,(I\ddot{a})_{\overline{n}|} = v^m (I\ddot{a})_{\overline{n}|}. \qquad (3.35)$$

Приведення зростаючої ренти до кінця терміну.

Як і у випадку постійних рент, часто виникає необхідність у визначенні вартості перемінної ренти наприкінці останнього платіжного періоду. Наприклад, інтерес може представляти загальна сума, накопичена на банківському рахунку після серії зростаючих внесків.

Будемо розглядати послідовність тимчасових проміжків (0, 1), (1, 2), …, $(n-1, n)$,

Вартості зростаючих рент постнумерандо і пренумерандо в момент $t = n$ позначаються символами $(Is)_{\overline{n}|}$ і $(I\ddot{s})_{\overline{n}|}$ і можуть бути виражені через накопичені суми звичайних рент. Дійсно, використовуючи (3.32) і (3.33), одержуємо

$$\begin{aligned} (Is)_{\overline{n}|} &= (1+i)^n (Ia)_{\overline{n}|} = (1+i)^n \left(\frac{a_{\overline{n}|}}{d} - \frac{nv^n}{i} \right) = \frac{s_{\overline{n}|}}{d} - \frac{n}{i}, \\ (I\ddot{s})_{\overline{n}|} &= (1+i)^n (I\ddot{a})_{\overline{n}|} = (1+i)^n \cdot \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|} - nv^n}{d} = \frac{\ddot{s}_{\overline{n}|} - n}{d}. \end{aligned} \qquad (3.36)$$

Приведення відстроченої зростаючої ренти до кінця терміну здійснюється так само, тобто сучасна вартість множиться на $(1 + i)^{m+n}$. Спеціальні позначення не вводяться.

Р-термінові зростаючі ренти.

Конструкція таких рент повинна бути ясною з попередніх побудов. Як і раніше, розглядаються n одиничних проміжків часу і кожний з них поділяється на p рівних частин.

Р-термінова зростаюча рента постнумерандо	потік платежів $b_k = k / p$, що здійснюється у моменти $t_k = (k - 1) / p$, $k = 1, 2, \ldots, n$.
Р-термінова зростаюча рента пренумерандо	потік платежів $b_k = k / p$, що здійснюється у моменти $t_k = (k - 1) / p$, $k = 1, 2, \ldots, np$.

Для позначення сучасних вартостей і накопичених сум можуть бути введені символи, аналогічні попереднім, і виведені формули, подібні тим, які було отримано раніше. Однак ми не будемо цього робити, а, обмежившись розглядом конкретного прикладу, продемонструємо, як прийоми, розвинені в попередніх пунктах, дозволяють аналізувати і *р-термінові зростаючі ренти.*

Беззупинні ренти.

Усі розглянуті вище ренти припускали, що окремі складові (члени) потоку платежів надходять дискретно. Однак у ряді випадків виявляється корисна ідеалізація, у якій потік платежів сприймається як беззупинний процес.

Беззупинні постійні ренти.

Розглянемо *р-термінову постійну ренту* і з'ясуємо поводження основних фінансових констант, а також приведених вартостей, при $p \to \infty$. Інтенсивність відсотків, як і раніше, будемо вважати постійною.

$$\lim_{p\to\infty} i^{(p)} = \lim_{p\to\infty} p(e^{\delta/p} - 1) = \lim_{p\to\infty} p \cdot \frac{\delta}{p} = \delta. \qquad (3.37)$$

Аналогічно

$$\lim_{p\to\infty} d^{(p)} = \lim_{p\to\infty} p(1 - e^{\delta/p}) = \lim_{p\to\infty} p \cdot \frac{\delta}{p} = \delta. \qquad (3.38)$$

Таким чином, при досить великому p можна використовувати наближені рівності $i^{(p)} \approx \delta$, $d^{(p)} \approx \delta_1$.

Знайдемо сучасні вартості і накопичені суми беззупинних рент. Ясно, що при $p \to \infty$, тобто при прагненні до нуля періоду ренти, різниця між сучасними вартостями рент пост- і пренумерандо буде зникати. Тому обмежимося розглядом ренти пренумерандо

$$\lim_{p\to\infty} \ddot{a}^{(p)}_{\overline{n|}} = \lim_{p\to\infty} \frac{1-v^n}{d^{(p)}} = \frac{1-v^n}{\delta}. \tag{3.39}$$

Позначимо сучасну вартість безупинної ренти через $\bar{a}_{\overline{n|}}$. Таким чином, маємо

$$\bar{a}_{\overline{n|}} = \frac{1-v^n}{\delta} = \frac{1-e^{-\delta n}}{\delta}. \tag{3.40}$$

Аналогічно знайдемо накопичену суму $\bar{S}_{\overline{n|}}$, беззупинної ренти, використовуючи ренту пренумерандо

$$\begin{aligned} \bar{S}_{\overline{n|}} &= \lim_{p\to\infty} \ddot{S}^{(p)}_{\overline{n|}} = \lim_{p\to\infty} \ddot{a}^{(p)}_{\overline{n|}} (1+i)^n = \\ &= \frac{(1-v^n)(1+i)^n}{\delta} = \frac{v^{-n}-1}{\delta} = \frac{e^{\delta n}-1}{\delta}. \end{aligned} \tag{3.41}$$

Розіб'ємо відрізок $(0, n)$ на кінцеве число довільних частин (Δt_k) довжини Δt_k і виділимо довільну точку ξk на кожній з них. Виходячи з того, що рента постійна, будемо вважати, що в кожний момент надходить платіж, рівний 1, тобто сума платежів на проміжку (Δt_k) дорівнює Δt_k. Сучасна вартість платежу в момент ξk дорівнює $v^{\xi k} = e^{\xi k}$. Отже, сучасна вартість потоку платежів на проміжку (Δt_k) може бути приблизно визначена як $v^{\xi k}\Delta t_k$, а сучасна вартість ренти $\bar{a}_{\overline{n|}} \approx \sum_k v^{\xi k}\Delta t_k = \sum_k e^{-\delta \xi k}\Delta t_k$.

Граничним переходом при $\max\Delta t_k \to 0$ одержуємо рівність

$$\bar{a}_{\overline{n|}} = \int_0^n e^{-\delta t} dt = -\frac{1}{\delta} e^{-\delta t} \Big|_0^n = \frac{1-e^{-\delta n}}{\delta}. \tag{3.42}$$

Аналогічно

$$\overline{S}_{\overline{n}|} = \int_0^n e^{\delta(n-t)} dt = \frac{e^{\delta n} - 1}{\delta}. \qquad (3.43)$$

Беззупинні перемінні ренти.

У даній моделі ми будемо вважати, що потік платежів беззупинний, а розміри платежів змінюються *p* часі, причому процес надходження платежів характеризується швидкістю надходження платежів $p(t)$ (якщо $S(t)$ – розмір платежу, що надходить у момент t, то $p(t) = S^{'}(p)$). Скористаємося розбивкою відрізка (0, n) описаною раніше. Тепер сумарний платіж на проміжку Δt_k його сучасній вартості, відповідно, приблизно дорівнюють $p(\xi k)\Delta t_k$ і $p(\xi k)v^{\xi k}\Delta t_k$.

Сучасна вартість ренти

$$\overline{a}_{\overline{n}|} \approx \sum_k p(\xi k) v^{\xi k} \Delta t_k , \qquad (3.44)$$

Таблиця 3.2

Таблиця складних відсотків та значень ануїтетів при 25,0%

n	$(1 + i)^n$	v^n	$a_{\overline{n}\vert}$	Функція	Значення
1	1,25000	0,80000	0,8000	i	0,250000
2	1,56250	0,64000	1,4400	$i^{(2)}$	0,236068
3	1,95312	0,51200	1,9520	$i^{(4)}$	0,229485
4	2,44141	0,40960	2,3616	$i^{(12)}$	0,225231
5	3,05176	0,32768	2,6893	δ	0,223144
6	3,81470	0,26214	2,9514	–	–
7	4,76837	0,20972	3,1611	–	–
8	5,96046	0,16777	3,3289	d	0,200000
9	7,45058	0,13422	3,4631	$d^{(2)}$	0,211146
10	9,31323	0,10737	3,5705	$d^{(4)}$	0,217034
11	11,64153	0,08590	3,6564	$d^{(12)}$	0,221082
12	14,55192	0,06872	3,7251	–	–
13	18,18989	0,05498	3,7801	$i / i^{(2)}$	1,059017
14	22,73737	0,04398	3,8241	$i / i^{(4)}$	1,089396
15	28,42171	0,03518	3,8593	$i / i^{(12)}$	1,109971
16	35,52714	0,02815	3,8874	i / δ	1,120355
17	44,40892	0,02252	3,9099	–	–
18	55,51115	0,01801	3,9279	$i / d^{(2)}$	1,184017
19	69,38894	0,01441	3,9424	$i / d^{(4)}$	1,151896
20	86,73617	0,01153	3,9539	$i / d^{(12)}$	1,130804

Переходячи до межі при $\max\Delta t_k \to 0$, одержуємо

$$\bar{a}_{\overline{n}|} = \int_0^n p(t)v^t dt = \int_0^n p(t)e^{-\delta t} dt. \tag{3.45}$$

Аналогічно

$$\bar{S}_{\overline{n}|} = \int_0^n p(t)v^{n-t} dt = \int_0^n p(t)e^{-\delta(n-t)} dt. \tag{3.46}$$

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. Охарактеризуйте поняття дисконтування.
2. Що називається дисконтом?
3. Наведіть формулу розрахунку сучасної (приведеної) вартості.
4. Поняття ефективної ставки дисконтування.
5. Формула розрахунку ефективної ставки дисконтування.
6. Що є потоком платежу?
7. Дайте визначення понять: член ренти, період ренти, термін ренти.
8. Рівняння еквівалентності.
9. Охарактеризуйте постійні та термінові ренти.
10. Наведіть формули розрахунку сучасної вартості рент постнумерандо і пренумерандо.
11. Відсрочені ренти постнумерандо і відсрочені ренти пренумерандо.
12. Дайте характеристику р-термінових рент.
13. Які ренти називаються премінними (зростаючими)?
14. Поняття зростаючої ренти постнумерандо та зростаючої ренти пренумерандо.
15. Формула для розрахунку вартості об’єднаної ренти.
16. Охарактеризуйте відсрочені зростаючі ренти постнумерандо і відсрочені зростаючі рети пренумерандо.
17. Приведення зростаючої ренти до кінця терміну
18. Дайте характеристику р-термінових зростаючих рент.
19. Які ренти називаються беззупинними?
20. Беззупинні постійні ренти та беззупинні перемінні ренти.

ТЕСТИ

1. Вкажіть правильні твердження відносно даного співвідношення $P(t) = S(t)(1 + i)^{-t}$:

а) величина $P(t)$ називається сучасною (поточною, приведеною) вартістю (величиною) (present value) суми $S(t)$;
б) процес відшукання сучасної вартості суми називається дисконтуванням (приведенням до моменту $t = 0$);
в) різницю $(S – P)$ називають дисконтом (discount).

2. Якщо сучасна вартість відсотків на капітал дорівнює 1, то відповідна їй вартість ефективної відсоткової ставки називається:
а) ефективною ставкою дисконтування;
б) номінальною ставкою дисконтування;
в) реальною ставкою дисконтування.

3. Визначити правильні твердження:
а) потік платежів, усі складові якого позитивні, а часовий інтервал між складовимии однаковий – перемінні ренти;
б) часовий проміжок між двома послідовними платежами – термін ренти;
в) часовий проміжок від початку першого періоду до кінця останнього – період ренти;
г) розміри платежів змінюються за яким-небудь законом – це умовна рента;
д) сплата платежів здійснюється безумовно та число складових такої ренти заздалегідь відомо – вірні ренти;
е) ставиться в залежність від настання деякої випадкової події, число її складових заздалегідь невідомо – фінансова рента (рента), чи ануїтет (annuity).

4. Співвідношення $c_1v^{\tau_1} + c_2v^{\tau_2} + ... + b_kv^{t_k} = b_1v^{\tau_1} + b_2v^{t_2} + ... + b_kv^{t_k}$ називається рівнянням еквівалентності:
а) так;
б) ні.

5. Визначити правильні твердження:
а) серія, виплати якої здійснюються в $t = m$, $t = m + 1$, $t = m + n – 1$ – відстрочена рента пренумерандо;
б) серія з n виплат, розміри яких рівні 1, здійснюваних наприкінці кожного проміжку – рента постнумерандо;
в) серія з n виплат, розміри яких рівні 1, що здійснюються на початку кожного проміжку – рента пренумерандо;
г) серія з n одиничних виплат, зроблених у момент $t = m + 1$, $t = m + 2$, $t = m + n – 1$ – відстрочена рента постнумерандо.

6. Визначити правильні співвідношення:
   а) $ia_{\overline{n}|} + v^n = 1$;
   б) $iS_{\overline{n}|} + 1 = (1+i)^n$;
   в) $d\ddot{a}_{\overline{n}|} + v^n = 1$;
   г) $d\ddot{S}_{\overline{n}|} + 1 = (1+i)^n$.
7. Серія з np виплат величиною $1 / p$, зроблених наприкінці кожного часткового проміжку, називається:
   а) p-терміновою рентою постнумерандо;
   б) p-терміновою рентою пренумерандо;
   в) відстроченою p-терміновою рентою постнумерандо;
   г) відстроченою p-терміновою рентою пренумерандо.

8. Визначити правильні співвідношення:
   а) $a^{(p)}_{\overline{n}|} = S^{(p)}_{\overline{n}|} \cdot v^n$;
   б) $S^{(p)}_{\overline{n}|} = a^{(p)}_{\overline{n}|} \cdot (1+i)^n$;
   в) $\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|} = \ddot{S}^{(p)}_{\overline{n}|} \cdot v^n$;
   г) $\ddot{S}^{(p)}_{\overline{n}|} = \ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|} \cdot (1+i)^n$.

9. Співвідношення $(la)_{\overline{n}|} = v + 2v^2 + ... + nv^n = v(1 + 2v + ... + nv^{n-1}) =$

$$= v(v + v^2 + ... + v^n) = v(\frac{v - v^{n+1}}{1-v}) = v\frac{1-(n+1)v^n + nv^{n+1}}{(1-v)^2}$$ описує:

   а) сучасну вартість зростаючої ренти постнумерандо;
   б) сучасну вартість зростаючої ренти пренумерандо;
   в) майбутню вартість зростаючої ренти постнумерандо;
   г) майбутню вартість зростаючої ренти пренумерандо.

10. Визначити правильні твердження:
   а) потік платежів з моментами виплат $t_k = m + k$ і відповідними величинами виплат $b_k = k$, $k = 1, 2, …, n$ – p-термінова рента пренумерандо;
   б) потік платежів, що здійснюються у моменти $t_k = m + k - 1$ з відповідними розмірами виплат $b_k = k$, $k = 1, 2, …, n$ – відстрочена зростаюча рента пренумерандо;
   в) потік платежів $b_k = k/ p$, що здійснюються у моменти $t_k = k / p$, $k = 1, 2, …, np$ – відсрочена зростаюча рента постнумерандо;
   г) потік платежів $b_k = k/ p$, що здійснюються у моменти $t_k = k / p$, $k = 1, 2, …, np$ – p-термінова зростаюча рента постнумерандо.

Тема 4. ОСНОВИ МОДЕЛЮВАННЯ РИЗИКУ У СТРАХУВАННІ

1. ПОНЯТТЯ РИЗИКУ, ЙОГО МІСЦЕ В СТРАХУВАННІ, КЛАСИФІКАЦІЯ СТРАХОВИХ РИЗИКІВ, МЕТОДИ ОЦІНКИ

   Ризик. Страховий ризик. Методи оцінки ризиків. Метод індивідуальних оцінок. Метод середніх величин. Метод процентів. Класифікація ризиків. Критерії страхового ризику

2. МОДЕЛЮВАННЯ РИЗИКІВ У СТРАХУВАННІ

   Математичне сподівання. Дисперсія. Середньоквадратичне відхилення. Розподіл виплат по портфелю: біноміальний розподіл, розподіл Пуассона, геометричний розподіл, негативний біноміальний розподіл

1. ПОНЯТТЯ РИЗИКУ, ЙОГО МІСЦЕ В СТРАХУВАННІ, КЛАСИФІКАЦІЯ СТРАХОВИХ РИЗИКІВ, МЕТОДИ ОЦІНКИ

З ризиком ми зустрічаємося щоденно: і на побутовому рівні, і в процесі здійснення будь-якої господарської діяльності. Як правило, ризик пов'язується з невпевненістю в можливому результаті. Незважаючи на давню історію вивчення ризику, в науковій літературі немає єдиної думки щодо визначення цього поняття та єдиного підходу щодо теорій ризику.

Ризик як економічна категорія виник з появою товарно-грошових відносин і відображає подію, яка може відбутися або ні. До того ж для події, що відбулася, можливі три варіанти економічного результату. А саме:

- позитивний (вигода, прибуток);
- нульовий (результат не отримано);
- від'ємний (збиток, втрата).

Науковці вважають, що вперше спроба визначення сутності та змісту поняття «ризик» була зроблена математиком Иоганом Тетенсом (XVIII ст). Його наукові праці з виміру ризику знайшли практичне застосування в страхуванні життя. Хоча основи актуарних розрахунків, серед основних завдань яких є дослідження та групування ризиків, закладеш в працях вчених Д. Граунта, Я. Вітта, Е. Галлея ще в XVII ст. Термін «ризик» почав використовуватись спочатку у страховій теорії, а із зростанням впливу науково-технічного прогресу на фінансово-господарське та соціальне життя суспільства, поширився і на економічну теорію.

Ризик у господарській діяльності	усвідомлена можливість небезпеки виникнення непередбачених втрат очікуваного прибутку, майна, грошей у зв'язку з випадковими змінами умов економічної діяльності, несприятливими обставинами.

Вимірюють ризик частотою, ймовірністю виникнення того чи іншого рівня втрат.

Досить повним та сучасним є визначення ризику в навчальному посібнику «Фінансовий менеджмент» за редакцією проф. Г. Г. Кірейцева: «Під *ризиком* слід розуміти можливість виникнення збитку внаслідок дії в переважній більшості зовнішніх факторів, які при оцінці ситуації (перед прийняттям рішення) були невідомі та вплив яких може змінити ймовірність досягнення бажаного результату».

Ризик – це також ймовірність виникнення збитків, втрат або недоотримання прибутку порівняно з прогнозним варіантом.

Фактор ризику та необхідність покриття можливого збитку в результаті його прояву викликає потребу в страхуванні. Історично склалась уява про ризик як категорію, що лежить в основі страхування. Проте сьогодні страхування включає в себе різні галузі наукових знань та практичного досвіду про природу явищ. Тому в розуміння терміну «ризик» в літературі вкладається різне смислове навантаження та зміст.

Страховий ризик	прогнозний збиток об'єкту страхування в результаті настання страхової події.

Для оцінки ризику в страховій практиці використовують різноманітні спеціальні методи, які постійно розвиваються та вдосконалюються. Найбільш поширеними є наступні:

- метод індивідуальних оцінок;
- метод середніх величин;
- метод процентів.

Метод індивідуальних оцінок є одним з методів експертних оцінок, що побудовані на використанні професійного досвіду та інтуїції фахівців. Даний метод відноситься до великої групи абстрактно-логічних методів дослідження. Метод індивідуальних оцінок у вимірюванні ризику використовується страховиком тоді, коли неможливо порівняти даний ризик з середнім типом ризику, коли можна зробити тільки довільну його оцінку в залежності від професіоналізму, досвіду та суб'єктивного погляду експерта.

Середні величини дозволяють дослідити типові ознаки, якісно однорідних явищ та виміряти їх коливання навколо середнього рівня розвитку. *Метод середніх величин* є одним із статистичних методів дослідження і в оцінці ризику передбачає розмежування окремих ризикових груп на більш дрібні підгрупи з метою створення аналітичної бази для визначення ризику.

Метод процентів також відноситься до групи методів статистичного аналізу і в системі оцінки ризику представляє собою сукупність плюсових та від'ємних відхилень від середнього ризикового типу наявної аналітичної бази. Дані відхилення виражаються в процентах або в промілях від середнього ризикового типу.

Використовуються також економетричні, статистичні методи оцінки й аналізу ризиків, методи вербального аналізу тощо. Важливо підкреслити, що в сучасних умовах вітчизняні та зарубіжні вчені володіють значним інструментарієм для оцінки та відстеження ризику, застосовують актуарні розрахунки, моніторинг, комплексне моделювання страхових процесів, емпіричний досвід, методи експертних оцінок, методи асоціацій та аналогій, експертиз тощо.

Для оцінки та аналізу ризиків необхідно їх класифікувати за відповідними ознаками в типи, види, групи тощо. Проте в сучасних умовах в страхуванні не існує чітко розробленої класифікації ризиків. В законодавчій та нормативній літературі також немає класифікації та поділу ризиків за видами, проте міститься вимога виконання актуарних (математичних) розрахунків при визначенні страхових тарифів, в основу яких покладена вартісна оцінка ризиків.

Узагальнюючи вищевикладене, можна запропонувати наступну класифікацію ризиків у страхуванні (рис. 4.1).

Рис. 4.1. Класифікація ризиків у страхуванні

Безумовно, що найбільш поширену групу складають ризики, які можливо застрахувати. Страховий ризик – це такий ризик, який піддається вимірюванню, оцінці з позиції ймовірності настання страхової події та кількісних характеристик можливого збитку.

Основні *критерії страхового ризику*:
- ризик повинен бути можливим;
- ризик повинен мати випадковий характер;

- випадковість ризику повинна співвідноситись з певною сукупність споріднених об'єктів;
- настання страхового випадку, як реалізація ризику, не повинно бути пов'язаним з волевиявленням страхувальника чи зацікавленої особи;
- факт настання страхового випадку невідомий у часі та просторі;
- страхова подія не повинна мати обсяги катастрофічного лиха;
- наслідки реалізації ризику повинні бути об'єктивно виміряні й оцінені.

Крім того, страхові ризики класифікуються за різними ознаками, насамперед:

- за джерелом небезпеки (ризики прояву стихійних сил та цілеспрямованої дії людини);
- за обсягом відповідальності страховика (індивідуальні ризики та універсальні);
- специфічні ризики (аномальні ризики та катастрофічні – ендемічні, якості землі, політичні, воєнні, а також екологічні, транспортні, спеціальні тощо);
- об'єктивні ризики (ризики, що пов'язані з неконтрольованими факторами);
- суб'єктивні ризики (ризики, що заперечують або ігнорують об'єктивну реальність) тощо.

Кожна з цих груп ризиків має свій відповідний поділ на види чи підвиди.

У фінансово-економічній діяльності ризики поділяються за галузями економіки, за сферами та видами діяльності тощо. Наприклад, фінансовий, банківський, кредитний, валютний, процентний, іпотечний, комерційний, підприємницький, моральний (виникає після укладання договору страхування) ризик тощо.

Ризик у страхуванні розглядають з певних позицій:

- як конкретне явище чи сукупність явищ;
- у зв'язку з конкретним застрахованим об'єктом;
- з ймовірністю втрати або ушкодження об'єкта, прийнятого на страхування;
- у зв'язку з діяльністю страховика.

З метою оцінки й аналізу виділяють також ризики діяльності страхової компанії. А саме:

- ризики, що передаються страхувальником страховій компанії за договором страхування;
- ризики, що пов'язані з діяльністю самого страховика.

Така класифікація необхідна для формування спеціальних резервів та фондів страхової компанії для покриття ризиків. (У страхуванні комплексна діяльність з аналізу, оцінки ризиків, вибору оптимального покриття тощо називається андерайтингом). Загально визнаються та найбільш відомі в світовій практиці європейська та американська класифікації.

Європейська класифікація вважається найбільш вичерпною, враховує специфіку більшості ризиків, що обумовлені діяльністю страховика. При цьому застосовується метод аналізу ризиків – економетричний. Проте недостатнє застосування статистичних методів не дозволяє вважати результати такої оцінки повністю адекватними, тобто існує недостатність кількісної оцінки ризиків.

Американська класифікація розділяє ризики за етапами роботи страхової компанії, протягом якої вона піддається зазначеним ризикам:

- етап становлення;
- етап повноцінної активної діяльності;
- етап ліквідації страхової компанії.

При цьому для оцінки та аналізу ризиків використовується, головним чином, вербальний аналіз, коли застосовується не тільки вірогідні розрахунки до певних ризиків, що мають достатнє статистичне спостереження, а розглядаються і ті ризики, що не мають достатньої статистики. Тобто недостатня якісна оцінка ризиків.

За європейською і американською класифікаціями ризиків страхової діяльності роль джерела виплати за ризиками страхових операцій виконують власні кошти страхової компанії.

Останнім часом все більш популярною стає фінська класифікація ризиків, яка знаходить економічний компроміс між кількісним і якісним аналізом та оцінкою ризиків. За фінською класифікацією ризики у страхуванні поділяються на:

- основні ризики;
- додаткові ризики.

Основні ризики покриваються за рахунок спеціально сформованих страхових резервів, а додаткові за рахунок резерву стабілізації, а не за рахунок власних вільних резервів. Власні вільні кошти використовуються для доповняльного зниження негативного впливу додаткових ризиків.

Зрозуміло, що перед людством стоїть завдання попередження, компенсації та ліквідації ризиків, що можливо досягти за допомогою антиризикової діяльності. Уникнути чи зменшити вплив ризиків, як підкреслює Т. А. Ротова, можна за допомогою ризик-менеджменту –

системи управління ризиками та фінансовими відносинами, що виникають у процесі бізнесу. Управління ризиками, вплив на них може відбуватися при застосуванні певних форм антиризикової діяльності, що представлені на рис. 4.2.

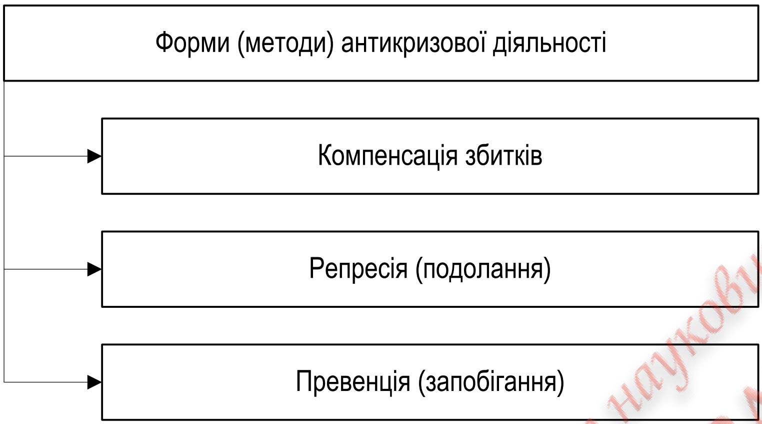


Рис. 4.2. Форми антикризової діяльності

У сучасних умовах з погляду на фінансування пріоритетну роль в антиризиковій діяльності відіграє компенсаційна форма, яка відображає страховий захист. А превенція займає другорядне місце, хоча й переросла в самостійну функцію страхування.

Зазначені форми (методи) антиризикової діяльності проявляються у функціях страхування: компенсаційній, репресивній, превентивній. Слід підкреслити, що здійснення зазначених функцій можливе за рахунок спеціальних коштів, які існують у відповідних фондах, і які називаються страховими.

2. МОДЕЛЮВАННЯ РИЗИКІВ У СТРАХУВАННІ

З широкого спектру різних ризиків виділимо ті, які піддаються страхуванню. За ознаками таких явищ, вкажемо головні характеристики таких ризиків: можуть розглядатися тільки масові явища, що мають тенденцію до нескінченного повторення; ці явища повинні носити об'єктивний характер, тобто залежати від прояву чиєї-небудь волі; збиток, викликаний даними подіями, повинен піддаватися виміру. Під цим розуміється не стільки існування верхньої оцінки втрат, скільки можливість виразити їх в грошових одиницях.

У теорії ризику розроблено системи понять, моделей і методів, що дозволяють кількісно оцінити, в тому числі, фінансові ризики в діяльності страхової компанії.

Нехай випадкові величини N, Y, X описують: N – число страхових випадків на один договір, Y – величину можливих втрат на один страховий випадок (за умови, що він відбувся), X – розмір втрат страхової компанії в результаті настання страхових випадків.

Нехай настання страхового випадку за один період страхування характеризується імовірнісним розподілом $F_N(x)$, а втрати, можливі в результаті однієї страхової події, описуються імовірнісним розподілом $F_X(x)$.

Пару $(F_N(x); F_X(x))$ будемо називати *ризиком*.

Для зручності викладу розділимо ризик клієнта $(F_N(x); F_Y(x))$ і ризик страхової компанії, пов'язаний з договором даного клієнта $F_N(x); F_X(x))$. Значення цього розподілу полягає в наступному. Клієнт має ризик $(F_N(x); F_Y(x))$, що означає, що для нього страхова подія відбувається згідно імовірнісного розподілу F_N числа страхових випадків, а втрати, які можуть відбутися в результаті страхової події, описуються випадковою величиною Y, з розподілом F_Y. Для страхової компанії, що уклала договір страхування даного ризику клієнта, цей договір спонукає ризик $(F_N(x); F_X(x))$, який має той же розподіл числа випадків F_N, що і ризик клієнта, а втрати компанії полягають у виплатах, які вона робитиме за позовами даного клієнта. Ці виплати описує випадкова величина X, що має розподіл F_X. Випадкові величини Y і X залежні, але не однакові.

У практиці розрахунків використовуються біноміальний, пуассонівський і геометричний розподіли числа вимог. Розподіли втрат можуть бути як дискретними, так і безперервними.

Отже, етап перший – з’ясування ризику – передбачає наступні кроки:

- визначення класу приналежності ризику, що вивчається.
- оцінка розподілів вірогідності втрат і числа випадків, що визначають ризик.
- Вибір методів перевірки адекватності одержаної на першому кроці оцінки ризику.

Основні позначення і визначення.

Розглянемо один вид страхування виходячи з того, що він повинен бути принаймні беззбитковий, тобто портфель об’єднаний одним страховим фондом.

Фінансові потоки по створенню і витрачанню страхового фонду, тісно пов'язані з категорією вірогідності. Тому можливо описати фінансову складову страхування в термінах теорії вірогідності. Введемо наступні позначення, які використовуватимуться при описі всіх задач:

n – число договорів в досліджуваному портфелі;

N_i – кількість позовів від договору з номером i;

$N = \sum_{i=1}^{n} N_i$ – загальне число позовів по портфелю;

M – число договорів, що пред'явили хоча б один позов. Якщо за договором можливий не більш, ніж один позов, то $M = N$;

q_i – вірогідність страхового випадку для договору з номером i. Припустимо, що портфель однорідний щодо вірогідності страхового випадку, тобто $q_i = q, \forall i = 1, \ldots, n$;

S_i – страхова сума за договором з номером i;

Y_i^j – розмір j-го по порядку відшкодування, виплаченого за договором з номером i;

$X_i = \sum_{j=1}^{N_i} Y_i^j$ – загальне відшкодування за договором з номером i. $X_i = 0$, якщо число позовів $N_i = 0$;

$V_i = \dfrac{X_i}{S_i}$ – відносне страхове відшкодування по договору з номером i;

$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ – загальне відшкодування по портфелю.

Більшість приведених характеристик страхового портфеля має випадкову природу, для аналізу якої будуть потрібні застосування певних функцій і числових характеристик.

Нехай K – деяка дискретна випадкова величина, що приймає значення $K_0, K_1, \ldots$ з деякою вірогідністю $p_i = P(K = K_i)$

$$K = \begin{cases} K_0 \ K_1 \ \ldots \ K_m \ \ldots \\ p_0 \ p_1 \ \ldots \ p_m \ \ldots \end{cases}, p_i \geq 0 \ \ \forall i = 0, \ldots, \sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1. \tag{4.1}$$

Нехай Z – безперервна випадкова величина, що має щільність $f_Z(x)$ і функцію розподілу $F_Z(x)$.

Середнє значення (математичне сподівання, перший момент) для K і Z рівні, відповідно, $EK = \sum_{i=0}^{\infty} p_i K_i$.

$$EZ = \int_{-\infty}^{\infty} x f_Z(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_Z(x) \cdot \qquad (4.2)$$

Математичне сподівання випадкової величини означає те, «що очікується в середньому за достатньо тривалий проміжок часу». Зокрема, для K математичне сподівання EK – середнє очікуване число позовів від однорідного портфеля за «звичний» інтервал часу.

Другий момент для K і Z рівні, відповідно $EK^2 = \sum_{i=0}^{\infty} p_i K_i^2$.

$$EZ^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_Z(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF_Z(x). \qquad (4.3)$$

Дисперсія випадкової величини визначається як різниця другого моменту і квадрата першого моменту

$$VarK = EK^2 - (EK)^2. \qquad (4.4)$$

Дисперсія є середнім квадратичним відхиленням значень випадкової величини від її математичного сподівання, тобто дисперсія оцінює рівень можливих флуктуації випадкової величини.

Середньоквадратичним відхиленням випадкової величини називають арифметичне коріння з її дисперсії $\sigma K = \sqrt{VarK}$.

Коефіцієнтом варіації випадкової величини називають відношення її середньоквадратичного відхилення до середнього значення $WK = \sigma K / EK$.

Розподіли числа виплат по портфелю.

Число виплат по портфелю є дискретною випадковою величиною і може приймати значення 0, 1, 2, 3, ... з деякою вірогідністю. Для визначення вірогідного числа виплат визначальне значення має така характеристика випадкової величини, як її розподіл $p_k = P(N = k)$

$$K = \begin{cases} 0 & 1 & 2 \ldots & n \\ p_0 & p_1 & p_2 \ldots & p_n \end{cases} \quad p_k \geq 0 \ , \sum_{i=0}^{N} p_k = 1. \qquad (4.5)$$

Припустимо, що фактичні значення випадкової змінної N за деяку кількість періодів у минулому відомими. На підставі наявних даних можна розрахувати вибіркові оцінки для середнього значення і дисперсії числа позовів. Позначимо їх як M_N і D_N відповідно. Тоді основна задача полягає у підборі такого гіпотетичного розподілу вірогідності для N, яке відповідає з деякою заданою точністю спостережуваним значенням N.

Найбільш поширені наступні розподіли.

Біноміальний розподіл.

Припустимо, що для всіх договорів деякого портфеля страхова подія може реалізуватися за час дії договору тільки один раз і вірогідність того, що воно відбудеться, однакова для всіх і рівна q. Тоді загальне число позовів по даному портфелю за фіксований проміжок часу матиме біноміальний розподіл вірогідності. Це означає, що

$$p_i = P(N = i) = C_i^n q^i (1-q)^{n-i} . \qquad (4.6)$$

Числові характеристики – середнє значення і дисперсію біноміальної випадкової змінної

$$\begin{aligned} EN &= nq, \\ VarN &= nq(1-q). \end{aligned} \qquad (4.7)$$

<u>*Приклад 4.1*</u>. Для портфеля з 200 договорів з вірогідністю страхового випадку 0,01 графічний розподіл загального числа виплат по портфелю в діапазоні [0,1] представлено на рис. 4.3.

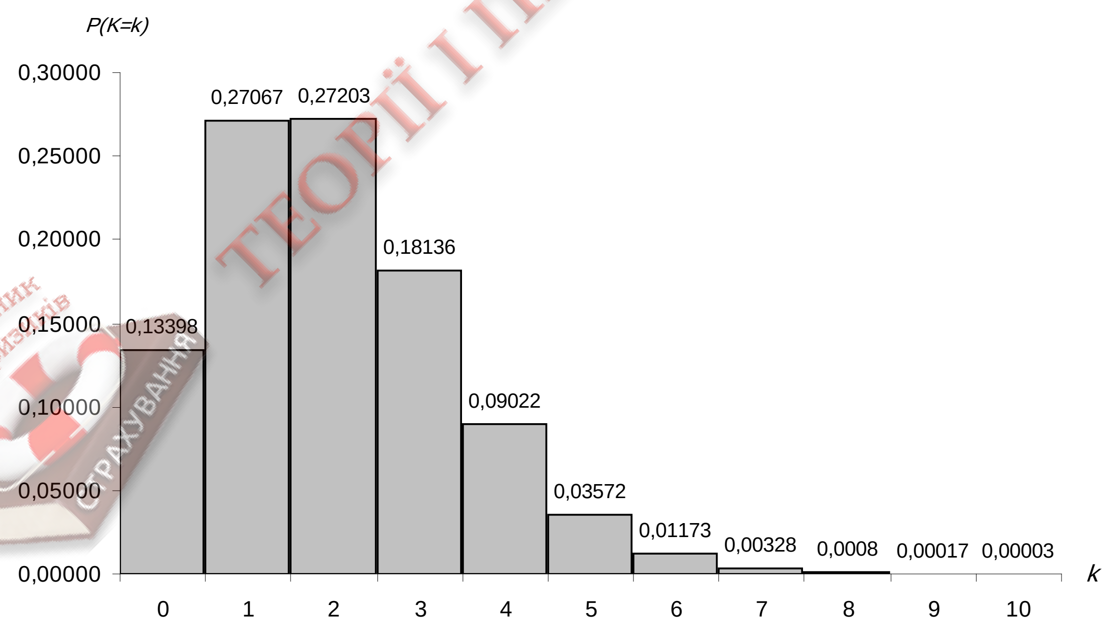


Рис. 4.3. Біноміальний розподіл загального числа виплат по портфелю

Розподіл Пуассона.

На практиці у багатьох випадках число договорів достатньо велике, а вірогідність страхового випадку q мала. У випадку, якщо середнє число виплат nq за даний період є деяким постійним числом λ, то біноміальний розподіл можна наблизити розподілом Пуассона

$$p_k = P(N = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \qquad (4.8)$$

Стосовно нашого прикладу розподіл Пуассона на інтервалі [0, 10] графічно виглядатиме, як на рис. 4.4.

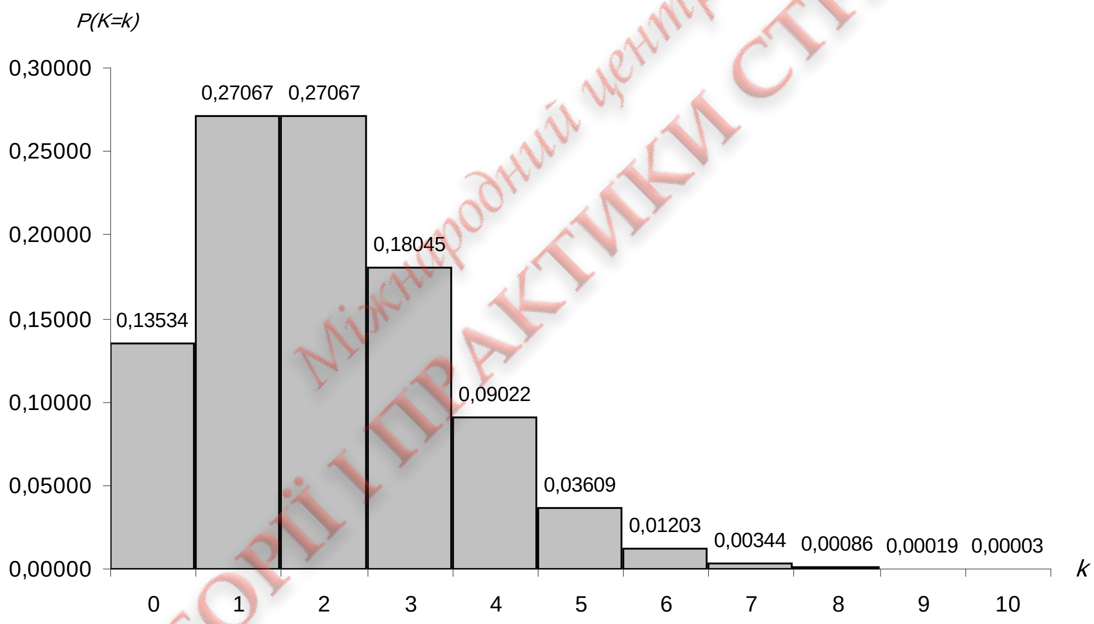


Рис. 4.4. Розподіл Пуассона

Середнє значення і дисперсія рівні λ

$$EN = \lambda,\ VarN = \lambda. \qquad (4.9)$$

Пуассонівський розподіл може застосовуватися і в тому випадку, якщо за договором може бути декілька виплат. У цьому випадку q дорівнює число виплат віднесених до числа договорів.

Пуассонівський розподіл виконує дуже важливу роль в страховій математиці, оскільки може застосовуватися при дотриманні наступних умов:

- під час коротких тимчасових інтервалів може бути пред'явлене не більше ніж одна вимога про виплату;
- вірогідність пред'явлення вимоги протягом тимчасового інтервалу пропорційна довжині інтервалу і не залежить від його положення в часі;
- кількості вимог, пред'явлених в непересічні інтервали часу, незалежні.

Очевидно, що виконання цих умов можна з прийнятною точністю чекати від реального процесу пред'явлення вимог про виплату страхових відшкодувань.

Геометричний розподіл.

Дискретна випадкова величина N має геометричний розподіл вірогідності, якщо воно задане як

$$p^i = P(N = i) = (1 - q)q^i,\ 0 < q < 1,\ i = 0, 1, \ldots \tag{4.10}$$

Середнє значення і дисперсія рівні відповідно

$$EN = \frac{q}{1-q},\ VarN = \frac{q}{1-q^2}. \tag{4.11}$$

<u>*Приклад 4.2*</u>. Нехай вибіркове середнє число позовів для деякого портфеля договорів рівне 0,2. Тоді $EN = q / (1 - q)$, отже, $q = 1/6$. Гістограма геометричного розподілу для цього випадку представлена на рис. 4.5.

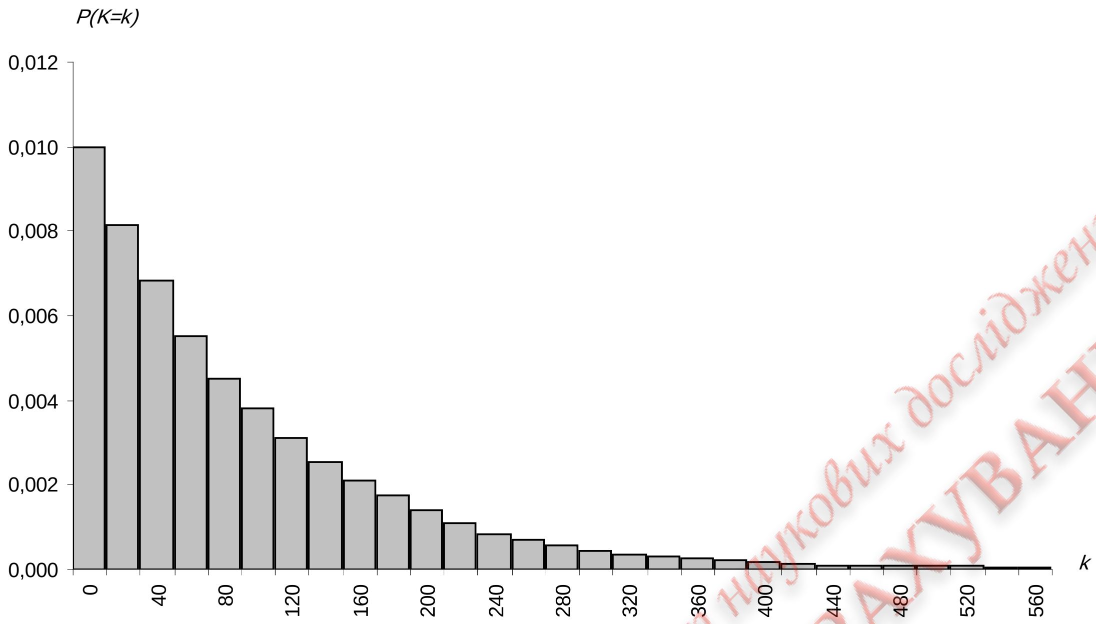


Рис. 4.5. Гістограма геометричного розподілу позовів для випадку прикладу 4.2

Геометричний розподіл є окремим випадком $\alpha = 1$ загальнішого і складнішого розподілу – негативного біноміального.

Негативний біноміальний розподіл.

Число виплат також можна наблизити негативним біноміальним розподілом з параметрами q і α

$$p_i = P(N = i) = \frac{\alpha(\alpha+1)...(\alpha+i-1)}{i!}(1-q)^{\alpha} q^i, i = 0,1,\dots \quad (4.12)$$

Середнє і дисперсія негативного біноміального розподілу дорівнюють відповідно

$$EN = \frac{\alpha q}{1-q}, \qquad VarN = \frac{\alpha q}{(1-q)^2}. \quad (4.13)$$

Для негативного біноміального розподілу дисперсія більше середнього, що дає можливість у деяких випадках сподіватися на адекватніший результат.

