**Теоретична частина**

**Визначення 1.** *Транспортна задача* - це математична задача по знаходженню оптимального розподілу поставок однорідного «товару» (вантажу, речовини) між пунктами відправлення та призначення при заданих, чисельно виражених затратах (цінах, витратах) на перевезення.

**Математична постановка задачі.**

Загальна постановка транспортної задачі полягає у визначенні оптимального плану перевезень деякого однорідного вантажу з $m$ пунктів відправлення $A\_{1}, A\_{2},…,A\_{m}$ в $n$ пунктів призначення $B\_{1}, B\_{2},…,B\_{n}$. При цьому в якості критерію оптимальності зазвичай береться або мінімальна вартість перевезень всього вантажу, або мінімальний час його доставки. Розглянемо транспортну задачу, в якості критерію оптимальності якої взята мінімальна вартість перевезень всього вантажу. Позначимо через $c\_{ij}$ тарифи перевезення одиниці вантажу з $i$-го пункту відправлення в $j$-й пункт призначення, через $a\_{i}$- запаси вантажу в $i$-му пункті відправлення, через $b\_{j} $– потреби у вантажів, $j$-му пункті призначення, а через $x\_{ij}$- кількість одиниць вантажу, що перевозиться з $i$-го пункту відправлення в $j$-й пункт призначення. Тоді математична постановка задачі полягає у визначенні мінімального значення функції

$$F=\sum\_{i=1}^{m}\sum\_{j=1}^{n}c\_{ij}x\_{ij} (1)$$

за умов

$$\sum\_{i=1}^{m}x\_{ij}=b\_{j} (j=\overbar{1,n}), (2)$$

$$\sum\_{j=1}^{n}x\_{ij}=a\_{i} \left(i=\overbar{1,m}\right), (3)$$

$$x\_{ij}\geq 0 \left(i=\overbar{1,m}; j=\overbar{1,n}\right). (4)$$

Оскільки змінні $x\_{ij}\left(i=\overbar{1,m}; j=\overbar{1,n}\right) $задовольняють системам лінійних рівнянь (2)і (3) та умові нейтральності (4), забезпечуються доставка необхідної кількості вантажу в кожен з пунктів призначення, вивезення наявного вантажу з усіх пунктів відправлення, а також виключаються зворотні перевезення.

**Визначення 2.** Будь-яке невід'ємне рішення систем лінійних рівнянь (2) і (3), яке визначається матрицею $X=(x\_{ij})\left(i=\overbar{1,m}; j=\overbar{1,n}\right)$, називається *планом* транспортної задачі.

**Визначення 3.** Якщо в результаті складання плану поставок всі наявні запаси пунктів відправлення розподілені і потреби в пунктах призначення задоволені, то отримано *опорний план* транспортної задачі.

**Визначення 4.** План $X^{\*}=(x\_{ij}^{\*})\left(i=\overbar{1,m}; j=\overbar{1,n}\right)$ при якому функція (1) приймає своє мінімальне значення, називається *оптимальним планом* транспортної задачі.

Очевидно, загальна наявність вантажу у постачальників дорівнює $\sum\_{i=1}^{m}a\_{i},$ а загальна потреба у вантажі в пунктах призначення дорівнює $\sum\_{j=1}^{n}b\_{j}$ одиниць. Якщо загальна потреба у вантажі в пунктах призначення дорівнює запасу вантажу в пунктах відправлення, тобто

$$\sum\_{i=1}^{m}a\_{i}=\sum\_{j=1}^{n}b\_{j}, (5)$$

то модель такої транспортної задачі називається *закритою (сбалансованою)*. Якщо ж зазначена умова не виконується, то модель транспортної задачі називається *відкритою (несбалансованою)*.

Зазвичай вихідні дані транспортної задачі записують у вигляді табл. 1.

Таблиця 1

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Пункти відправлення | Пункти призначення | Запаси |
| $$B\_{1}$$ | … | $$B\_{j}$$ | … | $$B\_{n}$$ |
| $$A\_{1}$$ | $$c\_{11}$$$$x\_{11}$$ | … | $$c\_{1j}$$$$x\_{1j}$$ | … | $$c\_{1n}$$$$x\_{1n}$$ | $$a\_{1}$$ |
| … | … | … | … | … | … | … |
| $$A\_{i}$$ | $$c\_{i1}$$$$x\_{i1}$$ | … | $$c\_{ij}$$$$x\_{ij}$$ | … | $$c\_{in}$$$$x\_{in}$$ | $$a\_{i}$$ |
| … | … | … | … | … | … | … |
| $$A\_{m}$$ | $$c\_{m1}$$$$x\_{m1}$$ | … | $$c\_{mj}$$$$x\_{mj}$$ | … | $$c\_{mn}$$$$x\_{mn}$$ | $$a\_{m}$$ |
| Потреби | $$b\_{1}$$ | … | $$b\_{j}$$ | … | $$b\_{n}$$ |  |

**Теорема 1.** Для розв'язання транспортної задачі необхідно і достатньо, щоб запаси вантажу в пунктах відправлення були рівні потреби у вантажі в пунктах призначення, тобто, щоб виконувалася рівність (5).