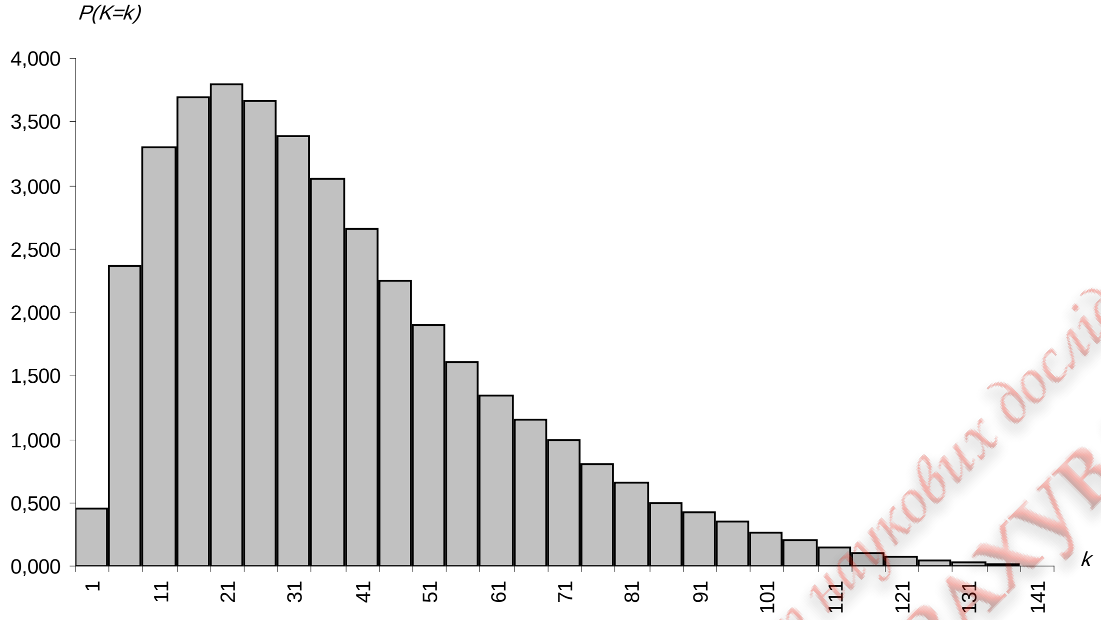


Рис. 4.6. Гістограма розподілу позик страхового портфеля

<u>*Приклад 4.3*</u>. Нехай для деякого портфеля відомо, що оцінки середнього значення і дисперсії рівні відповідно $M_N = 2$ і $D_N = 3$. Тоді параметри негативного біноміального розподілу можуть бути знайдені як рішення системи з двох рівнянь щодо змінних q і α

$$\begin{cases} EN = \dfrac{\alpha q}{1-q} \approx 2, \\ VarN = \dfrac{\alpha q}{(1-q)^2} \approx 3. \end{cases}$$

Вирішуючи систему, одержуємо, що $q = 1/3$ і $\alpha = 3$. Гістограма розподілу для даного прикладу представлена на рис. 4.6.

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. Охарактеризуйте поняття ризику.
2. Що називається страховим ризиком?
3. Метод індивідуальних оцінок страхового ризику.
4. Метод середніх величин.
5. Метод процентів.
6. Наведіть класифікацію ризиків з позиції страхування.
7. Які основні критерії страхового ризику?
8. Охарактеризуй позиції з яких розглядається ризик у страхуванні.

9. Особливості європейської та американської класифікацій ризиків.
10. Які ознаки страхового ризику?
11. Які етапи моделювання ризиків у страхуванні?
12. Особливості застосування розподілів при моделюванні ризиків.

ТЕСТИ

1. Визначити правильні твердження:
   а) метод середніх величин є одним з методів експертної оцінки, що побудовані на використанні професійного досвіду та інтуїції спеціалістів. Даний метод відноситься до великої групи абстрактно-логічних методів дослідження;
   б) метод індивідуальних оцінок є одним із статистичних методів дослідження і в оцінці ризику передбачає розмежування окремих ризикових груп на більш дрібні підгрупи з метою створення аналітичної бази для визначення ризику за певними відповідними ризиковими ознаками;
   в) метод процентів є одним зметодів статистичного аналізу і в системі оцінки ризику представляє собою сукупність додатних та від’ємних відхилень від середнього ризикового типу наявної аналітичної бази.

2. Основні критерії страхового ризику:
   а) ризик повинен бути можливим;
   б) ризик повинен мати випадковий характер;
   в) випадковість ризику повинна співвідноситись з певною сукупність споріднених об’єктів;
   г) настання страхового випадку, як реалізація ризику, не повинно бути пов’язаним з волевиявленням страхувальника чи зацікавленої особи;
   д) факт настання страхового випадку невідомий у часі та просторі;
   е) страхова подія не повинна мати обсяги катастрофічного лиха;
   ж) наслідки реалізації ризику повинні бути об’єктивно виміряні й оцінені.

3. З’ясування ризику передбачає наступні кроки:
   а) вибір методів перевірки адекватності оцінки ризику;
   б) визначення класу приналежності ризику, що вивчається;
   в) оцінка розподілів імовірності втрат і числа випадків, що визначають ризик.

4. Наведені числові характеристики – середнє значення і дисперсія $EN = nq$, $VarN = nq/(1 - q)$ відносяться до:
   а) розподіл Пуассона;
   б) біноміальний розподіл;
   в) геометричний розподіл.

5. Наведені числові характеристики – середнє значення і дисперсія $EN = \lambda$, $VarN = \lambda$ відносяться до:
   а) геометричний розподіл;
   б) біноміальний розподіл;
   в) розподіл Пуассона.

6. Умови застосування розподілу Пуассона:
   а) під час коротких тимчасових інтервалів може бути пред'явлене не менше однієї вимоги про виплату;
   б) імовірність пред'явлення вимоги протягом тимчасового інтервалу пропорційна довжині інтервалу і не залежить від його положення в часі;
   в) кількості вимог, пред'явлених в непересічні інтервали часу, незалежні.

7. Дискретна випадкова величина N, якщо вона задана виразом $p_k = P(N = k) = \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ має розподіл імовірності:
   а) розподіл Пуассона;
   б) геометричний розподіл;
   в) біноміальний розподіл.

8. Визначити правильну відповідь:
   а) європейська класифікація розділяє ризики за етапами роботи страхової компанії, протягом якої вона піддається зазначеним ризикам: етап становлення; етап повноцінної активної діяльності; етап ліквідації страхової компанії. При цьому для оцінки та аналізу ризиків використовується, головним чином, вербальний аналіз, коли застосовується не тільки вірогідні розрахунки до певних ризиків, що мають достатнє статистичне спостереження, а розглядаються і ті ризики, що не мають достатньої статистики. Тобто недостатня якісна оцінка ризиків;

б) американська класифікація вважається найбільш вичерпною, враховує специфіку більшості ризиків, що обумовлені діяльністю страховика. При цьому застосовується метод аналізу ризиків – економетричний. Проте недостатнє застосування статистичних методів не дозволяє вважати результати такої оцінки повністю адекватними, тобто існує недостатність кількісної оцінки ризиків.

9. Наведене співвідношення $V_i = \dfrac{X_i}{S_i}$ – це:

а) загальне число позовів по портфелю;
б) страхова сума за договором з номером *i*;
в) загальне відшкодування по портфелю;
г) відносне страхове відшкодування по договору з номером *i*.

10. Наведене співвідношення $\int\limits_{-\infty}^{\infty} x dF_z(x)$ описує:

а) середнє квадратичне відхилення числа позовів від однорідного портфеля;
б) дисперсія числа позовів від однорідного портфеля;
в) математичне сподівання числа позовів від однорідного портфеля.

Тема 5. АНАЛІЗ І УПРАВЛІННЯ РИЗИКОМ У СТРАХУВАННІ

1. РОЗПОДІЛ ВТРАТ

   Рівномірний розподіл. Експоненційний розподіл. Розподіл Парето. Гама-розподіл. Бета-розподіл. Квадратичний розподіл. Нормальний розподіл

2. РОЗПОДІЛ ВИПЛАТ

   Середнє і дисперсія виплат. Сумарні виплати по портфелю

3. ПОРІВНЯННЯ РИЗИКОВИХ СИТУАЦІЙ

   Метод середніх величин. Ступінь ризику. Імовірність розорення (нерівність Лундберга). Корисність від страхування та корисність страхової діяльності. Функція корисності. Властивості функції корисності (Нерівність Йенсена). Функція «сумління»

1. РОЗПОДІЛ ВТРАТ

У майновому страхуванні розмір відшкодування може приймати будь-яке значення від нуля до страхової суми. Це означає, що випадкові величини Y_i^j (j-е по порядку страхове відшкодування за договором з номером i) і X_i (сума страхового відшкодування, виплаченого за i-м договором за період його дії за умови, що страховий випадок відбувся) є безперервними випадковими величинами. Природа безперервної випадкової величини A може бути описана функцією розподілу імовірності

$$F_A(x) = \mathrm{P}(A \le x). \qquad (5.1)$$

або щільністю розподілу імовірностей (якщо вона існує)

$$f_A(x) = F_A^{'}(x). \qquad (5.2)$$

Розподіл випадкової величини – одне з основних понять теорії імовірності, також відіграє дуже важливу роль в актуарній математиці.

Для страхової компанії ризик втрати, що приймається на страхування, – це негативна по своїх можливих економічних наслідках випадкова величина. Значення її характеристик дозволяє дати їй вартісну оцінку, а також – прогноз фінансового стану компанії.

Нехай є фактичні значення збитку, який був понесений однаковими об’єктами в результаті страхового випадку впродовж деякого часу. Тоді можна вважати, що відомі вибіркові оцінки для середнього значення і дисперсії випадкової величини Y, що описує можливі втрати в результаті страхового випадку. Позначимо їх значення як M_Y і D_Y відповідно. Тоді, як і раніше, виникає задача підбору гіпотетичного розподілу $F_Y(x)$, що найкращим чином відповідає фактичним даним. У актуарній літературі застосовуються наступні безперервні розподіли для опису збитку за одним договором і по одному страховому випадку.

Рівномірний розподіл.

Випадкова величина Y має рівномірний розподіл на відрізку $[a, b]$, якщо її щільність постійна на цьому відрізку і рівна нулю поза ним

$$f_Y(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, x\in[a,b]\\ 0, \textit{в іншому випадку}\end{cases},$$
$$F_Y(x)=\begin{cases}\dfrac{x-a}{b-a}, x\in[a,b]\\ 1, x>b\end{cases}. \qquad (5.3)$$

Графічно рівномірний розподіл збитку для цього випадку представлений на рис. 5.1.

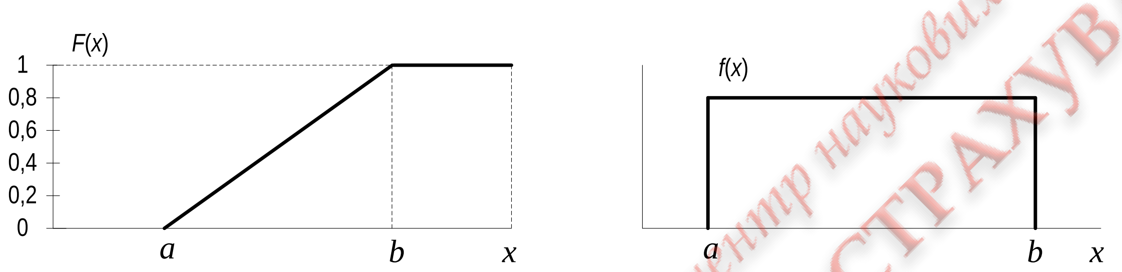


Рис. 5.1. Графіки функції розподілу імовірності і щільності імовірності рівномірно розподіленої на інтервалі [*a*, *b*] випадкової величини

Середні втрати і дисперсія рівні відповідно

$$EY=\frac{b-a}{2},$$

$$VarY=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

<u>Приклад 5.1</u>. Нехай для деякого об’єкту страхування збитки, можливі в результаті, скажімо, пожежі, рівномірно розподілені від нуля до повної вартості об’єкту. Нехай вартість об’єкту оцінена в 120 гр. од. Тоді середні втрати для цього об’єкту рівні $EY = (120 - 0) / 2 = 60$, а дисперсія – $VarY = (120 - 0)^2 = 1\ 200$.

Очевидно, що в більшості реальних випадків рівномірний розподіл не підходить для опису розміру збитку. На практиці збитки різних розмірів мають різну імовірність виникнення. Для їх опису використовуються наступні види безперервних розподілів.

Експоненціальний розподіл.

Випадкова величина має експоненціальний розподіл з параметром $\lambda > 0$, якщо її щільність має вигляд

$$f_Y(x) = \lambda e^{-\lambda x},\ x > 0, \tag{5.4}$$

функція розподілу

$$F_Y(x) = 1 - e^{-\lambda x},\ x > 0. \tag{5.5}$$

Середнє значення і дисперсія відповідно дорівнюють

$$\begin{aligned} EY &= \frac{1}{\lambda}, \\ VarY &= \frac{1}{\lambda^2}. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Для експоненціально розподіленої випадкової величини середнє дорівнює середньоквадратичному відхиленню, що є доволі жорсткою умовою.

Відзначимо, що, припускаючи експоненціальний розподіл для втрат, ми таким чином маємо на увазі можливість катастрофічно великих значень збитків (немає обмеження на x зверху). Проте, щільність експоненціального розподілу є швидко спадаючою функцією, що робить імовірність великих значень збитків нікчемно малою. У нашому прикладі імовірність того, що можливі збитки перевищать середнє очікуване значення в 1,4 рази, менше 0,5%.

Характерна межа експоненціального розподілу – значна кількість невеликих позовів і можливість рідкісних дуже великих позовів, тобто воно є асиметричним і «довгохвостим».

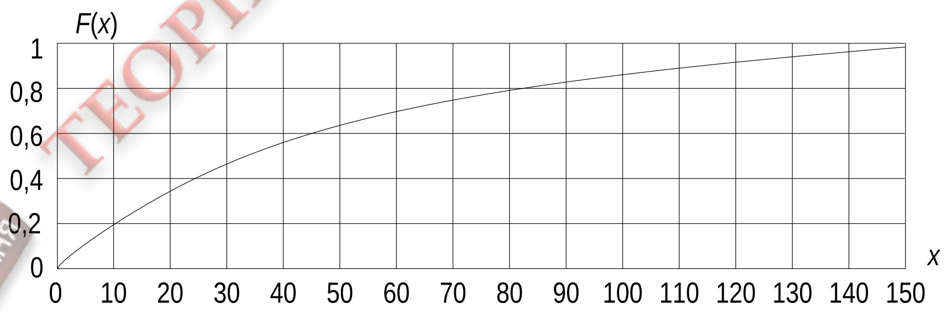


Рис. 5.2. Графік функції розподілу імовірностей при експоненційному розподілі збитку

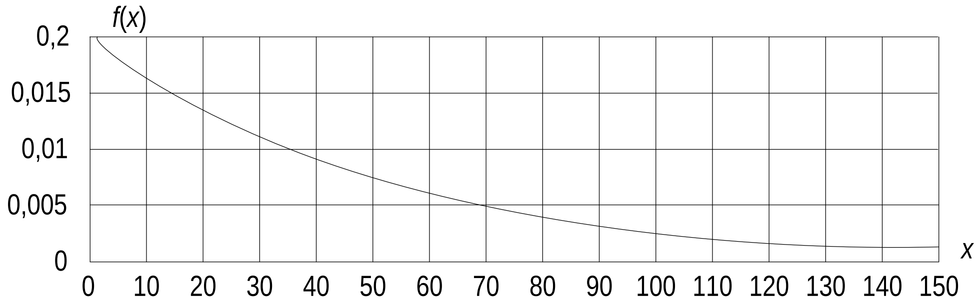


Рис. 5.3. Графік щільносі розподілу імовірностей при експоненційному розподілі збитку

Розподіл Парето.

Випадкова величина Y має розподіл Парето з параметрами $\lambda > 0$ і $\alpha > 0$, якщо її щільність задана як

$$f_Y(x) = \frac{\alpha}{\lambda}\left(\frac{\lambda}{\lambda + x}\right)^{\alpha+1}, x > 0. \tag{5.7}$$

Функція розподілу в цьому випадку задана як

$$F_Y(x) = 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda + x}\right)^{\alpha}. \tag{5.8}$$

Середнє значення для випадкової величини, що має розподіл Парето, визначається як

$$EY = \int_0^\infty x \cdot \frac{\alpha}{\lambda}\left(\frac{\lambda}{\lambda + x}\right)^{\alpha+1} dx = \frac{\lambda}{\alpha - 1}. \tag{5.9}$$

Для другого моменту маємо

$$EY^2 = \int_0^\infty x^2 \cdot \frac{\alpha}{\lambda}\left(\frac{\lambda}{\lambda + x}\right)^{\alpha+1} dx = \frac{2\lambda^2}{(\alpha - 1)(\alpha - 2)}. \tag{5.10}$$

Звідси одержуємо вираз для дисперсії

$$VarY = EY^2 - (EY)^2 = \frac{\alpha\lambda^2}{(\alpha - 1)^2(\alpha - 2)}. \tag{5.11}$$

Як було зазначено, кінцевий середній розподіл Парето маємо тільки при $\alpha > 1$, а кінцеву дисперсію – при $\alpha > 2$.

Коефіцієнт варіації випадкової величини, що має розподіл Парето рівний $WY = \sigma Y / EY = \sqrt{\alpha / (\alpha - 2)}$.

Видно, що коефіцієнт варіації завжди більше одиниці. Це говорить про те, що характерна особливість розподілу Парето – імовірність великих значень позовів – достатньо велика.

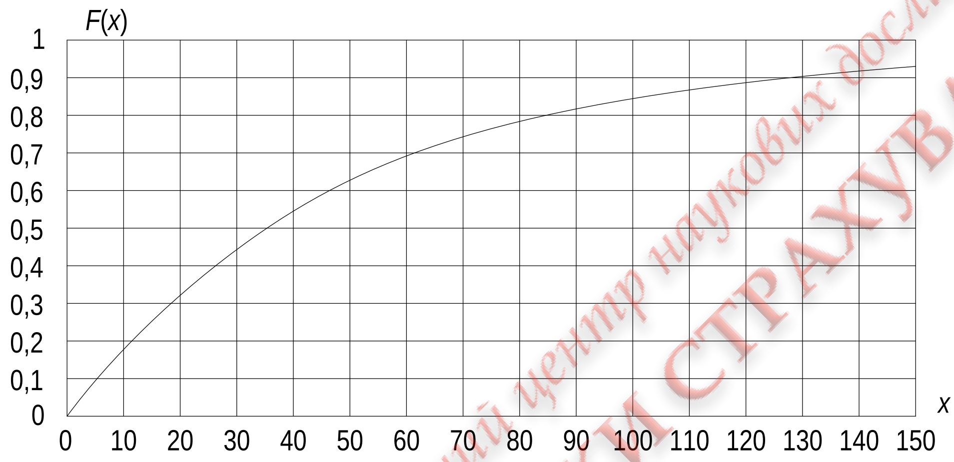


Рис. 5.4. Графік функції розподілу імовірностей, якщо збиток має розподіл Парето

Розподіл Парето також асиметричний, але «хвіст» у нього «важчий», ніж у експоненціального розподілу, тобто імовірність великих розмірів відшкодувань більше, ніж у попередньому випадку.

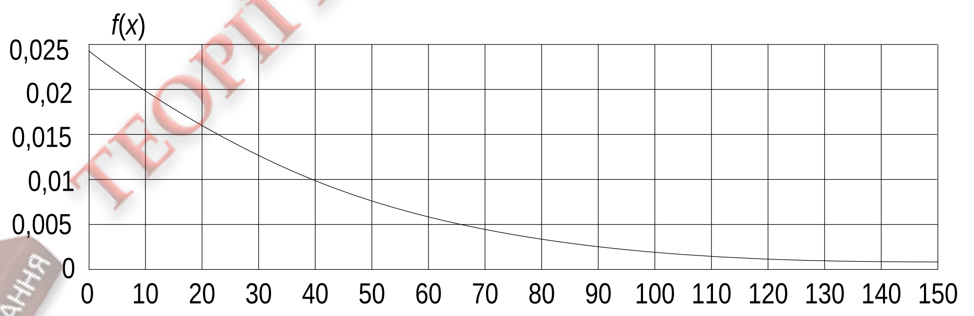


Рис. 5.5. Графік щільності розподілу імовірностей, якщо збиток має розподіл Парето

Гамма-розподіл.

Випадкова величина Y має гамма-розподіл з параметрами $\lambda > 0$ і $\alpha > 0$, якщо

$$f_Y(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lambda^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, x \geq 0,$$
$$F_Y(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x t^{\alpha-1} e^{-\lambda t} dt. \qquad (5.12)$$

де Γ – гамма-функція, $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt.$

Середнє значення для випадкової величини, що має гамма-розподіл дорівнює

$$EY = \frac{\alpha}{\lambda},$$
$$VarY = \frac{\alpha}{\lambda^2}. \qquad (5.13)$$

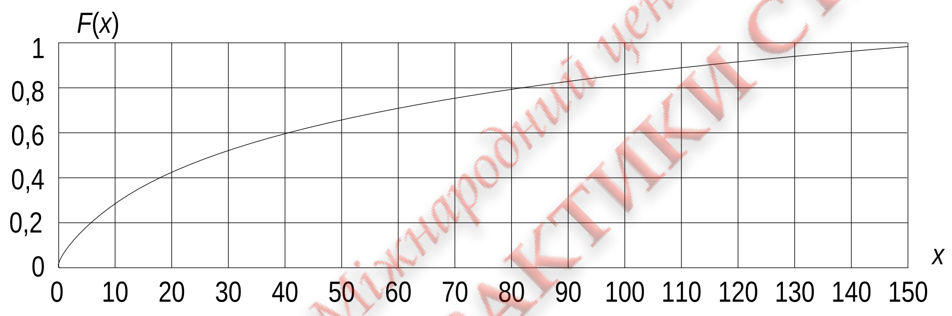


Рис. 5.6. Графік функції розподілу імовірностей при гамма-розподілі збитку

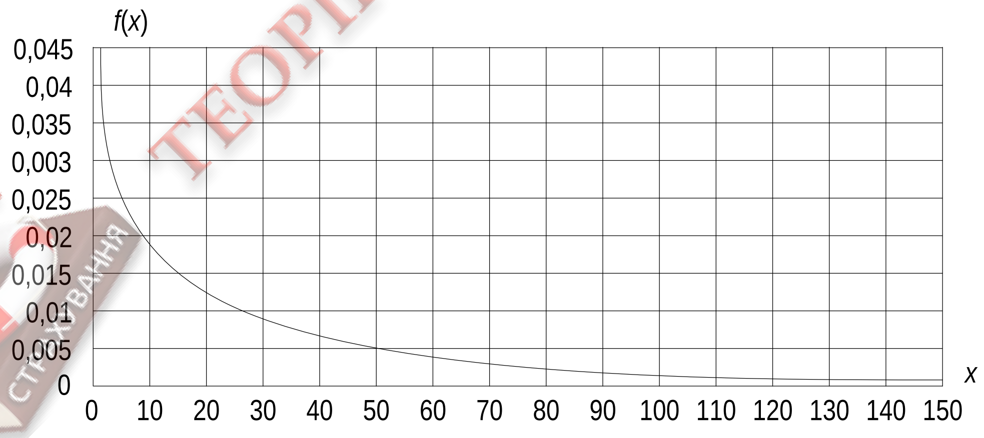


Рис. 5.7. Графік щільносі розподілу імовірностей при гамма-розподілі збитку

При $x \to \infty$ щільність гамма-розподілу спадає швидше, ніж щільність розподілу Парето, але повільніше, ніж експоненціальна щільність. Це означає, що для однакового розміру збитку імовірність його виникнення при гамма-розподілі більше, ніж при експоненціальному розподілі, але менше, ніж при розподілі Парето. При $\alpha > 1$ гамма-розподіл відповідає ситуації, коли позови в основному згруповані навколо деякого значення, а невеликі позови можливі, але малоімовірні.

Бета-розподіл.

Безперервна випадкова величина Y має бета-розподіл імовірності, якщо її функції розподілу імовірності і щільності імовірності задані як

$$
\begin{aligned}
F_Y(x) &= P(Y \le x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)+\Gamma(\beta)} \int_0^x t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt, 0 \le x \le 1, \\
f_Y(x) &= x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)+\Gamma(\beta)}, 1 \le \alpha < \infty, 1 \le \beta < \infty.
\end{aligned}
\tag{5.14}
$$

Середнє значення і дисперсія, відповідно, дорівнюють

$$
\begin{aligned}
EY &= \frac{\alpha}{\alpha+\beta}, \\
VarY &= \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}.
\end{aligned}
\tag{5.15}
$$

Квадратичний розподіл.

Безперервна випадкова величина Y має квадратичний розподіл імовірності, якщо її функції розподілу імовірності і щільності імовірності задані як

$$
\begin{aligned}
F_Y(x) &= P(Y \le x) = a\frac{x^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx, \ 0 \le x \le 1, \\
f_Y(x) &= ax^2 + bx + c.
\end{aligned}
\tag{5.16}
$$

з такими коефіцієнтами a, b і c, що $f_Y(x) > 0$ для $0 \le x \le 1$ і $\int f_Y(x)dx = 1$.

Середнє значення і дисперсія для випадкової величини, що має квадратичний розподіл імовірності, відповідно, дорівнюють

$$EY = \frac{a}{15} + \frac{b}{8} + \frac{c}{4},$$
$$VarY = \frac{a}{18} + \frac{b}{10} + \frac{c}{4}. \qquad (5.17)$$

Нормальний розподіл.

Випадкова величина *Y* має нормальний розподіл, якщо

$$f_Y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D}} e^{-(x-A)|/2D},$$
$$F_Y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D}} \int_{-\infty}^{x} e^{-(t-A)|/2D} dt = \Phi\left[\frac{x-A}{\sqrt{D}}\right]. \qquad (5.18)$$

де Φ – стандартна нормальна функція розподілу.

Середнє значення $EY = A$, а дисперсія $VarY = D$.

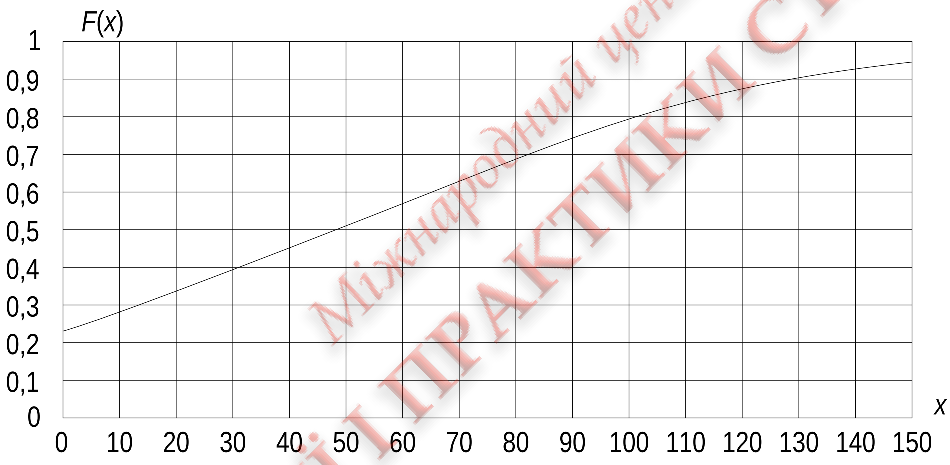


Рис. 5.8. Графік функції розподілу імовірностей при нормальному розподілі збитку

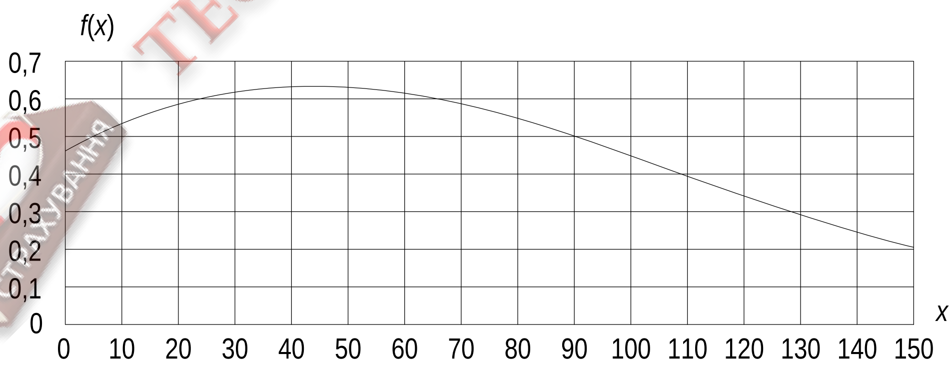


Рис. 5.9. Графік щільності розподілу імовірностей при нормальному розподілі збитку

2. РОЗПОДІЛ ВИПЛАТ

Розподіл суми всіх виплат по портфелю X буде мати назву складового (або складного), утвореного розподілом числа виплат N і розміром можливих втрат Y у разі страхової події.

Нехай N_i описує розподіл страхових випадків для одного договору, а Y_i – розмір можливих втрат у разі страхової події. Тоді величина виплат X_i по даному договору є сумою випадкового числа випадкових доданків

$$X_i = Y_i^1 + Y_i^2 + \ldots + Y_i^{N_i}, Y_i^j > 0, \tag{5.19}$$

де Y_i^j – розмір j-го по рахунку збитку.

Вище ми говорили про розподіли числа випадків і можливих втрат, а також відзначали, що причини, що впливають на характер розподілів $F_{N_i}(x)$ і $F_{Y_i}(x)$ різними. Таким чином, можна допустити, що випадкові величини N_i і Y_i. незалежні.

Твердження 1. Середнє значення і дисперсія виплат для (2.8) рівні відповідно

$$\begin{gathered} EX_i = EN_i \cdot EY_i, \\ VarXi = ENi \cdot VarY_i + VarN_i \cdot (EY_i)^2. \end{gathered} \tag{5.20}$$

Сумарні виплати по портфелю X представляють собою випадкову величину, що має такий же тип, як (2.8). Різниця полягає у тому, що утворюють X інші випадкові величини (N – кількість позовів за портфелем і Y – розмір одиничного збитку) і їм відповідають свої числові характеристики.

3. ПОРІВНЯННЯ РИЗИКОВИХ СИТУАЦІЙ

Різноманітність понять ризику визначає і різноманітність форм і прийомів порівняння ризикових ситуацій. Ми зупинимося на наступних.

Метод середніх величин.

Тут порівняння ризикових ситуацій здійснюють, порівнюючи середньоочікувані значення втрат. Цей підхід до оцінювання ризику не можна назвати дуже хорошим, бо таким чином повністю ігнорується розкид можливих значень втрат, а це, як відомо, одна з головних характеристик ризику.

Ступінь ризику.

Ступенем ризику тут називатимемо коефіцієнт варіації $W(X)$ виплат, які необхідно буде зробити по всіх страхових випадках, що відбулися по даному ризику. Ризик заданий як (F_N, F_Y) отже, виплати по даному ризику можна в загальному випадку записати як

$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_N,\ X_i = N_i \cdot Y_i, \tag{5.21}$$

де i – номер вимоги про виплату (у порядку надходження);

Y_i – розмір i-го вимоги про виплату $Y_i > 0$;

N_i – індикатор страхового випадку (виплата виробляється, якщо страховий випадок відбувся і розмір виплати рівний втратам або реалізації випадкової величини Y на кроці i).

Звідси одержуємо вираз для ступеня ризику

$$W(X) = \frac{\sigma X}{EX} = \frac{\sigma X}{\sum_i EX_i}. \tag{5.22}$$

Цей простий і доступний критерій застосовують для аналізу фінансової стійкості якого-небудь страхового портфеля. Зрозуміло, що перевищення значення ступеня ризику одиниці може служити деяким критерієм «ризиковості» даного портфеля, оскільки це означає, що розкид значень можливих виплат, що мають велику імовірність, перевищує середнє очікуване значення виплат.

Об’єднання декількох ризиків в один «страховий портфель» може привести до зниження результуючого ступеня ризику (відзначимо, що ми говоримо тут про незалежні ризики). Окремі випадки розрахунку ступеня ризику будуть розглянуті нижче (у моделях індивідуального і колективного ризику).

Імовірність розорення.

По суті своїй імовірність розорення не є характеристикою ризику і порівнювати ризики по імовірності розорення відповідно не можна. Проте, ми приводимо тут цю характеристику тут з наступної причини. Для будь-якого ризику (F_N, F_Y), що піддається страхуванню, визначимо невипадкову величину U як розмір фонду страхового відшкодування по даному ризику. Тоді величина $U - X$ характеризує те, наскільки розрахований резерв U відповідає очікуваним відшкодуванням. Тут X – як і раніше – випадкова величина, що описує виплати по даному ризику.

Нехай u_0 – власні засоби страховика, назвемо їх тут початковим резервом. Позначимо як

$$\psi(u_0, U) = P(u_0 + U - X < 0), \tag{5.23}$$

і називатимемо дану подію розоренням. Тоді $(\psi(u_0, U), F_X)$ – ризик розорення.

Розділяють статистичні задачі оцінки ризику розорення і динамічні, де ризик розорення розглядається в часі.

Звичайно, що на практиці неможливо точно обчислити імовірність розорення $\psi(u_0, U)$. Проте, існує деяка оцінка зверху для вірогідності розорення.

<u>Твердження 2</u>. Нерівність Лундберга. Імовірність розорення як функція початкових резервів обмежена зверху

$$\psi(u_0) \le e^{-Ru_0}, \tag{5.24}$$

де u_0 – початкові активи страховика;

R – поправочний коефіцієнт.

Перевага полягає у тому, що при великих значеннях u_0 апроксимація, що досягається, для імовірності розорення достатньо точна, крім того, нерівність є простою в застосуванні.

Поправочний коефіцієнт R нерівності Лундберга (5.24) знаходиться як єдине позитивне коріння рівняння

$$Ee^{RX_i} = 1 + (1+\theta)EX_i \cdot R, \tag{5.25}$$

де $Ee^{RX_i} = \int_0^\infty e^{Rt} dF_{X_i}(t), \theta$ – надбавка безпеки;

EX_i – середнє очікуване значення виплат на один договір.

Позначимо через ε допустимий рівень імовірності розорення і отримаємо

$$u_0 = \frac{EX_i^2 \ln \varepsilon}{2EX_i}. \tag{5.26}$$

Ця нерівність може служити для оцінювання рівня початкових резервів, виходячи з допустимого рівня імовірності розорення.

Корисність від страхування і корисність страхової діяльності.

У теорії ризику передбачається, що рішення, які приймають люди в тих або інших ситуаціях, визначаються повністю або частково перевагами, що задаються на безлічі розподілів вірогідності величин можливого збитку (або доходу) ξ з урахуванням розподілу імовірності випадку виникнення збитку (або доходу).

Корисність	1) якісна або порівняльна оцінка – перевага одного об'єкту іншому; 2) кількісна оцінка вираженої у вигляді числа переваги.

Взагалі, представлення корисності у вигляді числа є зручним кількісним виразом початкового якісного відношення переваги. Враховуючи цю подвійність, далі для відображення якісних характеристик використовуватиметься термін «перевага», а термін «корисність» – для кількісного представлення переваг.

Основи сучасної теорії корисності закладені ще у XVIII сторіччі. Саме тоді декілька математиків, зацікавившись застосуванням теорії імовірності страхування, висунули принцип, відповідно до якого розсудлива людина, потрапивши в критичну ситуацію, загрозливу його добробуту, повинен поводитися так, щоб максимізувати розмір очікуваного багатства або грошового прибутку.

Сформулюємо наступну гіпотезу.

Людина, роблячи вибір серед доступних їй альтернатив, що припускають або не припускають ризик, поводиться так, ніби:

- дана альтернатива має стійкі переваги;
- для кожної з альтернатив, що не припускають ризик, переваги можуть бути виражені числовими величинами, званими «корисністю альтернативи»;
- мета людини – зробити очікувану корисність настільки більшою, наскільки це можливо.

Нехай альтернативи споживача позначені як *A*, *B*, ...

Безліч альтернатив, що не припускають ризику, позначимо як χ, а безліч альтернатив, що припускають ризик, – як μ. Відношення переваги альтернативи *A* до альтернативи *B* позначимо як $A \succ B$.

Дж. фон Нейман і О. Моргенштерн запропонували загальне формулювання для гіпотези поведінки споживацької одиниці: людина робить вибір, керуючись деякою системою переваг, що володіє наступними властивостями:

а) *досконалість*. Це означає, що для будь-яких двох альтернатив A і B чоловік може вказати, яка йому більш переважна – $A \succ B$ або $B \succ A$, або ж йому байдуже – $A \sim B$, яку з них вибрати. Іншими словами, для людини не існує альтернатив, які він не міг би порівняти між собою або з іншими альтернативами.

б) *транзитивність*. Це означає, що якщо для людини альтернатива A переважно, ніж B, а B, у свою чергу, переважно, ніж C, то A переважно, ніж C, тобто

$$A \succ B, B \succ C \Rightarrow A \succ C. \tag{5.27}$$

Ця властивість фактично виражає несуперечність оцінок людини.

в) *рефлексія.* Для людини будь-яка альтернатива не переважно саме собі – $A \succ A$.

г) *опуклість безлічі альтернатив щодо відношення переваги.* Для будь-яких трьох альтернатив A, B і C, *якщо* $A \succ B \succ C$, *то знайдуться такі числа* $\alpha, \beta > 0$ і $\alpha + \beta = 1$, *що* $\alpha A + \beta C \sim B$.

Для альтернатив, що припускають ризик, вважатимемо, що розподіл імовірності можливих доходів є відомим. Тоді можна вважати, що безліч μ є безліч розподілів імовірності. Вважатимемо, що відношення переваги, визначене на ξ, породжує відношення переваги на μ, тобто виконані властивості а) – г). Хай альтернатива X задана як

$$X = \begin{cases} x_1, x_2, \ldots, x_n, \\ p_1, p_2, \ldots, p_n. \end{cases} \tag{5.28}$$

Кількісною оцінкою альтернативи, що припускає ризик, назвемо величину очікуваної корисності, яка розраховується за формулою

$$U(X) = Eu(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i u(x_i), \tag{5.29}$$

де $u(x_i)$ – визначена вище корисність альтернативи, не припускаючої ризику (в даному випадку гарантованого доходу розміром в x_i).

Нехай тепер деяка людина стоїть перед вибором між двома альтернативами.

Перша (A) не припускає ризику, її корисність рівна $a = u(A)$ (в результаті вибору цієї альтернативи людина одержує надійний дохід a).

Друга альтернатива (X) припускає ризик, її очікувана корисність рівна $U = U(X)$.

Нехай при цьому $a = EX$ – корисність надійного доходу рівна середньому значенню доходу від альтернативи, що припускає ризик. Якщо людина при цьому вибере X, тобто віддасть перевагу ризиковій альтернативі, говорять, що він схильний до ризику. Якщо ж людина вибере A, то таким чином вона демонструє перевагу до визначеності.

Твердження 3. Властивості функції корисності.

1. Якщо $u(x)$ – функція корисності, то $v(x) = au(x) + b$ також є функцією корисності, тобто функція корисності визначена з точністю до лінійного перетворення.
2. Функція корисності зростає зі зростанням доходу: $u'(x) > 0$. Першу похідну функції корисності називають «граничною корисністю». Тоді ця властивість означає, що гранична корисність завжди позитивна.
3. Нерівність Йенсена. Якщо функція корисності на деякому інтервалі опукла вгору, що відповідає $u''(x) \le 0$, то

$$U(X) \le u(EX). \tag{5.30}$$

Така функція корисності відповідає «неприйняттю ризику» (для значень доходів з вказаного інтервалу).

Якщо ж функція корисності на деякому інтервалі опукла вниз, що відповідає $u''(x) \succ 0$, то

$$U(X) \ge u(EX), \tag{5.31}$$

що відповідає «схильності до ризику» особи, що використовує вказану функцію корисності для значень доходів з вказаного інтервалу.

У основі теорії прийняття рішень лежить припущення про те, що вибір альтернатив повинен визначатися двома чинниками:

- представленнями особи, що ухвалює рішення про імовірність різних можливих результатах, які можуть мати місце при виборі того або іншого варіанту рішення;
- перевагами, що віддаються даною особою різним можливим результатам.

Корисність страхування. Мотивування прийняття рішень потенційним страхувальником грунтується на наступних економічних і психологічних передумовах:

- людина завжди прагне максимально задовольнити свої страхові інтереси при мінімальних фінансових витратах. При прийнятті рішення людина, звичайно, ретельно вивчає різні альтернативи задоволення (чи ні) своїх страхових інтересів;

- страхувальник діє більш менш раціонально;
- у відсутність відповідної альтернативи людина уміє знаходити оптимальний, в деякому розумінні, баланс між своїми бажаннями і можливостями їх задоволення з урахуванням наявності грошових коштів, якими вона має змогу оперувати для задоволення своїх страхових інтересів.

Таким чином, ми можемо говорити, що страхувальник в ухваленні рішень про вибір між різними альтернативами керується деякою системою переваг, на якій визначена функція корисності $u(X)$. Якщо страхувальник має ризик $A=(F_{N_j}, F_{Y_j})$, можна визначити «середню корисність ризику» аналогічно тому, як це було зроблено вище, за формулою

$$U(A) = Eu(A) = Eu(N_j \cdot Y_j). \tag{5.32}$$

Ця величина може служити критерієм порівняння ризиків: ризик $B=(F_{N'_j}, F_{Y'_j})$ краще, ніж $C=(F_{N''_j}, F_{Y''_j})$, якщо $U(B) > U(C)$.

Якщо випадкова величина $X_j = N_j \cdot Y_j$ приймає значення $x_1, \ldots, x_n$ з імовірністю $p_1, \ldots, p_n$, то в якості критерію порівняння ризиків (5.32) приймається величина, представлена наступною формулою

$$U(A) = \sum_{i=1}^{n} u(x_i) p_i \,. \tag{5.33}$$

Страхувальник має декілька альтернатив: звернутися в страхову компанію і купити страховий захист від впливу ризику A або ж залишатися під впливом даного ризику, розраховувавши, що реалізації його не зробить істотного впливу на його благополуччя.

Оцінимо благополуччя страхувальника деякою величиною K, яку назвемо початковим капіталом страхувальника.

У першому випадку страхувальник несе детерміновані втрати p, рівні ціні поліса. Корисність цього кроку рівна $u(K - p)$. У другому випадку втрати людини випадкові і, отже, корисність їх оцінюється за формулою (5.32) $U(K - X_j) = Eu(K - X_j)$.

Порівнюючи ці величини, страхувальник ухвалює рішення про страхування. Одночасно страховик за цією інформацією може оцінити максимальну ціну, яку готовий заплатити потенційний страхувальник за захист від свого ризику. Позначимо як $G_{\max}$ – максимальну ціну, яку готовий заплатити страхувальник за повний страховий захист від даного ризику. Тоді, користуючись нерівністю Йенсена (властивість 3°), для різних страхувальників можна оцінити G_{max} як:

- $G_{\max} \geq EX_j$, $u''(x) > 0$ у разі неприйняття людиною ризику,
- $G_{\max} \leq EX_j$, $u''(x) < 0$ у разі переваги людиною ризику.

Ризикову ситуацію страховика ми визначали вище (імовiнiсть розорення) як $A = (\psi(u_0, U), F_X)$. Тепер приведені вище критерії можна застосовувати і для порівняння ризиків страхової компанії. Іншими словами, ми припускаємо, що страхова компанія володіє системою «переваг», заданою на безлічі майбутніх доходів (втрат), пов'язаних з наявними ризиками, і дана система переваг задовольняє системі аксіом існування функції корисності.

Розглянемо як критерій порівняння ризиків критерій середньої очікуваної корисності і приведемо декілька прикладів.

Дохід компанії описує випадкова величина $Y = u_0 + U - X$, де X, як і раніше, випадкові виплати з розподілом $F_X(x)$, а U – резерв, розрахований як забезпечення виплат.

Тоді розподіл доходу визначається формулою

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= P(u_0 + U - X \leq x) = P(X \geq u_0 + U - x) = \\ &= 1 - F_X(u_0 + U - x),\ F_Y(0) = \psi(u_0, U). \end{aligned} \tag{5.34}$$

Функція «сумління».

Одна з найзагальніших з відомих моделей порівняння ризиків була запропонована в 1982 році П. Фішберном і ін. модель «очікуваного сумління». Авторами визначена так звана «функція сумління» – $r(y_1, y_2)$, функція порівняльної корисності детермінованих втрат y_1 і y_2.

Визначається функція таким чином.

Нехай деякий індивідуум стоїть перед вибором між двома ситуаціями, що мають ризикову природу. Припустимо, що вибраний варіант після реалізації ризику приймає значення y_1 а невибраний реалізується в y_2. Тоді $r(y_1, y_2)$ характеризує «сумління» даного індивідуума в тому випадку, якщо y_1 виявився більше, ніж y_2. Далі, для пари розподілів $P_1 = p_1, \ldots, p_n$ і $P_2 = q_1, \ldots, q_n$ на множині $y_1, \ldots, y_n$ визначається вираз для сережнього очікуваного сумління

$$\sum_{i,j} r(y_i, y_j) p_i q_j . \tag{5.35}$$

Розподіл P_1 вважається «гірше» P_2, якщо середнє очікуване «сумління» позитивне. Якщо даний вираз рівний нулю, то ризики байдужі.

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. Рівномірний розподіл випадкової величини та його числові характеристики.
2. Експоненційний розподіл випадкової величини та його числові характеристики.
3. Розподіл Парето та його числові характеристики.
4. Гамма-розподіл та його числові характеристики.
5. Бета-розподіл та його числові характеристики.
6. Квадратичний розподіл випадкової величини та його числові характеристики.
7. Види методів порівняння ризикових ситуацій.
8. У чому полягає метод середніх величин при порівняні ризикових ситуацій?
9. Поняття ступеню ризику.
10. Імовірність розорення.
11. Дайте визначення терміну «корисність» та охарактеризуйте його.
12. Поняття корисності від страхування та корисності страхової діяльності.
13. Функція корисності.
14. Які властивості функції корисності?
15. Функція сумління.

ТЕСТИ

1. Наведені формули щільності і функції розподілу витрат $f_Y(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x > 0$, $F_Y(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, $x > 0$ характеризують:
   а) розподіл Парето;
   б) нормальний розподіл;
   в) рівномірний розподіл;
   г) гамма-розподіл;
   д) експоненціальний розподіл;
   е) бета-розподіл;
   ж) квадратичний розподіл.

2. Наведені формули щільності і функції розподілу витрат $f_Y(x) = \frac{\alpha}{\lambda}\left(\frac{\lambda}{\lambda + x}\right)^{\alpha+1}$, $x > 0$; $F_Y(x) = 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda + x}\right)^{\alpha}$ характеризують:
   а) гамма-розподіл;
   б) бета-розподіл;

в) експоненціальний розподіл;
г) нормальний розподіл;
д) рівномірний розподіл;
е) квадратичний розподіл;
ж) розподіл Парето.

3. Наведені формули щільності і функції розподілу витрат $f_Y(x) = \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\lambda^{\alpha}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}, x \geq 0,\ F_Y(x) = \dfrac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x t^{\alpha-1}e^{-\lambda t}dt$ характеризують:
   а) гамма-розподіл;
   б) нормальний розподіл;
   в) експоненціальний розподіл;
   г) квадратичний розподіл;
   д) розподіл Парето;
   е) рівномірний розподіл;
   ж) бета-розподіл.

4. Середнє значення і дисперсія, що описані наведеними формулами $EY = \dfrac{a}{15} + \dfrac{b}{8} + \dfrac{c}{4}, VarY = \dfrac{a}{18} + \dfrac{b}{10} + \dfrac{c}{4}$ характерні для:
   а) рівномірний розподіл;
   б) бета-розподіл;
   в) розподіл Парето;
   г) експоненційний розподіл;
   д) гамма-розподіл;
   е) квадратичний розподіл;
   ж) нормальний розподіл.

5. Середнє значення і дисперсія, що описані наведеними формулами $EY = \dfrac{1}{\lambda}, VarY = \dfrac{1}{\lambda^2}$ характерні для:
   а) квадратичний розподіл;
   б) гамма-розподіл;
   в) нормальний розподіл;
   г) експоненційний розподіл;
   д) розподіл Парето;
   е) бета-розподіл;
   ж) рівномірний розподіл.

6. До методів порівняння ризикових ситуацій відносяться:

а) імовірність розорення;
б) корисність страхової діяльності;
в) ступінь ризику;
г) метод відносних величин;
д) функція «сумління».

7. Імовірність розорення як функція початкових резервів обмежена зверху:
   а) нерівність Лундберга;
   б) нерівність Неймана;
   в) нерівність Йенсена.

8. Коефіцієнт варіації виплат $W(X)$, які необхідно буде зробити по всіх страхових випадках, що відбулися по даному ризику:
   а) імовірність розорення;
   б) корисність страхової діяльності;
   в) ступінь ризику.

9. Людина робить вибір, керуючись деякою системою переваг, що володіє наступними властивостями:
   а) досконалість – для людини будь-яка альтернатива не переважно сама собі;
   б) транзитивність – для людини не існує альтернатив, які він не міг би порівняти між собою або з іншими альтернативами;
   в) рефлексія – властивість, що фактично виражає несуперечність оцінок людини.

10. Мотивування прийняття рішень потенційним страхувальником ґрунтується на наступних економічних і психологічних передумовах:
   а) при відсутності відповідної альтернативи людина уміє знаходити оптимальний, в деякому розумінні, баланс між своїми бажаннями і можливостями їх задоволення з урахуванням наявності грошових коштів, які вона має для задоволення своїх страхових інтересів;
   б) людина завжди прагне максимально задовольнити свої страхові інтереси при мінімальних фінансових витратах;
   в) страхувальник діє більш менш раціонально;
   г) страхувальник в ухваленні рішень про вибір між різними альтернативами керується деякою системою переваг.

Тема 6. МОДЕЛЬ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ПОЗОВІВ

1. ОДНОРІДНИЙ ПОРТФЕЛЬ

   Страховий портфель. Ознаки і параметри страхового портфелю. Однорідний страховий портфель. Коефіцієнт однорідності. Критерій однорідності

2. ОСНОВНІ ПРИПУЩЕННЯ МОДЕЛІ

   Позначення, визначення і основні функції моделі

3. ФОРМАЛІЗАЦІЯ МОДЕЛІ ІНДИВІДУЛЬНИХ ПОЗОВІВ (ІНДИВІДУЛЬНОГО РИЗИКУ)

   Велика кількість договорів у портфелі, що складається з однакових ризиків. Невелика кількість договорів у портфелі, що складаються з однакових ризиків. Неоднорідний по втратах портфель. Неоднорідні договори по імовірності страхового випадку або по втратах

1. ОДНОРІДНИЙ ПОРТФЕЛЬ

Страховий портфель — сукупність застрахованих ризиків, об'єднаних з метою мінімізації.

Кожна така сукупність характеризується наступними ознаками і відповідними їм параметрами:

- число об'єктів в сукупності (зручніше говорити про число договорів, що потрапили в дану сукупність);
- максимальна величина можливого збитку (якщо вона визначена);
- розподіли вимог і втрат, що характеризують ризики, що увійшли до даної сукупності і пов'язані з ними числові характеристики;
- характеристики залежності ризиків, що увійшли до сукупності;
- числові характеристики загальної сукупності.

Спершу розглянемо стаціонарний портфель, тобто таку сукупність договорів, для якої зберігається рівновага між «притоком» і «відтоком» договорів.

Однорідний портфель.

Далі ми говоритимемо «однорідний» портфель, маючи на увазі, що всі ризики даного портфеля однакові, тобто задані як (F_N, F_{X_1}) або ж тоді, коли даний портфель влаштований як об'єднання декількох груп однакових ризиків. Це об'єднання принаймні не збільшує незбалансованість груп ризиків, що розглядаються окремо. На практиці, кажучи про однорідність портфеля, оцінюють тим або іншим способом збалансованість даної сукупності. Найбільш поширені через простоту так званий «коефіцієнт однорідності», що розраховується як відношення максимальної страхової суми даної сукупності до середньої страхової суми, і «критерій однорідності», що показує, що однорідним є той портфель, для якого відхилення страхових сум від середньої не перевершує 2.

Для формування однорідних портфелів виробляють так зване «вирівнювання ризику», страховик ділить ризик із страхувальником або перестрахувальником. Далі ми розглянемо те, як це виглядає з формальної точки зору.

Даний підхід ми збираємося застосовувати для побудови теоретичних розмірів фондів страхових зобов'язань і премій. Як визначальний критерій однорідності портфеля розглядатимемо коефіцієнт варіації виплат по даному портфелю (ступінь ризику) і, крім того, розраховуватимемо значення «коефіцієнта однорідності» і «критерію однорідності» там, де це буде можливо.

Приклад 6.1. Нехай портфель договорів складається з договорів двох типів. Втрати за одним договором першого типу описує випадкова величина Y, приймаюча значення 8, 4 і 1 з імовірністю 1/16, 3/16, 3/4 відповідно:

$$Y_1 = \begin{cases} 8, \frac{1}{16} \\ 4, \frac{3}{16} \\ 1, \frac{3}{4} \end{cases} \text{ числові характеристики } Y: \begin{cases} EY_1 = 2 \\ EY_1^2 = 12\frac{3}{4} \\ VarY_1 = 10\frac{3}{4} \end{cases}$$

Втрати для договорів другого типу рівномірно розподілені на відрізку від 0 до 8. Страхова подія виникає з однаковою імовірністю для всіх договорів даного портфеля і імовірність ця дорівнює 0,05. Для простоти припустимо, що договорів обох типів в портфелі порівну, скажімо по 10. Тоді числові характеристики для частини портфеля, що складається з договорів першого типу:

$$E_1 = n \cdot EX_1 = 10qEY_1 = 1,$$

$$V_1 = n \cdot VarX_1 = 10q(EY_1^2 - q(EY_1)^2) = 6{,}275,$$

$$W_1 = W(X^{(1)}) = \frac{\sqrt{V_1}}{E_1} \approx 2{,}05.$$

Для договорів другого типу числові характеристики визначаються за формулою:

$$E_2 = n \cdot EX_2 = 10qEY_2 = 2,$$

$$V_2 = n \cdot VarX_2 = 10q(EY_2^2 - q(EY_2)^2) \approx 10{,}27,$$

$$W_2 = W(X^{(2)}) = \frac{\sqrt{V_2}}{E_2} \approx 1{,}6.$$

Ступінь ризику для портфеля оцінюється наступним чином:

$$E = E_1 + E_2 = 3,$$

$$V = V_1 + V_2 \approx 16{,}545,$$

$$W = W(X) = \frac{\sqrt{V}}{E} \approx 1{,}3559.$$

Тут ми позначили як $X^{(1)}$ і $X^{(2)}$ – випадкові величини, що описують виплати по першій і другій частинах портфеля відповідно. Ми бачимо, що при об'єднанні двох груп договорів в один портфель ступінь ризику W результуючого портфеля стала менше, ніж ступені ризику W_1 і W_2 для кожної з частин. Це говорить про те, що результуючий портфель краще збалансований, ніж кожна з груп договорів, що розглядається окремо. Але зрозуміло, що дане поліпшення досягається за рахунок договорів другої групи. Це необхідно врахувати при обчисленні тарифів. Тут ми маємо на увазі, що в цьому випадку тарифи для договорів різних груп даного портфеля повинні бути різними, інакше менш вигідний ризик (перший) по розрахунках оплачуватиметься за рахунок другого. Це зробить розрахований тариф привабливішим для клієнтів, що мають ризик першого типу, що зрештою може привести до перевищень виплат. Як вже відмічалося вище, в рамках статичних моделей об'єкти, що вивчаються, розглядаються без врахування залежності від часу. Таким чином, по суті статична модель описує стан об'єктів, що вивчаються, в одиничному інтервалі часу.

2. ОСНОВНІ ПРИПУЩЕННЯ МОДЕЛІ

Приведемо найпростішу, але у деякому відношенні типову модель.

Розглянемо портфель договорів страхування, що мають однакову тимчасову протяжність (рівну одиниці часу), укладених в момент часу 0 і що завершуються не пізніше моменту часу 1. Усі договори портфеля відносяться до однієї страховій події. Нехай:

- число договорів в даному портфелі фіксоване і невипадкове;
- ризики клієнтів незалежні між собою;
- плата за страховку вноситься страхувальником повністю на початку аналізованого періоду (у момент 0) і ніяких додаткових надходжень від страхувальників протягом періоду часу до 1 немає;
- розподіл втрат для всіх договорів портфеля однаковий;
- розмір вимоги у разі страхової події виплачується повністю і відразу після пред'явлення позову (до моменту 1).

У рамках даної моделі вивчається стан активів страхової компанії до моменту завершення дії договорів, а основна задача – розрахунок фонду страхового відшкодування, що забезпечує фінансову стійкість, і, отже, визначення страхового внеску по такому ризику.

Позначення, визначення і використовувані функції.

Для побудови моделі введемо наступні позначення:

n – число договорів в портфелі;
j – номер договору (індекс клієнта);
q – вірогідність страхової події для одного клієнта;

$N_j = \begin{cases} 1 & q, \\ 0 & 1-q; \end{cases}$ – індикатор страхової події для j клієнта;

$N = \sum_{j=1}^{n} N_j$ – загальне число вимог до моменту 1 по даному портфелю;

Y_j – можливі втрати одного клієнта;

$F_{Y\,j}$ – функція розподілу втрат для одного клієнта. Якщо існує щільність розподілу втрат, то позначимо її як $f_{Y\,j}$. Втрати однаково розподілені для всіх клієнтів портфеля, тому індекс клієнта j' у випадкової величини Y_j можна замінити, скажемо 1.

X_j – виплати на одного клієнта ($X_j = N_j \cdot Y_j$;);

$X = \sum_{j=1}^{n} X_j$ – сумарні виплати до моменту 1 по даному портфелю;

γ – рівень надійності виконання зобов'язань страхової компанії по виплатах;

U – розмір фонду відшкодувань, який з надійністю γ забезпечує виплати по всіх вимогах для даного портфеля.

Таким чином, договори портфеля мають ризик $(F_{N\,j}, F_{Y\,j})$.

Сумарний ризик компанії по даному портфелю, відповідно, (F_N, F_Y).

3. ФОРМАЛІЗАЦІЯ МОДЕЛІ ІНДИВІДУАЛЬНОГО РИЗИКУ

Розділимо розгляд моделі на чотири частини, що мають на увазі деякі відмінності в підходах до побудови моделі, а загальну схему розгляду представимо наступними кроками:

- обмеження, що обумовлюють даний випадок;
- розрахунок резерву страхових виплат;
- збалансованість.

Число договорів в портфелі велике. Портфель містить однакові ризики.

Виконання страховою компанією своїх зобов'язань по вимогах про виплату з надійністю γ формально можна записати як

$$P(U - X \geq 0) = \gamma. \qquad (6.1)$$

Тоді, якщо число договорів в портфелі велике, то можна застосувати центральну граничну теорему для оцінки U.

$$P(X \le U) = P\left(\frac{X - EX}{\sigma X} \le \frac{U - EX}{\sigma X} \right) \to \int_{-\infty}^{\alpha(\gamma)} \frac{1}{2\pi} e^{-x^2/2} dx = \gamma, \quad (6.2)$$

де $\alpha(\gamma)$ – відповідна γ квантіль стандартного нормального розподілу з середнім 0 і дисперсією 1;

EX – середні очікувані виплати по всьому портфелю договорів;

σX – середньоквадратичне відхилення цих виплат.

Як і раніше, припустимо, що випадкові величини N і Y незалежні. Тоді для розрахунку числових характеристик сумарних виплат можна скористатися результатом (6.2) і записати

$$\begin{aligned} EX &= EN \cdot EY_1 = E(\sum_{j=1}^{n} N_j) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} t dF_{Y_1}(t) = nq \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} t dF_{Y_1}(t), \\ VarX &= VarN \cdot (EY_1)^2 + VarY_1 \cdot EN = \\ &= nq(1-q) \cdot \left(\int_{-\infty}^{+\infty} t dF_{Y_1}(t) \right)^2 + nq \cdot \left(\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 dF_{Y_1}(t) - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} t dF_{Y_1}(t) \right) \right), \\ \sigma X &= \sqrt{VarX}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

І, отже, необхідний для покриття відшкодувань резервний фонд можна порахувати як

$$\frac{U - EX}{\sigma X} = \alpha(\gamma) \Rightarrow U = \alpha(\gamma)\sigma X + EX = L + EX. \quad (6.4)$$

Величину L називають фондом сумарного страхового навантаження. Слід зазначити, що умови застосування центральної граничної теореми в цьому випадку дотримані, а саме, випадкові величини X – незалежні і однаково розподілені. Відзначимо, що справедлива наступна оцінка погрішності апроксимації нормальним розподілом

$$\sup_x \left| P\left\{ \frac{X - EX}{\sigma X} \le x \right\} - \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{1/t^2} dt \right| \le$$

$$\le \begin{cases} 0.7975 \dfrac{E|X_1|^3}{(VarX_1)^{3/2}\sqrt{n}}, \text{якщо } X_i \text{ однаково розподілені}, \\ \dfrac{33}{4} \dfrac{\sum_{i=1}^{n} E|X_1|^3}{\left(\sum_{i=1}^{n} VarX_1 \right)^{3/2}}, \text{якщо } X_i \text{ не однаково розподілені}. \end{cases} \quad (6.5)$$

Коефіцієнт варіації (ступінь ризику) в цьому випадку можна розрахувати як

$$W(X)=\frac{\sigma X}{EX}=\left(\frac{nq(1-q)(EY_1)^2+nqEY_1^2-nq(EY_1)^2}{n^2q^2(EY_1)^2}\right)^{1/2}=$$

$$=\left(\frac{q(EY_1)^2+EY_1^2}{nq(EY_1)^2}\right)^{1/2}=\left[\frac{1}{n}\left(1+\frac{EY_1^2}{q(EY_1)^2}\right)\right]^{1/2}=\left(\frac{1}{n}(1+A)\right)^{1/2}, \qquad (6.6)$$

де як A ми позначили число $\dfrac{EY_1^2}{q(EY_1)^2}$, незалежне від об'єму портфеля n і яке характеристикоє ризик одного договору. Ми бачимо, що ступінь ризику портфеля спадає як $1/\sqrt{n}$ і зростає пропорційно (A + 1).

<u>*Приклад 6.2*</u>. Нехай портфель складається з 40 незалежних договорів, втрати по кожному мають експоненціальний розподіл з середнім $\dfrac{1}{\lambda}=2$, а імовірність настання страхового випадку однакова для всіх договорів портфеля і рівна 0,04. Необхідна надійність забезпечення виплат y = 0,95. Тоді числові характеристики для втрат на один договір

$$EY_1=2, EY_1^2=\frac{2}{\lambda^2}=8,$$

$$VarY_1=EY_1^2-(EY_1)^2=4.$$

Отже, для числових характеристик загальних виплат можна записати

$$EX=nqEY_1=40\cdot 0{,}04\cdot 2=3{,}2;$$

$$VarX=nq(1-q)(EY_1)^2+nq\left(EY_1^2-(EY_1)^2\right)=40\cdot 0{,}04\cdot 0{,}96\cdot 4+$$

$$+40\cdot 0{,}04\cdot 4=7{,}936;$$

$$\sigma X=\sqrt{VarX}\approx 2{,}82.$$

Розмір страхового резерву, який з імовірністю γ забезпечить усі виплати дорівнює

U = 1.645 · 2,82 + 3,2 = 7,8389.

Погрішність гаусівського наближення можна розрахувати по (6.5). Для цього необхідно розрахувати третій момент для величини X.

$$EX_1^3=EN_j^3\cdot EY_1^3=q\cdot\int_0^\infty x^3\lambda e^{-\lambda x}dx=q\frac{6}{\lambda^3}=0{,}04\cdot 48=1{,}92.$$

Тоді погрішність апроксимації нормальним розподілом в цьому випадку оцінюється зверху числом

$$0{,}7975\frac{E|X_1|^3}{(VarX_1)^{3/2}\sqrt{n}}=0{,}7975\frac{1{,}92}{64\cdot\sqrt{40}}\approx 0{,}0048.$$

Ступінь ризику в цьому випадку можна розрахувати як

$$WX=\frac{\sigma X}{EX}=\left(\frac{VarX}{(EX)^2}\right)^{1/2}=0{,}775<1,$$

що говорить про те, що даний портфель більш менш добре збалансований.

Число договорів в портфелі незначне, але портфель як і раніше складається з однакових ризиків.

У цьому випадку використання центральної граничної теореми не дає доброго результату, оскільки різницею між інтегралом і імовірністю, що стоять в правій і лівій частинах рівняння (6.7), нехтувати не можна. Проте, цей випадок не складніший попереднього, бо, скориставшись тим, що число вимог про виплату має біноміальний закон розподілу імовірності, а саме

$$p_k=P(N=k)=C_n^k q^k(1-q)^{n-k}, \tag{6.7}$$

можна оцінити з надійністю γ максимальне число позовів s^*

$$s^*:\ \ s^*=\min_s\left\{\sum_{k=0}^{s}p_k\geq\gamma\right\} \tag{6.8}$$

яке може поступити від всіх договорів даного портфеля.

Далі, для розподілу загальних виплат можна записати

$$\begin{aligned}P(X\leq x)&=P(Y_1\leq x\,|\,N=1)P(N=1)+P(Y_1+Y_2\leq x\,|\,N=2)P(N=2)\\&+\ldots=\sum_{k=1}^{s^*}P(Y_1+Y_2+\ldots+Y_k\,|\,N=k)P(N=k)+P(N>s^*)P\left(\sum_{k=1}^{\infty}Y_k\leq x\right)\\&=\sum_{k=1}^{s^*}P(Y_1+Y_2+\ldots+Y_k\,|\,N=k)P(N=k)P(N=k)+(1-\gamma)\left(\sum_{k=1}^{\infty}Y_k\leq x\right).\end{aligned} \tag{6.9}$$

Другий доданок є малим і ним можна знехтувати. Звідси витікає, що достатньо розрахувати розподіл виплат по s^* позовах. Таким чином, із заданим порогом надійності оцінюється розмір резервного фонду, що забезпечує виплати по позовах.

<u>*Приклад 6.3*</u>. Нехай портфель складається з 20 незалежних договорів страхування, втрати по яким в результаті страхової події можуть скласти суми 1, 3 і 4 умовних одиниць грошей з імовірностями 0,7; 0,2 і 0,1 відповідно. Страхова подія відбувається з однаковою імовірністю 0,03 для всіх договорів даного портфеля. Надійність забезпечення страхових виплат γ = 0,97. Числові характеристики для втрат рівні

$$EY_1 = 1{,}7; \;\; EY_1^2 = 4{,}1;$$

$$VarY_1 = EY_1^2 - (EY_1)^2 = 1{,}21;$$

$$A = \frac{EY_1^2}{q(EY_1)^2} \approx 47{,}3.$$

Число позовів в цьому випадку має біноміальний закон розподілу імовірності

$$N = \begin{cases} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 20 \\ 0{,}544 & 0{,}336 & 0{,}099 & 0{,}018 & 0{,}002 & \dots \end{cases}$$

k	0	1	2	3	4	...
$P(N \le k)$	0,544	0,88	0,979	0,997	0,999	...

Таким чином, максимальне число вимог (у значенні надійності забезпечення виплат) рівне s^* = 2. Отже, залишилося розрахувати двовимірну згортку розподілу Y_1 з собою.

$Y_1 + Y_2$ може приймати значення 2, 4, ..., 8 з деякою імовірністю

$$Y_1 + Y_2 = \begin{cases} 2 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 \end{cases}.$$

Щоб знайти імовірність $p_k = P(Y_1 + Y_2 = k)$, складемо дві таблиці таким чином

$$A = \begin{array}{c} \\ 0.7 \\ 0.2 \\ 0.1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0.7 & 0.2 & 0.1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.49 & 0.14 & 0.07 \\ 0.14 & 0.04 & 0.02 \\ 0.07 & 0.02 & 0.01 \end{pmatrix} \end{array}, \quad B = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 4 & 6 & 7 \\ 5 & 7 & 8 \end{pmatrix} \end{array}$$

Матриця A має на перетині рядка j і стовпця i $P(Y_1 = j)$ і $P(Y_2 = i)$, а матриця B – суму відповідних $Y_1 + Y_2$. Тепер для розрахунку $p_k = P(Y_1 + Y_2 = k)$ залишилося скласти ті елементи матриці A, для яких відповідні елементи матриці B рівні k. Наприклад, $p_4 = P(Y_1 + Y_2 = 4) = A_{12} + A_{21}$ $p_4 = P(Y_1 + Y_2 = 4) = A_{12} + A_{21}$, і так далі. У результаті одержуємо розподіл суми

$$Y_1 + Y_2 = \begin{cases} 2 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0{,}49 & 0{,}28 & 0{,}14 & 0{,}04 & 0{,}04 & 0{,}01 \end{cases}.$$

Тепер можна скласти таблицю залежності імовірності нерозорення від об'єму засобів U

U	2	4	5	6	7	8
$P(Y_1 + Y_2 \le U)$	0,49	0,77	0,91	0,95	0,99	1.

Ступінь ризику розраховується як

$$WX = \left(\frac{1}{n}(1 + A)\right)^{1/2} \approx 1.55 > 1,$$

що говорить про незадовільну фінансову стійкість даного портфеля.

Портфель неоднорідний по втратах.

Страхова подія має однакову частоту для всіх договорів даного портфеля (мається на увазі, що всі договори індивідуального ризику), але втрати клієнта у разі страхової події описуються різними законами розподілу імовірностей F_{Y_j}. Цей випадок практично буквально повторює розглянуті вище ситуації для відповідних обсягів портфелів. Різниця полягає в розрахунку числових характеристик

$$\begin{aligned} &EX_j = EN_j \cdot EY_j = qEY_j, \\ &EX = q\sum_{j=1}^{n} EY_j, \\ &VarX_j = \sum_{j=1}^{n} Var\left(N_j \cdot Y_j\right) = nq(1-q)\sum_{j=1}^{n}\left(EY_j\right)^2 + q\sum_{j=1}^{n} VarY_j, \end{aligned} \qquad (6.10)$$

для застосування центральної граничної теореми в першому випадку і розрахунку згорток розподілів

$$g_Y(t) = g_{Y_1}(t) \cdot g_{Y_2}(t) \cdot \ldots \cdot g_{Y_n}(t), \qquad (6.11)$$

у другому випадку. Звичайно, і розрахунок числових характеристик і розрахунок згортком в цьому випадку є трудомістке заняття. У реальності не буває таких подій, а отже, великих досконало різнорідних по втратах і при цьому однакових по частоті відповідних даним подіям портфелів бути не може. Тобто портфель може складатися з двох-трьох груп договорів, що мають різні між собою, але однакові усередині групи розподіли втрат, а це істотно спростить обчислення. Можна поставити питання про розподіл даного портфеля на підпортфелі договорів з однаковим ризиком, але це не дуже коректно з погляду збільшення ступеня ризику.

Договори неоднорідні по імовірності страхового випадку або по втратах.

У цьому випадку застосовується процедура рандомізації. З теоретичної точки зору це означає наступне.

Нехай $F_\theta(x)$ – функція розподілу імовірності, залежна від параметра θ, і u – деяка щільність розподілу імовірності. Тоді

$$W(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}F_\theta(x)u(\theta)d\theta, \tag{6.12}$$

монотонна зростаюча від 0 до 1 функція x, і, отже, функція розподілу.

Якщо $F_\theta(x)$ має безперервну щільність $f(\theta, x)$, то і $W(x)$ має безперервну щільність $w(x)$, рівну

$$W(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\theta,x)u(\theta)d\theta. \tag{6.13}$$

Замість інтегрування відносно щільності u можна підсумовувати по відношенню до дискретного розподілу імовірності: якщо θ_1, θ_2, … вибрані довільно і якщо $p_k \geq 0$, $\sum_k p_k = 1$, то

$$w(x)=\sum_k f(x,\theta)p_k, \tag{6.14}$$

визначає нову щільність імовірності. Процес може бути описаний імовірністю як рандомізація; параметр θ розглядається як випадкова величина і новий розподіл імовірності визначається в (x, θ) площині, яка служить вибірковим простором. Дані щільності називають сумішами.

У нашому випадку ризики усередині портфеля неоднорідні по імовірності страхової події, але можна говорити про те, що, як і раніше, розподіл позовів має біноміальний закон, а вірогідність страхової події q не постійна, а є деякою випадковою величиною з розподілом $U_q(x) = P(q \leq x)$. Тоді безумовний розподіл позовів

$$P(N=k)=E_qN(q)=\int_0^{+\infty}N(q)dU(q)=\int_0^{+\infty}\frac{n!}{k!(n-k)!}q^k(1-q)^{n-k}dU(q) \tag{6.15}$$

У простому випадку можна вважати, що початковий портфель складається з декількох груп договорів, таких, що усередині кожної групи імовірність страхової події постійна.

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. Дайте визначення поняття «страховий портфель».
2. Однорідний портфель.
3. Які припущення приймаються у моделі індивідуального ризику?
4. Формалізація моделі при умові великого числа догорів у портфелі.
5. Формалізація моделі при малій кількості договорів у портфелі.
6. Формалізація моделі, якщо портфель однорідний по втратах.
7. Формалізація моделі при умові, що договори неоднорідні по імовірності страхового випадку або по втратах.

ТЕСТИ

1. Страховий портфель характеризується наступними ознаками:
   а) мінімальна величина можливого збитку;
   б) характеристики залежності ризиків, що увійшли до сукупності;
   в) максимальна величина можливого збитку;
   г) розподіли вимог і втрат, що характеризують ризики, що увійшли до даної сукупності, і пов’язані з ними числові характеристики;
   д) число об’єктів в сукупності.

2. Визначити правильну відповідь:
   а) страховий портфель – сукупність застрахованих ризиків, об’єднаних з метою мінімізації;
   б) стаціонарний портфель – страховик ділить ризик із страхувальником або перестрахувальником;
   в) однорідний портфель – сукупність договорів, для якої зберігається рівновага між «притоком» і «відтоком» договорів;
   г) вирівнювання ризику – об’єднання декількох груп однакових ризиків, причому це об’єднання принаймні не збільшує незбалансованість груп ризиків, що розглядаються окремо.

3. Визначити правильну відповідь:
   а) коефіцієнт однорідності – ступінь ризику;

б) критерій однорідності – затверджує, що однорідним є той портфель, для якого відхилення страхових сум від середньої не перевершує 2;
в) коефіцієнт варіації – відношення максимальної страхової суми даної сукупності до середньої страхової суми.

4. Формалізація моделі індивідуального ризику – це:
   а) розрахунок резерву страхових виплат;
   б) обмеження, що обумовлюють даний випадок;
   в) збалансованість.

5. За допомогою співвідношення $P(U - X \geq 0) = \gamma$ можна записати:
   а) необхідний для покриття відшкодувань резервний фонд;
   б) оптимальне число договорів в портфелі;
   в) виконання страховою компанією своїх зобов'язань по вимогах про виплату з визначеною надійністю.

6. Наведене співвідношення відображує

$$P(N = k) = E_q N(q) = \int_0^{+\infty} N(q) dU(q) = \int_0^{+\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} q^k (1-q)^{n-k} dU(q):$$

   а) імовірності страхової події за нормальним законом;
   б) безумовний розподіл позовів за нормальним законом;
   в) імовірності страхової події за біноміальним законом;
   г) безумовний розподіл позовів за біноміальним законом.

7. Числовим характеристикам $EX_j = EN_j \cdot EY_j = qEY_j$,

$$EX = q\sum_{j=1}^{n} EY_j, \quad VarX_j = \sum_{j=1}^{n} Var\left(N_j \cdot Y_j\right) = nq(1-q)\sum_{j=1}^{n}\left(EY_j\right)^2 + q\sum_{j=1}^{n} VarY_j$$

   відповідає твердження, що:
   а) договори неоднорідні по імовірності страхового випадку або по втратах;
   б) число договорів в портфелі є невеликим, але портфель складається з однакових ризиків;
   в) портфель неоднорідний по втратах.

8. Наведене співвідношення оцінки погрішності:

$$\sup_x \left| P\left\{ \frac{X - EX}{\sigma X} \le x \right\} - \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{1/t^2} dt \right| \le$$

$$\begin{cases} 0{,}7975 \dfrac{E|X_1|^3}{(VarX_1)^{3/2}\sqrt{n}}, \textit{якщо } X_i \textit{ однаково розподілені} \\ \dfrac{33}{4} \dfrac{\sum_{i=1}^{n} E|X_1|^3}{\left(\sum_{i=1}^{n} VarX_1\right)^{3/2}}, \textit{якщо } X_i \textit{ не однаково розподілені} \end{cases}$$

а) вірне;
б) невірне.

9. Співвідношення $\dfrac{U - EX}{\sigma X} = \alpha(\gamma) \Rightarrow U = \alpha(\gamma)\sigma X + EX = L + EX$ описує:
а) необхідний для покриття відшкодувань резервний фонд;
б) виконання страховою компанією своїх зобов'язань по вимогах про виплату з визначеною надійністю;
в) оптимальне число договорів в портфелі.

10. Визначити правильне твердження:
а) при об'єднанні двох груп договорів в один портфель ступінь ризику W результуючого портфеля менше, ніж ступені ризику $W1$ і $W2$ для кожної з частин;
б) при об'єднанні двох груп договорів в один портфель ступінь ризику W результуючого портфеля більше, ніж ступені ризику $W1$ і $W2$ для кожної з частин;
в) при об'єднанні двох груп договорів в один портфель ступінь ризику W результуючого портфеля менше, ніж ступінь ризику $W1$ для однієї з частин.

Тема 7. МОДЕЛЬ КОЛЕКТИВНИХ ПОЗОВІВ

1. ПРИПУЩЕННЯ МОДЕЛІ

   Основні припущення моделі. Позначення, визначення, функції, що використовуються в моделі. Ряд Тейлора. Перша і друга похідна

2. ВИЗНАЧЕННЯ ІМОВІРНОСТІ ВИКОРИСТАННЯ КОМПАНІЄЮ СВОЇХ ЗОБОВ'ЯЗАНЬ ПО ПОРТФЕЛЮ ДОГОВОРІВ МАЙНОВОГО СТРАХУВАННЯ

   Імовірність виконання страховою компанією своїх зобов'язань. Початковий резерв. Гаусівське (нормальне) наближення. Центральна гранична теорема

3. ВИЗНАЧЕННЯ ІМОВІРНОСТІ НЕРОЗОРЕННЯ У БУДЬ-ЯКИЙ МОМЕНТ ПРЕД'ЯВЛЕННЯ ВИМОГ ПРО ВИПЛАТУ СТРАХОВОГО ВІДШКОДУВАННЯ

   Припущення моделі. Імовірність нерозорення страхової компанії. Надбавка безпеки

1. ПРИПУЩЕННЯ МОДЕЛІ

У моделях індивідуальних позовів розглядають окремі договори і пов'язані з ними можливі виплати. Для отримання характеристик портфеля в цілому підсумовуються характеристики окремих договорів. З формальної точки зору виходить проста модель, в тому випадку, якщо один (будь-який) договір портфеля може привести тільки до однієї вимоги про виплату (або не привести до нього).

Тільки такі договори і пов'язані з ними ризики розглядає модель індивідуальних позовів. Проте, відомо, що в більшості видів майнового страхування один договір може привести більш ніж до однієї вимоги. Такі договори і пов'язані з ними ризики розглядають в моделях колективних позовів.

Тут як в моделі індивідуальних позовів основною задачею ми поставимо обгрунтування розміру страхового резерву, що забезпечує виплати по вимогах для одного портфеля договорів колективних позовів.

Основна ідея побудови моделі і проведення відповідних розрахунків полягає в наступному.

Весь портфель розглядається як один договір типу договору майнового страхування. Розглядається процес надходження позовів по портфелю в цілому. Поступаючі позови не пов'язують з конкретними договорами, а розглядають як результат сумарного ризику даного портфеля.

Основні припущення моделі.

Розглянемо портфель договорів страхування, що мають однакову тим тривалість (рівну одиниці часу), укладених в момент часу 0 і що завершуються не пізніше за момент часу 1. Усі договори портфеля відносяться до однієї страхової події.

Нехай:

- ризики клієнтів незалежні між собою.
- плата за страховку вноситься страхувальником повністю спочатку аналізованого періоду (у момент 0) і ніяких додаткових надходжень від страхувальників протягом періоду до 1 немає.
- розподіл втрат для всіх договорів портфеля однаковий.
- розмір вимоги у разі страхової події виплачується повністю і відразу після пред'явлення позову (до моменту 1).
- виплати по вимогах незалежні і однаково розподілені.

У рамках даної моделі вивчається стан активів страхової компанії до моменту завершення дії договорів, а основна задача – розрахунок фонду страхового відшкодування, що забезпечує фінансову стійкість і, отже, визначення страхового внеску по такому ризику.

Позначення, визначення, функції, що використовуються.

Позначимо як $X_j \geq 0$ величину j-ї по рахунку вимоги про виплату. Тоді сумарні виплати можуть бути описані випадковою величиною

$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_N, \tag{7.1}$$

де N – випадкова величина, що описує загальну кількість позовів за аналізований період.

Іншими словами, тут ми маємо справу з сумою випадкового числа однаково розподілених доданків. Функція для випадкової величини, що описує розмір збитку і число випадків має вигляд

$$g_X(t) = g_N(\varphi_{X_j}(t)), \tag{7.2}$$

де $\varphi(t) = \int_0^\infty e^{-tx} dF_{X_i}(x)$ – перетворення Лапласа неперервної випадкової величини X_i.

Розподіл виплат по портфелю можна спробувати встановити розкладанням функції (7.2) в ряд Тейлора в точці 0. В деяких випадках (розподіл виплат дискретний або можливі значення N малі) розрахунок розподілу загальних виплат спрощується використанням згорток

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X_1 + X_2 + \ldots + X_k \leq x \mid N = k) \times \\ \times P(N = k) = \sum_{k=0}^{\infty} (F_{X_1}^*)^k P(N = k), \tag{7.3}$$

де $(F_{X_1}^*)^k$ – позначена k-кратна згортка розподілу втрат на один договір.

Числові характеристики для загальних виплат можна розрахувати, використовуючи першу і другу похідні функції (7.2), узятих в 0. У результаті елементарних перетворень похідних виходять вирази для розрахунку числових характеристик загальних виплат в моделі колективного ризику

$$
\begin{aligned}
&EX = EN \cdot EY_1,\\
&Var = VarN(EY_1)^2 + VarY \cdot EN.
\end{aligned} \tag{7.4}
$$

Відзначимо, що, не дивлячись на зовнішню схожість формул

$$
\begin{aligned}
&EX = EN \cdot EY_1 = E\Big(\sum_{j=1}^{n} N_j\Big) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} t dF_{Y_1}(t) = nq \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} t dF_{Y_1}(t),\\
&VarX = VarN \cdot (EY_1)^2 + VarY_1 \cdot EN =\\
&= nq(1-q) \cdot \left(\int_{-\infty}^{+\infty} t dF_{Y_1}(t) \right)^2 + nq \cdot \left(\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 dF_{Y_1}(t) - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} t dF_{Y_1}(t) \right) \right),
\end{aligned} \tag{7.5}
$$

і (7.4) для обчислення характеристик, відмінність між ними виявляє принципову відмінність моделей. У індивідуальній моделі розраховуються характеристики за одним договором, а потім результати підсумовуються по відомому числу договорів. У колективній же моделі число договорів не потрібно знати з тієї причини, що моделюється число вимог про виплату.

2. ВИЗНАЧЕННЯ ІМОВІРНОСТІ ВИКОРИСТАННЯ КОМПАНІЄЮ СВОЇХ ЗОБОВ'ЯЗАНЬ ПО ПОРТФЕЛЮ ДОГОВОРІВ МАЙНОВОГО СТРАХУВАННЯ

Імовірність виконання страховою компанією своїх зобов'язань по портфелю на момент завершення всіх договорів математично виражається таким чином

$$P(X \le u_0) = P(X_1 + X_2 + \ldots + X_N \le u_0) = P(Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_N \le u_0), \tag{7.6}$$

де u_0 – це сума, яку компанія може виплатити по даному портфелю (назвемо її початковим резервом).

Тобто точне рішення задачі знаходження імовірності $P(X \le u_0)$ зводиться до визначення функції $F_X(x) = P(X \le x)$. Цей розподіл має наступний вигляд

$$
\begin{aligned}
&F_X(x) = P(X \le x) =\\
&= \sum_{k=0}^{\infty} P(Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_N \le x \mid N = k) \cdot P(N = k) =\\
&= \sum_{k=0}^{\infty} F_Y^{*k}(x) \cdot P(N = k),
\end{aligned} \tag{7.7}
$$

де $F_Y^{*k}(x)$ – згортка k-го порядку розподілу $F_Y(x)$, що визначена для безперервної випадкової величини Y як

$$F_Y^{*2}(x) = F_{Y+Y}(x) = \int_0^x F_Y(x-y)dF_Y(y). \qquad (7.8)$$

Застосовуючи цю формулу (n – 1) разів, можна визначити функцію розподілу n доданків. Але оскільки визначення імовірності нерозорення припускає розрахунок функції розподілу великого числа доданків, то це дає можливість простого наближеного розрахунку. Наближений розрахунок заснований на гауссівському (нормальному) наближенні, яке в свою чергу засноване на центральній граничній теоремі (ЦГТ) теорії імовірності. Застосування ЦГТ можливе при великій кількості договорів страхування (при $nq \geq 5$ і $n(1-q) \geq 5$). Страхування передбачає масове охоплення через свою сутність – перерозподіл збитку небагатьох постраждалих між всіма застрахованими. Тому гауссівське наближення неадекватно відображає ситуацію для невеликих страхових компаній, але треба сказати, що доцільність існування невеликих страхових компаній сама по собі проблематична. Страхова компанія, що всерйоз займається страхуванням в умовах справжньої конкуренції – це швидше виключення, ніж правило. З таких позицій можливе застосування гауссівського наближення для визначення імовірності нерозорення страхової компанії.

Припустимо, що всі договори даного портфеля мають однакові ризики, тобто розподіл втрат $F_Y(x)$ на один страховий випадок однаковий для всіх договорів, а страхова подія для всіх характеризується розподілом імовірності F_N. Тоді гауссівське наближення виглядає таким чином

$$P(X \leq u_0) = P\left(\frac{X - E(X)}{\sqrt{VarX}} \leq \frac{u_0 - E(X)}{\sqrt{VarX}}\right) = \Phi\left(\frac{u_0 - E(X)}{\sqrt{VarX}}\right). \qquad (7.9)$$

Окрім розглянутої вище статичної постановки задачі про нерозорення залежно від початкового резерву, вирішеної за допомогою двох методів – точного розрахунку і оцінки, заснованої на гауссівському наближенні, розглянемо ще декілька іншу її постановку. Тепер нашою задачею буде знаходження імовірніості нерозорення залежно від двох початкових параметрів – початкового резерву (u_0) і нетто-ставки ($T_н$).

Для цього випадку приймемо умову, що нетто-ставки однакові для всіх договорів даної групи.

Спочатку оцінимо імовірність того, що різниця між зібраними нетто-преміями і виплатами за договорами страхування буде менше деякого числа r, що зробимо за допомогою гауссівського наближення (P_0). Введемо наступні позначення:

S_i – страхова сума договору з номером i;будемо вважати величини S_i випадковими. Для деякого спрощення припустимо, що даний портфель складається з договорів індивідуального ризику, тобто за час дії договору від нього не може поступити більше однієї вимоги про виплату відшкодування;

q – імовірність страхової події;

X_i – відшкодування на один договір;

$R_Y = \dfrac{\sqrt{VarY}}{EY}$ – коефіцієнт варіації можливих в результаті страхового випадку втрат на один договір;

$R_S = \dfrac{\sqrt{VarS}}{ES}$ – коефіцієнт варіації страхових сум;

$m = EV_i = E\dfrac{X_i}{S_i}$ – середнє очікуване відносне відшкодування на один договір.

$d^2 = Var\dfrac{X_i}{S_i}$ – дисперсія відносного страхового відшкодування на один договір.

У допущенні незалежності страхової суми і відшкодування за одним договором, можна сказати, що

$$m = E\frac{X_i}{S_i} = q\frac{EX_i}{ES_i},$$
$$d^2 = Var\frac{X_i}{S_i} = \frac{m^2(1-q+R_W^2-qR_S^2)}{q+qR_S^2}, \tag{7.10}$$

$Пн_i$ – нетто-премія за i-му договором, $Пн_i = T_н \cdot S_i$.