У разі перевищення запасу над потребою, тобто $\sum\_{i=1}^{m}a\_{i}>\sum\_{j=1}^{n}b\_{j}, $ вводиться фіктивний $(n+ 1) -$й пункт призначення з потребою $b\_{n+1}=\sum\_{i=1}^{m}a\_{i}-\sum\_{j=1}^{n}b\_{j}$ та відповідні тарифи вважаються рівними нулю: $c\_{in+1}=0$ $\left(i=\overbar{1,m}\right)$. Отримана задача є транспортної задачею, для якої виконується рівність (5).

Аналогічно, при $\sum\_{i=1}^{m}a\_{i}<\sum\_{j=1}^{n}b\_{j} $, вводиться фіктивний $(m + 1)$-й пункт відправлення з запасом вантажу $a\_{m+1}=\sum\_{j=1}^{n}b\_{j}-\sum\_{i=1}^{m}a\_{i}$, і тарифи покладаються рівними нулю: $c\_{m+1j}=0 (j=\overbar{1,n})$. Цим задача зводиться до звичайної транспортної задачі, з оптимального плану якої виходить оптимальний план вихідної задачі. Надалі будемо розглядати закриту модель транспортної задачі. Якщо ж модель конкретної задачі є відкритою, то, виходячи зі сказаного вище, перепишемо таблицю умов задачі так, щоб виконувалася рівність $(5)$.

Число змінних $x\_{ij}$ в транспортній задачі з $m$ пунктами відправлення та $n$ пунктами призначення дорівнює $mn$, а число рівнянь в системах $(2)$ і $(З)$ дорівнює $n+m$. Так як ми припускаємо, що виконується умова $(5)$, то число лінійно незалежних рівнянь дорівнює $n+m-1$. Отже, опорний план транспортної задачі може мати не більше $n+m-1$ відмінних від нуля невідомих.

Якщо в опорному плані число відмінних від нуля компонент дорівнює в точності $n+m-1$, то план є не виродженим, а якщо менше - то виродженим.

**Математична модель транспортної задачі.** Змінними (невідомими) транспортної задачі є $x\_{ij}, i=1,2,…,m, j=1,2,…,n$– обсяги перевезень від $i$-го постачальникакожному $j$-му споживачеві.Ці змінні можуть бути записані у вигляді матриціперевезень:

$$X=\left(\begin{matrix}x\_{11}&x\_{12} …&x\_{1n}\\x\_{21}&x\_{22} …&x\_{2n}\\\begin{matrix}…\\x\_{m1}\end{matrix}&\begin{matrix}…\\x\_{m2} …\end{matrix}&\begin{matrix}…\\x\_{mn}\end{matrix}\end{matrix}\right)$$

$c\_{ij}, i=1,2,…,m, j=1,2,…,n$ – вартості перевезення одиниць вантажу від кожного -го постачальника $j$-му споживачеві (змінні транспортної задачі)

Так як добуток $c\_{ij}x\_{ij}$ визначає витрати на перевезення вантажу від $i$-го постачальника $j$-му споживачеві, то сумарні витрати на перевезення всіх вантажів рівні:

$$\sum\_{i=1}^{m}\sum\_{j=1}^{n}c\_{ij}x\_{ij}$$

За умовами задачі потрібно забезпечити мінімум сумарних витрат. Отже, цільова функція задачі має вигляд:

$$Z\left(X\right)=\sum\_{i=1}^{m}\sum\_{j=1}^{n}c\_{ij}x\_{ij}\rightarrow min$$

Система обмежень задачі складається з двох груп рівнянь:

$$\sum\_{j=1}^{n}x\_{ij}=a\_{i}, i=1,2,…,m,$$

$$\sum\_{i=1}^{m}x\_{ij}=b\_{j}, j=1,2,…,n.$$

З огляду на умову невід'ємності обсягів перевезень математична модель виглядає наступним чином:

$$\left\{\begin{array}{c}Z\left(X\right)=\sum\_{i=1}^{m}\sum\_{j=1}^{n}c\_{ij}x\_{ij}\rightarrow min,\\\sum\_{j=1}^{n}x\_{ij}=a\_{i}, i=1,2,…,m,\\\sum\_{i=1}^{m}x\_{ij}=b\_{j}, j=1,2,…,n,\\x\_{ij}\geq 0, i=1,2,…,m, j=1,2,…,n. \end{array}\right.$$

**Визначення опорного плану транспортної задачі.** Розглянемо три метода, які використовуються для знаходження опорного плану транспортної задачі:

* північно-західного кута;
* метод мінімальних тарифів;
* метод апроксимації Фогеля.