Тоді для імовірності нерозорення при $n\to\infty$ можна записати, що

$$P\left[\sum_i(Пн_i - X_i) \le r\right] = \Phi\left\{\frac{r - n\cdot E(Пн_i - X_i)}{\sqrt{nd^2}}\right\} =$$
$$= \Phi\left\{\frac{r - N\cdot ES_i\cdot[Тн - m])}{\sqrt{nd^2}}\right\}. \tag{7.11}$$

Відповідно, імовірність нерозорення $\varphi = 1 - P\left[\sum (Пн_i - X_i) \le r\right]$.

Таким чином, задача визначення імовірності виконання страховою компанією своїх зобов'язань по всьому портфелю до моменту завершення всіх договорів може бути вирішена за допомогою математичних методів.

Залежно від переваг компанії і від наявних даних можна використовувати точний розрахунок або різні оцінки. Чим менш детальні статистичні дані має компанія, тим більше приблизним буде розрахунок. Але при масовому проведенні страхування точність наближення дуже велика.

Унаслідок відносної простоти і задовільної точності при достатньо великій кількості договорів найчастіше застосовується гауссівське наближення. Перевага гауссівського наближення у тому, що не треба шукати розподіли розміру окремої виплати і числа виплат. У такому разі ми обходимо цей етап і відразу виходимо на вирішення поставленої задачі – визначення імовірності нерозорення.

3. ВИЗНАЧЕННЯ ІМОВІРНОСТІ НЕРОЗОРЕННЯ У БУДЬ-ЯКИЙ МОМЕНТ ПРЕД'ЯВЛЕННЯ ВИМОГ ПРО ВИПЛАТУ СТРАХОВОГО ВІДШКОДУВАННЯ

Завдання полягає у визначенні імовірності виконання компанією своїх зобов'язань за договорами страхування в динаміці, тобто в моменти пред'явлення кожної конкретної вимоги про виплату страхового відшкодування. На відміну від статичної постановки задачі тепер ми визначимо імовірність нерозорення в залежності не тільки від початкового резерву (u_0), але і від поточних надходжень страхових премій. Як і раніше, ми не враховуватимемо інфляцію і інвестиційний дохід, щоб не ускладнювати модель.

Введемо наступні позначення:

$П_t$ – сума одержаних премій по портфелю з моменту часів 0 до моменту t;

X_t – сума страхових відшкодувань, що виплатять, з моменту часу 0 до моменту t;

$N(t_1, t_2)$ – число виплат страхових відшкодувань з моменту часу t_1 до моменту t_2.

Ми будемо розглядати так звану «безперервну нескінченну версію» постановки задачі динамічного нерозорення, тобто передбачається, що підсумки діяльності підводяться безперервно і що розорення не повинне наступити на тимчасовому інтервалі $0 \le t \le \infty$. На практиці підсумки підводяться через певні проміжки часу, наприклад, щокварталу. У такому разі ми могли б контролювати факт розорення тільки на відповідний момент підведення підсумків, але для спрощення ми припустимо безперервне їх підведення. Встановимо наступні припущення:

- розподіл величини $N(t_1, t_2)$ залежить від довжини проміжку (t_1, t_2) і не залежить від його положення в часі;
- процес надходження позовів ординарний, тобто надходження двох або більш вимог про виплату страхового відшкодування за короткий проміжок часу практично неможливе;
- величини $N(t_1, t_2)$, $N(t_2, t_3)$, …, $N(t_{N\text{-}1}, t_N)$, $t_1 < t_2 < \ldots < t_N$ незалежні, тобто процес надходження вимог не має наслідків;
- договори незалежні тобто виплата страхового відшкодування за одним договором ніяк не впливає на виплату за іншими договорами.

Будемо називати активами компанії на момент часу t наступну величину A_t

$$A_t = u_0 + \Pi_t - X_t. \tag{7.12}$$

Тоді математично імовірність нерозорення описується

$$P(A_t \geq 0 \mid 0 < t < \infty). \tag{7.13}$$

Економічне значення цього виразу в наступному – жодна виплата не вилучає із страхового фонду компанії таку суму, що суми початкового резерву і страхових премій, що залишилася, не вистачить на наступну виплату.

Страхові премії поступають набагато частіше, ніж пред'являються вимоги, і їх розмір звичайно набагато менше розміру відшкодувань. Тому ми вважатимемо в рамках даної моделі надходження премій безперервним детермінованим процесом, що характеризується одним параметром – швидкістю надходження грошових коштів C. Тобто $\Pi_t = C_t$.

Таким чином, ми маємо деякий процес A_t, який складають два певні процеси – u_0 і Π_t і один невизначений – X_t. З цього виходить, що процес A_t також буде випадковим процесом.

При дотриманні допущень, що стосуються процесу надходження вимог, він буде пуассонівським з параметром λ (де λ – середнє число вимог, що поступають в одиницю часу)

$$P(N(0,\ t)=k)=\frac{(\lambda t)^{k}}{k!}e^{-\lambda t},k=0,\ 1,\ 2,\ 3... \qquad (7.14)$$

Відповідно, процес X_t буде пуассонівським процесом з параметрами λ і $F_Y(x) = P(Y \le x)$.

Ми припускаємо, що страхові премії, що збираються в одиницю часу, перевишують очікувані середні виплати в одиницю часу, тобто $C > \lambda E(Y)$. Нехай $C = (1 + \theta)\lambda E(Y)$, де θ – частка перевищення швидкості надходження премій над швидкістю виплат страхових відшкодувань, $\theta = (C / (\lambda E(Y)))^{-1}$, назвемо цю величину надбавкою небезпеки.

Таким чином, в динамічній постановці задачі нерозорення ставиться в залежність від двох параметрів – початкового резерву u_0 і надбавки безпеки θ.

Визначивши за емпіричними даними параметр θ і потім розрахувавши поправочний коефіцієнт R залежно від рівня початкового резерву u_0, ми можемо оцінити верхню межу розорення e^{-Ru_0} і відповідно нижню межу імовірності нерозорення $\varphi(u_0)$.

Загальним висновком приведеної моделі є те, що імовірність нерозорення тим більше, чим більше поправочний коефіцієнт. Тобто поправочний коефіцієнт, що включає швидкість надходження вимог, швидкість надходження премій та розподіл розмірів збитків є інтегральною характеристикою можливості виконання страховою компанією своїх зобов'язань. Дана модель має істотну особливість. Досліджується динамічний процес, який складають надходження премій за договорами, що знову укладаються, і виплати страхових відшкодувань за всіма діючими на даний момент договорами. Тому дана модель орієнтована швидше не на замкнуту солідарну розкладку збитку, а на ліквідність компанії на даний конкретний момент.

Застосування цієї моделі коректне в умовах достатньо стабільного функціонування страхової компанії.

Треба відзначити, що неприпустимо здійснення виплат за раніше укладеними договорами за рахунок надходження премій по знову укладеним – фактично це представляє «фінансову піраміду». Тому застосування нерівності Лундберга має сенс при фінансовому положенні компанії, що не погіршується. При цьому слід чітко розрізняти різницю між імовірністю виконання зобов'язань на момент завершення всіх договорів портфеля і на момент пред'явлення будь-якої вимоги про виплату через різні принципи, встановлені в основу цих методів. Перший орієнтований на принцип замкнутого страхового фонду, а другий – на обчислень поточної ліквідності компанії.

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. Основні припущення моделі колективних ризиків.
2. Якою є основна задача моделі колективних ризиків?
3. Розкладання функції у ряд Тейлора.
4. Числові характеристики для загальних виплат.
5. Наведіть формулу для визначення імовірності використання страховою компанією своїх зобов’язань по портфелю на момент завершення усіх договорів.
6. Поняття Гаусівського наближення.
7. Ймовірність нерозорення.
8. Припущення моделі визначення ймовірності не розорення у будь-який момент пред’явлення вимог страхувальником.
9. Поняття надбавки безпеки.

ТЕСТИ

1. Основна ідея побудови моделі колективних позовів полягає в наступних аспектах:
   а) розглядається процес надходження позовів по портфелю в цілому;
   б) позови, що надходять, не пов’язують з конкретними договорами, а розглядають як результат сумарного ризику даного портфеля;
   в) весь портфель розглядається як один договір типу договору майнового страхування.

2. Визначити припущення моделі колективних позовів:
   а) плата за страховку вноситься страхувальником повністю спочатку аналізованого періоду (у момент 0) і ніяких додаткових надходжень від страхувальників протягом періоду до 1 немає;
   б) ризики клієнтів залежні між собою;
   в) розподіл втрат для всіх договорів портфеля характеризується певним законом розподілу;
   г) виплати по вимогах незалежні і однаково розподілені;
   д) розмір вимоги у разі страхової події виплачується повністю і відразу після пред’явлення позову (до моменту 1).

3. За допомогою зазначеного співвідношення

$$F_X(x) = P(X \le x) = \sum_{k=0}^{\infty} P(Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_N \le x \mid N = k) \cdot P(N = k) =$$

$= \sum_{k=0}^{\infty} F_Y^{*k}(x) \cdot P(N = k)$ можна визначити:

а) розподіл збитків по портфелю;
б) розподіл виплат по портфелю;
в) розподіл платежів по портфелю.

4. За допомогою зазначеної формули можна розрахувати

$$nq(1-q) \cdot \left(\int_{-\infty}^{+\infty} t dF_{Y_1}(t) \right)^2 + nq \cdot \left(\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 dF_{Y_1}(t) - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} t dF_{Y_1}(t) \right) \right):$$

а) математичне сподівання загальних виплат в моделі колективного ризику;
б) середнє квадратичне відхилення загальних виплат в моделі колективного ризику;
в) дисперсію загальних виплат в моделі колективного ризику.

5. За допомогою зазначеної формули $\varphi = 1 - P(\sum (Пн_i - X_i) \le r)$ можна визначити імовірність виконання компанією своїх зобов'язань по всьому портфелю до моменту завершення всіх договорів:
а) так;
б) ні.

6. Величина $\theta = (C / (\lambda E(Y)))^{-1}$ – це:
а) частка перевищення швидкості надходження премій над швидкістю виплат страхових відшкодувань;
б) надбавка небезпеки;
в) початковий резерв;
г) очікувані середні виплати в одиницю часу.

7. Імовірність виконання страховою компанією своїх зобов'язань по портфелю на момент завершення всіх договорів математично виражається таким чином $P(X \le u_0) = P(X_1 + X_2 + \ldots + X_N \le u_0) = P(Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_N \le u_0)$:
а) так;
б) ні.

8. Співвідношення $d^2 = Var \dfrac{X_i}{S_i} = \dfrac{m^2(1 - q + R_W^2 - qR_S^2)}{q + qR_S^2}$ виражає:
а) коефіцієнт варіації страхових сум;

б) середнє очікуване відносне відшкодування на один договір;
в) коефіцієнт варіації можливих в результаті страхового випадку втрат на один договір;
г) дисперсію відносного страхового відшкодування на один договір.

9. Співвідношення $R_s = \dfrac{\sqrt{VarS}}{ES}$ виражає:
а) середнє очікуване відносне відшкодування на один договір;
б) дисперсію відносного страхового відшкодування на один договір;
в) коефіцієнт варіації страхових сум;
г) коефіцієнт варіації можливих в результаті страхового випадку втрат на один договір.

10. Жодна виплата не вилучає із страхового фонду компанії таку суму, що суми початкового резерву і страхових премій, що залишилася, не вистачить на наступну виплату. Наведений вираз характеризує економічний зміст:
а) швидкість здійснення страхових виплат;
б) імовірність розорення;
в) імовірність нерозорення;
г) швидкість надходження страхових сум.

Тема 8. СТАТИЧНІ МОДЕЛІ БАНКРУТСТВА СТРАХОВИХ КОМПАНІЙ

1. ДІАГНОСТИКА БАНКРУТСТВА СТРАХОВОЇ КОМПАНІЇ

   Банкрутство. Етапи провадження справи про банкрутство. Експрес-діагностика. Фундаментальна діагностика. Коефіцієнт Бівера. СВОТ-аналіз. Коефіцієнт можливої нейтралізації загрози банкрутства в короткостроковому перспективному періоді. Масштаби кризового фінансового стану підприємства і можливі шляхи виходу з нього

2. МОДЕЛІ ПРОГНОЗУВАННЯ БАНКРУТСТВА СТРАХОВОЇ КОМПАНІЇ НА ОСНОВІ «БАЛІВ Z»: ДВОФАКТОРНА МОДЕЛЬ, П'ЯТИФАКТОРНА МОДЕЛЬ

   Кореляційна лінійна функція. Коефіцієнт поточної ліквідності. Коефіцієнт питомої ваги позикових засобів в активах

3. МОДЕЛЬ СПРІНГЕЙТА. ФОРМУЛА ЛІСА

   Дискримінантний аналіз

4. МОДЕЛЬ ТАФФЛЕРА

   Прибутковість, відповідність обігового капіталу, фінансового ризику та ліквідності

5. МОДЕЛЬ CREDITMEN

6. МОДЕЛЬ R

7. УНІВЕРСАЛЬНА ДИСКРИМІНАНТНА МОДЕЛЬ

8. КРИТЕРІЇ ІМОВІРНОСТІ ФІНАНСОВОЇ КРИЗИ В СТРАХОВІЙ КОМПАНІЇ

1. ДІАГНОСТИКА БАНКРУТСТВА СТРАХОВОЇ КОМПАНІЇ

Банкрутство — визнане судовими органами незадовільне господарське становище фізичної чи юридичної особи, ознакою якого є припинення розрахунків за зобов'язаннями через нестачу активів у ліквідній формі.

У відповідності до Закону України «Про відновлення платоспроможності боржника або визнання його банкрутом» банкрутство – визнана господарським судом неспроможність боржника відновити свою платоспроможність та задовольнити визнані судом вимоги кредиторів не інакше як через застосування ліквідаційної процедури.

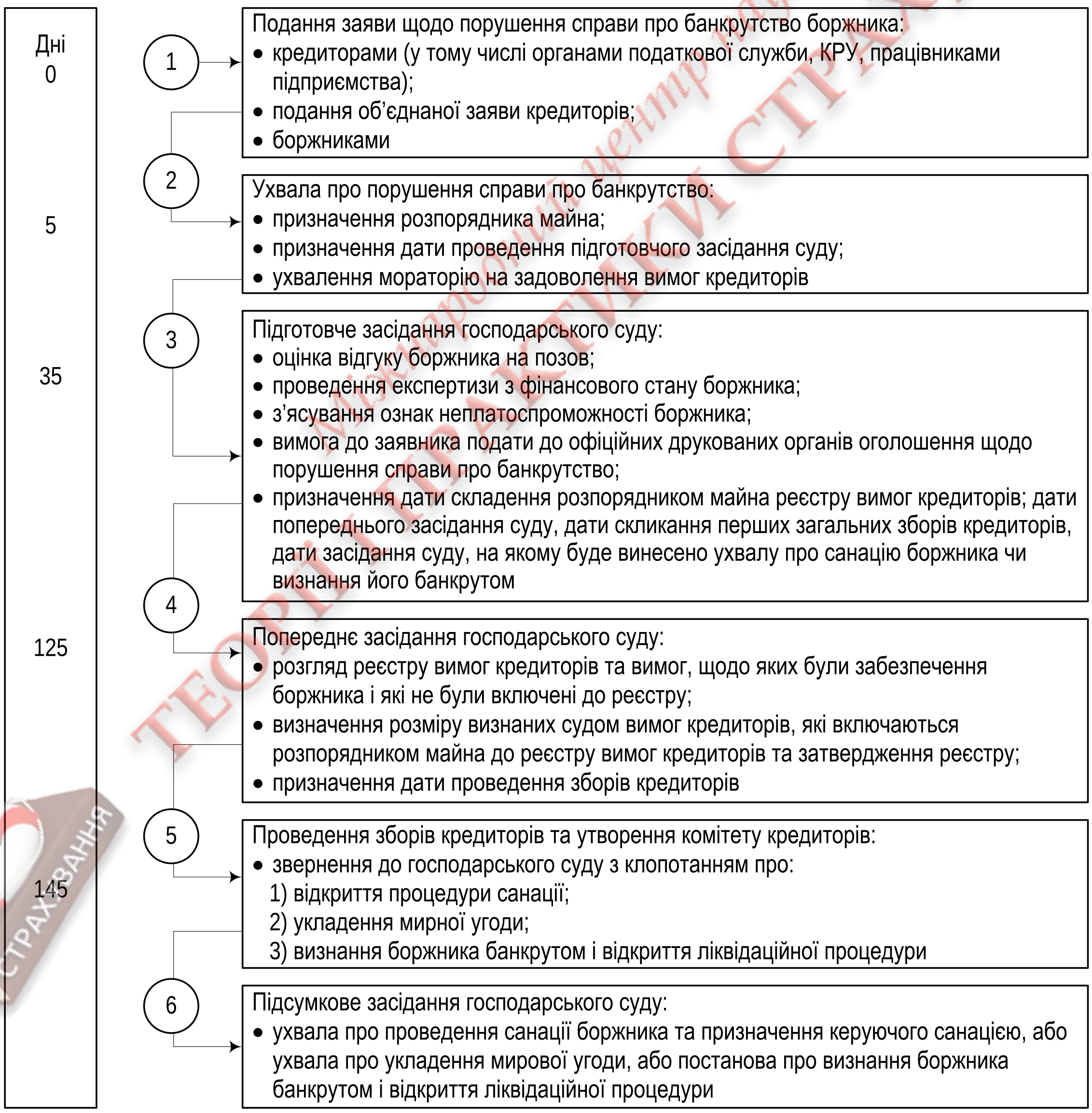


Рис. 8.1. Етапи провадження справи про банкрутство

Під банкрутством також можна розуміти засвідчену судом абсолютну неплатоспроможність суб'єкту господарювання, тобто це неспроможність боржника, викликана відсутністю або нестачею коштів, якими би він мав змогу розпоряджатися під час настання строку платежу, за умови відсутності можливості отримати необхідні кошти.

Діагностика банкрутства являє собою систему цільового фінансового аналізу, спрямованого на виявлення параметрів кризового розвитку підприємства, що генерують загрозу його банкрутства в майбутньому періоді.

Залежно від цілей і методів здійснення діагностика банкрутства поділяється на дві основні системи: експрес-діагностика і фундаментальна діагностика.

З метою своєчасного виявлення тенденцій формування незадовільної структури балансу у прибутково працюючого суб'єкта господарювання експрес-діагностика банкрутства в Україні здійснюється за допомогою коефіцієнта Бівера

$$K = \frac{ЧП + A}{З}, \tag{8.1}$$

де K – коефіцієнт Бівера;
$ЧП$ – чистий прибуток;
A – амортизація;
$З$ – довгострокові і поточні зобов'язання.

Ознакою формування незадовільної структури балансу є таке фінансове становище компанії, у якого протягом тривалого часу (1,5-2 роки) коефіцієнт Бівера не перевищує 0,2.

У табл. 8.1 наведено шкалу попередньої оцінки масштабів кризового фінансового стану компанії за основними індикаторами окремих об'єктів спостереження «кризового поля».

Попереджувальний характер експрес-діагностики найбільш відчутний на стадії легкої фінансової кризи. При інших масштабах кризового стану вона обов'язково має доповнюватися системою фундаментальної діагностики.

Фундаментальна діагностика банкрутства здійснюється за наступними основними етапами:

1. Систематизація основних факторів, що обумовлюють кризовий фінансовий розвиток підприємства.
2. Проведення комплексного фундаментального аналізу впливу окремих факторів на кризовий фінансовий розвиток компанії. У процесі

здійснення такого аналізу використовуються наступні основні методи оцінки імовірності банкрутства:

- повний комплексний аналіз фінансових коефіцієнтів;
- кореляційний аналіз;
- СВОТ-аналіз (SWOT-analysis) – дослідження характеру сильних та слабких сторін компанії в розрізі окремих внутрішніх факторів, а також позитивного або негативного впливу окремих зовнішніх факторів, що обумовлюють її кризовий фінансовий розвиток;
- розрахунок індексу кредитоспроможності (модель Альтмана, модель Тафлера, Ліса тощо).

3. Прогнозування розвитку кризового фінансового стану підприємства під негативним впливом окремих факторів, що являють собою найбільшу загрозу банкрутства в майбутньому періоді.
4. Прогнозування здатності підприємства до нейтралізації загрози банкрутства за рахунок внутрішнього потенціалу.

Таблиця 8.1

Експрес-діагностика масштабів кризової ситуації

Обєкти спостереження «кризового поля»	**Масштаби фінансового стану компанії**		
	Легка фінансова криза	**Глибока фінансова криза**	**Фінансова катастрофа**
I. Чистий грошовий потік	Зниження ліквідності грошового потоку	Від'ємне значення чистого грошового потоку	Значне від'ємне значення чистого грошового потоку
II. Ринкова вартість компанії	Стабілізація ринкової вартості компанії	Тенденція до зниження ринкової вартості компанії	Обвальне зниження ринкової вартості компанії
III. Структура капіталу підприємства	Зниження коефіцієнта автономії	Зростання коефіцієнта і зниження ефекту фінансового левериджу	Гранично високий коефіцієнт і відсутність ефекту фінансового левериджу
IV. Склад фінансових зобов'язань компанії за терміновістю погашення	Підвищення суми і питомої ваги короткострокових фінансових зобов'язань	Високий коефіцієнт негайних (термінових) фінансових зобов'язань	Дуже високий коефіцієнт негайних (термінових) фінансових зобов'язань
V. Склад активів компанії	Зниження коефіцієнта абсолютної платоспроможності	Істотне зниження коефіцієнтів абсолютної і поточної платоспроможності	Абсолютна неплатоспроможність через відсутність грошових активів
VI. Склад поточних витрат підприємства	Тенденція до зростання змінних витрат	Високий коефіцієнт операційного левериджу при тенденції до зростання рівня змінних витрат	Дуже високий коефіцієнт операційного левериджу при тенденції до зростання загального рівня поточних витрат
VII. Рівень концентрації фінансових операцій в зонах підвищеного ризику	Підвищення коефіцієнта вкладення капіталу в зоні критичного ризику	Переважне вкладення капіталу в зоні критичного ризику	Значна частка вкладення капіталу в зоні катастрофічного ризику

У процесі такого прогнозування визначається, наскільки швидко та в якому обсязі підприємство здатне:

- забезпечити зростання чистого грошового потоку;
- знизити загальну суму фінансових зобов'язань;
- реструктуризувати свої фінансові зобов'язання шляхом переводу їх з короткострокової форми в довгострокову;
- знизити рівень поточних витрат і коефіцієнт операційного левериджу;
- знизити рівень фінансових ризиків у своїй діяльності;
- позитивно змінити інші фінансові показники, незважаючи на негативний вплив окремих факторів.

Узагальнюючу оцінку здатності підприємства до нейтралізації загрози банкрутства в короткостроковому перспективному періоді дозволяє отримати коефіцієнт можливої нейтралізації поточної загрози банкрутства, який розраховується за такою формулою

$$K_{НЗБ} = \frac{ЧГП}{\overline{ФЗ}}, \quad (8.2)$$

де $K_{НЗБ}$ – коефіцієнт можливої нейтралізації загрози банкрутства в короткостроковому перспективному періоді;

$ЧГП$ – очікувана сума чистого грошового потоку;

$\overline{ФЗ}$ – середня сума фінансових зобов'язань.

У табл. 8.2 наведені критерії характеристик масштабів кризового фінансового стану компанії, а також найбільш адекватні їм способи реагування.

Таблиця 8.2

Масштаби кризового фінансового стану компанії і можливі шляхи виходу з нього

Імовірність банкрутства	Масштаб кризового стану компанії	Спосіб реагування
Можлива	Легка фінансова криза	Нормалізація поточної фінансової діяльності
Висока	Глибока фінансова криза	Повне використання внутрішніх механізмів фінансової стабілізації
Дуже висока	Фінансова катастрофа	Пошук ефективних форм санації або ліквідація підприємства

В Україні з метою забезпечення однозначності підходів при оцінці фінансової неспроможності підприємств затверджено «Методичні рекомендації щодо виявлення ознак неплатоспроможності підприємства та ознак дій з приховування банкрутства, фіктивного банкрутства чи доведення до банкрутства» (Наказ Міністерства економіки України № 14 від 19.01.2006).

2. МОДЕЛІ ПРОГНОЗУВАННЯ БАНКРУТСТВА СТРАХОВОЇ КОМПАНІЇ НА ОСНОВІ «БАЛІВ Z»: ДВОФАКТОРНА МОДЕЛЬ. П'ЯТИФАКТОРНА МОДЕЛЬ

У світовій практиці для прогнозування стійкості роботи компанії, вибору його фінансової політики, а також визначення ризику банкрутства використовуються різні економіко-математичні моделі.

Найбільш вживані методи оцінки ймовірності банкрутства підприємства – це Z-моделі, запропоновані відомим західним економістом Е. Альтманом в 1968 р. Під час побудови індексу Е. Альтман обстежив 66 компаній, половина з яких збанкрутувала в 1946-1965 рр, а половина працювала успішно, і досліджував 22 аналітичних коефіцієнти, що могли бути корисні для прогнозування можливого банкрутства. З цих показників він відібрав п'ять найбільш значимих і побудував багатофакторне регресійне рівняння.

Проведені дослідження показали, що певні комбінації відносних показників мають високу здатність характеризувати ймовірність швидкого банкрутства тієї чи іншої компанії. На основі використання прийомів статистичного методу, названого аналізом множинних дискримінант, було розраховано параметри кореляційної лінійної функції

$$Z = E + A_n X_n, \qquad (8.3)$$

де Z – показник неплатоспроможності підприємства;

A – параметри, що показують ступінь впливу показників на імовірність банкрутства;

X – показники (фактори впливу) діяльності підприємства.

Відносно простим способом проведення швидкого експрес-аналізу надійності компанії, в тому числі і страхової, є застосування так званих балів Z, які дозволяють спрогнозувати банкрутство. Відомі наступні моделі прогнозування банкротства.

Двофакторна модель.

В рамках даної моделі Z-бал знаходиться за допомогою використання двох коефіцієнтів: коефіцієнта поточної ліквідності ($K_{Тл}$) і питомої ваги позикових засобів в активах (*УВЗС*) за формулою

$$Z_1 = -0{,}3877 + K_{Тл} \cdot (-1{,}0736) + 0{,}0579 \cdot УВЗС. \qquad (8.4)$$

При цьому $K_{Тл}$ розраховується як відношення поточних активів до поточних зобов'язань. Під останніми розуміються короткострокові позики і строкова кредиторська заборгованість.

Вагові коефіцієнти, використані в даній методиці, знайдені емпіричним шляхом, також як і постійна величина (– 0,3877).

Значення балу: якщо $Z_1 > 0$, імовірність банкрутства велика, в іншому випадку – імовірність низька.

Застосування цієї методики в чистому вигляді в Україні вельми проблематичне через відмінності в темпах інфляції, циклічності макро- і мікроекономіки, а також специфіки вітчизняного податкового законодавства (дана методика розроблена для американської економіки). Крім цього двухфакторна модель враховує тільки дна чинника, у той час як фінансовий стан компанії характеризується набагато більшою кількістю параметрів. З цієї причини одержаний на основі даної моделі прогноз може значно відхилитися від реального стану компанії.

П'ятифакторна модель (індекс кредитоспроможності Альтмана).

В рамках даної моделі *Z*-бал знаходиться за допомогою використання п'яти коефіцієнтів

$$Z_2 = 1{,}2x_1 + 1{,}4x_2 + 3{,}3x_3 + 0{,}6x_4 + 0{,}999x_5, \qquad (8.5)$$

де x_1 – відношення різниці поточних активів і короткострокових зобов'язань до активів,

x_2 – відношення чистого прибутку до активів,

x_3 – відношення прибутку до виплати відсотків за позиками і податків до активів,

x_4 – відношення ринкової ціни акціонерного капіталу до позикових коштів, відношення продажів до активів,

x_5 – відношення виручки до суми активів.

Значення балів представлені в табл. 8.3 Формули розрахунку балів у вказаних моделях приведені для промислових підприємств. Не дивлячись на те, що для страхових організацій можна обчислити всі ці показники, найбільший інтерес при прогнозуванні банкрутства представляють числові коефіцієнти, використані при розрахунку. Для кожної окремо взятої країни використовуються свої коефіцієнти і критерії оцінки одержаних результатів. В Україні *Z*-бали для страхових компаній не розраховуються і подібні моделі не застосовуються.

Таблиця 8.3

Значенні балів *Z*

Значення балу Z_2	Імовірність банкрутства
Менше 1,81	Підприємство стане банкротом через один рік з імовірністю 95%, через два роки з
1,81 –2,7	Середня, перехідна в незначну
2,7 – 2,99	Невелика
Більше 2,99	Висновки утруднені

Z-коефіцієнт Альтмана використовується для великих компаній, що котирують свої акції на біржах.

Пізніше, в 1983 р. Е. Альтман отримав модифікований варіант своєї формули для компаній, акції яких не котируються на біржі

$$Z = 0{,}717X_1 + 0{,}847X_2 + 3{,}107X_3 + 0{,}42X_4 + 0{,}995X_5, \qquad (8.6)$$

де X_4 – балансова вартість власного капіталу/зобов’язання.

Якщо $Z > 1{,}23$, то ризик банкрутства мінімальний, в іншому випадку підприємству з великою ймовірністю загрожує банкрутство.

Досвід використання цієї моделі в ряді країн (США, Канаді, Бразилії, Австрії, Японії) показав, що спрогнозувати імовірність банкрутства за її допомогою за один рік можна з точністю 95%, за два роки – 70%, за три – 48%, за чотири-п’ять років – 30%.

Узагалі відповідно до цієї формули підприємства з рентабельністю, вищою від деякої межі, стають «занадто сильними». В умовах України рентабельність окремого підприємства значною мірою піддається небезпеці зовнішніх коливань. Очевидно, ця формула в наших умовах повинна мати менші параметри за різних показників рентабельності.

3. МОДЕЛЬ СПРІНГЕЙТА. ФОРМУЛА ЛІСА

Модель Спрінгейта була побудована Гордоном Л. В. Спрінгейтом в університеті Симона Фрейзера в 1978 р. за допомогою покрокового дискримінантного аналізу методом, який розробив Е. Альтман у 1968 р. При створенні моделі Спрінгейт використовував дані 40 компаній і досяг 92,5% точності пророкування неплатоспроможності на рік уперед, проте з часом цей показник зменшується.

Пізніше Бодерас, використовуючи модель Спрінгейта, за даними 50 підприємств із середнім балансом у 2,5 млн дол., досяг 88% точності прогнозування.

У процесі створення моделі з 19 фінансових коефіцієнтів в остаточному варіанті залишилося тільки чотири

$$Z = 1{,}03X_1 + 3{,}02X_2 + 0{,}66X_3 + 0{,}4X_4, \qquad (8.7)$$

де X_1 – оборотні активи / загальна вартість активів;
X_2 – прибуток до виплат / загальна вартість активів;
X_3 – прибуток до виплат / поточні зобов'язання;
X_4 – виручка / загальна вартість активів.

Якщо $Z < 0{,}862$, то підприємство є потенційним банкрутом.

Формула Ліса для Великобританії, за якою лімітне значення дорівнює 0,037 виглядає наступним чином

$$Z = 0{,}063X_1 + 0{,}092X_2 + 0{,}057X_3 + 0{,}001X_4, \qquad (8.8)$$

де X_1 – обіговий капітал / сума активів;
X_2 – прибуток від реалізації / сума активів;
X_3 – нерозподілений прибуток / сума активів;
X_4 – власний капітал / позиковий капітал.

4. МОДЕЛЬ ТАФФЛЕРА

Модель Таффлера запропоновував британський вчений Таффлер у 1977 р. Ця прогнозна модель є чотирьохфакторною; у ній при використанні комп'ютерної техніки на першій стадії обчислюються 80 відношень за даними збанкрутілих і платоспроможних компаній. Потім, використовуючи статистичний метод, відомий як аналіз багатомірного дискримінанта, можна побудувати модель платоспроможності, визначаючи частки співвідношення, що якнайкраще виділяють дві групи компаній та їхні коефіцієнти. Такий вибірковий підрахунок співвідношень типовий для визначення деяких ключових вимірів діяльності корпорації – прибутковості, відповідності обігового капіталу, фінансового ризику та ліквідності. Поєднуючи ці показники і зводячи їх відповідним чином, модель платоспроможності дає точну картину фінансового стану корпорації. Типова модель для аналізу компаній має такий вигляд

$$Z = 0{,}53X_1 + 0{,}13X_2 + 0{,}18X_3 + 0{,}16X_4, \qquad (8.9)$$

де X_1 – прибуток до виплат / поточні зобов'язання;
X_2 – поточні активи / зобов'язання;
X_3 – поточні зобов'язання / загальна вартість активів;

X_4 – інтервал кредитування.

Якщо $Z > 0,3$, то у фірми хороші довгострокові перспективи.

5. МОДЕЛЬ CREDITMEN

Модель Creditmen є одним з варіантів інтегрального підходу до оцінювання фінансового стану підприємства, що розроблено у Франції Ж. Де Паляном, відповідно до якого фінансова ситуація підприємства може бути точно охарактеризована показником

$$Z = 25X_1 + 25X_2 + 10X_3 + 20X_4 + 20X_5, \qquad (8.10)$$

де X_1 – високоліквідні активи / поточні зобов'язання;

X_2 – власний капітал / зобов'язання;

X_3 – високоліквідні активи / баланс;

X_4 – виручка / дебіторська заборгованість;

X_5 – виручка / дебіторська заборгованість.

Коефіцієнти рівняння [25, 25, 10, 20, 20] виражають частку впливу кожного показника.

Якщо $Z = 100$ – фінансова ситуація нормальна;

$Z > 100$ – фінансова ситуація добра;

$Z < 100$ – фінансова ситуація викликає тривогу.

6. МОДЕЛЬ R

Модель R запропонували вчені Іркутської державної економічної академії. Це чотирьохфакторна модель прогнозу ризику банкрутства, що має такий вигляд

$$R = 0,838X_1 + X_2 + 0,054X_3 + 0,63X_4, \qquad (8.11)$$

де X_1 – обігові активи / загальна вартість активів;

X_2 – чистий прибуток / власний капітал;

X_3 – виручка / загальна вартість активів;

X_4 – чистий прибуток / сумарні витрати.

Імовірність банкрутства компанії у відповідності зі значенням моделі R визначається, як показано в табл. 8.4.

Таблиця 8.4

Визначення імовірності банкрутства

Значення *R*	Імовірність банкрутства, %
Менше ніж 0	Максимальна (90–100)
0–0,18	Висока (60–80)
0,18–0,32	Середня (35–50)
0,32–0,42	Низька (15–20)
Більше ніж 0,42	Мінімальна (до 10)

До очевидних переваг цієї моделі можна віднести те, що механізм її розроблення і всі основні етапи розрахунків досить докладно описані в джерелі.

При використанні наведених моделей для українських компаній слід враховувати ряд обставин. Так, показник «Власний капітал», відповідно до чинних в Україні методик переоцінювання активів, штучно завищується сумами за субрахунком 423 «Дооцінка активів». Старим, зношеним основним фондам надається таке саме значення, як і новим. Як наслідок, співвідношення між власним і позиковим капіталом не відповідає дійсності. Тому моделі, що використовують цей показник, можуть не відображати реального стану справ.

Умовам діяльності українських підприємств більше відповідає універсальна дискримінантна модель.

7. УНІВЕРСАЛЬНА ДИСКРИМІНАНТНА МОДЕЛЬ

Універсальна дискримінантна модель була побудована на основі кількох методик прогнозування банкрутства і виглядає наступним чином

$$Z = 1{,}5X_1 + 0{,}08X_2 + 10X_3 + 5X_4 + 0{,}3X_5 + 0{,}1X_6, \qquad (8.12)$$

де X_1 – cash-flow / зобов’язання;
X_2 – баланс / зобов’язання;
X_3 – чистий прибуток / баланс;
X_4 – чистий прибуток / виручка;
X_5 – виробничі запаси / виручка;
X_6 – виручка / баланс (обіговість основного капіталу).

Для обчислення коефіцієнта X_1 використовують показник cash-flow. Він був запроваджений на початку 50-х років XX ст. для аналізу фінансового стану підприємства та аналізу оцінки привабливості цінних паперів. Фактологічною базою аналізу cash-flow є дані звіту про фінансові результати та їх використання. Показник cash-flow характеризує величину чистих грошових потоків, які утворюються внаслідок операційної та інвестиційної діяльності і залишаються в розпорядженні підприємства в певному періоді.

Отримані результати за формулою (8.12) після обрахунків можна інтерпретувати так:

$Z > 2$ – підприємство вважається фінансово стійким, йому не загрожує банкрутство;

$1 < Z < 2$ – фінансова рівновага (фінансова стійкість) порушена, але за умови переходу на антикризове управління банкрутство йому не загрожує;

$0 < Z < 1$ – підприємству загрожує банкрутство, якщо воно не здійснить санаційних заходів;

$Z < 0$ – підприємство є напівбанкрутом.

8. КРИТЕРІЇ ІМОВІРНОСТІ ФІНАНСОВОЇ КРИЗИ В СТРАХОВІЙ КОМПАНІЇ

У аналітичному дослідженні та прогнозуванні використовуються й інші критерії імовірності фінансової кризи страхової компанії.

До них належать:

- істотні втрати в основній діяльності;
- підвищення собівартості продукції (послуг);
- зниження продуктивності праці;
- збільшення обсягу неліквідності оборотних коштів;
- неповне завантаження потужності, неритмічність виробничого процесу;
- втрата клієнтів, тобто несприятливі зміни у портфелі замовлень;
- перевищення критичного рівня простроченої кредиторської заборгованості;
- надмірне використання короткострокових позикових коштів у ролі джерел фінансування довгострокових вкладень;
- постійне зростання до небезпечних меж частки позикових коштів у загальній сумі джерел коштів;
- хронічне невиконання зобов’язань перед інвесторами, кредиторами, акціонерами;
- неправильна реінвестиційна політика і т. д.

У разі надходження сигналів про ймовірність настання банкрутства організації слід розробити заходи для виходу з несприятливої ситуації. До них належать:

- впровадження нових, ефективних технологій;
- розробка нових видів страхових продуктів, які користуються попитом у клієнтів;
- проведення інноваційної маркетингової кампанії;
- цінова конкуренція;
- ефективна організація збуту страхових продуктів, висока якість обслуговування;
- зниження витрат;
- удосконалення управління.

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. Дайте визначення поняття «банкрутство».
2. Які етапи провадження справи про банкрутство? Охарактеризуйте кожен етап.
3. Експрес-діагностика банкрутства за допомогою коефіцієнта Бівера.
4. Назвіть етапи фундаментальної оцінки банкрутства.
5. Що таке СВОТ-аналіз?
6. Що показує коефіцієнт нейтралізації загрози банкрутства. Формула розрахунку.
7. Модель Альтмана.
8. Двофакторна та пятифакторна моделі.
9. Модель Спрінгейта
10. Формула Ліса.
11. Модель Таффлера.
12. Модель Creditmen.
13. Модель R.
14. Універсальна дискримінантна модель.
15. Критерії імовірності фінансової кризи у страховій компанії.
16. Які заходи уникнення загрози банкрутства страхової компанії?

ТЕСТИ

1. За допомогою коефіцієнта Бівера здійснюється:
   а) експрес-діагностика банкрутства страхової компанії;
   б) фундаментальна діагностика банкрутства страхової компанії;
   в) визначення фінансового стану страхової компанії.

2. Фундаментальна діагностика банкрутства здійснюється за наступними етапами (так, ні):
   а) проведення комплексного фундаментального аналізу впливу окремих факторів на кризовий фінансовий розвиток страхової компанії;
   б) прогнозування розвитку кризового фінансового стану страхової компанії під негативним впливом окремих факторів, що являють собою найбільшу загрозу банкрутства підприємства в майбутньому періоді;
   в) систематизація основних факторів, що обумовлюють кризовий фінансовий розвиток у страховій компанії;
   г) прогнозування здатності страхової компанії до нейтралізації загрози банкрутства за рахунок внутрішнього потенціалу;
   д) остаточне визначення масштабів кризового фінансового стану страхової компанії.

3. Яку модель описує наведене рівняння
   $Z = 1{,}5X_1 + 0{,}08X_2 + 10X_3 + 5X_4 + 0{,}3X_5 + 0{,}1X_6$:
   а) двофакторна модель Альтмана;
   б) п’ятифакторна модель Альтмана;
   в) модель Спрінгейта;
   г) модель Таффлера;
   д) модель Creditmen;
   е) модель R;
   ж) універсальна дискримінантна модель.

4. Яку модель описує наведене рівняння
   $Z_2 = 1{,}2x_1 + 1{,}4x_2 + 3{,}3x_3 + 0{,}6x_4 + 0{,}999x_5$:
   а) двофакторна модель Альтмана;
   б) п’ятифакторна модель Альтмана;
   в) модель Спрінгейта;
   г) модель Таффлера;
   д) модель Creditmen;
   е) модель *R*;
   ж) універсальна дискримінантна модель.

5. Банкрутство – це:
   а) визнане судовими органами незадовільне господарське становище фізичної чи юридичної особи, ознакою якого є припинення розрахунків за зобов’язаннями через нестачу активів у ліквідній формі;

б) визнана господарським судом неспроможність боржника відновити свою платоспроможність та задовольнити визнані судом вимоги кредиторів не інакше як через застосування ліквідаційної процедури;
в) засвідчена судом абсолютну неплатоспроможність суб'єкту господарювання, тобто це неспроможність боржника, викликана відсутністю або нестачею коштів, якими би він мав змогу розпоряджатися під час настання строку платежу, за умови відсутності можливості отримати необхідні кошти;

6. До методів оцінки імовірності банкрутства належать:
а) повний комплексний аналіз фінансових коефіцієнтів;
б) кореляційний аналіз;
в) СВОТ-аналіз;
г) прогнозування розвитку кризового фінансового стану компанії;
д) прогнозування здатності підприємства до нейтралізації загрози банкрутства за рахунок внутрішнього потенціалу.

7. Узагальнюючу оцінку здатності підприємства до нейтралізації загрози банкрутства в короткостроковому перспективному періоді дозволяє отримати коефіцієнт можливої нейтралізації поточної загрози банкрутства:
а) так;
б) ні.

8. Яку модель описує наведене рівняння $Z = 0{,}53X_1 + 0{,}13X_2 + 0{,}18X_3 + 0{,}16X_4$:
а) двофакторна модель Альтмана;
б) п'ятифакторна модель Альтмана;
в) модель Спрінгейта;
г) модель Таффлера;
д) модель Creditmen;
е) модель R;
ж) універсальна дискримінантна модель.

Тема 9. ДИНАМІЧНІ МОДЕЛІ БАНКРУТСТВА СТРАХОВОЇ КОМПАНІЇ

1. ВИЗНАЧЕННЯ ІМОВІРНОСТІ БАНКРУТСТВА СТРАХОВОЇ КОМПАНІЇ НА ОСНОВІ АНАЛІЗУ ЗА ФОРМУЛОЮ БАЙЄСА

   Система показників для визначення ймовірності банкрутства страхової компанії. Оцінка фінансового стану страхової компанії. Методика визначення імовірності банкрутства страхових компаній на основі застосування формули Байєса

2. ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ПЛАТОСПРОМОЖНОСТІ СТРАХОВОЇ КОМПАНІЇ

   Фактичний запас платоспроможності страхової компанії. Нормативний запас платоспроможності страхової компанії

1. ВИЗНАЧЕННЯ ІМОВІРНОСТІ БАНКРУТСТВА СТРАХОВОЇ КОМПАНІЇ НА ОСНОВІ АНАЛІЗУ ЗА ФОРМУЛОЮ БАЙЄСА

На основі аналізу даних статистичної звітності страховиків можна сформувати фінансові показники, на основі яких визначається імовірність банкрутства страхових компаній.

Пропонується сформувати наступну систему базових показників:

- частка валових надходжень страхових платежів у сумарних активах;
- співвідношення сплаченого статутного капіталу та сумарних активів;
- частка страхових платежів, які повертаються страхувальникам;
- частка страхових платежів, які повертаються перестраховикам;
- коефіцієнт фінансової стабільності страхової компанії

$$K_{ф.с.} = \frac{Доходи + Середня\ вартість\ активів\ компанії}{Витрати\ страхової\ компанії}, \qquad (9.1)$$

- коефіцієнт фінансової стійкості страхової компанії

$$K_{ф.ст} = \frac{\begin{pmatrix} Сплачений \\ статутний\ капітал \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Інші \\ власні\ кошти \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Страхові \\ резерви \end{pmatrix}}{Загальна\ сума\ страхових\ внесків, що\ надійшли} \qquad (9.2)$$

Оцінка фінансового стану страхової компанії пропонується проводити на основі наступної системи показників

$$K_1 = \frac{Прибуток}{Навантаження - Витрати};$$

$$K_2 = \frac{Прибуток}{Обсяг\ страхових\ платежів};$$

$$K_3 = \frac{Прибуток}{Сума\ страхових\ відшкодувань}; \qquad (9.3)$$

$$K_4 = \frac{Прибуток}{Резервний\ фонд};$$

$$K_5 = \frac{Прибуток}{Витрати};$$

$$K_6 = \frac{Прибуток + Резервний\ фонд}{Обсяг\ ризиків};$$

$$K_7 = \frac{Навантаження}{Резервний\ фонд};$$

$$K_8 = \frac{Навантаження}{Обсяг\ страхових\ платежів};$$

$$K_9 = \frac{Страхові\ виплати\ за\ всіма\ видами\ страхування}{Загальна\ сума\ страхових\ премій, що\ надійшли};$$

$$K_{10} = \frac{Сума\ внесків, передана\ за\ договором\ страхування}{Загальна\ сума\ страхових\ внесків, що\ надійшли};$$

$$K_{11} = \frac{Сплачений\ статутний\ капітал + Інші\ власні\ кошти}{Страхові\ резерви};$$

$$K_{12} = \frac{\begin{matrix}Видатки\ по\ страховій\ діяльності \\ (включаючи\ комісійні\ винагороди)\end{matrix}}{Загальна\ сума\ страхових\ внесків, що\ надійшли}.$$

Методика визначення імовірності банкрутства страхових компаній на основі застосування формули Байєса передбачає наступні кроки:

- формування і розрахунок показників, що характеризують стійкість (надійність) страхових організацій;
- визначення бінарних характеристик на основі співвідношення значень отриманих показників та допустимих значень по відповідній сукупності показників (якщо відповідний показник лежить в допустимих межах для певної групи, ставиться 0, в іншому випадку – 1);
- визначення імовірності банкрутсва на основі використання формули Байєса.

Оскільки страхові компанії в загальній сукупності не є порівнюваними між собою, тобто сукупність не є однорідною, тому ми вважаємо за доцільне розбити їх на групи, однорідні за показником загальної суми активів. Для цього в сукупності визначається середній розмір активів, за яким страхові компанії поділяються на групи. У кожній із зазначених груп знаходимо середні значення. На основі отриманих чотирьох груп страхових компаній проводимо визначення рейтингової оцінки.

Для кожного показника визначаємо середнє значення по кожній виділеній за обсягами активів групі страхових компаній

$$Xcp_j = \frac{\sum_i Ack_{ij}}{Kck_j}, \tag{9.4}$$

де Xcp_j – середня значення показника по $j = 1 \div 4$ групі страхових компаній;

$\sum_i Ack_{ij}$ – загальна сума значень показника по $j = 1 \div 4$ групі страхових компаній;

Kck_j – загальна кількість страхових компаній по $j = 1 \div 4$ групі страхових компаній.

Для визначення бінарних характеристик за кожним показником по кожній страховій компанії певної групи $j = 1 \div 4$ скористаємось наступною формулою

$$X\text{бін}_j \begin{cases} = 0, X_j > Xcp_j \\ = 1, X_j < Xcp_j \end{cases}, \tag{9.5}$$

де $X\text{бін}_j$ – бінарні характеристики по кожній страховій компанії певної групи $j = 1 \div 4$;

X_j – значення показника по кожній страховій компанії певної групи $j = 1 \div 4$;

Xcp_j – середня значення частки фінансових операцій, зареєстрованих за ознаками внутрішнього фінансового моніторингу по $i = 1 \div 4$ – групі страхових компаній.

Розглянемо сутність методики розрахунку імовірності виконання страховою компанією показників, що характеризують її стійкість, з використанням формули Байєса. Це можливо, коли про страхову компанію ми можемо отримати певний набір характеристик – $P_C(H1)$, (відповідно $P_C(H2)$ – коли страхова компанія є стійкою), $C = (c_1, c_2, \ldots, c_{18})$.

За теоремою Байєса

$$P_c(H1) = \frac{P(H1) \cdot P_{H1}(C)}{P(C)} = \frac{P(H1) \cdot p_{H1}(C)}{\sum_{i=1}^{2} P(Hi) \cdot P_{Hi}(C)} =$$

$$= \frac{P(H1) \cdot P_{H1}(C)}{p(H1) \cdot p_{H1}(C) + p(H2) \cdot p_{H2}(C)} = \frac{1}{1 + \dfrac{P(H2) \cdot P_{H2}(C)}{P(H1) \cdot P_{H1}(C)}},$$

$P(H1) = y_i$, $P(C) = h_i$,

де $y_i (i = 1 \div n)$ – імовірність банкрутства страхової компанії при настанні події;

b_i – імовірність події C_i для нестійкої страхової компанії.

Коли страхова компанія є стійкою, то отримаємо

$$\frac{P(H2)\cdot p_{H2}(C)}{P(H1)\cdot p_{H1}(C)} = \frac{P(H2)}{P(H1)}\cdot\frac{\prod_{i=1}^{n} P_{H2}(Ci)}{\prod_{i=1}^{n} P_{H1}(Ci)} = \frac{P(H2)}{P(H1)}\cdot\prod_{i=1}^{n}\frac{P_{H2}(Ci)}{P_{H1}(Ci)} =$$

$$= \frac{P(H2)}{P(H1)}\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{b_i}{g_i}\right)^{Ci}\left(\frac{1-b_i}{1-g_i}\right)^{1-Ci} = \frac{1-y_i}{y_i}\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{b_i}{g_i}\right)^{Ci}\left(\frac{1-b_i}{1-g_i}\right)^{1-Ci}.$$

Отже, імовірність банкрутства страхової компанії при умові, що про неї ми можемо отримати певний набір характеристик розраховується за формулою

$$P_C(H1) = \frac{1}{1+\frac{1-y_i}{y_i}\prod_{i=1}^{4}\left(\frac{b_i}{g_i}\right)^{Ci}\left(\frac{1-b_i}{1-g_i}\right)^{1-Ci}}. \qquad (9.6)$$

Для формування однорідних 4-х груп страхових компаній визначимо інтервали значень загальних активів (межі інтервалів – середні значення сукупності, першої і другої груп, які утворені діленням всієї сукупності середнім значенням), які будуть визначати приналежність кожної страхової компанії до певної групи:

- 1 група – обсяг активів від 351 330 тис. грн;
- 2 група – обсяг активів від 137 351 до 351 330 тис. грн;
- 3 група – обсяг активів від 51 237 до 137 351 тис. грн;
- 4 група – обсяг активів до 51 237 тис. грн.

Використання байєсовського аналізу для визначення імовірності банкрутства страхових компаній в динаміці є ефективним економіко-математичним методом підвищення якості нагляду за страховим ринком України, дозволяє на основі характеристики роботи страхової компанії отримати перспективну оцінку імовірності банкрутства, виявити приховані недоліки в роботі страхових компаній, провести групування за рівнем стійкості, а головне – отримати числові характеристики рівня стійкості страхових компаній (як поточну, так і в динаміці) на відміну від традиційних методів, які дають лише описову характеристику. Але виникає необхідність постійного корегування даного методу у відповідності з потребами поточної економічної ситуації.

2. ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ПЛАТОСПРОМОЖНОСТІ СТРАХОВОЇ КОМПАНІЇ

В умовах сучасної економічної нестабільності особливо актуальною є проблема підтримки платоспроможності страхової компанії, оскільки забезпечення взятих на себе страховиком зобов’язань є необхідною складовою не тільки його репутації та позиції на страховому ринку, але і визначальне при прогнозуванні імовірності його банкрутства.

Згідно законодавства України та директив Європейського Союзу страховики для забезпечення достатнього рівня платоспроможності повинні відповідно до обсягів страхової діяльності підтримувати належний рівень фактичного запасу платоспроможності (F), який визначається на основі (9.7)

$$F = A - bN_A - cZ, \tag{9.10}$$

де A – загальна сума активів страхової компанії;

N_A – сума нематеріальних активів;

Z – сума зобов’язань;

$b > 0$, $c > 0$ – параметри, які показують, на скільки відсотків зменшиться фактичний запас платоспроможності страхової компанії при збільшенні нематеріальних активів та зобов’язань на 1% відповідно.

Для забезпечення достатнього для ефективного функціонування на фінансовому ринку рівня платоспроможності страхової компанії має виконуватись наступна умова

$$F > H : F - H \to \max, \tag{9.11}$$

де H – нормативний запас платоспроможності страхової компанії.

Тобто, максимізація різниці фактичного та нормативного запасу платоспроможності буде забезпечувати збільшення прибутковості та рентабельності діяльності страхової компанії.

Для забезпечення ефективного функціонування страхової компанії на фінансовому ринку необхідно розглянути формування нормативного запасу платоспроможності для ризикового та лайфового видів страхування. Так, для ризикових видів страхування, формування нормативного запасу платоспроможності (H_{NL}) передбачає використання максимального з двох підходів, розрахованих на основі страхових премій (H_1) або страхових виплат (H_2)

$$H_{NL} = \max\{H_1, H_2\},$$
$$H_1 = h_{11}(S - h_{12}S_p),\ H_2 = h_{21}(B - h_{22}B_p), \tag{9.12}$$

де S – сума страхових премій за попередні 12 місяців;

$S_p = \sum_{i=1}^{k} S_{pi}$ – страхові премії, належні перестраховикам;

B – сума страхових виплат за попередні 12 місяців;

$B_p = \sum_{j=1}^{l} B_{pj}$ – сума страхових виплат, що компенсуються перестраховиками згідно з укладеними договорами перестрахування;

h_{11}, h_{12}, h_{13}, h_{14} – параметри встановлення нормативного запасу платоспроможності страхової компанії для ризикових видів страхування.

Визначення нормативного запасу платоспроможності (H_L) для страхування життя базується на використанні математичних резервів

$$H_L = qM, \tag{9.13}$$

де q – параметр встановлення нормативного запасу платоспроможності страхової компанії для страхування життя;

M – математичний резерв (загальна величина резерву довгострокових зобов'язань).

Рівень платоспроможності страхової компанії, який визначається як різниця фактичного і нормативного запасу платоспроможності, визначених раніше, визначається наступним чином:

- для ризикових видів страхування (R_{NL})

$$R_{NL} = A - bN_A - cZ - \max\left\{h_{11}(S - h_{12}\sum_{i=1}^{k} S_{pi}); h_{21}(B - h_{22}\sum_{j=1}^{l} B_{pj})\right\} \to \max, \tag{9.14}$$

- для лайфових видів страхування (R_{NL})

$$R_L = A - bN_A - cZ - qM \to \max. \tag{9.15}$$

На основі запропонованої вище методики можна визначити та ідентифікувати рівень платоспроможності страхової компанії:

а) для ризикових видів страхування (R_{NL}):

- $R_{NL} > 0$ – критичний рівень платоспроможності;
- $R_{NL} = 0$ – мінімальний рівень платоспроможності.

$$R_{NL} \in \left(0; \tfrac{1}{2} \max_k \left[\min \left\{ A_k - bN_{Ak} - cZ_k - h_{11}(S_k - h_{12} \sum_{i=1}^{k} S_{pik}); A_k - bN_{Ak} - cZ_k - h_{21}(B_k - h_{22} \sum_{j=1}^{l} B_{pjk}) \right\} \right] \right) \quad (9.16)$$

де k – період складання страховою компанією фінансової звітності;

- достатній рівень платоспроможності;

$$R_{NL} \in \left(\begin{matrix} \tfrac{1}{2} \max_k \left[\min \left\{ A_k - bN_{Ak} - cZ_k - h_{11}(S_k - h_{12} \sum_{i=1}^{k} S_{pik}); A_k - bN_{Ak} - cZ_k - h_{21}(B_k - h_{22} \sum_{j=1}^{l} B_{pjk}) \right\} \right] \\ \max_k \left[\min \left\{ A_k - bN_{Ak} - cZ_k - h_{11}(S_k - h_{12} \sum_{i=1}^{k} S_{pik}); A_k - bN_{Ak} - cZ_k - h_{21}(B_k - h_{22} \sum_{j=1}^{l} B_{pjk}) \right\} \right] \end{matrix} \right) \quad (9.17)$$

- високий рівень платоспроможності.

б) для лайфових видів страхування (R_{NL}):

- $R_{NL} < 0$ – критичний рівень платоспроможності;
- $R_{NL} = 0$ – мінімальний рівень платоспроможності.

$$R_L \in \left(0; \tfrac{1}{2} \max_k \left[A_k - bN_{Ak} - cZ_k - qM_k \right] \right), \quad (9.18)$$

- достатній рівень платоспроможності;

$$R_L \in \left(\begin{matrix} \tfrac{1}{2} \max_k \left[A_k - bN_{Ak} - cZ_k - qM_k \right] \\ \max_k \left[A_k - bN_{Ak} - cZ_k - qM_k \right] \end{matrix} \right), \quad (9.19)$$

- високий рівень платоспроможності.

Отже, вищенаведена методика надає можливість визначити оптимальний рівень платоспроможності на основі перестрахової діяльності страхової компанії та визначити основні чинники (страхові премії та страхові виплати), які на нього впливають. Це надає можливість оперативного реагування на зміни платоспроможності та здійснювати її подальше регулювання.

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. Які показники використовуються для визначення імовірності банкрутства?
2. За допомогою розрахунку яких показників здійснюється оцінка фінансового стану страхової компанії?
3. Етапи методики визначення банкрутства на основі формули Байєса.

ТЕСТИ

1. Які з перерахованих показників використовуються для визначення імовірності банкрутства страхової компанії:
   а) частка валових надходжень страхових платежів у сумарних активах;
   б) співвідношення сплаченого статутного капіталу та сумарних активів;
   в) частка страхових платежів, які повертаються страхувальникам;
   г) частка страхових платежів, які повертаються перестраховикам;
   д) коефіцієнт фінансової стабільності страхової компанії;
   е) коефіцієнт фінансової стійкості страхової компанії.

2. Методика визначення імовірності банкрутства страхових компаній на основі застосування формули Байєса передбачає наступні кроки (так, ні):
   а) формування і розрахунок показників, що характеризують стійкість (надійність) страхових організацій;
   б) визначення бінарних характеристик на основі співвідношення значень отриманих показників та допустимих значень по відповідній сукупності показників: якщо відповідний показник лежить в допустимих межах для певної групи, ставиться 0, в іншому випадку – 1;
   в) визначення імовірності банкрутства на основі використання формули Байєса;
   г) розбиття страхових компаній на однорідні групи.

3. Імовірність банкрутства страхової компанії при умові, що про неї ми можемо отримати певний набір характеристик розраховується за формулою $P_C(H1) = \dfrac{1}{1+\dfrac{1-y_i}{y_i}\prod\limits_{i=1}^{4}\left(\dfrac{b_i}{g_i}\right)^{Ci}\left(\dfrac{1-b_i}{1-g_i}\right)^{1-Ci}}$:

а) так;
б) ні.

4. Показник

$$K_{ф.ст} = \frac{\begin{pmatrix} Сплачений \\ статутний\ капітал \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Інші \\ власні\ кошти \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Страхові \\ резерви \end{pmatrix}}{Загальна\ сума\ страхових\ внесків, що\ надійшли}:$$

а) коефіцієнт фінансової стійкості страхової компанії;
б) коефіцієнт фінансової стабільності страхової компанії;
в) оцінка фінансового стану страхової компанії.

Тема 10. ВИЗНАЧЕННЯ СТРАХОВОГО ТАРИФУ В СТРАХУВАННІ ЖИТТЯ

1. ОСОБЛИВОСТІ ПОБУДОВИ ТАРИФНОЇ СТАВКИ ПО СТРАХУВАННЮ ЖИТТЯ І ЇЇ СТРУКТУРА

   Тарифна ставка. Брутто-ставка. Нетто-ставка. Навантаження. Структура тарифної ставки змішаного страхування життя

2. ТАБЛИЦЯ СМЕРТНОСТІ

   Таблиця сертності

3. НОРМА ПРИБУТКОВОСТІ

   Поняття норми прибутковості. Таблиця відсоткових множників. Дисконтуючий множник. Таблиця дисконтуючи множників

4. ТАРИФНІ СТАВКИ ПО ЗМІШАНОМУ СТРАХУВАННІ ЖИТТЯ

   Нетто-ставка на дожиття. Нетто-ставка на випадок смерті. Нетто-ставка на випадок утрати працездатності. Навантаження

5. РІЧНА НЕТТО-СТАВКА

6. БРУТТО-СТАВКА

7. АНАЛІТИЧНІ ЗАКОНИ СМЕРТНОСТІ

   Модель де Муавра. Модель Гомпертца. Модель Мейкхама. Модель Вейбулла

1. ОСОБЛИВОСТІ ПОБУДОВИ ТАРИФНОЇ СТАВКИ ПО СТРАХУВАННЮ ЖИТТЯ І ЇЇ СТРУКТУРА

Побудова тарифів по страхуванню життя має свої особливості:

- розрахунки провадяться з використанням демографічної статистики і теорії ймовірності;
- при розрахунках застосовуються способи довгострокових фінансових розрахунків;
- тарифні нетто-ставки складаються з кількох частин, кожна з яких покликана сформувати страховий фонд за одним з видів страхової відповідальності, який включений в умови страхування.

Тарифна ставка визначає, скільки грошей кожний із страхувальників повинен внести в загальний страховий фонд з одиниці страхової суми. Тому тарифи повинні бути розраховані так, щоб сума зібраних внесків виявилася достатньою для виплат, передбачених умовами страхування. Таким чином, тарифна ставка – це ціна послуги, що надається страховиком, тобто своєрідна ціна страхового захисту. Від чого ж залежать її розміри, як установити ціну на той чи інший вид страхування життя?

Повна тарифна ставка називається брутто-ставкою. Вона складається з нетто-ставки і навантаження. Завдання нетто-ставки – забезпечити виплати страхових сум, тобто виконання фінансових зобов'язань страховика за договорами страхування. Навантаження призначене компенсувати витрати на проведення страхових операцій.

Своєрідність операцій страхування життя виявляється при побудові нетто-ставки. Умови страхування життя звичайно передбачають виплати у зв'язку з доживттям застрахованого до закінчення терміну дії договору страхування чи у випадку його смерті протягом цього терміну. Крім того, передбачаються виплати у зв'язку з втратою здоров'я внаслідок травми та деяких хвороб.

Таким чином, для розрахунку обсягу страхового фонду потрібно мати відомості про те, скільки осіб з числа застрахованих доживе до закінчення терміну дії їх договорів страхування і скільки з них щороку може вмерти; у скількох з них і в якому ступені настане втрата здоров'я. Кількість виплат, помножена на відповідні страхові суми, дозволить визначити розміри майбутніх виплат, тобто з'явиться можливість дізнатися, у яких розмірах потрібно буде акумулювати страховий фонд.

Тривалість життя окремих людей коливається в широких межах. Вона відноситься до категорії випадкових величин, кількісне значення яких залежить від багатьох факторів, настільки віддалених і складних, що, здавалося б, їх неможливо виявити і вивчити. Теорія ймовірності і статистика досліджують випадкові явища, що мають масовий характер, у тому числі смертність населення. Установлено, що демографічний процес зміни поколінь, що виражається в зміні рівня повікової смертності, підпорядкований закону великих чисел, настільки одноманітному у своїх проявах і настільки достовірному в результатах, що він може бути основою фінансових розрахунків у страхуванні.

Демографічною статистикою виявлена і виражена за допомогою математичних формул залежність смертності від віку людей. Розроблено спеціальну методику складання так званих таблиць смертності, де на конкретних цифрах показується послідовна зміна смертності слідом за віком. Цими таблицями страхові компанії користуються для розрахунку тарифів.

Крім закономірностей, пов'язаних із процесом дожиття і смертності, при побудові тарифів враховується довгостроковий характер операцій страхування життя, оскільки ці договори укладаються на тривалі терміни від трьох років. Протягом усього часу їхньої дії (чи на самому початку терміну страхування при одноразовій сплаті) страхові компанії одержують внески. Виплати ж страхових сум проводяться протягом терміну страхування чи після закінчення визначеного періоду від початку дії договору, якщо настане смерть застрахованого чи він втратить здоров'я.

Тимчасово вільні кошти акумулюються страховою компанією і використовуються як кредитні ресурси. За користування ними сплачується позичковий відсоток. Але якщо при ощадній операції дохід від відсотків приєднується до внеску, то в страхуванні на суму цього доходу заздалегідь зменшуються (дисконтуються) внески страхувальника, що підлягають сплаті. Для того щоб заздалегідь понизити тарифні ставки на той дохід, що буде утворюватись протягом ряду років, використовуються методи теорії довгострокових фінансових розрахунків.

Тарифні ставки в страхуванні життя складаються з кількох частин. Візьмемо для прикладу змішане страхування життя. У ньому поєднуються кілька видів страхування, що могли б бути і самостійними:

- страхування на дожиття;
- страхування на випадок смерті;
- страхування від нещасних випадків.

По кожному з них за допомогою тарифу створюється страховий фонд, тому тарифна ставка в змішаному страхуванні складається з трьох частин, що входять у нетто-ставку, і четвертої частини – навантаження.

Аналогічно складається структура тарифних ставок і по інших видах страхування життя.

Структура тарифної ставки приведена на рис. 10.1.

Рис. 10.1. Структура тарифної ставки змішаного страхування життя

2. ТАБЛИЦЯ СМЕРТНОСТІ

Страхові операції засновані на принципі еквівалентності фінансових зобов’язань страховика і страхувальника. Тому перш ніж визначити, скільки кожен страхувальник повинен внести в загальний страховий фонд, необхідно установити розмір виплат страховика.

Оскільки умови договорів страхування життя звичайно передбачають виплати в зв’язку з дожиттям застрахованого до визначеного терміну чи в зв’язку з його смертю, для розрахунку відповідних витрат страховій компанії потрібно мати відомості про те, скільки осіб доживе до закінчення терміну дії договору і скільки з них щороку може померти.

Тривалість життя окремих людей коливається в широких межах. Вона відноситься до категорії випадкових величин, тобто тих, чиє кількісне значення залежить від багатьох причин, настільки віддалених і складних, що, здавалося б, їх неможливо виявити і вивчити.

Математика і статистика досліджують випадкові явища, що мають масовий характер, у тому числі смертність населення. Як установлено науковими дослідженнями, так званий процес вимирання покоління підпорядкований закону великих чисел.

Демографічною статистикою розроблена спеціальна методологія складання так званих таблиць смертності. Вона містить розрахункові показники, що характеризують смертність населення в окремих вікових групах і дожиття при переході від одного віку до наступного. Табл. 10.1 показує, як покоління одночасно народжених (умовно прийняте за 100 000) із збільшенням віку поступово зменшується.

Такими таблицями (власними чи складеними на основі переписів населення) користуються страхові компанії при розрахунках тарифних ставок по страхуванню життя.

У цій таблиці прийняті позначення: l_x – число доживаючих до кожного наступного віку, яке показує, скільки з 100000 одночасно народжених доживає до 1 року, 5 років,..., 20, ..., 50 років тощо; d_x – число вмираючих при переході від віку x до віку $(x + 1)$ років. Вони показують, скільки з доживаючих до кожного віку вмирає, не доживши до наступного віку. Сума чисел вмираючих від нульового і до граничного віку дорівнює вихідному числу таблиці смертності, тобто 100 000; q_x – ймовірність померти протягом майбутнього року життя, не доживши до наступного віку $(x + 1)$ років. Ця ймовірність показує, яка частка тих, що дожили до даного віку, помирає, не доживши до наступного, і є відношенням числа помираючих при переході від віку x до віку $(x + 1)$ до числа доживаючих до даного віку x

$$q_x = \frac{d_x}{l_x}. \tag{10.1}$$

Величина ймовірності померти звичайно виражається стотисячними частками одиниці. Наприклад, ймовірність померти у віці 40 років дорівнює 0,00358. Це означає, що в середньому на кожні 100 000 чол. у віці 40 років приходиться 358 осіб, що помирають протягом найближчого року. Показник ймовірності померти можна виразити також у проміле чи відсотках. Для 40-річних він буде дорівнювати 3,58% чи 0,358%; P_x – імовірність дожити до x + 1 років.

Приведена таблиця показує, що з абстрактної сукупності 100 000 народжених через рік залишається в живих 98 719 чол., оскільки 1 281 чол. помирає на першому році життя. До 20 років з них залишиться в живих 97 464 чол., до 30 років – 95 982, до 40 – 93 597 тощо. Первісна сукупність народжених 100 000 чол. щороку скорочується і поступово вимирає.

Для того, щоб читати таблицю смертності беремо, наприклад, рядок для віку 40 років, тобто коли x = 40, l_x = 93 597 (це означає, що з 100 000 народжених до 40 років доживе 93 597 чол.); d_{40} = 335. Виходить, у віці 40 років, або на 41-му році життя, помирає 335 чол. До 41 року доживе тільки 93 262 (93 597 – 335), або $l_{40} - d_{40} = l_{41}$; q_{40} = 0,00358 і виражає відношення числа осіб, що помирають на 41-му році життя (d_{40} = 335), до числа осіб, що дожили до 40 років: l_x = 93 597.

Таблиця 10.1

Зразок таблиці смертності

Вік у роках	Число доживаючих до віку x років	Число вмираючих при переході від x до $(x + 1)$ років	Ймовірність померти протягом майбутнього року життя	Ймовірність дожити до $(x + 1)$ років
0	100 000	1281	0,01281	0,98719
1	98 719	172	0,00174	0,99826
2	98 547	93	0,00094	0,99906
3	98 454	69	0,00070	0,99930
4	98 385	59	0,00060	0,99940
5	98 326	53	0,00054	0,99946
6	98 273	48	0,00049	0,99951
7	98 225	45	0,00046	0,99954
8	98 180	42	0,00043	0,99957
9	98 138	39	0,00040	0,99960
10	98 099	37	0,00038	0,99962
11	98 062	36	0,00037	0,99963
12	98 026	38	0,00039	0,99961
13	97 988	43	0,00044	0,99956
14	97 945	51	0,00052	0,99948
15	97 894	61	0,00062	0,99938
16	97 833	73	0,00075	0,99925
17	97 760	86	0,00088	0,99912
18	97 674	99	0,00101	0,99899
19	97 575	111	0,00114	0,99886
20	97 464	122	0,00125	0,99875
…	…	…	…	…
30	95 982	179	0,00186	0,99814
…	…	…	…	…
40	93 597	335	0,00358	0,99642
41	93 262	360	0,00386	0,99614
42	92 902	390	0,00420	0,99580
43	92 512	422	0,00456	0,99544
44	92 090	259	0,00498	0,99502
45	91 631	298	0,00543	0,99457
…	…	…	…	…

Показники ймовірності померти є основними у таблиці смертності, від них залежать всі інші числа. У них сконцентрована закономірність процесу вимирання покоління. А вся таблиця детально характеризує цей процес.

Маючи показники ймовірності померти, страховик із достатнім ступенем упевненості може очікувати, що протягом найближчого року з числа застрахованих у віці 40 років може померти 0,36%. у віці 41 року – 0,39%, 50 років – 0,71% . У окремі роки ці числа можуть бути трохи більшими чи меншими, але ймовірність занадто великих відхилень надзвичайно мала, і чим більша величина відхилення, тим менше ймовірність того, що воно може відбутися.

Таблиця смертності дає можливість також із достатнім ступенем упевненості стверджувати, що з 40-літніх осіб до 45 років не доживуть 1966, тобто

$$(d_{40} + d_{41} + \dots + d_{44}),\ \text{чи}\ (l_{40} - l_{45}),\ \text{тобто}\ (l_x - l_{x+n}) = \sum_{i=x}^{x+n-1} di.$$

Показники з таблиці смертності використовуються для розрахунків тарифних ставок по страхуванню життя.

Маючи таблицю смертності, страхова компанія одержує для кожного періоду, який її цікавить, необхідні відомості про найбільш ймовірну кількість помираючих і осіб, що доживають, з числа застрахованих, тобто вона може довідатися, скільком приблизно особам у якомусь визначеному році необхідно буде виплатити страхові суми по випадках смерті чи дожиття, у скількох осіб припиняться тимчасові страхування на випадок смерті чи рентні страхування і т. ін.

Вибір таблиці смертності представляє для кожної страхової компанії дуже важливу проблему, тому що від цього залежать розміри тарифних ставок, утворення резерву страхових внесків, фінансова стійкість операцій.

У міжнародній страховій практиці відомі загальні, усічені і збірні таблиці смертності.

У загальних таблицях наводяться повікові показники ймовірності померти, що виявилися протягом першого року після укладання договору страхування окремо для кожного року страхування, в усічених таблицях – повікові показники ймовірності померти тільки тих осіб, що вже були застраховані протягом кількох років, і дані медичного огляду вже не діють. Взагалі проведення медичного огляду осіб, прийнятих на страхування, не дає тривалого ефекту.

У збірних таблицях містяться повікові показники ймовірності померти для всіх застрахованих, незалежно від терміна страхування.

Користуючись різними таблицями, страхові компанії прагнуть зміцнити фінансову стійкість операцій. Справа в тому, що в тих країнах, де страхуванням охоплена велика частина населення і діє багато його різновидів, відбувається процес стихійного самодобору застрахованих.

При великій різноманітності видів страхування життя доцільне застосування загальних, усічених і збірних таблиць смертності.

Багато страхових компаній ведуть власні статистичні спостереження і на їх основі будують таблиці смертності. Враховуються також причини випадків смерті з метою введення тих чи інших пільг або обмежень в умовах страхування.

У даний час побудова тарифних ставок ґрунтується на відомостях державної статистики, заснованих на матеріалах переписів населення. Це цілком правомірно, оскільки в країні переважає змішане страхування, що поєднує в собі страхування на дожиття і на випадок смерті.

Отже, маючи таблицю смертності, можна встановити ймовірне число виплат по договорах страхування, а при відомих страхових сумах – розмір фонду, який повинна мати страхова компанія, щоб виплатити страхові суми, тобто розмір страхового фонду.

Однак перш ніж установити частку участі кожного із страхувальників у створенні такого фонду, тобто обчислити розмір страхових внесків, необхідно взяти до уваги ще один показник – норму прибутковості.

3. НОРМА ПРИБУТКОВОСТІ

Операції по страхуванню життя відрізняються довготерміновістю. Договори можуть укладатися, наприклад, на 5, 10, 15, 20 років. Протягом усього часу їхньої дії страхові компанії одержують внески. Виплати ж страхових сум провадяться в більшості випадків після закінчення цих термінів, а також (набагато рідше) – після втрати застрахованим працездатності чи його смерті протягом терміну дії договору.

Тимчасово вільні кошти акумулюються страховими компаніями та використовуються в економіці. У разі розміщення їх у банку на ці кошти страховим компаніям нараховуються складні відсотки річного доходу. На величину одержуваного доходу страхові компанії зменшують тарифні ставки.

Нормою прибутковості називається розмір принесеного за рік кожною одиницею грошової суши доходу, що нараховується на кошти по страхуванню життя, тимчасово використовувані банками як кредитні ресурси.

Норму прибутковості прийнято позначати символом i. Так, вираз $i = 0{,}03$ означає, що кожна грошова одиниця за рік приносить 3% доходу, $i = 0{,}05 = 5\%$ тощо. У страхуванні дохід розраховується відносно однієї грошової одиниці, а не до сотні одиниць, як це робиться в інших випадках.

Абсолютний розмір доходу, який одержується страховими компаніями, крім норми прибутковості залежить ще й від розміру тієї суми, яку вони розташовують, і від часу, протягом якого ця сума була в обігу.

Для прикладу підрахуємо, у що перетвориться грошова сума величиною, наприклад, у 100 грн через 10 років.

Ту грошову суму, що буде приносити дохід (у нашому прикладі 100 грн), позначимо літерою *А;* час, протягом якого вона знаходиться в обігу (10 років), – літерою *n,* норму прибутковості (3%) – літерою *і.* Розрахунок провадиться за формулою складних відсотків, тобто наприкінці кожного року дохід, що утворився за цей рік, приєднується до грошової суми на початок року, тому у наступному році дохід приносить уже нова, нарощена сума.

При нормі прибутковості і через рік, кожна грошова одиниця, наприклад 1 грн, перетвориться в $(1 + i)$, тобто при $i = 0{,}03$ у 1 грн 03 коп. (1 грн + 0,03 грн).

Якщо одна грошова одиниця перетворилася в $(1 + i)$, то A таких одиниць – в $A(1 + i)$, чи 103 грн.

Суму, що утвориться до кінця першого року (103 грн), позначимо літерою B_1, тоді $B_1 = A(1 + i)$.

Через 10 років первісна грошова сума A дасть нарошену суму $B_{10} = A(1 + i)^{10}$, *а* через *n* років перетвориться в

$$B_n = A(1 + i)^n. \qquad (10.2)$$

Величина $(1 + i)$ називається відсотковим множником, який за n років дорівнює $(1 + i)^n$.

У нашому прикладі сума в 100 грн через 10 років при ($i = 0{,}03$) буде:

$B_{10} = 100(1 + 0{,}03)^{10} = 100\ 1{,}03^{10}\ 134$ грн 39 коп.

Практикою страхової справи створені спеціальні таблиці, що полегшують повсякденну роботу з актуарних розрахунків. Серед них є таблиця, що показує значення чисел $(1 + i)^n$ заданій нормі прибутковості.

Наведемо таку таблицю, у якій для прикладу узято кілька термінів (табл. 10.2).

Звіримо отриманий у наведеному вище прикладі результат 134 грн 39 коп. з даними таблиці. Для цього знайдемо, у що перетворюється за 10 років кожна гривня при i = 0,03. Відповідно до таблиці – *у* 1,34392 грн, а 100 грн – у 134 грн 39 коп.

Очевидно, що чим вище норма прибутковості, тим швидше зростає початкова сума. Так, грошова сума збільшується вдвічі при 5%-й нормі прибутковості приблизно за 14 років, при 4%-й – за 18, при 3%-й – за 23 роки.

Таблиця 10.2

Таблиця відсоткових множників

Число років, n	Значення чисел $(1 + i)^n$ при:		
	i = 0,3	i = 0,4	i = 0,5
1	1,03000	1,04000	1,05000
2	1,06090	1,08160	1,10250
3	1,09273	1,12486	1,15763
4	1,12551	1,16986	1,21551
5	1,15927	1,21665	1,27628
10	1,34394	1,48824	1,62889
14	1,51259	1,73168	1,97993
15	1,55797	1,80094	2,07893
18	1,70243	2,02582	2,40662
20	1,80611	2,19112	2,65330
23	1,97359	2,46472	3,07152
30	2,42726	3,24340	4,32194
50	4,38391	7,10668	11,46740

На основі формули $B_n = A(1 + i)^n$ можна установити ще одну дуже важливу для розрахунків тарифів залежність.

Використовуючи таблицю смертності, страховик визначає величину страхового фонду, необхідного для виплат в обумовлений термін страхових сум. Це величина B_n. Далі йому потрібно знайти величину A, тобто визначити, яким повинен бути розмір страхового фонду на початку терміну страхування.

$$A = \frac{B_n}{(1+i)^n}. \qquad (10.3)$$

Для спрощення розрахунків вводиться додатковий показник v, який називається дисконтуючим множником:

$$v = \frac{1}{1+i}. \tag{10.4}$$

Показники, зведений у ступінь *n*, є дисконтуючим множником за *n* років, тобто

$$v^n = \frac{1}{(1+i)^n}. \tag{10.5}$$

Він дозволяє довідатися, скільки потрібно внести сьогодні, щоб через кілька років мати певної величини грошовий фонд, враховуючи задану норму прибутковості, тобто визначити сучасну вартість цього фонду.

Тарифні ставки в страхуванні життя обчислюються з урахуванням того, що грошові суми, які надійшли у вигляді страхових внесків, за певний відрізок часу, приносячи якийсь дохід, збільшаться, тобто вони визначаються виходячи із сучасної вартості страхового фонду.

Застосовуючи показник v^n, формулу для визначення величини A можна представити у такому вигляді

$$A = B_n \cdot v^n. \tag{10.6}$$

Таблиця 10.3

Таблиця дисконтуючих множників

Число років, n	Дисконтуючі множники при:		
	i = 0,3	i = 0,4	i = 0,5
1	0,97087	0,96154	0,95238
2	0,94260	0,92456	0,90703
3	0,91514	0,83900	0,86384
4	0,88849	0,85480	0,82270
5	0,86261	0,82193	0,78353
10	0,74409	0,67556	0,61391
14	0,66112	0,57748	0,50507
15	0,64186	0,55526	0,48102
18	0,58739	0,49363	0,41552
20	0,55368	0,45639	0,37689
23	0,50669	0,40573	0,32557
30	0,41199	0,30832	0,23138
40	0,30656	0,20829	0,14205
50	0,22811	0,14071	0,08720

Абсолютні значення показника v^n містяться в спеціальній таблиці (табл. 10.3), що використовується потім при розрахунку тарифів.

Зі збільшенням норми прибутковості i і терміну страхування n абсолютні значення множників, що дисконтують, зменшуються.

Формула $B_n = A(1 + i)^n$ дає можливість визначати й інші показники, які входять до неї (n, i).

Таким чином, залежність тарифних ставок від рівня смертності застрахованих і норми прибутковості складається об'єктивно і не може довільно змінюватися.

При визначенні тарифів із страхування життя необхідно враховувати об'єктивні закономірності руху рівня смертності застрахованих, норми прибутковості, їх взаємозв'язок і вплив на величину тарифних ставок.

4. ТАРИФНІ СТАВКИ ПО ЗМІШАНОМУ СТРАХУВАННІ ЖИТТЯ

Уклавши договір страхування життя, страхувальник і страховик починають виконувати свої фінансові зобов'язання.

Фінансові зобов'язання полягають у сплаті страхових внесків. Якщо страхувальник сплачує їх одразу при укладанні договору, то такий внесок називається одноразовим. Якщо ж він виконує свої зобов'язання протягом усього терміну страхування, застосовуються річні внески, які потім можуть сплачуватися у розстрочку – щомісяця.

Умови змішаного страхування життя передбачають виплату страхової суми у разі дожиття, смерті та у зв'язку з утратою працездатності від нещасного випадку. Для виплат за кожним видом страхової відповідальності страховик повинен створити у себе страховий фонд. Крім того, йому необхідні кошти для компенсації витрат на проведення страхових операцій. Тому тарифна ставка по змішаному страхуванню життя складається з:

- нетто-ставки на дожиття;
- нетто-ставки на випадок смерті;
- нетто-ставки на випадок утрати працездатності;
- навантаження.

Розглянемо послідовно процес побудови тарифних ставок.

Одноразова нетто-ставка на дожиття.

Візьмемо конкретний приклад: особа у віці 40 років ($x = 40$) укладає договір страхування на дожиття терміном на 5 років на суму

100 грн. Яка повинна бути для нього величина одноразового страхового внеску?

Уявимо, що такі договори страхування уклали всі сорокарічні особи з наведеної вище таблиці смертності. Після закінчення п'яти років страховій компанії необхідно буде виплатити певне число страхових сум тим, хто доживе до закінчення терміну дії договору. З таблиці смертності знаходимо, що до 45 років доживе 91 631 чол. Виходить, і виплат буде 91 631. Страхова сума кожного договору – 100 грн. Отже, страховий фонд, призначений для цих виплат, повинен становити

100 грн · 91 631 = 9 163 100 грн.

Однак на початку страхування він може мати меншу величину, враховуючи, що щороку на нього буде наростати 3% (складних) доходу. Щоб відповідно зменшити цей фонд, тобто знайти його сучасну вартість, застосуємо множник, що дисконтує, за 5 років, рівний при 3%-й нормі прибутковості 0,86261.

9 163 100 грн · 0,86261 = 7 904 182 грн.

Отже, щоб через 5 років мати кошти для виплати страхових сум по дожиттю, страхова компанія на початку страхування повинна мати у своєму розпорядженні фонд у 7 904 182 грн. Цю суму і потрібно одноразово зібрати зі страхувальників. Різниця між сумою збору і сумою виплат буде покрита за рахунок 3%-го доходу на зібрані кошти. 7 904 182 грн є сучасною вартістю 9 163 100 грн, що будуть виплачені через 5 років.

Щоб визначити розмір внеску кожного із застрахованих у цей загальний фонд, розділимо отриману суму на число осіб на початку страхування (див. таблицю смертності, $x = 40$). Одержимо

7 904 182 грн / 93 597 = 84 грн 45 коп.

Це і буде одноразова нетто-ставка на дожиття, Розмір тарифної ставки був, відповідно, обчислений таким чином:

(91 631 · 0,8626I / 93 597)·100 = 84,45.

91 631 – це число осіб, що доживають до 45 років, яке позначається символом l_{x+n}, де x – вік на початку страхування, n – термін страхування, 0,86261 – дисконтний множник, 93 597 – число осіб на початку страхування l_x, 100 – страхова сума S.

Звідси отримаємо формулу

$$ {}_nE_x = \frac{(l_{x+n} \cdot v^n)}{l_x \cdot S}, \qquad (10.7) $$

де ${}_nE_x$ – одноразова нетто-ставка по страхуванню на дожиття для осіб у віці х років терміном на n років.

Підставляючи в цю формулу відповідні значення, можна обчислити розмір тарифної ставки по страхуванню на дожиття для будь-якого віку і терміну. Наприклад, для особи у 30 років, застрахованої на 10 років, одноразова нетто-ставка по страхуванню на дожиття будемо мати

$$ {}_{10}E_{30} = \frac{(l_{40} \cdot v^{10})}{l_{30} \cdot S} = \frac{93\ 597 \cdot 0{,}74409}{95\ 982 \cdot 100} = 72 \text{ грн } 56 \text{ коп.} $$

Одноразова нетто-ставка на випадок смерті.

Припустимо, що особа у віці 40 років укладає договір страхування на випадок смерті терміном на 5 років на 100 грн. Якщо обчислюючи нетто-ставку на дожиття, необхідно було знайти число осіб, що доживають до 45 років, то тепер варто визначити кількість застрахованих, які не доживуть до 45 років.

По таблиці смертності знаходимо, що у віці 40 років звичайно помирає 335 чол., у віці 41 року – 360,42 років – 390,43 років – 422,44 років – 459 чол. Отже, страховій компанії необхідно виплатити у зв'язку з випадками смерті на першому році страхування 33500 грн, на другому – 36000 грн тощо. Перемноживши ці суми на відповідні (для одного року, двох років і т. ін.) множники, що дисконтують, знайдемо сучасну вартість майбутніх п'ятирічних виплат по випадках смерті:

33 500 · 0,97087 + 36 000 · 0,94260 + 39 000 · 0,91514 + 42 200 · · 0,88849 +...+ 45 900 · 0,86261 = 179 237 грн.

Розділимо отриману суму на число осіб, що вступають у страхування

179 237 / 93 597 = 1 грн 91 коп.

Таким чином, особи у віці 40 років, уклавши договір страхування на випадок смерті на страхову суму 100 грн, повинні при укладанні договору внести в загальний страховий фонд 1 грн 91 коп.

Розмір тарифної ставки був обчислений за допомогою таких дій

(335 · 0,97087 + 360 · 0,94260 + ...+ 459 · 0,86261) / 93 597 · 100 = = 1,91,

де 335 – число осіб, що помирають у віці 40 років, або d_x;

360 – число осіб, що помирають у віці 41 року, або d_{x+1};

459 – число осіб, що помирають на останньому році страхування, або d_{n+m-1};

0,97087; 0,94260, ... і т.д. – множники, що дисконтують, для відповідних років страхування: (v, v^2, …, v^n);

93 597 – число осіб при вступі в страхування l_x;

100 – страхова сума, або S.

Одноразова нетто-ставка по страхуванню на випадок смерті для осіб у віці d_x років при терміні страхування n років позначається символом A

$$ {}_nA_x = \frac{(d_x \cdot v + d_{x+1} \cdot v^2 + \ldots + d_{x+n-1} \cdot v^n)}{l_x \cdot S}. \qquad (10.8) $$

Користуючись цією формулою, можна обчислити розмір тарифної ставки по страхуванню на випадок смерті для осіб будь-якого віку на будь-який термін.

Виводячи формули, ми переконуємося, що одноразові нетто-ставки рівні сучасній вартості взаємних фінансових зобов’язань страховика і страхувальника.