*Метод північно-західного кута.* Метод полягає в послідовному переборі рядків і стовпців транспортної таблиці, починаючи з лівого стовпчика і верхнього рядка, і виписуванні максимально можливих відвантажень у відповідні комірки таблиці так, щоб не були перевищені заявлені в завданні можливості постачальника або потреби споживача. На ціни доставки в цьому методі не звертають увагу, оскільки передбачається подальша оптимізація відвантажень.

*Метод мінімальних тарифів.* На відміну від більш простого методу північно-західного кута, в цьому методі розраховувач записує відвантаження, в першу чергу, в ті осередки, де тариф на перевезення вантажу мінімальний. Цей метод дозволяє отримати більш наближене до оптимального рішення, яке, однак, може зажадати подальшої оптимізації методом потенціалів.

*Метод Фогеля.* Метод Фогеля полягає в обчисленні для кожного рядка транспортної таблиці різниці між двома найменшими тарифами. Аналогічну дію виконують для кожного стовпчика цієї таблиці. Найбільша різниця між двома мінімальними тарифами відповідає найкращою рядку або стовпцю (якщо є кілька рядків або стовпців з однаковою різницею, то вибір між ними довільний). В межах цього рядка або стовпця відшукують осередок з мінімальним тарифом, куди пишуть відвантаження. Рядки постачальників або стовпці споживачів, які повністю вичерпали свої можливості по відвантаженню або потреби яких в товарі були задоволені, викреслюються з таблиці, і обчислення повторюються до повного задоволення попиту і вичерпання відвантажень без урахування викреслених осередків.

**Задачі, що зводяться до транспортної задачі.**

Розглянемо декілька задач, що зводяться до транспортної задачі.

*Задача про призначення.* Окремим випадком транспортної задачі є задача про призначення, в якій число пункту виробництва дорівнює числу пунктів призначення, тобто транспортна задача має форму квадрата. Будь-яка задача про призначення може бути вирішена з використанням методів лінійного алгоритму або алгоритму вирішення транспортної задачі. Однак з огляду на особливу структури даного завдання був розроблений спеціальний алгоритм, який отримав назву Угорського методу. Завдання полягає у виборі такого розподілу ресурсів по об'єктах, при якому мінімізується вартість призначень. Передбачається, що кожен ресурс призначається рівно один раз і кожному об'єкту приписується рівно один ресурс. Якщо на прикладах, це може бути задача призначення працівників на посади (з досягненням максимальної ефективності, або, може, мінімальних витрат на зарплату), призначення машин на виробничі лінії і т.п., при цьому один виконавець (людина, машина, знаряддя і т.п.) може виконувати тільки одну роботу. Детально методи розв'язання задачі про призначення будемо розглядати в наступних лекціях.

*Неприпустимі перевезення.* Якщо перевезення з деякого пункту проводиться в певний пункт призначення по тій або іншій причині неможливе, то в алгоритмі рішення задачі дане обмеження можна врахувати, присвоївши відповідній клітці досить велике значення вартості. Точне значення в даному випадку неважливо, проте, воно повинно бути більше, ніж інші значення вартості, зазначені в таблиці. Таким чином, алгоритм автоматично дозволить уникнути перевезень через дану клітку.

*Транспортна задача з обмеженнями на пропускну здатність.* Нехай потрібно при вирішенні транспортної задачі обмежити перевезення від постачальника з номером $i$ до споживача з номером $j$. Можливі обмеження двох типів: 1) $x\_{ij}\geq a$; 2) $x\_{ij}\leq b$, де $a$ і $b$ – постійні величини.

1. Якщо $x\_{ij}\geq a$, то необхідно перш, ніж вирішувати завдання, скоротити (зменшити) запроси $i$-го постачальника і запити $j$-го споживача на оптимальному рішенні слід збільшити обсяг перевезення $x\_{ij}$ на величину $a$.

2. Якщо $x\_{ij}\leq b$, то необхідно замість $j$-го споживача із запитами $b\_{j}$ ввести двох інших споживачів. Один з них з номером $j$ повинен мати запити $b\_{j}=b$, а інший з номером $n+1$ – запити $b\_{n+1}=b\_{j}-b$. Вартості перевезень для цих споживачів залишаються колишніми, за винятком вартості $c\_{i(n+1)}$, яка приймається рівною як завгодно більшому числу $М (М >> 1)$. Після отримання оптимального рішення величини вантажів, що перевозяться до $(n + 1)$-го споживачу, додаються до величин перевезень $j$-го споживача. Так як $c\_{i(n+1)}=M$ – найбільша вартість перевезення, то в оптимальному рішенні клітина з номером $i(n+1)$ залишиться порожньою, $x\_{i(n+1)}=0$ і обсяг перевезень $x\_{ij}$ не перевершить $b$.

У деяких задачах потрібно заборонити перевезення від окремих постачальників окремим споживачам. У таких випадках або закреслюють клітину таблиці транспортної задачі, або призначають відповідну цій клітці вартість перевезення одиниці вантажу як завгодно великий, рівний $М >> 1$. В іншому завдання вирішується звичайним способом. Для розв'язання даної задачі необхідно існування початкового опорного рішення.