5. РІЧНА НЕТТО-СТАВКА

Більшості страхувальників зручніше робити внески протягом усього періоду страхування. Для цього обчислюються річні нетто-ставки.

Визначаючи розмір річної нетто-ставки, не можна механічно ділити одноразову ставку на число років страхування. Необхідний особливий розрахунок, що враховує як втрату доходу на відсотках, так і зменшення числа застрахованих внаслідок смертності. При одноразовій сплаті більша грошова сума надходить одразу в державний обіг, і на неї наростають відсотки. При річних же внесках частина доходу, одержаного за рахунок відсотків, втрачається. Крім того, при одноразовому внеску всі страхувальники погашають свої внески одразу, а при річній сплаті по ряду договорів внески не будуть виплачені цілком, оскільки частина застрахованих протягом терміну дії договорів може померти (див. таблицю смертності).

Для обчислення річних ставок застосовуються спеціальні коефіцієнти розстрочки (ануїтети).

Розглянемо конкретний приклад. Уявімо: всі 93 597 осіб 40-річного віку, що значаться в таблиці смертності, зобов’язалися протягом п’яти років наприкінці кожного року вносити страховій компанії по 1 грн. Але оскільки протягом п’яти років частина застрахованих може померти, страхова компанія одержить відповідно до таблиці смертності: наприкінці 1-го року – 93 262 грн; 2-го року – 92 902 грн; 3-го року – 92 512 грн; 4-го року – 92 090 грн; 5-гороку – 91 631 грн.

Сучасна вартість суми, внесеної в першому році, дорівнює 93 262 · 0,97087 (0,97087 – множник, що дисконтує, за один рік). Сучасна вартість внесків другого року дорівнює 92 902 · 0,94260 (0,94260 – множник, що дисконтує, за 2 роки) і т.д. Перемноживши суми внесків кожного року на відповідні множники, що дисконтують, знайдемо сучасну вартість загальної суми внесків усіх застрахованих. Розділивши отриману величину на 93 597 (кількість осіб, що вступили в страхування), розраховуємо сучасну вартість річних внесків у розмірі 1 грн, сплачених протягом п'яти років кожним із 40-річних застрахованих. У результаті підрахунку отримаємо 4 грн 53 коп. Це значить, що протягом п'яти років страхувальник буде вносити страховій компанії по 1 грн і усього він внесе 5 грн. Сучасна вартість цих 5 грн у момент укладання договору страхування дорівнює 4 грн 53 коп. Сучасна вартість річних внесків у розмірі 1 грн називається коефіцієнтом розстрочки (ануїтетом) і позначається символом ${}_na_n$.

Якщо в наведеному розрахунку замінити цифрові значення літерними позначеннями, отримаємо формулу

$$ {}_na_x = \frac{(l_x + 1\cdot v + l_x + 2\cdot v^2 + \ldots + l_x + n\cdot v^{x+n})}{l_x}. \qquad (10.9)$$

У ній враховується і норма прибутковості, і природне зменшення внаслідок смертності числа застрахованих осіб протягом терміну страхування.

Як відомо, одноразова нетто-ставка дорівнює сучасній вартості взаємних фінансових зобов'язань страховика і страхувальника. Якщо страхувальник погашає свої фінансові зобов'язання річними внесками, одноразова ставка дорівнює сучасній вартості суми річних внесків.

Коефіцієнт розстрочки дорівнює сучасній вартості річних внесків у розмірі 1 грн. Отже, одноразова ставка так відноситься до річної, як коефіцієнт розстрочки до 1 грн. Складемо пропорцію.

Одноразова ставка: ${}_na_x = \text{річна ставка} / \frac{{}_nP_x}{1}$.

Звідси річна ставка дорівнює одноразовій, помноженій на 1 грн і поділеній на коефіцієнт розстрочки, або ${}_nP_x$ = одноразова ставка / ${}_na_x$.

Абсолютні значення коефіцієнтів розстрочки близькі до значення n – терміну страхування, але трохи нижчі за нього. У результаті розміри річних ставок виходять більш високими, ніж при механічному діленні одноразової ставки на число років страхування. Так відшкодовуються втрати на відсотках і враховується зменшення протягом терміну страхування кількості осіб, що роблять внески.

Застосувавши коефіцієнт розстрочки у розмірі 4,53, обчислимо річні ставки для особи у віці 40 років при терміні страхування 5 років.

Річна нетто-ставка по дожиттю дорівнює 18 грн 64 коп. (84 грн 45 коп. / 4,53); річна нетто-ставка по страхуванню на випадок смерті складе 42 коп. (1 грн 91 коп. / 4,53), а по змішаному страхуванню (без відповідальності за втрату працездатності) – 19 грн 06 коп.

Таким чином, договір змішаного страхування життя терміном на 5 років для сорокарічної особи характеризується такими даними: 100 грн – страхова сума; 95 грн 30 коп. – сума річних внесків – нетто; 86 грн 36 коп. – одноразовий внесок – нетто.

Формула для обчислення річних нетто-ставок на дожиття

$$ {}_nP_x = \frac{{}_nE_x}{{}_na_x} \cdot S\,. \tag{10.10} $$

6. БРУТТО-СТАВКА

Одержуючи внески в розмірі нетто-ставок, страховик акумулює стільки коштів, скільки йому знадобиться для виплати страхових сум. Але він несе витрати, пов'язані з проведенням страхування, тобто повинен оплатити діяльність працівників по укладанню договорів страхування та інші витрати.

Оскільки страхування проводиться, в основному, за рахунок самих страхувальників, кошти на покриття цих витрат також передбачаються у тарифній ставці. Тому до нетто-ставки приєднується навантаження.

У тарифних ставках по змішаному страхуванню життя у навантаження включені лише чисті витрати страхових компаній по проведенню страхових операцій. Річна брутто-ставка по змішаному страхуванню життя на 100 грн для особи у віці 40 років і терміном на 5 років складає 21 грн 11 коп.

Брутто-ставки обчислюються за формулою

$$ {}_n\Pi_x = \frac{{}_nH_x}{(1-f)}, \tag{10.11} $$

де ${}_n\Pi_x$ – брутто-ставка;

${}_nH_x$ – нетто-ставка;

f – питома вага навантаження у брутто-ставці.

Аналізуючи брутто-ставки, можна зробити такі висновки: розмір тарифів збільшується слідом за віком особи, що укладає договір страхування; чим довший термін страхування, тим нижча тарифна ставка; одноразовий внесок менший страхової суми і нижчий суми місячних внесків; перевищення загальної суми сплачених у розстрочку внесків буде тим меншим або його зовсім не буде, чим довший термін страхування і молодша особа, що укладає договір.

7. АНАЛІТИЧНІ ЗАКОНИ СМЕРТНОСТІ

У основі актуарних розрахунків лежить щільність ймовірностей $f(x)$ і обумовлені нею функції $S(x)$, μ_x та інші характеристики. Ясно, що ці розрахунки будуть простішими, якщо відомий аналітичний вигляд функції $f(x)$ з точністю ряду параметрів, які можна оцінити за статистичними даними про тривалість життя людей.

Модель де Муавра.

У 1729 р. Абрахам де Муавр запропонував вважати, що тривалість життя рівномірно розподілена на інтервалі $[0, \omega]$, де ω – це граничний вік людини, тобто

$$f(x) = \begin{cases} 1/\omega, & x \in [0,\omega], \\ 0, & x \notin [0,\omega]. \end{cases} \tag{10.12}$$

Це найбільш проста апроксимація кривої життя $f(x)$. У рамках моделі Муавра легко знаходяться функції виживання $S(x)$, розподіл $F(x)$, інтенсивність смертності μ_x і необхідні числові характеристики (середнє, дисперсія та ін.).

Очевидно, що $F(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x (1/\omega)dt = x/\omega$, при $x \le \omega$,

якщо $x > \omega$, тоді $F(x) = \int_0^\omega (1/\omega)dt + \int_\omega^x 0dt = 1$.

$$F(x) = \begin{cases} x/\omega, & x \in [0,\omega], \\ 1, & x \notin [0,\omega]. \end{cases},$$
$$S(x) = 1 - F(x) = \begin{cases} 1-(x/\omega), x \in [0,\omega] \\ 0, x > \omega \end{cases}, \tag{10.13}$$

$$\mu(x) = \frac{f(x)}{s(x)} = \frac{\frac{1}{\omega}}{1-\frac{x}{\omega}} = \frac{1}{\omega - x}, \quad \textit{при} \quad x \in (0, \omega].$$

Для інших значень x інтенсивність смертності не визначена. За формулами середнього часу життя та дисперсії тривалості життя одержуємо

$$\mathring{e}_0 = \int_0^{\omega} S(x)dx = \frac{\omega}{2},$$

$$EX^2 = 2\int_0^{\omega} x\left(1-\frac{x}{\omega}\right)dx = \frac{\omega^2}{3}, \tag{10.14}$$

$$\sigma^2 = \frac{\omega^2}{12}, \quad \sigma = \frac{\omega}{2\sqrt{3}}.$$

На підставі дослідних і статистичних даних про тривалість життя модель Муавра можна вважати дуже грубою. Реально її можна використовувати для апроксимації функції виживання на певному інтервалі часу.

Модель Гомпертца.

У 1825 р. Гомпертц запропонував інтенсивність смертності μ_x апроксимувати експонентою

$$\mu(x) = Be^{\alpha x}, \tag{10.15}$$

де $\alpha > 0$, $B > 0$ – деякі параметри.

Тоді можна записати формули для функції смертності, виживання, кривої смертей.

Визначимо криву смертності і функцію виживання

$$\int_0^x \mu_x dx = \frac{B}{\alpha}(e^{\alpha x} - 1),$$

$$F(x) = 1 - \exp\left(-\frac{B}{\alpha}(e^{\alpha x} - 1)\right), \tag{10.16}$$

$$S(x) = \exp\left(-\frac{B}{\alpha}(e^{\alpha x} - 1)\right).$$

Диференціюванням $F(x)$ знаходимо криву смертей

$$f(x)=\frac{dF(x)}{dx}=B\exp(\alpha x-\frac{B}{\alpha}(e^{\alpha x}-1)). \qquad (10.17)$$

Визначимо точку максимуму цієї функції. Тому що

$$\frac{df(x)}{dx}=B(\alpha x-Be^{\alpha x})\exp(\alpha x-\frac{B}{\alpha}(e^{\alpha x}-1))=0, \qquad (10.18)$$

лише при

$$\bar{x}=\frac{1}{\alpha}\ln\frac{\alpha}{B}, \qquad (10.19)$$

і функція f(x) додатна, то $\bar{x}$ є точкою максимуму.

Визначення середнього і дисперсії в моделі Гомпертца призводить до інтегралів, що не беруться, тому можуть бути обчислені наближено. Тому знаходження виразів для $\overset{0}{e}_0$ та σ^2 опускаємо.

Модель Мейкхама.

У 1860 р. Мейкхам узагальнив модель Гомперца, поклавши

$$\mu_x = A + Be^{\alpha x},\ x > 0. \qquad (10.20)$$

Призначення додаткового доданка A пояснимо нижче.

Легко переконатися, що в рамках моделі Гомпертца виконуються співвідношення

$$S(x)=\exp\left\{-Ax-\frac{B}{\alpha}(e^{\alpha x}-1)\right\},$$

$$F(x)=1-\exp\left\{-Ax-\frac{B}{\alpha}(e^{\alpha x}-1)\right\}, \qquad (10.21)$$

$$f(x)=\left[A+Be^{\alpha x}\right]\exp\left\{-Ax-\frac{B}{\alpha}(e^{\alpha x}-1)\right\}.$$

Розглянемо граничний випадок B = 0. Тоді одержимо експоненттіальний закон

$$f(x) = Ae^{-Ax} \quad \mathrm{f(x)} = Ae^{-Ax}, \qquad (10.22)$$

з інтенсивністю смертності A, що не залежить від віку x. Таке можна чекати, коли смерть викликана нещасними випадками. Для опису частки таких смертей уведено параметр A, який враховує ризики, що пов'язані з нещасними випадками.

Розрахунок середнього і дисперсії в моделях Мейкхама призводить також до інтегралів, що не беруться.

Модель Вейбулла.

У 1939 р. Вейбулл запропонував апроксимувати інтенсивність смертності показниковою функцією

$$\mu x = kx^b,\ k > 0,\ b > 0. \qquad (10.23)$$

Відповідно до цієї моделі

$$\begin{aligned} S(x) &= \exp\left\{-\frac{k}{b+1}x^{b+1}\right\}, \\ F(x) &= 1-\exp\left\{-\frac{k}{b+1}x^{b+1}\right\}, \\ f(x) &= kx^b \exp\left\{-\frac{k}{b+1}x^{b+1}\right\}. \end{aligned} \qquad (10.24)$$

Похідна має вигляд

$$\frac{df(x)}{dx} = \left(kbx^{b-1} - x^{b^2}\right)\exp\left\{-\frac{k}{b+1}x^{b+1}\right\} = 0, \qquad (10.25)$$

при

$$\bar{x} = \left(\frac{b}{k}\right)^{\frac{b^2}{b-1}}, \qquad (10.26)$$

яка є точкою максимуму графіка смертей, якщо $b > 0$.

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. Особливості побудови тарифів по страхуванню життя.
2. Структура тарифної ставки у страхуванні життя.
3. Таблиця смертності у стахуванні життя.
4. Дайте визначення поняття «норма прибутковості».
5. Відсотковий множник. Таблиця відсоткових множників.
6. Одноразова нетто-ставка по страхуванню на дожиття.
7. Одноразова нетто-ставка на випадок смерті.
8. Поняття річної нетто-ставки.
9. Брутто-ставка по змішаному страхуванню життя.
10. Модель Муавра.
11. Модель Гомпертца.
12. Модель Мейкхама.
13. Модель Вейбулла.

ТЕСТИ

1. Побудова тарифів по страхуванню життя має свої особливості:
   а) розрахунки провадяться з використанням демографічної статистики і теорії ймовірності;
   б) при розрахунках застосовуються способи короткострокових фінансових розрахунків;
   в) тарифні нетто-ставки складаються з кількох частин, кожна з яких покликана сформувати страховий фонд за одним з видів страхової відповідальності, який включений в умови страхування.

2. Тарифні ставки в страхуванні життя складаються з кількох частин:
   а) страхування на дожиття;
   б) страхування на випадок смерті;
   в) страхування від нещасних випадків;
   г) медичне страхування;
   д) ризикове страхування.

3. Таблиця смертності містить показники, що характеризують:
   а) смертність населення в окремих вікових групах;

б) дожиття при переході від одного віку до наступного;
в) імовірність померти протягом майбутнього року життя;
г) дожиття до окремої вікової групи;

4. За допомогою формули $B_n = A(1 + i)^n$ можна визначити:
а) страховий фонд, необхідний для виплат в обумовлений термін страхових сум;
б) страховий фонд на початку терміну страхування;
в) тарифна ставка при страхуванні життя.

5. Формула ${}_nE_x = \dfrac{(l_{x+n} \cdot v^n)}{l_x \cdot S}$ – це:
а) одноразова нетто-ставка по страхуванню на дожиття для осіб у віці *x* років терміном на *n* років;
б) одноразова нетто-ставка по страхуванню на випадок смерті для осіб у віці *x* років терміном на *n* років;
в) сучасна вартість річних внесків (коефіцієнт розстрочки);
г) річна нетто-ставка по страхуванню на дожиття для осіб у віці *x* років терміном на *n* років;
д) річна нетто-ставка по страхуванню на випадок смерті для осіб у віці *x* років терміном на *n* років.

6. Формула ${}_na_x = \dfrac{(l_x + 1 \cdot v + l_x + 2 \cdot v^2 + \ldots + l_x + n \cdot v^{x+n})}{l_x}$ – це:
а) одноразова нетто-ставка по страхуванню на дожиття для осіб у віці *x* років терміном на *n* років;
б) одноразова нетто-ставка по страхуванню на випадок смерті для осіб у віці *x* років терміном на *n* років;
в) сучасна вартість річних внесків (коефіцієнт розстрочки));
г) річна нетто-ставка по страхуванню на дожиття для осіб у віці *x* років терміном на *n* років;
д) річна нетто-ставка по страхуванню на випадок смерті для осіб у віці *x* років терміном на *n* років.

7. Яку модель характеризує наведений аналітичний закон смертності (показник інтенсивності смертності)

$$\mu(x) = \frac{f(x)}{s(x)} = \frac{\frac{1}{\omega}}{1 - \frac{x}{\omega}} = \frac{1}{\omega - x}, \quad при \quad x \in (0, \omega):$$

а) Модель де Муавра;
б) Модель Гомпертца;
в) Модель Мейкхама;
г) Модель Вейбулла.

8. Яку модель характеризує наведений аналітичний закон смертності (показник інтенсивності смертності) $\mu_x = A + Be^{\alpha x}$, $x > 0$:
   а) Модель Мейкхама;
   б) Модель Вейбулла;
   в) Модель де Муавра;
   г) Модель Гомпертца;

9. Аналізуючи брутто-ставки, можна зробити такі висновки:
   а) розмір тарифів збільшується слідом за віком особи, що укладає договір страхування;
   б) чим довший термін страхування, тим нижча тарифна ставка;
   в) одноразовий внесок менший страхової суми і нижчий суми місячних внесків;
   г) перевищення загальної суми сплачених у розстрочку внесків буде тим меншим або його зовсім не буде, чим довший термін страхування і молодша особа, що укладає договір.

Тема 11. СИСТЕМА СТРАХОВИХ РЕЗЕРВІВ

1. РЕЗЕРВИ СТРАХОВИКА, ЇХ ВИДИ ТА ПОРЯДОК ФОРМУВАННЯ

   Резерви страховика. Види резервів. Порядок формування резервів. Методи формування резервів

2. РЕЗЕРВ НЕЗАРОБЛЕНОЇ ПРЕМІЇ

   Резерв незаробленої премії для одноразової страхової премії; метод «1/365»; метод «1/24»; метод «1/8». Резерв незаробленої премії для премії, що сплачується в розстрочку. Середній рівень резерву незаробленої премії

3. РЕЗЕРВ КОЛИВАНЬ ЗБИТКОВОСТІ

   Нормативний рівень виплат. Розрахунок збитковості за звітними даними

4. ОЦІНКА ІНВЕСТИЦІЙНОГО ДОХОДУ

1. РЕЗЕРВИ СТРАХОВИКА, ЇХ ВИДИ ТА ПОРЯДОК ФОРМУВАННЯ

Для забезпечення діяльності страховик створює певні резерви, що призначені забезпечити виконання зобов'язань страховика за майбутніми виплатами страхових сум і страхового відшкодування, підвищити надійність та платоспроможність страхової компанії.

Окрім того, страховики можуть створювати резерви для фінансування заходів по попередженню настання страхових випадків та інші резерви. А із нерозподіленого прибутку створюються вільні резерви.

Для забезпечення виконання страховиками зобов'язань щодо окремих видів обов'язкового страхування страховики можуть утворювати централізовані страхові резервні фонди та органи, які здійснюють управління цими фондами.

Основні види резервів, що формує страхова компанія представлені на рис. 11.1.

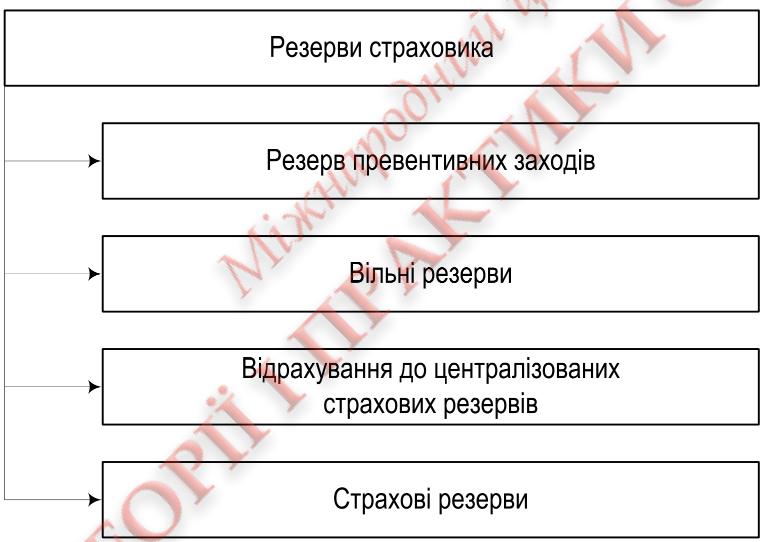


Рис. 11.1. Резерви страховика

Резерв превентивних заходів – резерв, що забезпечує реалізацію попереджувальної функції страхування, забезпечує фінансування витрат на заходи із запобігання нещасних випадків, втрат чи пошкодження майна.

Резерв превентивних заходів формується шляхом відрахувань від страхової премії, що надійшла за договорами страхування за звітний період. Розмір таких відрахувань визначається за відсотком, що передбачений в структурі тарифної ставки ($\%T_b$) по кожному договору страхування на зазначені цілі. Величина *РПЗ* за певний період складається із суми передбачених відсотків, збільшеної на розмір *РПЗ* на початок звітного періоду ($РПЗ_{поч.}$) і зменшеної на суму використаних коштів на превентивні заходи у звітному періоді ($РПЗ_{вик.}$).

Тобто

$$РПЗ = \%T_b + РПЗ_{поч.} - РПЗ_{вик}. \qquad (11.1)$$

Формування та використання коштів *РНП* за добровільними видами страхування здійснюється страховиком на базі розробленого ним та узгодженого з уповноваженим органом контролю за страховою діяльністю Положення про резерв превентивних заходів.

Вільні резерви	частина власних коштів страховика, яка резервується з метою додаткового забезпечення платоспроможності відповідно до прийнятої методики здійснення страхування.

Джерелом їх створення є нерозподілений прибуток організації. Необхідно зазначити, що платоспроможність передбачає здатність страховика відповідати за своїми зобов'язаннями.

Відрахування до централізованих страхових фондів	відрахування, що мають на меті забезпечити виконання страховиками своїх зобов'язань щодо окремих видів страхування, як правило, визначених законодавче.

Джерелом відрахувань до централізованих страхових фондів є:

- відрахування від надходжень страхових платежів;
- внески власних коштів страховика (частина прибутку);
- доходи від розміщення тимчасово вільних коштів централізованих страхових резервних фондів.

Страхові резерви поділяються на:

- резерви за ризиковими видами страхування (технічні);
- резерви по страхуванню життя і накопичувальному страхуванню (математичні).

Згідно такого поділу та у відповідності до Закону України «Про страхування» для забезпечення виконання зобов'язань перед страховиками страхові компанії формують із отриманих страхових внесків необхідні страхові резерви по особистому, майновому страхуванню та страхуванню відповідальності. Страхові резерви поділяються на технічні та резерви із страхування життя (математичні), які, в свою чергу, поділяються на види та підвиди (рис. 11.2).

Технічні резерви передбачають необхідним за законодавчою нормою створення резервів премій та резервів збитків. До резервів премій відноситься обов'язкове створення резервів незароблених премій.

Резерв незароблених премій (*РНП*) складається з відповідної частини нетто-ставки, яка надійшла у звітному періоді і яка використовується для страхових виплат протягом періоду, що виходить за межі звітного.

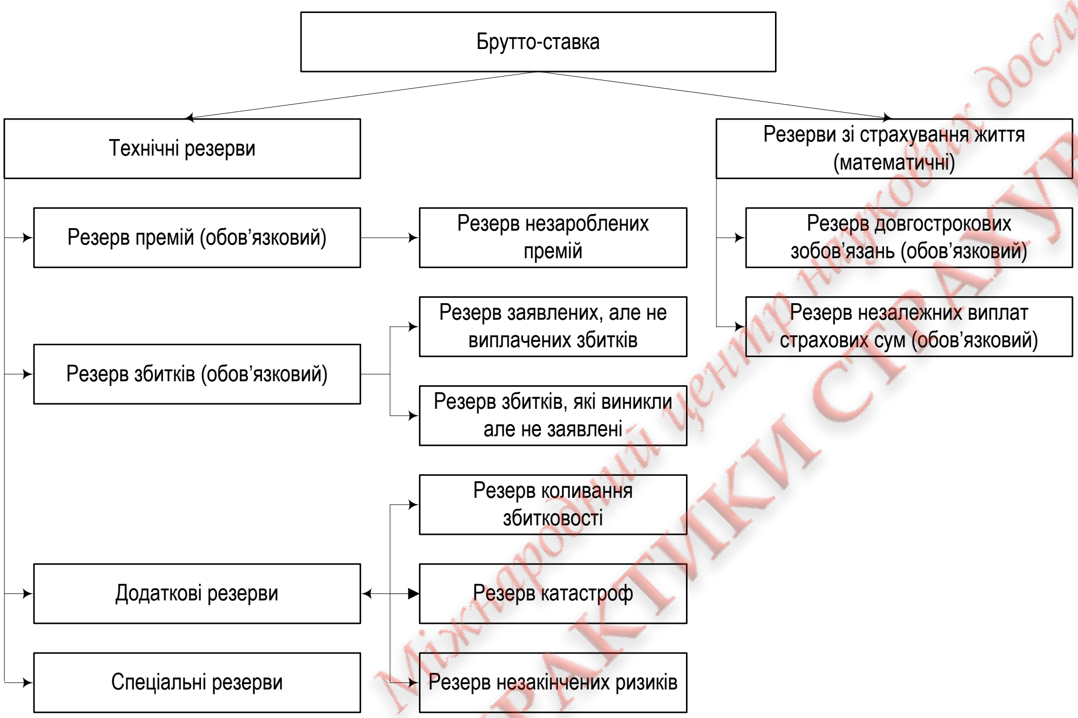


Рис. 11.2. Види страхових резервів

Нєзароблена премія це частина страхової премії, яка надійшла за договорами страхування, що укладені у звітному періоді, а термін їх дії припадає на наступний звітний період (виплати майбутніх періодів).

У практиці страхування для розрахунку незаробленої премії використовується декілька методів формування резервів незароблених премій.

Метод «1/365» – метод розрахунку по днях. Застосовується за кожним договором страхування окремо, коли терміни сплати страхової премії розподілені у часі довільно. Визначається як добуток страхової премії і частки від ділення строку дії договору страхування (у днях), який ще не закінчився, до всього терміну дії договору страхування. Формула розрахунку має вигляд

$$РНП_i = П_{бі} \cdot \frac{т - д}{т}, \qquad (11.2)$$

де $РНП_i$ – резерв незароблених премій по i-тому договору страхування;

$П_{бі}$ – базова страхова премія по i-тому договору;

$т$ – термін дії i-того договору страхування;

$д$ – число днів з моменту початку дії i-того договору до звітної дати.

Метод «1/4», «1/8», «1/12», «1/24» – «пашуальний метод». Розробляється страхова премія на півріччя, квартали, місяці, декади, щоб відділити зароблену страхову премію від незаробленої в звітний період. Використовується, коли термін дії договорів страхування починається до початку звітного періоду. Порядок розрахунку наступний: базова страхова премія групується за місяцем початку виникнення відповідальності страховика, далі розподіляється на термін дії поліса (премію ділять на рівні частини).

Метод «40%» зазначений метод використовують, коли укладаються договори з невизначеними термінами початку та закінчення дії договорів; розмір *РНП* визначається за кожним окремим договором страхування в розмірі 40% від базової страхової премії на звітну дату.

Метод «плаваючих кварталів» – є спрощеним методом розрахунку *РНП*, який використовується згідно Закону Укрaхни «Про страхування» всіма українськими страховиками і виконується на основі брутто-ставки. При цьому вважається, що витрати на ведення страхової справи складають 20-28%, а всі договори страхування укладені в середині року, а відтак, розмір *РНП* на звітну дату встановлюється в залежності від суми страхових премій, що надійшли, за відповідним видом страхування в кожному із трьох кварталів періоду, що передує цій звітній даті. Порядок розрахунку *РНП* методом «плаваючих кварталів» наступний: сума страхових премій, що надійшли в I кварталі, помножається на 1/4 ($\sum П_1 \cdot 1/4$), у II кварталі – на 1/2 ($\sum П_2 \cdot 1/2$), у III кварталі – на 3/4 ($\sum П_3 \cdot 3/4$), всі отримані значення додаються

$$РНП = 1/4\sum П_1 + 1/2\sum П_2 + 3/4\sum П_3 . \qquad (11.3)$$

Резерви збитків – зобов’язання по виплаті страхових відшкодувань за тими страховими випадками, що відбулися до звітної дати (тобто відбулися до кінця фінансового року). Для інших – призначений *РНП*.

Резерв збитків у світовій практиці складається з одного або декількох компонентів. Наприклад, у відповідності до САAР резерв збитків складається з:

- резерву подій, що відбулися;
- резерву розвитку збитків;
- резерву збитків, що відбулися, але не заявлені;
- резерву під можливе перевідкриття збитку;
- резерву під видатки неврегульованих збитків.

В Україні у відповідності до чинного законодавства резерви збитків включають:

- резерв заявлених, але невиплачених збитків;
- резерв збитків, які виникли, але не заявлені;
- резерв коливань збитковості;
- резерв катастроф.

Резерв заявлених, але невиплачених збитків – резерв, що формується для забезпечення виконання зобов’язань, що невиконані та неврегульовані або виконані неповністю страховиком на звітну дату.

При цьому страхові зобов’язання виникли за випадками, що мали місце у звітному періоді або, навіть, напередодні, і про факт настання яких було відомо страховику. Розмір *РЗНВ* визначається по кожній неврегульованій претензії і відповідає сумі заявлених збитків за звітний період ($ЗЗ_{зв.}$), які зареєстровані в Журналі обліку збитків, збільшеної на суму неврегульованих збитків за попередні періоди ($ЗЗ_{п}$) та зменшеної на вже виплачені протягом звітного періоду збитки ($ЗВ_{зв.}$) плюс витрати на врегулювання збитку (*ВВЗ*). Як правило, останні приймаються в розмірі 3% від суми певрегульованих претензій за звітний період. Таким чином

$$РЗНВ = ЗЗ_{зв.} + ЗЗ_{п} + ЗВ_{зв.} + ВВЗ. \qquad (11.4)$$

Резерв збитків, які виникли, але не заявлені – резерв, що формується у зв’язку із можливими страховими подіями, що відбулися, проте страховику не заявлені збитки за ними на звітну дату.

Практично при розрахунках РЗНЗ застосовують 10% від страхової премії, що надійшла за звітний період, якщо вважати звітним періодом фінансовий рік.

Крім того, в доповнення до резервів премій та резервів збитків страховики можуть створювати додаткові технічні резерви. А саме:

- резерв коливань збитковості;
- резерв катастроф;
- резерв незакінчених (неминулих) ризиків.

Зазначені додаткові технічні резерви створюються і формуються у відповідності до Статуту страхової компанії та розробленого Положення страховика про порядок формування технічних резервів, який погоджено з органами державного нагляду за страховою діяльністю.

Резерв коливань збитковості	резерв, що призначений для компенсації витрат страховика на здійснення страхових виплат у випадках, коли значення збитковості страхової суми у звітному періоді перевищують очікуваний рівень збитковості, який є основою для розрахунку тарифу-нетто за відповідним видом страхування.

Резерв коливань збитковості (*РКЗ*) є складовим технічних резервів страховика.

Коливання збитковості зазвичай фіксуються та враховуються за тими видами страхування, які пов'язані із значними змінами рівня ризику (від дуже низького до надто високого), під впливом якого знаходяться застраховані об'єкти під час дії договору страхування. Наприклад, якщо за певний період ризик несприятливих кліматичних умов, що впливають на врожайність сільськогосподарських культур, досить низький, то страховик не виплачує страхових відшкодувань, оскільки відсутні страхові випадки. Тоді накопичені страхові резерви направляються не на поповнення прибутку, а у резерв коливання збитковості (*РКЗ*),тобто зберігаються з метою виплат у періоди, коли ризик буде високим.

Резерв коливання збитковості дозволяє підвищувати фінансову стійкість страховика, а значить і рівень його надійності, що є сприятливим фактором стабілізації економіки в цілому. Проте нормативної бази для формування *РКЗ* сьогодні в Україні немає. Страховики самостійно визначають порядок та умови формування зазначеного резерву та узгоджують їх з уповноваженим органом нагляду за страховою діяльністю. До того ж при формуванні власної методики досить проблематичним є віднесення ризику за певним видом страхування до відповідного типу, а також розподіл цього ризику у часі.

Безумовно, при нормальному типі ризику значення збитковості коливається навколо середнього показника, що характерно для традиційного майнового страхування. Відхилення від середньої в сторону зниження ризику, як правило, супроводжується капіталізацією страхових резервів, що збільшує прибуток страховика. Відхилення в сторону підвищення ризику компенсується ризиковою надбавкою в структурі страхового тарифу.

Для видів страхування, де застосовуються страхові тарифи без ризикової надбавки, з мстою підвищення фінансової стійкості страхових операцій доцільно створювати резерв коливання збитковості. Вказаний резерв також доцільно створювати, якщо має місце постійне підвищення рівня ризику (у таких видах страхування, як медичне, екологічне).

Якщо має місце значна нерівномірність розподілу збитковості страхової суми та велика частота коливання ризику у часі, то такі ризики відносять до катастрофічних, які поділяються в свою чергу на нормальні і власне катастрофічні. Нормальна частина катастрофічного ризику покривається за рахунок звичайного страхового резерву, а власне катастрофічний ризик – за рахунок спеціального фонду катастроф або передається перестраховику.

Необхідно підкреслити, що у складі технічних резервів передбачається створення резерву катастроф (*РК*).

Резерв катастроф	резерв, який призначено для покриття надзвичайного збитку, що є наслідком непереборної сили або масштабної аварії, і який вимагає страхових виплат за великою кількістю договорів

Цей резерв, як і резерв коливання збитковості формується без спеціально рекомендованої методики. Його створення залежить від страховика. До того ж в законодавчій, довідниковій та науковій літературі немає чітко розкритого поняття «непереборної сили». Непереборна сила діє як надзвичайне явище, яке неможливо подолати, проте можна передбачити. А відтак існує ймовірність його настання з одночасною невизначеністю у просторі та часі, що дозволяє віднести ризики непереборної сили до категорії страхових. Катастрофічність зазначеного ризику полягає не в тому, що відбулися передбачені страхові події, а якраз в тому, що ці небезпеки вплинули відразу на багато застрахованих об'єктів, що призводить до флуктуаційних коливань збитковості. До того ж, ці коливання збитковості можуть відбуватися як за один тарифний період, так і за декілька. Отже, резерв катастроф доцільно створювати в тих страхових компаніях, які спеціалізуються на страхуванні катастрофічних ризиків або включають їх в обсяг своєї відповідальності.

Резерв незакінчених ризиків – резерв, який створюється в якості доповнення до резерву незароблених премій з метою компенсації дефіциту фінансових ресурсів у технічних резервах із-за можливого чи змушеного заниження тарифів в умовах ринкової економіки.

Встановлюючи резерви незакінчених ризиків, страховики повинні письмово повідомити уповноважений орган про запровадження формування та ведення обліку таких технічних резервів за видами страхування, іншими, ніж страхування життя, не пізніше, як за 45 днів до початку календарного року.

Спеціальні резерви – резерви, що формуються в залежності від специфіки зобов'язань страховика.

Резерви зі страхування життя – резерви, що формуються окремо для забезпечення виконання зобов'язань по страхових виплатах із страхування життя та медичного страхування за рахунок надходження страхових платежів і доходів від інвестування коштів сформованих резервів за цими видами страхування.

Кошти резервів із страхування життя не є власністю страховика і повинні бути відокремлені від його іншого майна. Вони не можуть використовуватись страховиком для погашення будь-яких інших зобов'язань, не можуть бути включені до ліквідаційної маси у разі банкрутства страховика чи його ліквідації.

Страховики повинні створювати наступні резерви із страхування життя:

- резерв довгострокових зобов'язань (математичні резерви);
- резерв належних виплат страхових сум.

Величина резервів довгострокових зобов'язань обчислюється окремо по кожному договору страхування у відповідності до Методики формування резервів по страхуванню життя, затвердженої Наказом Комітету у справах нагляду за страховою діяльністю № 46 від 23 липня 1997 р., з урахуванням темпів зростання інфляції. Мінімальні строки дії договорів страхування життя встановлюються уповноваженим органом (в сучасних умовах – Кабінетом Міністрів України).

Резерви довгострокових зобов'язань та належних виплат страхових сум формуються шляхом відрахування частини страхової премії, що призначена для страхових виплат, та частини інвестиційного доходу від розміщення тимчасово вільних коштів страховика. Загальний розмір страхових резервів по страхуванню життя визначається, як сума резервів кожного окремого договору страхування життя.

Розрахунки виконуються на базі таблиць смертності та норм доходності по інвестуванню тимчасово вільних коштів.

Отже, страховик при здійсненні страхової діяльності створює технічні резерви для забезпечення зобов'язань за ризиковими видами страхування та резерви із страхування життя для забезпечення зобов'язань із страхування життя, накопичувального страхування та медичного страхування. Порядок формування, використання та розміщення означених страхових резервів встановлюється відповідно до норм діючого законодавства та затверджених правил страхування.

Види страхових резервів.

Необхідність наявності страхових резервів обумовлена часовим розривом між надходженням страхової премії і її витрачанням на страхові виплати. Оскільки страхова премія за договорами страхування завжди поступає раніше, ніж відбуваються страхові випадки і здійснюються страхові виплати за цими договорами, то необхідно резервувати її на майбутнє для забезпечення страхових виплат шляхом створення страхового фонду.

Існує аналогія між динамікою величини страхового фонду і динамікою рівня рідини в резервуарі, в який рідина спочатку поступає впорядкованими порціями (внески), а потім неврегульовано, випадковими порціями і у випадкові моменти часу витікає (виплати). У страхуванні стік має випадковий, або стохастичний, характер з двох причин: по-перше, наперед невідомо, коли відбудеться страховий випадок, по-друге, невідом є розмір страхового відшкодування. Рівень рідини в резервуарі весь час знаходиться в русі, він то підвищується за рахунок накачування рідини (надходження страхової премії), то знижується за рахунок стоку (страхових виплат).

Необхідна умова функціонування страхової компанії – достатня величина страхового фонду у будь-який момент часу. Для цього необхідно принаймні, щоб за фіксований інтервал часу (квартал, рік) приток гарантовано перевищував або хоча б компенсував витік. Виходячи з цього і визначається розмір страхової премії: оцінюється максимальний розмір сумарної виплати по всіх страхових випадках за термін дії договору, а сумарне надходження страхової премії прирівнюється до цієї величини.

Формування страхового фонду відбувається за рахунок тієї частини страхової премії, яка покриває реальну вартість страхових виплат, а також внутрішні адміністративні витрати, пов'язані із забезпеченням діяльності страхової компанії (це так звана технічна або інвентарна, премія).

Технічна премія дорівнює страховій премії, що поступила, за вирахуванням відрахувань в резерв попереджувальних заходів і виплати комісійних агентам за продажу полісів. Технічна премія служить джерелом формування технічних резервів, необхідних для забезпечення страхових виплат по страхових випадках, що вже відбулися і майбутнім. У зв'язку з цим і технічні резерви підрозділяються на два відповідні класи: резерви збитків і резерви премій. Резерви збитків включають резерв заявлених, але неврегульованих збитків (*РЗНЗ*), і резерв збитків, що відбулися, але незаявлені (*РВНЗ*).

Резерви премій складаються з резерву незаробленої премії, резерву коливань збитковості і резерву катастроф. Кожен тип резерву премій пов'язаний з відповідним характером часового розподілу ризику.

Резерв незаробленої премії (*РНП*) розраховується в припущенні про рівномірний розподіл ризику протягом терміну дії договору страхування. Така ситуація має місце, коли число страхових випадків за період страхування велике, тобто виплати відбуваються майже безперервно. Рівень виплат при цьому приймається рівним нормативному рівню виплат, узятому за основу при розрахунку тарифів. Якщо договори страхування одночасно починаються і закінчуються, то до моменту закінчення договорів величина *РНП* повинна бути рівна нулю.

Резерв коливань збитковості (*РКЗ*) призначений для згладжування коливань рівня виплат (збитковості) біля нормативного значення протягом тарифного періоду. При цьому після закінчення тарифного періоду та його частина, яка сформувалася за рахунок відхилення рівня виплат від середнього значення, повинна виявитися рівною нулю, залишок же буде обумовлений накопиченням ризикової надбавки за цей термін.

Резерв катастроф (*РК*) призначений для накопичення коштів на випадок рідкісних (раз в 50–100 років) катастрофічних подій, при яких можливе пошкодження значної частини застрахованих об'єктів і потрібна одномоментна виплата великої суми. Через свою рідкість і унікальність подібні події не укладаються в статистику, і тому може бути зроблена тільки експертна оцінка необхідної величини резерву катастроф і часу його накопичення.

2. РЕЗЕРВ НЕЗАРОБЛЕНОЇ ПРЕМІЇ

Під незаробленою премією на даний момент часу розуміють частину технічної премії, призначеної для здійснення майбутніх страхових виплат за діючими договорами страхування з урахуванням адміністративних витрат. У свою чергу зароблена премія є нормативний (розрахунковий) рівень страхових виплат за період від моменту вступу у силу цих договорів до теперішнього моменту часу (також з урахуванням адміністративних витрат). У сумі зароблена і незароблена премії складають технічну премію.

Резерв незаробленої премії для одноразової страхової премії.

Обчислимо резерв незаробленої премії (*РНП*) для простого випадку, коли всі діючі в даний момент часу договори страхування почалися одночасно і так само одночасно закінчаться. Оскільки ризик рівномірно розподілений впродовж терміну дії договорів, розрахункова (нормативна) сума страхових виплат (використана нетто-премія) пропорційна часу з моменту укладення договорів

$$Z(t) = Z\frac{t}{T}, \tag{11.5}$$

де Z – сумарна нетто-премія за весь термін дії договорів.

Величина сумарного нетто-резерву або резерву незаробленої нетто-премії

$$RZ(t) = Z - Z(t) = Z(1-\frac{t}{T}) = Z\frac{T-t}{T}. \tag{11.6}$$

З формули (11.5) видно, що величина нетто-резерву пропорційна інтервалу часу, що залишився до закінчення терміну договорів. У зв'язку з цим метод розрахунку страхових резервів по формулі (11.6) називається методом розрахунку пропорційно часу. Сам же резерв називають нетто-резервом незаробленої премії. У момент початку дії договору величина резерву рівна нетто-премії, що потупила у момент закінчення договору – нулю.

Страхова компанія резервує засоби не тільки для здійснення майбутніх страхових виплат, але і на майбутні адміністративні витрати, які рівномірно розподілені протягом часу, що залишився до закінчення договорів.

Сумарний резерв незаробленої премії (технічний резерв) рівний нетто-резерву плюс резерв майбутніх адміністративних витрат (який також пропорційний часу, що залишився до закінчення договорів)

$$RZ_t(t) = Z_t(1-\frac{t}{T}) = Z_t\frac{T-t}{T}, \tag{11.7}$$

де $Z_t = Z\left[1 + f_a/(1 - f)\right]$ – технічна премія;

f_a – доля адміністративних витрат в брутто-премії.

Насправді всі договори, що укладаються, мають різні дати початку, терміни дії, страхові суми, страховий тариф. Проте оскільки збитки по будь-якому з договорів зразу ж розкладаються на всіх учасників страхування, то можна вважати, що, як і в страхуванні життя, премії кожного учасника формують індивідуальний резерв *V*, який убуває при кожному страховому випадку пропорційно частині цього учасника в загальній премії. Адміністративні витрати також розкладаються пропорційно страховим преміям. Формула для індивідуального резерву має вигляд

$$V(t) = P_t k(t),$$
$$k(t) = \frac{T - t}{T}, \qquad (11.8)$$

де $k(t)$ – коефіцієнт, що показує, яка частина технічної премії «ще не зароблена».

Зароблена страхова премія

$$W(t) = P_t \frac{t}{T}. \qquad (11.9)$$

Сумарний резерв незаробленої премії по всіх діючих на момент часу t договорам:

$$RZ(t) = \sum_q V_q(t) = \sum_q P_{tq} \frac{T_q - (t - t_q)}{T_q}, \qquad (11.10)$$

де t_q, T_q – момент початку і тривалість q-го договору страхування;

P_{tq} – технічна премія за цим договором.

Для розрахунку *РНП* традиційно використовуються чотири пропорційні методи. Вони залежать від дат початку договору, які можуть бути, наприклад, щоденними, щомісячними і т.д.

Метод 365-х часток.

Найточніший з вживаних методів. Тут дати початку договорів групуються по днях. Тривалість року приймається рівною 365 дням.

Приклад 11.1. 1 серпня страхова компанія уклала договір страхування строком на 1 рік з оплатою страхової премії одноразовим внеском у розмірі 60 тис. грн. Частка страхової премії, призначеної для виплати комісійних за укладення договору, – 20%; частка відрахувань на превентивні заходи – 10%. Визначити резерв незаробленої премії: а) на кінець III кварталу; б) на кінець року.

Величина технічної премії: 60·(1 – 0,3) = 42 тис. грн.

а) Інтервал часу від початку договору до звітної дати (1 жовтня) складає 61 день. Коефіцієнт *k* (1 – 61 / 365) = 0,833; резерв незаробленої премії рівний 42 · 10 / 12 = 34,981 тис. грн.

б) Інтервал часу від початку договору до звітної дати (1 січня) складає 153 дні. Коефіцієнт *k* (1 – 153 / 365) = 0,581; резерв незаробленої премії 24,395 тис. грн.

Метод 24-х часток.

Метод, що дає декілька менш точний результат, оскільки прив'язує початок всіх ув'язнених протягом якого-небудь місяця договорів до середини місяця. Одиниця вимірювання часу тут – півмісячний інтервал часу, тривалість року приймається рівною 24 таким відрізкам. Наприклад, якщо річний договір страхування укладений в першому місяці року, то він вважається оформленим у середині місяця, тобто від початку року пройшла 24-а частка року. Якщо звітна дата – кінець року, то коефіцієнт *k* = 1 – 1/24 = 23/24. *Якщо ж договір укладений в останній місяць року* k = 1 – 23/24 – 1/24.

Приклад 11.2. Для даних прикладу 11.1 розрахувати *РНП* методом 24-х часток. Договір страхування вважається укладеним всередині серпня.

До звітної дати (1 жовтня) пройшло три 24-і частки року. Коефіцієнт *k* = 1 = 3/24 = 21/24 ; *РНП* – 42,21/24 = 36,75 тис. грн.

До звітної дати (1 січня) пройшло дев'ять 24-х часток року. Коефіцієнт *k* = 1 = 9/24 = 15/24 ; *РНП* – 42,15/24 тис. грн.

Метод 8-х часток.

Аналогічний попереднім, але має на увазі, що договори згруповані по кварталах року і починаються у середині відповідного кварталу.

Цей метод є подальшим спрощенням і припускає, що всі договори починаються у середині року.

РНП для премії, сплачуваної в розстрочку.

У разі, коли страхова премія сплачується в декілька прийомів, резерв незаробленої премії рівний різниці між технічною премією за договором, що поступила до моменту звіту, і заробленою премією

$$V(t) = P_t(t) - P_t\frac{t}{T}. \tag{11.11}$$

<u>*Приклад 11.3*</u>. Умови ті ж, що і в прикладі 11.1, з тією тільки різницею, що страхова премія вноситься в два прийоми: перша половина премії – при укладенні договору, друга – три місяці опісля.

До моменту оцінки резерву внесена половина технічної премії:

$P_t(t) = P_t / 2$;

$$V(t) = P_t / 2 - P_t\frac{t}{T} = 21 - 42\cdot\frac{61}{365} = 13{,}981 \text{ тис. грн.}$$

До моменту оцінки резерву внесена вся технічна премія:

$P_t(t) = P_t$;

$$V(t) = P_t(1 - \frac{t}{T}) = 42(1 - \frac{153}{365}) = 24{,}395 \text{ тис. грн.}$$

Результати прикладів представлені на рис. 11.1.

На верхньому графіку показана динаміка надходження технічної премії: а) при одноразовій сплаті страхової премії; б) при сплаті першої половини премії на початку терміну, а другої – через три місяці.

На середньому графіку представлена наростаючим підсумком залежність розрахункового (нормативного) рівня виплат (включаючи адміністративні витрати) від часу. Оскільки виплати не залежать від способу сплати страхової премії, то крива одна і та ж для обох прикладів.

На нижньому графіку, що є різницею між середнім і верхнім графіками, показана динаміка резерву незаробленої премії.

Визначимо зміну *РНП* за період, що починається у момент t_0 і закінчується в момент t (звітний період)

$$\delta V = V(t) - V(t_0) = [P_t(t) - P_t(t_0)] - W(t) - W(t_0), \tag{11.12}$$

де перший доданок дає технічну премію, що поступила за цей період, а друге – зароблену за цей час премію, яка складається із запрацьованої нетто-премії (нормативного рівня виплат) і заробленій адміністративній премії.

Якщо договір діє до початку звітного періоду і закінчується пізніше за звітну дату *t*, то зароблена премія

$$W(t) - W(t_0) = P_t \frac{t - t_0}{T}. \tag{11.13}$$

Якщо договір діє не весь звітний період, то

$$W(t) - W(t_0) = P_t \frac{\tau}{T} = Pn \frac{\tau}{T} + Pbf_a \frac{\tau}{T}, \tag{11.14}$$

де τ – час дії договору в звітному періоді.

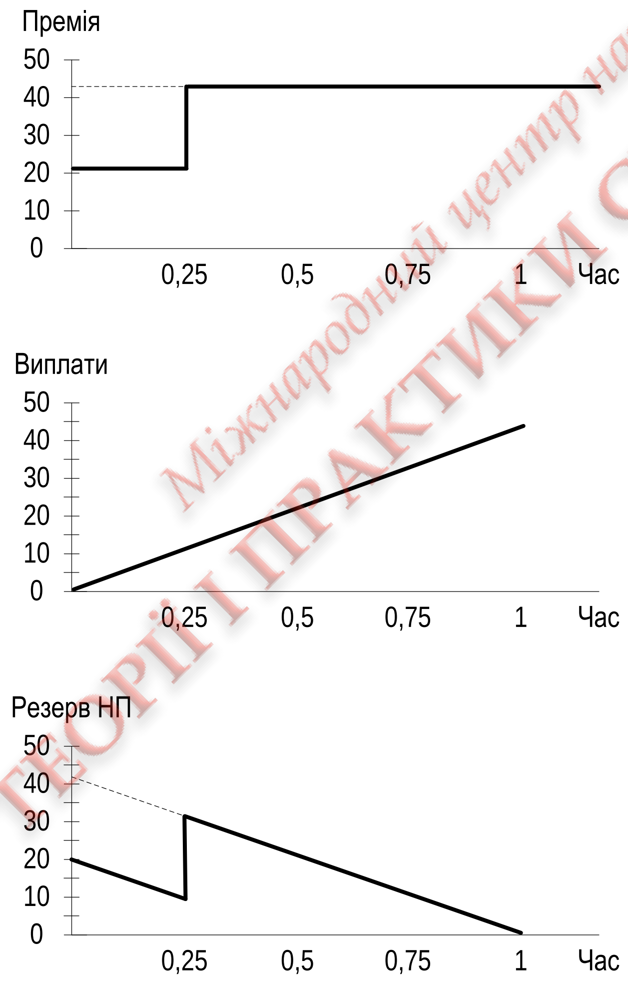


Рис. 11.3. Премія, номінальні виплати, резерв незаробленої премії (одночасна премія (штрихова лінія); перша половина премії вноситься на початку строку, друга – через 3 місяці (суцільна лінія))

Середній рівень резерву незаробленої премії.

Оцінимо середній рівень резерву незаробленої премії протягом терміну дії договору. Середнє значення резерву визначається формулою

$$\overline{V} = \frac{1}{T}\int_0^T V(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T \left[P(t) - P_t \frac{t}{T} \right] dt. \qquad (11.15)$$

Повертаючись до прикладів 11.1 і 11.3, одержимо (при $T = 1$).

$$\overline{V} = \int_0^1 P_t(1-t)dt = \frac{P_t}{2} = 21 \text{ тис. грн.};$$

$$\overline{V} = \int_0^{1/4} (\frac{P_t}{2} - t)dt + \int_{1/4}^{1} (P_t - t)dt = \frac{3P_t}{8} = 15{,}75 \text{ тис. грн.}$$

Звідси видно, що при сплаті страхової премії в два прийоми середній рівень страхового резерву нижчий, ніж при одноразовій сплаті страхової премії. Цей факт є віддзеркаленням загального результату: при розстрочці страхової премії на декілька платежів середній рівень страхового резерву знижується, причому тим сильніше, чим більше число платежів.

Як ілюстрацію розглянемо приклад, коли страхова премія сплачується в n рівних платежів, що вносяться в моменти часу k / n, де $k = 1, 2, \ldots, n - 1$. Тоді середній рівень страхового резерву

$$\begin{aligned} \overline{V} &= \frac{1}{T}\left\{ \int_0^{T/n} \frac{P_t}{n} dt + \int_{T/n}^{2T/n} \frac{2P_t}{n} dt + \ldots + \int_{T(n-1)/n}^{T} P_t dt - \int_0^T P_t \frac{t}{T} dt \right\} = \\ &= \frac{1}{T}\left\{ \frac{P_t T}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) - P_t \frac{T}{2} \right\} = \frac{P_t}{2n}. \end{aligned} \qquad (11.16)$$

Результат очевидний: середній рівень страхового резерву обернено пропорційний числу платежів страхової премії.

3. РЕЗЕРВ КОЛИВАНЬ ЗБИТКОВОСТІ

Нормативний рівень виплат.

Резерв коливань збитковості (*РКЗ*) призначений для згладжування коливань рівня виплат біля нормативного значення протягом тарифного періоду. При цьому після закінчення тарифного періоду та його частина, яка сформувалася за рахунок відхилення рівня виплат від середнього значення, повинна виявитися рівною нулю, залишок же буде обумовлений накопиченням ризикової надбавки за цей термін.

Якщо фактичний рівень страхових виплат за звітний період перевищує нормативний рівень, то перевищення оплачується з *РКЗ*, накопиченого за сприятливі періоди часу, коли рівень виплат був нижчим нормативного. Якщо ж фактичні виплати нижчі за розрахунковий (нормативного) рівень, то надлишок страхової премії поповнює *РКЗ* на випадок несприятливих майбутніх виплат.

Нормативний рівень виплат за звітний період рівний сумарній величині заробленої за цей період премії, яка визначається підсумовуванням індивідуально зароблених нетто-премій за всіма діючими договорами

$$WZ(t) = \sum_q Pn_q \frac{\tau_q}{T_q}, \tag{11.17}$$

де Pn_q, T_q – страхова нетто-премія і тривалість q-го договори страхування;

τ_q – тривалість дії q -го договори страхування в звітному періоді.

Сума відрахувань в резерв коливань збитковості за звітний період

$$Q\hat{Z} = WZ - Z_f = \sum_q Pn_q \frac{\tau_q}{T_q} - Z_f, \tag{11.18}$$

де Z_f – фактичний рівень виплат.

З'ясуємо, як розподіляється технічна премія, що поступила в звітному періоді. Складаючи зміну *РНП* і суму відрахувань в *РКЗ* (11.18), одержимо

$$P(t) - P(t_0) = Q\hat{Z} + RZ(t) - RZ(t_0) + WZ\frac{f_a}{1-f} + Z_f. \tag{11.19}$$

Технічна премія, що поступила в звітному періоді, рівна сумі відрахувань в *РКЗ*, величині зміни *РНП*, заробленій за період офісної премії і сумі фактичних виплат.

Розрахунок збитковості за звітними даними.

Разом з визначенням величини відрахувань в резерв коливань збитковості часто виникає задача визначення фактичної збитковості за звітними даними і порівняння її з розрахунковим значенням, використовуваним для розрахунку тарифної нетто-ставки. Для цього виділимо групу договорів з однаковим ризиком, причому терміни дії договорів можуть бути різними. Через рівномірність розподілу ризику протягом року величину нетто-премії для всіх договорів можна представити у вигляді

$$Pn_q = TnS_qT_q, \tag{11.20}$$

де Tn – річна тарифна нетто-ставка.

Нормативний рівень виплат за звітний період по цій групі договорів можна записати як добуток річної тарифної нетто-ставки на зважену сукупну страхову суму за всіма діючими в звітному періоді договорами страхування

$$WZ = Tn\sum_q S_q\tau_q . \tag{11.21}$$

Вага кожної страхової суми визначається часом дії відповідного договору в звітному періоді.

Якщо замість нормативного рівня виплат узяти фактичний рівень виплат в звітному періоді, то по аналогії з (11.21) можна визначити фактичну збитковість як

$$y_f = \frac{Z_f}{\sum_q S_q\tau_q}. \tag{11.22}$$

Визначення фактичного рівня виплат – непроста задача. Річ у тому, що може пройти якийсь час після збитку, що трапився, до того, як повною мірою стануть відомі вимоги, що підлягають оплаті. Важливо, щоб ці вимоги були віднесені до періоду, коли відбувся страховий випадок. Крім того, може пройти багато років, перш ніж стануть відомі остаточні суми по вимогах виплат. Тому і розраховані значення збитковості слід уточнювати у міру того, як уточнюються суми збитків.

4. ОЦІНКА ІНВЕСТИЦІЙНОГО ДОХОДУ

Дохід від інвестування страхових резервів – одне з основних джерел отримання прибута страховою компанією. Тому оцінка величини цього доходу є необхідною умовою планування фінансової діяльності страховика. Специфічна особливість розрахунку доходу від інвестування у тому, що величина страхового резерву, що служить базою для нарахування відсотків, змінюється в часі унаслідок нерівномірності надходження страхової премії і здійснення страхових виплат.

Оцінимо процентний дохід для простої моделі, вважаючи, що індивідуальний страховий фонд $V(t)$за кожним договором страхування лінійно зменшується від значення технічної премії, що поступила, на початку договору до нуля, при його закінченні відповідно до формули (11.22). Якщо термін дії договору рівний T, а процентний дохід за інтервал часу dt рівний $iV(t)dt$, де i – річна процентна ставка, під яку інвестуються страхові резерви, то інвестиційний дохід за термін дії договору

$$I = i\int_0^T V(t)dt = iT\overline{V}, \qquad (11.23)$$

де $\overline{V}$ – середній рівень резерву незаробленої премії протягом терміну дії договору.

Значення формули очевидне: страховик одержує в тимчасове користування на термін T кошти, середній розмір яких рівний $\overline{V}$, і інвестує їх на цей термін під процентну ставку i, одержуючи дохід I. Якщо страхова премія сплачується одноразово, то відповідно до формули (11.23) (при n = 1) одержимо

$$I = iTP_t / 2. \qquad (11.24)$$

Якщо ж страхова премія вноситься в розстрочку n рівними платежами величиною Pt / n через проміжки часу T / n, то процентний дохід

$$I = iTP_t / 2n. \qquad (11.25)$$

Значення формули (11.25) очевидне: чим більше число платежів страхової премії, тим менше процентний дохід. При n платежах страховик недоотримує в порівнянні з одноразовою сплатою премії процентний дохід в розмірі

$$\Delta I = iTR_t(1 - 1 / n) / 2. \qquad (11.26)$$

Страховик, що погоджується на сплату страхової премії в розстрочку, має право поставити питання про компенсацію недоотриманої частини процентного доходу. Логічно частину премії, не сплачену при укладенні договору, розглядати як кредит страховика страхувальнику, виплачуваний в розстрочку з відсотками. При цьому відсотки нараховуються з поточної величини заборгованості, тобто з суми несплачених внесків. Так, наприклад, якщо страхова премія сплачується двома рівними платежами, причому другий внесок – через період $T / 2$, то протягом цього часу величина заборгованості складає $P_t / 2$, відсотки рівні і $TP_t / 2$, процентний дохід від інвестування страхових резервів відповідно до (11.26) складає таку ж величину; в результаті в сумі вийде такий же процентний дохід (11.26), як при одноразовій сплаті страхової премії. Аналогічно при сплаті страхової премії n рівними платежами через інтервали часу T / nзаборгованість за k-й інтервал часу складає $D_k = P_t(1 - k / n)$, відсотки – iD_k, сума відсотків за термін дії договору

$$I = iP_t \frac{T}{n} \sum_{k=1}^{n-1} (1 - k / n) = \frac{iP_t T}{2} (1 - 1 / n). \qquad (11.27)$$

Додаючи до (11.27) процентний дохід від інвестування страхових резервів, набудемо значення (11.24) – величину інвестиційного доходу від страхових резервів при одноразовій сплаті страхової премії.

У класичному варіанті погашення заборгованості відсотки виплачуються разом з частиною боргу, що погашається, тобто разом з черговими внесками, причому в розмірі, пропорційному величині поточної заборгованості. Для розрахунків зручніше, щоб процентні платежі складали постійну добавку до кожного внеску. Величина цієї добавки рівна часному від розподілу (11.27) на кількість внесків

$$\Delta = I / n = \frac{iP_t T}{2n^2} (n - 1). \qquad (11.28)$$

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. Дайте характеристику основних видів резервів страхової компанії.

2. Резерв превентивних заходів та формула його розрахунку.
3. Поняття технічного резерву.
4. Резерв незароблених премій.
5. Характеристика методів формування страхових резервів.
6. Резерв збитків, його складові.
7. Резерв заявлених, але невиплачених, збитків.
8. Резерв збитків, які виникли, але не заявлені.
9. Резерв коливань збитковості.
10. Резерв незакінчених ризиків.
11. Спеціальні резерви.
12. Резерв із страхування життя.
13. Резерв катастроф.

ТЕСТИ

1. Визначити правильні твердження:
   а) резерв превентивних заході – частина страхової премії, яка надійшла за договорами страхування, що укладені у звітному періоді, а термін їх дії припадає на наступний звітний період (виплати майбутніх періодів);
   б) вільний резерв – частина власних коштів страховика, яка резервується з метою додаткового забезпечення платоспроможності відповідно до прийнятої методики здійснення страхування;
   в) незароблена премія – забезпечує реалізацію попереджувальної функції страхування, забезпечує фінансування витрат на заходи із запобігання нещасних випадків, втрат чи пошкодження майна.
2. Співвідношення $RZ_t(t) = Z_t(1-\frac{t}{T}) = Z_t\frac{T-t}{T}$ описує:
   а) сумарний резерв незаробленої премії;
   б) технічна премія;
   в) доля адміністративних витрат в брутто-премії;
   г) сумарна нетто-премія за весь термін дії договорів.
3. Формула $I = i\int_0^T V(t)dt = iT\overline{V}$ описує:
   а) інвестиційний дохід за термін дії договору;
   б) середній рівень резерву незаробленої премії протягом терміну дії договору;
   в) річна тарифна нетто-ставка;

г) нормативний рівень виплат;
д) резерв незароблених премій.

4. Страхові резерви включають:
   а) резерви за ризиковими видами страхування (технічні);
   б) резерви по страхуванню життя і накопичувальному страхуванню (математичні);
   в) відрахування від надходжень страхових платежів;
   г) внески власних коштів страховика (частина прибутку);
   д) доходи від розміщення тимчасово вільних коштів.

5. За формулою $РНП = 1/4\sum П_1 + 1/2\sum П_2 + 3/4\sum П_3$ розраховується *РНП* методом:
   а) метод «1/365»;
   б) метод «1/4», «1/8», «1/12», «1/24»;
   в) метод «40%»;
   г) метод «плаваючих кварталів».

6. 1 серпня страхова компанія уклала договір страхування строком на 1 рік з оплатою страхової премії одноразовим внеском у розмірі 80 тис. грн. Частка страхової премії, призначеної для виплати комісійних за укладення договору, – 30%, частка відрахувань на превентивні заходи – 10%. Величина технічної премії:
   а) 48;
   б) 38;
   в) 55;
   г) 45.

7. Формула $\overline{V} = \frac{1}{T}\int_0^T V(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T \left[P(t) - P_t\frac{t}{T}\right]dt$ описує:
   а) інвестиційний дохід за термін дії договору;
   б) середній рівень резерву незаробленої премії протягом терміну дії договору;
   в) річна тарифна нетто-ставка;
   г) нормативний рівень виплат;
   д) резерв незароблених премій.

8. Технічна премія, що поступила в звітному періоді, рівна сумі відрахувань в резерв коливань збитковості, величині зміни РНП, заробленій за період офісної премії і сумі фактичних виплат:
   а) так;
   б) ні.

9. До додаткових резервів відносяться:
   а) резерв коливань збитковості;
   б) резерв катастроф;
   в) резерв незакінчених ризиків;
   г) резерв заявлених, але не виплачених збитків;
   д) резерв збитків, які виникли, але не заявлені;
   е) резерв довгострокових зобов’язань.
10. Який показник визначається по кожній неврегульованій претензії і відповідає сумі заявлених збитків за звітний період, які зареєстровані в Журналі обліку збитків, збільшеної на суму неврегульованих збитків за попередні періоди та зменшеної на вже виплачені протягом звітного періоду збитки плюс витрати на врегулювання збитку?
   а) резерв заявлених, але невиплачених збитків;
   б) резерв збитків, які виникли, але не заявлені;
   в) резерв коливань збитковості;
   г) резерв катастроф.

Тема 12. МОДЕЛІ УПРАВЛІННЯ РИЗИКОМ ЗА ДОПОМОГОЮ ПЕРЕСТРАХУВАННЯ

1. СУТНІСТЬ, ВИДИ ТА ФУНКЦІЇ ПЕРЕСТРАХУВАННЯ

   Поняття перестрахування. Цедент. Цидування. Цесія. Ретроцесія. Ретроцесіонарій. Вартість перестрахування. Коефіцієнт професора Ф.В.Коньшина. Види перестрахування

2. ПЕРЕСТРАХУВАННЯ ЯК МЕТОД УПРАВЛІННЯ РИЗИКОМ

   Сумарний позов. Ймовірність розорення страхової компанії

3. ДИВЕРСИФІКАЦІЯ РИЗИКІВ ЗА ДОПОМОГОЮ ПЕРЕСТРАХУВАННЯ

   Загальний рівень ризику. Модель Васічека. Коваріація випадкових величин. Метод множників Лагранжа. Функція Лагранжа

1. СУТНІСТЬ, ВИДИ ТА ФУНКЦІЇ ПЕРЕСТРАХУВАННЯ

Прийнято вважати, що перший договір перестрахування було укладено в Генуї у 370 році. Предметом договору були товари, які перевозились на морському судні з Генуї до Брюгге. Під дію договору підпала частина цього рейсу: від Каделсса до Брюгге.

Систематичне використання перестрахування почалося з кінця XVI сторіччя, коли страховики – купці розподіляли між собою ризики в певних частках. Проте початок формування сучасного ринку перестрахування відносять до середини XIX сторіччя, коли процес економічного розвитку і зростання промисловості сприяли появі більш великих та складних ризиків, реалізація яких могла призвести до катастрофічних наслідків. З'являються спеціалізовані перестраху вальні компанії в Німеччині, Росії.

В Україні перші такі компанії з'явились на початку XX сторіччя (1910-1915 рр.) – земські страхові компанії (перестрахування вогневих ризиків).

Можна сказати, що *перестрахування* з'явилося як спосіб підтримки страховиків при збільшенні обсягів і використанні нових форм страхування. Необхідність такої підтримки полягає в тому, що індивідуальні можливості страховика по страхуванню, а також гарантії повної та своєчасної виплати за великим одиночним ризиком досить обмежені.

Рис. 12.1. Схема передачі страхового ризику

Система перестрахування, як і система прямого страхування, побудована на розподілі ризику між декількома учасниками. Це дозволяє прямому страховику, з одного боку, цілком виконати прийняті на себе страхові зобов'язання перед страхувальником, а з іншого, полегшити навантаження за виплатою у будь-якому страховому випадку, зберігаючи при цьому свою фінансову надійність.

Перестрахування це страхування ризику, взятого на себе страховиком.

У перестрахуванні застосовується своя термінологія та відповідні умови страхування.

Цедент страховик, який перестраховує прийняті на себе ризики.

Цидування (цесія) процес передачі ризику або його частини.

Процес подальшої передачі даного ризику наступному перестраховику називається *ретроцесією,* а сторона, яка приймає такий ризик – *ретроцесіонарій.*

При здійсненні перестрахування кожна страхова компанія виходить з того, що даний процес повинен бути економічно ефективним при досягненні поставленої цілі, а також повинен враховувати вартість перестрахування.

Вартість перестрахування включає:

- частину страхової премії, що передасться перестраховику;
- витрати компанії на ведення справи у зв'язку з передачею ризиків.

У самому процесі перестрахування закладене певне протиріччя. З одного боку, перестраховик фінансове підтримуючи страхову компанію, сприяє збалансуванню її страхового портфелю, розширенню її страхової діяльності, з іншого, перестрахування пов'язане з передачею доволі значної частини страхової премії, а значить с можливість погіршення підсумкових показників діяльності страхової компанії.

Виходячи із зазначеного, правильне визначення розміру перестрахування має важливе значення дія кожної страхової компанії. У зв'язку з цим, визначальним є *власне утримання цедента,* яке представляє собою економічно обґрунтований рівень суми, в межах якої страхова компанія утримує на своїй відповідальності певну частку ризиків, які страхує, та передаючи в перестрахування суми, що перевищують даний рівень. Існує багато теорій та практичних рекомендацій по встановленню лімітів власного утримання. Проте вони не враховують специфіки кожної окремої страхової компанії. В рішенні зазначеної проблеми важливим с врахування багатьох факторів (середньої збитковості за ризикам, що страхуються, обсяг премії, середня доходність чи прибутковість операцій по відповідному виду страхування, територіальний розподіл застрахованих об'єктів, величина витрат на ведення страхової справи) та професійний рівень андерайтсрів.

Страховик зобов'язаний передавати у перестрахування частину ризику (своїх зобов'язань перед страхувальником), якщо не буде виконуватися наступна умова

$$S = (A - Y) \cdot 10\% / 100\%, \qquad (12.1)$$

де S – сума, на яку страховик має право укладати договори по заданому виду страхування;

A – величина активів страхувальника;

Y – розмір сплаченого статутного капіталу;

10% – нормальне процентне відношення страхових надходжень до сплаченого статутного капіталу по даному виду страхування.

Теоретичною основою визначення ступеня імовірності дефіцитності коштів виступає коефіцієнт професора Ф.В.Коньшина

$$K = \sqrt{\frac{1-\bar{q}}{n \cdot \bar{q}}}, \qquad (12.2)$$

де K – коефіцієнт Коньшина;

$\bar{q}$ – середня тарифна ставка по всьому страховому портфелю;

n – кількість застрахованих об'єктів.

Чим менше значення K, тим нижче імовірність дефіцитності коштів і тим вище фінансова стійкість страхової компанії.

Для оцінки фінансової стійкості страхового фонду як відношення доходів до витрат за тарифний період, використовується формула

$$K_{фс} = \frac{Д + С_{зф}}{Р}, \qquad (12.3)$$

де $K_{фс}$ – коефіцієнт фінансової стійкості;

$Д$ – сума доходів страхувальника за тарифний період;

$Р$ – сума витрат за тарифний період;

$С_{зф}$ – сума коштів в запасних фондах.

Нормальним станом фінансової стійкості страхової організації варто вважати, якщо $K_{фс}$ більше 1, тобто коли сума доходів з урахуванням залишку коштів в запасних фондах перевищує усі витрати страхувальника.

Передавання ризиків у перестрахування здійснюється постійно або одноразово.

За методом передавання ризиків у перестрахування перестрахувальні операції поділяються на три види:

- факультативні;
- облігаторні (договорні);
- факультативпо-облігаторні.

Факультативні перестрахувальні операції характеризуються певного свободою сторін договору перестрахування, існує можливість регулювання страховиком розміру власного утримання. Попередньо умовою для укладання договору факультативного перестрахування певна інформація про наміри сторін перестрахувальних відносин.

Облігаторне страхування передбачає обов'язкову передачу в перестрахування раніше узгодженої частини ризику за всіма покриттями, визначаються межі відповідальності, перестрахувальна комісія, обмеження щодо покриття. Зазначений метод проведення перестрахування має свої переваги:

- досягнення рівномірності розподілу ризиків;
- автоматичність прийняття ризиків;
- розвиток довгострокових взаємовідносин між сторонами;
- збільшення обсягів страхових операцій;
- гарантії підтримки перестраховика.

Факультативно-облігаторне перестрахування поєднує риси факультативного та облігаторного, використовується в особливо великих, небезпечних ризиках, з можливістю кумуляції збитків та можливими катастрофічними наслідками.

Перерозподіл ризику у перестрахувальних операціях відбувається за двома *формами*:

- пропорційною;
- непропорційною.

Пропорційна форма перестрахування історично перша форма та до кінця XIX ст. єдина загальна форма перерозподілу ризиків. Сторони частково приймають участь у розподілі відповідальності. Інтереси цедента й перестраховика в цілому співпадають. Застосовується при обов'язковому страхуванні відповідальності, при автокаско.

Здійснюється за наступними видами договорів перестрахування:

- *квотний* – коли цедєнт зобов'язується передати перестраховику частку у всіх ризиках даного виду, а перестраховик зобов'язується їх прийняти;

- *ексцедентної суми* – використовується, коли застраховані ризики різні за страховими сумами; цедєнт несе відповідальність за всіма ризиками у розмірі страхової суми, яка менша чи рівна власному утриманню, а перестраховик – за всіма ризиками, де страхова сума перевищує розмір власного утримання;
- *квотно-ексцендентний* – змішаного типу, використовується дуже рідко, поєднує риси двох попередньо зазначених договорів.

Непропорційне перестрахування широко стало застосовуватись після Другої світової війни. Інтереси сторін можуть приймати суперечливий характер. Найчастіше використовується в договорах страхування цивільної відповідальності власників транспортних засобів за збиток, спричинений третім особам в результаті ДТП. Ця форма страхування застосовується також й там, де немає верхньої межі відповідальності страховика. Здійснюється за наступними *видами договорів*:

- ексцедента збитку – застосовується тоді, коли страховик намагається не вирівняти окремі ризиків даного виду страхування, а спрямовує свою діяльність безпосередньо на забезпечення фінансової рівноваги страхових операцій;
- ексцедента збитковості – перестрахування стосується всього страхового портфелю, має на меті захистити фінансові інтереси страховика перед наслідками надто великої збитковості.

Обслуговування договорів непропорційного перестрахування волі просте, не вимагає особливих витрат.

В залежності від ролі, яку відіграє цедєнт і перестраховик в укладеному між ними договорі, перестрахування поділяється на:

- активне – означає передачу ризику;
- пасивне – означає приймання ризику.

Отже, перестрахування – це вторинний розподіл ризику, що відбувається у певній формі та за відповідними методами.

2. ПЕРЕСТРАХУВАННЯ ЯК МЕТОД УПРАВЛІННЯ РИЗИКОМ

Нехай клієнт страхує свій ризик у певній компанії. Позначимо через θ – відносну страхову надбавку, пов'язану із страховою компанією. Нехай θ* – відносна страхова надбавка, пов'язана з договором перестрахування.

Розглянемо перший тип договору: пропорційне перестрахування.

Введемо величину $0 \le \alpha \le 1$.

Нехай ζ – позов клієнта до передавальної компанії. Передавальна компанія частину суми позову ($\alpha\zeta$) оплачує сама, а іншу частину

($(1-\alpha)\zeta$) оплачує перестрахувальна компанія. Нехай α – це граничне значення суми утримання.

Розглянемо ситуацію до перестрахування.

Сумарний позов $S=\sum_{i=1}^{n}\zeta_i$, ймовірність розорення $P(S > U)$. Тоді капітал компанії

$$U = (1 + \theta)p_0 = (1 + \theta)E[S]. \quad (12.4)$$

Розглянемо тепер ситуацію після перестрахування з позиції передавальної компанії.

Сумарний позов дорівнює αS, а капітал

$$\begin{gathered} U = (1 + \theta)E[S] - (1 + \theta^*)(1 - \alpha)\, E[S] = \\ (1 + \theta - 1 - \theta^* + \alpha + \alpha\theta^*)E[S] = \\ = (\theta - \theta^* + \alpha(1 + \theta^*)E[S]). \end{gathered} \quad (12.5)$$

Імовірність розорення дорівнює

$$\begin{gathered} P(\alpha S > (\theta - \theta^* + \alpha(1 + \theta^*)E[S]) = \\ = P(S > (1 + \theta^* + (\theta - \theta^*) / \alpha)E[S]. \end{gathered} \quad (12.6)$$

Перестрахування означає зменшити цю імовірність, тобто потрібно знатйти α таке, при якому вираз $(1 + \theta^* + (\theta - \theta^*) / \alpha)$ набуде максимального значення.

Розглянемо випадки:

- якщо $\theta - \theta^* > 0$ то $\alpha \to 0$ ($\alpha = 0$ граничний випадок) і весь позов передається перестрахувальній компанії;
- якщо $\theta - \theta^* < 0$ тоді $\alpha \to 1$ ($\alpha = 1$ граничний випадок) весь позов залишається в передавальній компанії;
- якщо $\theta = \theta^*$ тоді $0 \le \alpha \le 1$ і імовірність розорення не залежить від α.

Розглянемо тепер другий тип договору: перестрахування перевищення втрат.

Введемо величини: r – граничне значення суми утримання; ζ – індивідуальний позов.

Якщо $\zeta \le r$, то весь позов залишається в передавальній компанії (тобто весь позов задовольняється без перестрахування).

Якщо $\zeta \le r$, то передавальна компанія задовольняє позов на r одиниць, а перестрахувальна компанії – на $(\zeta - r)$ одиниць.

Знайдемо ймовірність розорення у цьому випадку.

Позов $\zeta^{(r)}$ передавальній компанії від клієнта становить $\zeta^{(r)} = \min\{\zeta, r\}$.

Сумарний позов $S^{(r)} = \sum_{i=1}^{n} \zeta_i^{(r)}$.

Індивідуальний позов перестрахувальній компанії становить $\zeta - \zeta^{(r)}$, при цьому $\zeta - \zeta^{(r)} = \max\{0; \zeta - 0\}$.

Капітал перестрахувальної компанії становить

$$\begin{aligned} U &= N(1+\theta)E[\zeta] - N(1+\theta^*)E[\zeta - \zeta^{(r)}] = \\ &= N((\theta - \theta^*)\, E[\zeta] + (1+\theta^*)\, E[\,\zeta^{(r)}]). \end{aligned} \qquad (12.7)$$

Імовірність розорення, використовуючи наближення Гаусса, можна обчислити, як

$$\begin{aligned} &(S^{(r)} > U) = P(S^{(r)} > N((\theta - \theta^*)E[\zeta] + (1+\theta^*)E[\zeta^{(r)}])) = \\ &= P\Big(\frac{S^{(r)} - E[S^{(r)}]}{\sqrt{Var[S^{(r)}]}} > \frac{U - E[S^{(r)}]}{\sqrt{Var[S^{(r)}]}}\Big) = \gamma = 1 - \Phi\Big(\frac{U - NE[\zeta^{(r)}]}{\sqrt{NVar[\zeta^{(r)}]}}\Big), \end{aligned} \qquad (12.8)$$

де $E[S^{(r)}] = NE[\zeta^{(r)}]$, $Var[S^{(r)}] = NVar[\zeta^{(r)}]$.

Задача полягає в тому, щоб мінімізувати значення імовірності розорення компанії, тому вираз, що є аргументом функції Φ повинен набувати максимального значення.

Введемо функцію, для якої потрібно знайти максимум

$$\varphi(r) = \frac{U - NE[\zeta^{(r)}]}{\sqrt{NVar[\zeta^{(r)}]}} = \frac{N(\vartheta - \vartheta^*)(E[\zeta] + \vartheta^* E[\zeta^{(r)}])}{\sqrt{NVar[\zeta^{(r)}]}}. \qquad (12.9)$$

Для того, щоб мінімізувати імовірність розорення, потрібно знайти r за умови максимуму функції $\varphi(r) \to \max$, $0 < r < +\infty$. За цієї умови знайдемо необхідне граничне значення суми утримання.

Якщо виявиться, що максимум досягається в нулі, то весь позов потрібно передати перестрахувальній компанії, якщо ж максимум досягається на нескінченності, тоді весь позов залишається в передавальній компанії.

3. ДИВЕРСИФІКАЦІЯ РИЗИКІВ ЗА ДОПОМОГОЮ ПЕРЕСТРАХУВАННЯ

На діяльність будь-якого суб'єкта господарювання впливають певні ризики. Ризик виникає тоді, коли рішення вибирається з декількох можливих варіантів і немає впевненості, що воно найефективніше. Щоб знизити рівень ризиків та компенсувати заподіяний збиток, використовують наступні методи управління ризиками: уникнення ризиків, мінімізація ризиків, лімітування ризиків по операціях або диверсифікація ризиків.

Диверсифікація ризиків дозволяє знизити рівень концентрації ризиків. Диверсифікація видів діяльності передбачає використання альтернативних можливостей отримання доходу і прибутку від різноманітних фінансових операцій.

Одним з основних принципів роботи страхової компанії є диверсифікації ризиків, яка передбачає те, що страховик не повинен включати у страховий портфель ризики лише одного виду, або здійснювати перестрахування ризиків лише в одній страховій компанії. Припустимо, W_0 – загальний рівень ризику, взятого на страхування, який визначається

$$W_0 = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_lp_l, \qquad (12.10)$$

де l – вид ризику;
x_l – кількість договорів перестрахування l-го виду;
$p_k, k = 1 \div l$ – рівень ризику k-го виду.

Якщо поділити ліву та праву частини рівняння (12.10) на W_0, отримаємо $1 = \frac{x_1 p_1}{W_0} + \frac{x_2 p_2}{W_0} + \ldots + \frac{x_l p_l}{W_0}$. Позначимо частку договорів перестрахування k-го виду $\frac{x_k p_k}{W_0}$ через $W_k, (k = 1 \div l)$. Необхідно знайти $W_k, (k = 1 \div l)$, яке мінімізує ризик портфелю $\sigma^2_{портф}$ страхової компанії при умові, що $\sum_{k=1}^{l} W_k = 1$ та існує середнє значення доходності $MR_{портф}$.

Для визначення стохастичних процентних ставок звернемось до моделі Васічека, в якій короткострокова процентна ставка визначається рівнянням

$$dr(t) = a - br(t)dt + \sigma dW(t), \tag{12.11}$$

де $[t, T]$ – інтервал часу,

$r(t) = r$ – короткострокова процента ставка,

a, $a > 0$ – довгострокове середнє значення спот-ставки;

b, $b > 0$ – параметр дрейфа (характеризує швидкість повернення процесу до довгострокового середнього значення);

σ – параметр дисперсії;

$dW(t)$ – вектор прирощення q-мірного стандартного вінерівського процесу. Вінерівський процес – приклад марківського процесу, тобто процесу, значення якого в даний момент t повністю визначає його майбутню поведінку незалежно від минулого.

Нехай рівень ризику описується моделлю виду

$$P(t, T) = \exp\{\alpha(t, T) - r(t)\beta(t, T)\},\ t \in [t, T], \tag{12.12}$$

де функції $\alpha(t, T)$, $\beta(t, T)$ – стохастичні процентні ставки за договорами перестрахування, що задаються моделлю Васічека.

$\alpha(t, T)$, $\beta(t, T)$ визначаються формулами

$$\alpha(t,T) = \left(b - \frac{\sigma^2}{2a^2}\right)\left(\beta(t,T) - (T-t)\right) - \frac{\sigma^2\beta^2(t,T)}{4a}, \tag{12.13}$$

та

$$\beta(t,T) = \frac{1}{b}(1 - e^{-b(T-t)}). \tag{12.14}$$

Середнє значення процентної ставки визначається формулою

$$Mr(t) = \exp(-bt)\left[r(0) + \frac{a}{b}(\exp(bt) - 1)\right]. \tag{12.15}$$

Дисперсія визначається формулою

$$Dr(t) = \exp(-2bt)c^2 D(\int_0^t \exp(bt)W(t)) = \exp(-2bt)c^2\frac{1}{2b}(r^{2bt} - 1). \tag{12.16}$$

Доходність договору перестрахування визначається формулою

$$i(t) = \frac{g(t)N + P(t) - P_0}{P_0}, \qquad (12.17)$$

де $g(t)$ – норма річного доходу від перестрахування ризиків,

P_0 – початковий рівень ризику, переданого у перестрахування,

N – страхова сума за переданим у перестрахуванням договором.

Після перетворень отримаємо доходність договору перестрахування

$$i(t) = \frac{g(t)N}{P_0} + \frac{1}{P_0}\exp(\alpha - \beta r(t)) - 1, \forall t \in [0, T]. \qquad (12.18)$$

Середня доходність договору перестрахування буде дорівнювати

$$Mi = \frac{gN}{P_0} + \frac{e^{\alpha}}{P_0} Me^{-\beta r(t)} - 1 = \frac{gN}{P_0} + \frac{e^{\alpha}}{P_0} Me^{-\beta\left(\frac{r - Mr}{\sqrt{Dr}}\sqrt{Dr} + Mr\right)} - 1 = \frac{gN}{P_0} + \frac{e^{\alpha - \beta Mr + \frac{\beta^2 Dr}{2}}}{P_0}. \qquad (12.19)$$

А середня дохідність портфеля буде дорівнювати

$$MR_{портф} = \sum_{j=1}^{l} W_j Mi_j, \qquad (12.20)$$

де i_j – дохідність договору перестрахування j-го виду, а очікуваний ризик:

$$\sigma^2_{портф} = \sum_{k=1}^{l}\sum_{m=1}^{l} W_k W_m \operatorname{cov}(i_k; i_m). \qquad (12.21)$$

Коваріація випадкових величин i_k, i_m розраховується за формулою

$$\operatorname{cov}(i_k; i_m) = M(i_k; i_m) - Mi_k Mi_m. \qquad (12.22)$$

Задача вибору оптимальної структури портфеля, тобто вибору оптимального вектору $(W_1^*;W_2^*;...;W_l^*)$, зводиться до находження значень $W_j\,(j=1\div l)$, що мінімізують ризик портфеля, якщо $\sum_{k=1}^{l} W_k = 1$.

Рішення цієї задачі можна знайти методом множників Лагранжа. Перепишемо середню доходність та ризик в матричній формі

$$\sigma^2_{портф} = W^T \cdot v \cdot W, \qquad MR_{портф} = m^T \cdot W, \tag{12.23}$$

де W – стовбчик невідомих часток $W_j\,(j=1\div l), v=\mathrm{cov}(i_k;i_m)$ – матриця коваріацій,

m – стовбчик, що складається з $M(i_j),(j=1\div l)$.

Функція Лагранжа має вигляд

$$L = W^T VW + \mu_0(I^T W - 1) + \mu_1(m^T W - MR), \tag{12.24}$$

$$L = W^T VW + \mu_0(I^T W - 1) + \mu_1(m^T W - MR),$$

де I – одинична матриця-стовбчик.

Оптимальний набір часток $(W_1^*;W_2^*;...;W_l^*)$ визначається за формулою

$$W^* = V^{-1}\frac{R(I(I^TV^{-1}m) - m(I^TV^{-1}I)) + m(I^TV^{-1}m) - I(m^TV^{-1}m)}{(I^TV^{-1}m)^2 - (I^TV^{-1}I)(m^TV^{-1}m)}. \tag{12.25}$$

Таким чином, страховику необхідно укладати $X_k = \frac{W_k^* W_0}{P_k}$ договорів перестрахування k-го виду $(k=1\div l)$.

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. Дайте визначення поняття «перестрахування».
2. Охарактеризуйте схему передачі страхового ризику.
3. Поняття цесії та ретроцесії.
4. Складові вартості перестрахування.
5. Види операцій перестрахування за методом передавання ризиків.
6. Пропорційна та непропорційна форми перерозподілу ризику.
7. Активне та пасивне перестрахування.

8. Формула визначення доходності договору перестрахування.
9. Формули визначення середньої дохідності договору перестрахування та портфеля.

ТЕСТИ

1. Перестрахування – це:
   а) страхування ризику, взятого на себе страховиком;
   б) страхування ризику, взятого на себе перестраховиком;
   в) страхування ризику, взятого на себе співстрахувальником;
   г) економічний механізм перерозподілу ризиків.

2. Вибрати правильні твердження:
   а) цедент – сторона, яка приймає ризик при перестрахуванні;
   б) цесія – процес передачі ризику або його частини;
   в) ретроцесія – процес подальшої передачі даного ризику наступному перестраховику;
   г) ретроцесіонарій – страховик, який перестраховує прийняті на себе ризики.

3. Теоретичною основою визначення ступеня імовірності дефіцитності коштів виступає:
   а) коефіцієнт професора Ф.В.Коньшина;
   б) сума, на яку страховик має право укладати договори по заданому виду страхування;
   в) коефіцієнт фінансової стійкості;
   г) сума коштів в запасних фондах.

4. Вибрати правильну відповідь:
   а) факультативне перестрахування – використовується в особливо великих, небезпечних ризиках, з можливістю кумуляції збитків та можливими катастрофічними наслідками;
   б) облігаторне перестрахування – передбачає обов'язкову передачу в перестрахування раніше узгодженої частини ризику за всіма покриттями, визначаються межі відповідальності, перестрахувальна комісія, обмеження щодо покриття;
   в) факультативно-облігаторне перестрахування – характеризуються певного свободою сторін договору перестрахування, існує можливість регулювання страховиком розміру власного утримання.

5. Видами пропорційної форми перестрахування виступають:
   а) квотний;
   б) ексцедеитаї суми;
   в) квотно-ексцендентний;
   г) ексцедента збитку;
   д) ексцедента збитковості.
6. Формула $MR_{портф} = \sum_{j=1}^{l} W_j Mi_j$ описує:
   а) середня дохідність портфеля;
   б) очікуваний ризик;
   в) оптимальний набір часток перестрахування;
   г) доходність договору перестрахування.

7. Формула
   $W^* = V^{-1} \dfrac{R(I(I^T V^{-1} m) - m(I^T V^{-1} I)) + m(I^T V^{-1} m) - I(m^T V^{-1} m)}{(I^T V^{-1} m)^2 - (I^T V^{-1} I)(m^T V^{-1} m)}$ описує:
   а) середня дохідність портфеля;
   б) очікуваний ризик;
   в) оптимальний набір часток перестрахування;
   г) доходність договору перестрахування.

8. Формула $U = (1 + \theta)E[S] - (1 + \theta^*)(1 - \alpha) E[S] =$
   $= (1 + \theta - 1 - \theta^* + \alpha + \alpha\theta^*)E[S] = (\theta - \theta^* + \alpha(1 + \theta^*)E[S])$ описує:
   а) сумарний позов;
   б) імовірність розорення;
   в) капітал компанії;
   г) граничне значення суми утримання.

9. Весь позов передається перестрахувальній компанії, коли:
   а) відносна страхову надбавка, пов'язану із страховою компанією, більше відносної страхової надбавки, пов'язана з договором перестрахування;
   б) відносна страхову надбавка, пов'язану із страховою компанією, менше відносної страхової надбавки, пов'язана з договором перестрахування;
   в) відносна страхову надбавка, пов'язану із страховою компанією, дорівнює відносній страховій надбавці, пов'язаній з договором перестрахування.

10.Визначити правильну відповідь:

а) активне перестрахування – означає передачу ризику;

б) пасивне перестрахування – означає приймання ризику.

Тема 13. МОДЕЛІ РІВНОВАГИ УЧАСНИКІВ СВІТОВОГО РИНКУ

1. АНАЛІЗ РІВНОВАГИ ОСОБИ, ЯКА СТРАХУЄТЬСЯ

   Математична модель клієнта. Рівновага клієнта страхової компанії

2. АНАЛІЗ ТАКТИКИ СТРАХОВОЇ КОМПАНІЇ

   Прибуток страхової компанії та його корисність. Нейтральність до ризику страхової компанії. Умови прибутковості страхової компанії

1. АНАЛІЗ РІВНОВАГИ ОСОБИ, ЯКА СТРАХУЄТЬСЯ

Математична модель клієнта.

Нагадаємо запроваджені позначення: A – грошова оцінка об’єкта страхування; π – імовірність страхового випадку; r– питомий страховий внесок (плата страховій компанії за кожну одиницю застрахованого майна); q – питома страхова винагорода (відшкодування страховою компанією в розрахунку на кожну одиницю застрахованого активу).

Додатково позначимо через x – величину страхованого активу (її обирає клієнт страхової компанії); $u(x)$ – функцію корисності клієнта, визначену на залишку активу після страхового випадку.

Якщо трапиться страховий випадок, то страхова компанія відшкодовує клієнтові величину qx. Для спрощення аналізу вважатимемо також, що компанія повертає клієнтові і його страховий платіж. Отже, якщо клієнт застрахував x одиниць активу і настав страховий випадок, то у клієнта залишається qx. За решту компанія відповідальності не несе. Якщо ж страхового випадку не буде, то залишок активу становитиме величину $(A – qx)$.

Корисність у разі страхового випадку складе величину $u(qx)$, в протилежному разі – $u(A – qx)$. Сподівана корисність за обсягу страхування x дорівнюватиме величині $U(x) = \pi u(qx) + (1 – \pi)u(A – rx)$. Поведінка клієнта описуватиметься моделлю

$$U(x) = \pi u(qx) + (1 - \pi)u(A - rx) \to \max,\ 0 \le x \le A. \qquad (13.1)$$

Рівновага клієнта страхової компанії.

Дотримуватимемося припущення про несхильність клієнта страхової компанії до ризику, тобто про увігнутість його функції корисності. Звідси, сподівана корисність також буде увігнутою функцією (це ілюструє рис. 13.1),

Можливі три випадки:

- клієнт не страхується взагалі;
- клієнт страхує об’єкт страхування, але не повністю;
- клієнт страхує ввесь обсяг об’єкта страхування.

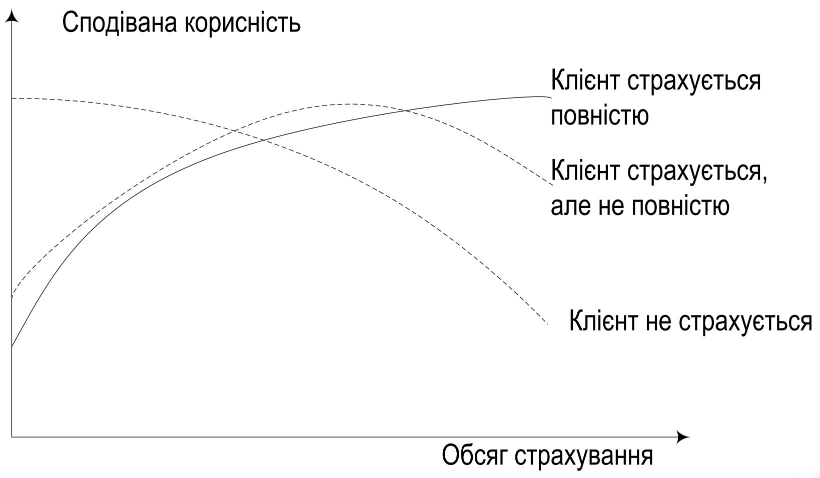


Рис. 13.1. Три випадки поведінки клієнта страхової компанії

Використовуючи похідну функції сподіваної корисності (1), усі три випадки можна повністю описати:

- якщо $u'(A) > 0$, то клієнт страхується повністю;
- якщо $u'(0) < 0$, то клієнт не страхується взагалі;
- якщо $u'(0) > 0$, а $u'(A) > 0$, то обсяг рівноваги x знаходиться з рівняння $u'(x^*) = 0$.

Припускаючи диференційованість функції корисності й здобувши похідну $u'(x) = \pi u'(qx)q - (1-\pi)u'(A-rx)r$, можна повністю кваліфікувати рівновагу клієнта страхової компанії. Отже,

Умови рівноваги:

- якщо $\dfrac{u'(qA)}{u'((1-r)A)} > \dfrac{1-\pi}{\pi}\dfrac{r}{q}$, то клієнт страхується повністю:
- якщо $\dfrac{u'(0)}{u'(A)} < \dfrac{1-\pi}{\pi}\dfrac{r}{q}$,то клієнту страхуватися взагалі не вигідно;
- якщо ж $\dfrac{u'(qA)}{u'((1-r)A)} < \dfrac{1-\pi}{\pi}\dfrac{r}{q} < \dfrac{u'(0)}{u'(A)}$, то клієнт страхує частку, але не весь об'єкт страхування, причому обсяг страхування, що максимізує його сподівану корисність, знаходиться з рівняння (рівність похідної сподіваної корисності нулю)

$$\pi u'(qx)q = (1-\pi)u'(A-rx)r\,. \qquad (13.2)$$

Рівняння (13.2) допускає таке його читання: у стані рівноваги гранична корисність страхування в разі страхового випадку, перемножена на його ймовірність, збігається з граничною шкодою від страхування за відсутності страхового випадку, перемноженою на його ймовірність.

Отже, клієнт балансує величинами граничної шкоди і граничної корисності для визначення найпривабливішого для себе обсягу страхування, враховуючи при цьому імовірність страхового випадку.

Аналогічно можна інтерпретувати першу та другу умови.

Умови рівноваги клієнта страхової компанії дають змогу дослідити реакцію клієнта на зміну параметрів страхування (в додаток до чисельного аналізу). Звернемося, наприклад, до другої умови. З неї випливає, що при зростанні ймовірності страхового випадку π нерівність умови може порушитись, що свідчитиме про вигідність страхування.

2. АНАЛІЗ ТАКТИКИ СТРАХОВОЇ КОМПАНІЇ

Прибуток страхової компанії та його корисність.

Прибуток страхової компанії — це різниця між страховими внесками клієнтів і їхніми винагородами в разі настання страхових випадків.

Звідси, прибуток страхової компанії є випадковою величиною, оскільки кожен клієнт може як збільшувати, так і зменшувати прибуток страхової компанії залежно від того, трапився чи ні страховий випадок.

Позначимо через s індекс клієнта страхової компанії, їхню кількість позначимо через N. Запровадимо спеціальну випадкову величину I_s – індекс страхового випадку клієнта s. I_s дорівнює 1, якщо настає страховий випадок для клієнта s, і – 0 у протилежному випадку. Тоді прибуток страхової компанії складе величину

$$\sum_{s=1}^{N}\left[rI_s-(q-r)(1-I_s)\right]x_s(r,q), \tag{13.3}$$

де $x_5(r, q)$ – обсяг страхування клієнта s за питомих страхового внеску r та страхової винагороди q.

Виходитимемо з того, що страхова компанія прагне до максимізації сподіваної корисності прибутку й обирає параметри страхування r, q саме з цих міркувань. Якщо через v; позначити функцію корисності прибутку страхової компанії, то сподівана корисність прибутку дорівнюватиме

$$V(r,q)=Mv\left(\sum_{s=1}^{N}\left[rI_s-(q-r)(1-I_s)\right]x_s(r,q)\right). \qquad (13.4)$$

Метою страхової компанії є підбір параметрів страхування таким чином, щоб максимізувати сподівану корисність прибутку.

Ця задача – досить складна. Можна сказати напевно лише одне: для знаходження параметрів страхування з боку страхової фірми потрібна «золота середина». Перший імпульс, який може виникнути в недосвідченого менеджера страхової компанії – зменшення страхової винагороди q та збільшення страхового внеску r. Цей шлях може спричинити небезпеку залишитися без клієнтів узагалі і збанкрутувати.

Водночас, завелика страхова винагорода та замалий страховий внесок можуть призвести також до банкрутства компанії, оскільки сумарна страхова винагорода може перевищити сумарний страховий внесок. Потрібен розрахунок.

Нейтральність до ризику страхової компанії.

Основне припущення, якого ми дотримуватимемось, – це припущення про *нейтральність до ризику страхової компанії.* Для забезпечення своєї нейтральності до ризику компанія повинна мати солідний капітал.

За умови нейтральності до ризику функція корисності компанії буде лінійною, а сподівана корисність просто збігатиметься з математичним сподіванням прибутку страхової компанії. У страховому випадку компанія повертає клієнтові на кожну одиницю страхованого об’єкта страхову винагороду й страховий платіж, тобто $r + q$, а за відсутності – отримає від клієнта страховий платіж. Надалі будемо вважати, що страхова компанія має монопольну владу, тобто вона надає унікальні послуги, або до інших компаній незручно звертатись. Отже, сподіване значення прибутку в розрахунку на одного клієнта складе величину: $(\pi_s(-r-q)+(1-\pi_s)r)x_s(r,q)$. Якщо припускати, що всі клієнти однакові, а компанія відшкодовує клієнтові всі збитки у разі страхового випадку $q = 1$, то сподіване значення прибутку компанії може бути записане в такому вигляді

$$N((1-\pi)r-\pi(1+r))x(r). \qquad (13.5)$$

Задача знаходження максимуму сподіваного прибутку (3) наочно демонструє дилему, що виникає перед страховою компанією: (3) є добутком співмножників, один з яких $((1-\pi)r-\pi(1+r))$ збільшується за жорсткіших правил страхування (більший питомий страховий внесок), інший $x(r)$ – зменшується.

Умови прибутковості страхової компанії.

Випишемо умови, за яких страхова компанія в середньому буде прибутковою. Розглянемо випадок, коли страхова компанія повністю відшкодовує збитки клієнта, тобто $q = 1$. Сподіваний прибуток компанії в розрахунку на одного клієнта у цьому випадку становитиме величину

$$((1 - \pi)r - \pi(x(r)). \tag{13.6}$$

Як і раніше, дотримуватимемося припущення, що всі клієнти страхової компанії однакові. Отже, за певних умов страхування вони всі гуртом страхуватимуться в однакових обсягах або взагалі ухилятимуться від страхування. Це дає змогу розглядати питання про прибутковість страхової компанії з погляду взаємовідносин компанії та одного клієнта.

З формули (13.6) випливає, що страхова компанія буде прибутковою (в середньому), якщо одночасно виконуються дві умови:

1) клієнт страхує хоча б частку свого активу, тобто

$$x(r) > 0, \tag{13.7}$$

2) сподіваний страховий платіж клієнта компанії перевищує сподівану страхову компенсацію компанії клієнтові, тобто

$$(1 - \pi)r > \pi. \tag{13.8}$$

Поєднуючи формули (13.7), (13.8) та умови рівноваги, можна отримати, що за умови повного відшкодування всіх збитків клієнта внаслідок страхового випадку страхова фірма буде прибутковою, якщо

$$1 < \frac{1-\pi}{\pi} r < \frac{u'(0)}{u'(A)}. \tag{13.9}$$

Проведений нами аналіз базувався на істотних спрощеннях, зокрема, на припущенні, що всі клієнти однакові. Зберігаючи основну схему розрахунків, її можна застосувати для більш загального випадку, зокрема, коли є кілька груп клієнтів з різним ставленням до ризику.

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. Модель поведінки клієнта.
2. Характеристика випадків поведінки клієнта страхової компанії.
3. Які умови рівноваги моделі поведінки клієнта?
4. Дайте визначення поняття «прибуток страхової компанії».
5. Нейтральність до ризику страхової компанії.
6. Умови прибутковості страхової компанії.

ТЕСТИ

1. Модель $U(x) = \pi u(qx) + (1 - \pi)u(A - rx) \to \max,\ 0 \le x \le A$ описує поведінку:
   а) клієнта страхової компанії;
   б) страхової компанії;
   в) компанії перестраховика.

2. Співвідношення $\dfrac{u'(qA)}{u'((1-r)A)} < \dfrac{1-\pi}{\pi}\dfrac{r}{q} < \dfrac{u'(0)}{u'(A)}$ описує умови рівноваги клієнта страхової компанії у випадку:
   а) клієнт страхується повністю;
   б) клієнту страхуватися взагалі не вигідно;
   в) клієнт страхує частку, але не весь об’єкт страхування.

3. Чи вірне наведене твердження: у стані рівноваги гранична корисність страхування в разі страхового випадку, перемножена на його ймовірність, збігається з граничною шкодою від страхування за відсутності страхового випадку, перемноженою на його ймовірність:
   а) так;
   б) ні.

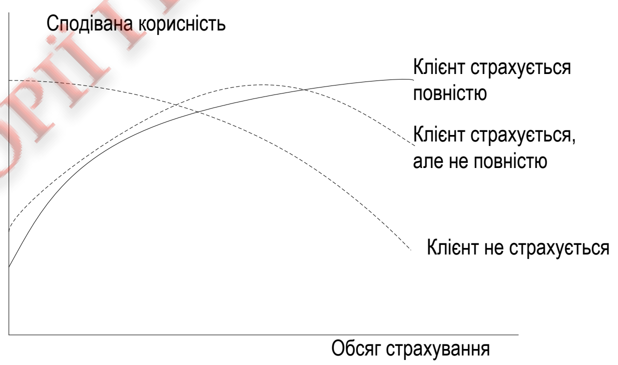
4. Співвідношення $Mv(\sum_{s=1}^{N}[rI_s - (q-r)(1-I_s)]x_s(r,q))$ за умови аналізу тактики страхової компанії описує:
   а) індекс страхового випадку клієнта;
   б) прибуток страхової компанії;
   в) сподівана корисність прибутку страхової компанії;
   г) обсяг страхування клієнта страхової компанії.

5. Співвідношення $\sum_{s=1}^{N}\left[rI_s-(q-r)(1-I_s)\right]x_s(r,q)$ за умови аналізу тактики страхової компанії описує:
   а) індекс страхового випадку клієнта;
   б) прибуток страхової компанії;
   в) сподівана корисність прибутку страхової компанії;
   г) обсяг страхування клієнта страхової компанії.

6. Вибрати правильні твердження за умови нейтральності до ризику страхової компанії:
   а) функція корисності компанії лінійна;
   б) сподівана корисність збігається з математичним сподіванням прибутку страхової компанії;
   в) сподівана корисність збігається з математичним сподіванням страхових платежів страхової компанії.

7. Умовами прибутковості страхової компанії виступають:
   а) клієнт страхує хоча б частку свого активу;
   б) сподіваний страховий платіж клієнта компанії перевищує сподівану страхову компенсацію компанії клієнтові;
   в) клієнт страхує хоча б частку свого активу; сподіваний страховий платіж клієнта компанії перевищує сподівану страхову компенсацію компанії клієнтові.

8. На рисунку приведені випадки поведінки клієнта страхової компанії:



   а) клієнт страхує весь обсяг об'єкта страхування; клієнт страхує об'єкт страхування, але не повністю; клієнт не страхується взагалі;
   б) клієнт страхує об'єкт страхування, але не повністю; клієнт страхує весь обсяг об'єкта страхування; клієнт не страхується взагалі;

   в) клієнт не страхується взагалі; клієнт страхує весь обсяг об’єкта страхування; клієнт страхує об’єкт страхування, але не повністю.

9. Співвідношення $\dfrac{u'(qA)}{u'((1-r)A)} > \dfrac{1-\pi}{\pi}\dfrac{r}{q}$ описує умови рівноваги клієнта страхової компанії у випадку:
   а) клієнт страхується повністю;
   б) клієнту страхуватися взагалі не вигідно;
   в) клієнт страхує частку, але не весь об’єкт страхування.

10. Вибрати правильні твердження за умови нейтральності до ризику страхової компанії:
   а) за відсутності страхового випадку страхова компанія отримує від клієнта страховий платіж;
   б) страхова компанія має монопольну владу;
   в) у страховому випадку компанія повертає клієнтові на кожну одиницю страхованого об’єкта страхову винагороду й страховий платіж.

1. СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Абрамов В. Ю. Страхование : теория и практика / Абрамов В. Ю. − М. : Волтерс Клувер, 2007. − 512 с.
2. Агеев Ш. Р. Страхование : теория, практика и зарубежный опыт / Агеев Ш. Р., Васильев Н. М., Катырин С. Н. − М. : Экспертное бюро, 1998. − 376 с.
3. Александрова М. М. Страхування : навч.-метод. посіб. – К. : ЦУЛ, 2002 – 208 с.
4. Архипов А. П. Основы страхового дела : учеб. пособ. / А. П. Архипов, В. Б. Гомеля. − М. : «Маркет ДС», 2002. − 402 с.
5. Архипов А. П. Страхование. Современный курс : учебник / А. П. Архипов, В. Б. Гомелля, Д. С. Туленты : под ред. Е. В. Коломина. − М. : Финансы и статистика, 2007. – 416 с.
6. Архипов А. П. Страховое дело : учеб-метод. комплекс. / А. П. Архипов, А. С. Адонин – М. : Изд. центр ЕАОИ, 2008. − 424 с.
7. Базилевич В. Д. Страхова справа / В. Д. Базилевич, К. С. Базилевич. – К. : Товариство "Знання", КОО, 1997. – 216 с.
8. Базилевич В. Д. Страховий ринок України. – К. : Товариство "Знання", КОО, 1998. – 374 с.
9. Базилевич В. Д. Страхування: підручник / за ред. В. Д. Базилевича. – К. : Знання, 2008. – 1019 с.
10. Балабанов И. Т. Страхование / Балабанов И. Т., Балабанов А. И. – СПб. : Питер, 2002. – 256 с.
11. Бігдаш В. Д. Страхування : навч. посіб. [для студ. вищ. навч. закл.] / Бігдаш В. Д. – К. : МАУП, 2006. – 448 с.
12. Бланд Д. Страхование : принципы и практика : учеб. пособ. : пер. с англ / Финансовая академия при правительстве РФ ; сост. Д. Бланд. – М. : Финансы и статистика, 2000. – 416 с.
13. Бойко А. О. Ідентифікація фінансових потоків страхової компанії / А. О. Бойко // Збірник наукових праць Донецького державного університету управління, том 11. Серія «Економіка». – Випуск 176 «Фінансово-банківські механізми державного управління економікою України». – Донецьк, 2010. – С. 377–388.
14. Бойко А. О. Перестрахування як необхідний фактор забезпечення платоспроможності страхової компанії / А. О. Бойко // ІІ Міжнародна науково-практична конференція «Якість економічного розвитку: глобальні та локальні аспекти»: Збірник наукових праць (27-28

серпня 2009 р., м. Дніпропетровськ). – Дніпропетровськ ПДАБА, 2009. – С. 52–54.
15. Бойко А. О. Сучасні тенденції розвитку ринку перестрахування в Україні / А. О. Бойко // Актуальные проблемы и перспективы развития экономики Украины : сборник тезисов выступлений VIII Международной научно-практической конференции (1-3 октября 2009 р.) / Таврический Национальный Университет им. Вернадского В.И. – Алушта, 2009. – С. 114–115.
16. Бойко А. О. Теоретичні основи та практичний досвід забезпечення фінансової стійкості страхової компанії / А. О. Бойко // Економічні науки. Серія «Облік і фінанси» Збірник наукових праць. Луцький національний технічний університет. – Випуск 7(25). – Ч. 4. – Луцьк, 2010. – С. 36–49.
17. Бойко А. О. Управління перестраховими операціями при здійсненні ризикових та лайфових видів страхування / А. О. Бойко, О. О. Капшук // Современные проблеми управления производством тезисы докладов IV Междунар. н.-пр. конф., г. Донецк, ДонНТУ, 22-23 октября 2009 г. – Донецк: ГВУЗ «ДонНТУ», 2009. – С. 200–203.
18. Бойко А. О. Формалізації впливу перестрахування на рівень платоспроможності страхової компанії / А. О. Бойко // Всеукраїнський науково-виробничий журнал Інноваційна економіка. – 2011. – № 20. – С. 226–230.
19. Борисова В. А. Організаційно-економічний механізм страхування / В. А. Борисова, О. В. Огаренко – Суми : Видавництво "Довкілля", 2001. – 194 с.
20. Василенко А. В. Інвестиційна стратегія страхових компаній : навч. посіб. / А. В. Василенко. – К. : КНЕУ, 2006. – 168 с.
21. Василишин Р. Д. Економічні основи страхування / Р. Д. Василишин, О. Л. Кашенко, В. А. Борисова; за ред. д.е.н., проф. А.В. Чупіса – Суми : Видавництво «Довкілля», 2001. – 412 с.
22. Вітлінський В. В. Економічний ризик : ігрові моделі: Навч. посібник / В. В. Вітлінський, П. І. Верченко, А. В. Сігал, Я. С. Наконечний; За ред. д-ра екон. наук, проф. В. В. Вітлінського. – К. : КНЕУ , 2002. – 446 с.
23. Внукова Н. М. Страхування : теорія та практика : навч.-метод. посіб. / Н. М. Внукова, В. І. Успаленко, Л. В. Єременко та ін.; за ред. проф. Внукової Н. М. – Харків; Бурун Книга, 2004. – 376 с.
24. Вовчак О. Д. Страхування : навчальний посібник / О. Д. Вовчак. – 3-тє вид. – Львів : Новий Світ-2000, 2006. – 480 с.

25.Гаманкова О. О. Ринок страхових послуг України: теорія, методологія, практика : монографія / О. О. Гаманкова. – К. : КНЕУ, 2009. – 283 с.
26.Гаманкова О. О. Фінанси страхових організацій : навч. посіб. / О. О. Гаманкова. – К. : КНЕУ, 2007. – 328 с.
27.Гаманкова О. О. Фінансова стійкість та платоспроможність страхової організації / О. О. Гаманкова // Вісник Київського національного університету ім. Тараса Шевченка. Серія «Економіка». – К : КНЕУ, 2007. – Вип. 94–95. – С. 18–23.
28.Гвозденко А. А. Основы страхования : учебник / Гвозденко А. А. – М. : Финансы и статистика, 1998. – 304 с.
29.Гвозденко А. А. Страхование : ученик / Гвозденко А. А. – М. : ТК Велби, Изд-во Проспект, 2006. – 464 с.
30.Гинзбург А. И. Страхование : учебное пособие / Гинзбург А. И. – СПб. : Питер, 2002. – 176 с.
31.Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика / Гмурман В. Е. – М. : Высшая школа, 1998. – 479 с.
32.Гомелля В. Б. Страхование : учеб. пособие / В. Б. Гомеля. – 2-е изд. перераб. и доп. – М. : „Маркет ДС Корпорейшн", 2006. – 488 с.
33.Горбач Л. М. Страхова справа: навч. посібник – 2-ге вид., виправлене. – К. : Кондор, 2003. – 252 с.
34.Граве К. А. Страхование / К. А. Граве, Л. А. Лунц. – М. : Госюриздат, 1960. – 175 с.
35.Грищенко Н. Б. Основы страховой деятельности : учебное пособие. Барнаул : Изд-во Алт. ун-та, 2001. – 274 с.
36.Дедиков С. В. Факторы оценки надежности перестраховых компаний на российском страховом рынке / С. В. Дедиков, А. А. Шумилин // Финансы. – 2007. – № 1. – С. 48–51.
37.Дмитров С. О. Моделювання оцінки операційного ризику комерційного банку : монографія / О. С. Дмитрова, К. Г. Гончарова, О. В. Меренкова, А. О. Бойко та ін.; під загальною редакцією за заг. ред. С. О.Дмитрова. – Суми: ДВНЗ «УАБС НБУ», 2010. – 264 с.
38.Дубовик В. П. Вища математика : навч. посіб. / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – К. : А.С.К., 2001. – 648 с.
39.Дьячкова Ю. М. Страхування : навч. посіб. / Ю. М. Дьячкова. – К. : Центр учбової літератури, 2008. – 240 с.
40.Ермакова С. М. Математические методы в социально-экономических исследованиях : сборник научных статей / под ред. проф. С. М. Ермакова и д-ра физ.-мат. наук В. Б. Меласа. – Санкт-Петербург, ТОО ТК «Петрополис», 1996. – С.8-33.

41. Ермасов С. В. Страхование : учебник / С. В. Ермасов, Н. Б. Ермасова – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Высшее образование, 2008. – 613 с.
42. Єпіфанов А. О. Страхування : навч. посіб. / А. О. Єпіфанов, В. В. Коваленко – Суми : Видавництво «Слобожанщина», 1997. – 96 с.
43. Єрмошенко А. М. Нова політика у сфері платоспроможності страхових компаній Європейського співтовариства / А. М. Єрмошенко, В. В. Поплавська // Фінанси України. – 2007. – № 11. – С 103–109.
44. Жеребко А. Э. Совершенствование финансового менеджмента рисковых видов страхования / А. Э. Жеребко. – М. : Анкил, 2003. – 128 с.
45. Заруба О. Д. Страхова справа : підручник. К. : Товариство "Знання", КОО, 1998. – 321 с.
46. Зміни до правил розміщення страхових резервів із страхування життя Розпорядження Державної комісії з регулювання ринків фінансових послуг від 23.07.2009 № 576 [Електронний ресурс]. – Режим доступу : http://www.dfp.gov.ua/217.html?&tx_ttnews[tt_news]=11097&tx_ttnews[backPid]=64&cHash=a608ce9dad
47. Зміни до правил формування, обліку та розміщення страхових резервів за видами страхування, іншими, ніж страхування життя Розпорядження Державної комісії з регулювання ринків фінансових послуг від 14.12.2005 № 5117 [Електронний ресурс]. – Режим доступу : http://zakon.rada.gov.ua/cgi-bin/laws/main.cgi?nreg=z1541-05
48. Зміни до правил формування, обліку та розміщення страхових резервів за видами страхування, іншими, ніж страхування життя, затверджених розпорядженням Держфінпослуг від 17.12.2004 № 3104 [Електронний ресурс]. – Режим доступу : http://www.dfp.gov.ua/217. html?&tx_ ttnews[pointer]=37&tx_ttnews [tt_news]=2829&tx_ttnews[backPid]=792&cHash= 33681c3712
49. Зміни до правил формування, обліку та розміщення страхових резервів за видами страхування, іншими, ніж страхування життя Розпорядження Державної комісії з регулювання ринків фінансових послуг від 07.08.2007 р. № 7791 [Електронний ресурс]. – Режим доступу : http://www.dfp.gov.ua/217.html?&tx_ttnews[pointer]=3&tx_ttnews[tt_news]=8112&tx_ttnews[backPid]=64&cHash=2726bd1fd9
50. Іванюк І. С Теоретичні підходи до визначення категорії «фінансова стійкість страхової компанії» / І. С. Іванюк, Д. С. Маруженко // Фінанси України. – 2006. – № 11. – С 77–89.

51.Кашенко О. Л. Соціально-економічні основи страхування : на-вч. посіб. / О. Л. Кашенко, В. А. Борисова. – Суми : Університет-ська книга, 1999. – 252 с.
52.Кириллова Н. Финансовая устойчивость и несостоятельность страховых компаний / Кириллова Н. // Страховое дело. – 2001. – № 5. – С. 17–21.
53.Кнейслер О. Прагматизм фінансової стійкості страховика / О. Кнейслер // Світ фінансів. – 2009. – № 4. - С. 191–197.
54.Ковтун І. О. Основи актуарних розрахунків : навчальний посібник / І. О. Ковтун, М. П. Денисенко, В. Г. Кабанов ; Мін-во освіти і науки України. - К. : ВД "Професіонал", 2008. - 480 с.
55.Козьменко О. В. Порівняльна характеристика видів страхування в Україні, Росії, Франції та країнах ЄС / О. В. Козьменко, А. О. Бойко // Зовнішня торгівля: право та економіка. Науковий журнал. – К., УДУФМТ. – №1(42). – 2009. – С. 53–59.
56.Козьменко О. В. Страховий ринок України у контексті сталого розвитку : монографія / О. В. Козьменко. – Суми : ДВНЗ «УАБС НБУ», 2008. – 350 с
57.Козьменко О. В. Управління конкурентоспроможністю страхових компаній / О. В. Козьменко, А. О. Бойко, О. О. Капшук // Управління фінансами в умовах вступу до СОТ: Збірник матеріалів Всеукраїнської науково-практичної конференції (15 жовтня 2009 р.). – Х. : ХНЕУ, 2009. – С. 69–71.
58.Коломин Е. В. Словарь страховых терминов / Е. В Коломин, В. В. Шахов. – М. : Финансы и статистика, 1991. – 305 с.
59.Котлобовский И. Б. Рисковый подход к оценке платежеспособности страховой компании / И. Б. Котлобовский, А. Е. Сметанин // Финансы. –2007. – № 6. – С. 39–43.
60.Кудрявцев А. А. Актуарные модели финансовой устойчивости страховых компаний / А. А. Кудрявцев. – СПб. : Институт страхования, 1997. – 62 с.
61.Куликов С. В. Финансовый анализ страховых организаций : учеб. пособие / С. В. Куликов. - Ростов-на-Дону. : Феникс ; Новосибирск : Сибирское соглашение, 2006. − 224 с.
62.Кучма М. І. Математичне програмування : приклади і задачі . навч. посіб. – Львів : «Новий Світ-2000» . 2007 , – С. 344 (273-279).
63.Луконин С. В. Финансовая устойчивость страховых компаний и пути ее повышения / С. В. Луконин. – Страховое дело. – 2003. – № 5. – С. 28–31.

64.Мак Т. Математика рискового страхования / пер. с нем. / Т. Мак. – М. : ЗАО «Олим-Бизнес», 2005. − 432 с.
65.Манес А. Основы страхового дела /А. Манес. − М., 1992. −112 с.
66.Матвійчук А. В. Аналіз і управління економічним ризиком: Навч. посібник / МОН.– К.: Центр навчальної літератури, 2005.– 224 с.
67.Машина Н. І. Міжнародне страхування / Н. І. Машина. – К. : Центр навчальної літератури, 2006. – 504 с.
68.Меренкова О. В. Факторний аналіз імовірнісної оцінки ризику використання послуг банків для легалізації кримінальних доходів або фінансування тероризму / О. В. Меренкова, Т. А. Медвідь, А. О. Бойко // Науково-практичний журнал Вісник Національного банку України. – 2010. – № 11(177). – С. 46–52.
69.Методика формування резервів із страхування життя Розпорядження Державної комісії з регулювання ринків фінансових послуг від 27.01.2004 № 24 [Електронний ресурс]. – Режим доступу : http://www.dfp.gov.ua/217.html?&tx_ttnews[pointer]=40&tx_ttnews[tt_news]=4459&tx_ttnews[backPid]=792&cHash=32d5b62393
70.Мних М. В. Страхування як механізм надання гарантій підприємницької діяльності та соціального захисту населення : навч. посіб. для студ. вищ. навч. закладів / М. В. Мних. – К. : Знання України, 2004. − 428 с.
71.Морозко Н. Й. Методология управления финансами страховой системы / Н. Й. Морозко // автореф. дис. на соискание степени докт. экон. наук : спец. 08.00.10. – М., 2007. – 49 с.
72.Мурина Н. Н. Страховое дело: учеб. пособие / Н. Н. Мурина, А. А. Роговская. – Мн. : ИВЦ Минфина, 2005. – 246 с.
73.Нагайчук Н. Г. Управління капіталом страхової компанії / Н. Г. Нагайчук // Фінанси України. – 2008. – № 11. – С. 106–116.
74.Нечипорук Л. В. Теорія та практика страхового ринку в Україні : монографія / Л. В. Нечипорук. – Харків : Вид-во Нац. Ун-ту внутр. справ, 2004. – 300 с.
75.Никулина Н. Н. Страхование. Теория и практика : учебное пособие / Н. Н. Никулина, С. В. Березина. - 2-е изд., перераб. и доп. – М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2007. – 511 с.
76.Орланюк-Малицкая Л. А. О понятиях и факторах финансовой устойчивости страховых компаний / Л. А. Орланюк-Малицкая // Вестник финансовой академии. – 1998. – № 1. – С. 33–39.
77.Орланюк-Малицкая Л. А. Платежеспособность страховой организации / Л. А. Орланюк-Малицька. – М. : Анкил, 1994. – 245 с.

78.Осадець С. С. Страхування : підручник / керівник авт. колективу і наук. ред. С. С. Осадець. – Вид. 2-ге, перероб. і доп. – К. : КНЕУ, 2002. – 599 с.
79.Основи актуарних розрахунків: навчально-методичний посібник / за ред. чл. Українського Товариства актуаріїв І. О. Ковтуна. - К. : Алтера, 2004. - 328 с.
80.Основи довгострокового страхування : навч. посіб. / За ред. Головко А. Т. – Алтера , 2007 . – С.30-53.
81.Плиса В. Й. Страхування : навч. посібн. – К. : Каравела, 2005. – 392 с.
82.Положення про обов'язкові критерії та нормативи достатності, диверсифікованості та якості активів, якими представлені страхові резерви з видів страхування, інших, ніж страхування життя Розпорядження Державної комісії з регулювання ринків фінансових послуг від 08.10.2009 № 741 [Електронний ресурс]. – Режим доступу : http://www.dfp.gov.ua/217. html? &tx_ttnews [tt_news]=11551&tx_ttnews[backPid]=64&cHash=7447873722
83.Порядок і правил формування, розміщення та обліку страхових резервів з обов'язкового страхування цивільної відповідальності за ядерну шкоду Розпорядження Державної комісії з регулювання ринків фінансових послуг від 13.11.2003 № 123 [Електронний ресурс]. – Режим доступу : http://www.dfp.gov.ua/217.html?&tx_ttnews[pointer]=41&tx_ttnews[tt_news]=4535&tx_ttnews[backPid]=792&cHash=1a680093e0
84.Правила розміщення страхових резервів із страхування життя Розпорядження Державної комісії з регулювання ринків фінансових послуг від 26.11.2004 № 2875 [Електронний ресурс]. – Режим доступу : http://www.dfp.gov.ua/217.html?&tx_ttnews[pointer]=38&tx_ttnews[tt_news]=2856&tx_ttnews[backPid]=792&cHash=24772ec5bc
85.Правила формування, обліку та розміщення страхових резервів за видами страхування, іншими, ніж страхування життя Розпорядження Державної комісії з регулювання ринків фінансових послуг від 17.12.2004 № 3104 [Електронний ресурс]. – Режим доступу : http://www.dfp.gov.ua/ 217.html? &tx_ttnews[pointer]=37&tx_ttnews[tt_news]=2829&tx_ttnews[backPid] =792&c Hash=33681c3712
86.Про вимоги до рейтингу фінансової надійності (стійкості) страховиків та перестраховиків-нерезидентів проект розпорядження Держфінпослуг [Електронний ресурс]. – Режим доступу : http://www.dfp.gov.ua
87.Про затвердження Вимог до рейтингів фінансової надійності (стійкості) страховиків та перестраховиків-нерезидентів Розпорядження

Держфінпослуг від 03.12.2004 № 2885 [Електронний ресурс]. – Режим доступу : http://www.dfp.gov.ua
88. Про затвердження Вимог до рейтингу фінансової надійності (стійкості) страховика-нерезидента, який має право здійснювати страхову діяльність в Україні Розпорядження Держфінпослуг від 28.08.2007 № 7924 [Електронний ресурс]. – Режим доступу : http://www.dfp.gov.ua
89. Про затвердження Положення про Державну комісію з регулювання ринків фінансових послуг України Постанові Кабінету Міністрів від 3 лютого 2010 р. № 157 [Електронний ресурс]. – Режим доступу : http://zakon.rada.gov.ua
90. Про затвердження Порядку надання страховиками (цедентами, перестрахувальниками) інформації про укладені договори перестрахування з страховиками (перестраховиками) нерезидентами до Держфінпослуг Розпорядження Держфінпослуг від 04.06.2004 №914 [Електронний ресурс]. – Режим доступу : http://www.dfp.gov.ua
91. Про затвердження Порядку погодження в Державній комісії з регулювання ринків фінансових послуг України договорів перестрахування з перестраховиками-нерезидентами для перерахування (купівлі) іноземної валюти страховиками-резидентами та страховими (перестраховими) брокерами-резидентами Розпорядження Держфінпослуг від 03.06.2005 № 4123 [Електронний ресурс]. – Режим доступу : http://www.dfp.gov.ua
92. Про затвердження Порядку реєстрації договорів перестрахування проект розпорядження Держфінпослуг [Електронний ресурс]. – Режим доступу : http://www.dfp.gov.ua
93. Про страхування : Закон України від 7 березня 1996 року № 85/96-ВР // Відомості Верховної Ради України. – 1996. – № 18.
94. Пфайффер К. Введение в перестрахование / К. Пфайффер. – М. : Анкил, 2002. – 328 с.
95. Рейтман Л. И. Страховое дело : учебник; под общ. ред. проф. Л. И. Рейтмана. – М. : Банковский и биржевой центр, 1992. – 524 с.
96. Самойловський А. Л. Комплексна оцінка фінансового стану страховика / А. Л. Самойловський // Формування ринкових відносин в Україні. – 2004. – № 4. – С. 7–10.
97. Сербиновский Б. Ю. Страховое дело : учебное пособие для вузов / Б. Ю. Сербиновский, В. Н. Гарькуша. – Ростов-на-Дону: «Феникс», 2000. – 384 с.
98. Сплетухов Ю. А. Страхование: учеб. пособие / Ю. А. Сплетухов, Е. Ф. Дюжиков – М. : ИНФРА-М, 2006. – 312 с.

99. Таркуцяк А. О. Страхування : навч. посіб. / А. О. Таркуцяк ; Європейський ун-т фінансів, інформаційних систем, менеджменту і бізнесу. − К. : Вид-во Європ. ун-ту фінансів, інф. систем, менеджм. і бізнесу, 2000. − 115 с.
100. Ткаченко Н. В. До визначення поняття «платоспроможність страхової компанії» / Н. В. Ткаченко // Регіональна економіка. − 2010. − № 2. − С. 100−105.
101. Ткаченко Н. В. Забезпечення фінансової стійкості страхових компаній : теорія, методологія та практика : монографія / Н. В. Ткаченко: Нац. банк України. Ун-т банк, справи. − Черкаси : "Черкаський ЦНТЕГ. 2009. − 570 с.
102. Ткаченко Н. В. Розвиток перестрахування як важіль забезпечення фінансової стійкості страховиків / Н. В. Ткаченко // Фінанси України. − 2007. − № 3. − С. 118−123.
103. Ткаченко Н. В. Страхування : навч.посібник. − К. : Ліра-К, 2007. − 376 с.
104. Ткаченко Н. В. Фінансова стійкість страхових компаній : теоретичні підходи / Н. В. Ткаченко // Фінанси України. − 2009. − № 6. − С. 104−121.
105. Тронин Ю. Н. Основы страхового бизнеса / Ю. Н. Тронин. – М. : Издательство «Альфа-Пресс», 2006. – 472 с.
106. Турбиной К. Е. Теория и практика страхования : учебн. пос. − М. : Анкил, 2003 – 704 с.
107. Федорова Т. А. Основы страховой деятельности : учебник /Отв. ред. проф.Т. А. Федорова. – М. : Издательство БЕК, 2002. − 768 с.
108. Федорова Т. А. Страхование : ученик / под ред. Т. А. Федоровой. − 2-е изд.,перераб. и доп. − М. : Экономистъ, 2004. − 875 с.
109. Фурман В. М. Страхування : теоретичні засади та стратегія розвитку : монографія / В. М. Фурман. − К. : КНЕУ, 2005. − 296 с.
110. Хэмптон Д. Финансовое управление в страховых компаниях. Перевод с англ. /Д. Хэмптон. − М. : Анкил, 1995. − 263 с.
111. Шахов В. В. Страхование : учебник для вузов / В. В. Шахов. – М.: ЮНИТИ, 2003. – 311 с.
112. Шахов В. В. Теория и управление рисками в страховании / В. В. Шахов, В. Г. Медведев, А. С. Миллерман. − М. : Финансы и статистика, 2003. − 224 с.
113. Шелехов К. В. Страхование : учебное пособие / К. В. Шелехов, В. Д. Бигдаш. − К. : МАУП, 1998. − 424 с.
114. Шихов А. К. Страхование: учеб. пособие для вузов. − М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2000. − 431 с.

115. Шіріняи Л. В. Фінансова надійність і фінансова стійкість страховиків / Л. В. Шіріняи // Актуальні проблеми економіки. − 2007. − № 9. − С. 173-179.
116. Шумелда Я. Основи актуарних розрахунків : навч. посіб. [для студентів спеціальності "Фінанси" (спеціалізація "Страхова справа")] / Я. Шумелда. − Тернопіль : Підручники і посібники, 2003. − 160 с.
117. Шумелда Я. П. Страхування : навч. посіб. Видання друге, розширене. − К. : Міжнародна агенція „БІЗОН", 2007. − 384 с.
118. Щербаков В. А. Страхование : учеб. пособ. / В. А. Щербаков, Е. В. Костяева. − М. : КНОРУС, 2007. − 312 с
119. Юрченко Л. А. Финансовый менеджмент страховика : учеб. пособ. для вузов / Л. А. Юрченко. − М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2001. − 199 с.
120. Яковлева Т. А. Страхование : учеб. пособ. / Яковлева Т. А., Шевченко О. Ю. – М : Экономистъ, 2004. − 217 с.
121. Kozmenko O. Forecasting of principal directions of Ukrainian insurance market development based on German insurance market indices / O. Kozmenko, O. Merencova, A. Boyko, H. Kravchuk // Innovative Marketing. – Volume 5, Issue 4, 2009. – P.51−54.
122. Kozmenko O. V. Analysis of insurance market structure and dynamics in Ukraine, Russia and countries members of European insurance and reinsurance federation (CEA) / O. V. Kozmenko, O. V. Merenkova, A. O. Boyko // Problem and Perspectives in Management International Research Journal Volume 7, Issue 1, 2009. P. 30−41.