Державний вищій навчальний заклад
“Запорізький національний університет”
Міністерства освіти і науки України

МЕТОДИ ОБЧИСЛЕНЬ

Модуль 2

Конспект лекцій

Запоріжжя

ВСТУП

Обчислювальна техніка й математичні методи розв'язання задач дозволяють замінити дорогі й трудомісткі натурні експерименти більш точними, швидкими й дешевими обчислювальними експериментами на математичних моделях із застосуванням ЕОМ. В основі обчислювального експерименту лежать розв'язки рівнянь математичної моделі чисельними методами. Чисельні методи – методи наближеного чи точного розв'язання задачі, що базуються на побудові скінченої послідовності дій над скінченою множиною чисел, результатами яких є числові значення. Для розв'язання конкретних практичних задач необхідно виконати мільйони, і навіть мільярди математичних операцій, що під силу тільки ЕОМ.

Серед чисельних методів розрізняють прямі й ітераційні. Прямі, чи точні, методи дають розв'язок за скінчене число дій, прості й найбільш універсальні, вони забезпечують обчислення за точними формулами. Проте отриманий розв'язок в результаті округлень втрачає точність і стає наближеним, причому похибка в результаті дій над округленими, тобто наближеними, числами, накопичується, стає неусувною.

Ітераційні (наближені) методи задаються у вигляді багатокрокових повторень певної послідовності дій, вихідними даними для яких є результати попереднього циклу обчислень, який називається ітерацією. Сама природа такого методу обумовлює наближеність одержуваного розв'язку, похибка якого регулюється кількістю виконаних ітерацій: чим більше ітерацій, тим менше похибка.

Не можна забувати, що отримані результати тільки тоді будуть досить достовірні, тобто будуть мати похибку в припустимих межах, якщо чисельний метод є стійким і збігається. Точність і збіжність застосовуваного чисельного методу треба досліджувати на рішеннях задач, що мають аналітичний розв'язок чи експериментальні результати.

Для складних задач розробляються чисельні методи і складаються обчислювальні програми, що утворюють бібліотеки стандартних і пакети прикладних програм, а також програмні комплекси.

РОЗДІЛ 7. ЧИСЕЛЬНЕ ІНТЕГРУВАННЯ

7.1. Загальні положення

У багатьох випадках первісна $F(x)$ функції $f(x)$ не може бути знайдена за допомогою елементарних засобів чи є занадто складною. Внаслідок цього обчислення визначеного інтеграла від такої функції $f(x)$ за формулою Ньютона-Лейбніца може бути складним чи навіть неможливим.

Крім того, підінтегральна функція може задаватися за допомогою таблиці, і тоді саме поняття первісної втрачає зміст. Тому важливе значення мають наближені і, у першу чергу, чисельні методи обчислення визначених інтегралів.

Звичайний прийом побудови квадратурних формул полягає в тому, що дану функцію $f(x)$ заміняють інтерполюючою чи апроксимуючою функцією $\varphi(x)$ простого вигляду (наприклад, поліном), а потім наближено покладають:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b \varphi(x)dx \ .$$

Функція $\varphi(x)$ повинна бути така, щоб інтеграл від неї обчислювався безпосередньо.

Якщо в якості $\varphi(x)$ взяти інтерполяційний многочлен Лагранжа $L_n(x)$ з вузлами інтерполяції $x_1,...,x_n$ з відрізка інтегрування, то одержимо квадратурну формулу Ньютона-Котеса. Якщо $L_n(x)$ – многочлен другого ступеня з вузлами $x_1 = a$, $x_2 = \dfrac{a+b}{2}$, $x_3 = b$, то інтегруючи його, одержимо окремий випадок квадратурної формули Ньютона-Котеса - квадратурну формулу Сімпсона

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[f(x_1)+4f(x_2)+f(x_3)\right].$$

Часто виникає задача обчислення інтегралів, де підінтегральна функція чи її похідні невисокого порядку мають ділянки різкої зміни, наприклад, обертаються на нескінченність. Такі функції погано наближаються многочленами відразу на усьому відрізку інтегрування. У таких випадках часто виявляється більш зручним розбити вихідний відрізок на частини й на кожній частині застосувати свою квадратурну формулу. Підсумовуючи потім квадратурні формули за усіма елементарними відрізками, одержимо так звану складену чи узагальнену квадратурну формулу.

7.2. Квадратурна формула Сімпсона

Нехай маємо систему рівновіддалених точок $x_i \in [a,b]$; $x_i = a + ih$ $(i = 0,1,2,...,n)$, де $n = 2m$, $h = \dfrac{b-a}{n}$, $x_n = b$.

Застосуємо формулу Сімпсона до кожного з відрізків $[x_0, x_2]$, $[x_2, x_4], \ldots, [x_{2m-2}, x_{2m}]$, довжини $2h$ і, виконуючи підсумовування за усіма відрізками, одержимо складену квадратурну формулу Сімпсона

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[(y_0 + y_{2m}) + 4(y_1 + y_3 + .. + y_{2m-1}) + 2(y_2 + y_4 + ... + y_{2m-2})\right]. \qquad (1)$$

Тут $y_i = f(x_i)$ $(i = 0,1,2,...,n)$.

Для залишкового члена формули (1) справедлива оцінка

$$R_n \le \frac{h^4}{180}(b-a)\max_{[a,b]}\left|f^{IV}(x)\right|.$$

Оцінка похибки формули Сімпсона за залишковим членом R_n часто виявляється малоефективною через труднощі оцінки четвертої похідної підінтегральної функції.

На практиці для оцінки похибки застосовують правило Рунге. Для цього обирають число n, кратне 2, і обчислюють наближене значення інтеграла за формулою Сімпсона (1) із кроком $h=\dfrac{b-a}{n}$ (позначимо це наближене значення I_n). Потім обчислюють наближене значення інтеграла за формулою (1) із кроком $h=\dfrac{b-a}{2n}$ (позначимо його I_{2n}).

За наближене значення I інтеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$, обчислене за формулою Сімпсона з поправкою Рунге, приймають

$$I=I_{2n}+\frac{I_{2n}-I_n}{15}\ . \qquad (2)$$

Похибка цього результату, знайдена за правилом Рунге, буде:

$$\varepsilon=\frac{\left|I_{2n}-I_n\right|}{15}. \qquad (3)$$

Приклад. За допомогою формули Сімпсона обчислити $\int\limits_0^{1,2} e^{-x^2}dx$, розбивши інтервал інтегрування на 12 частин. Оцінити похибку.

Розв'язок. $f(x)=e^{-x^2}dx;\quad a=0,\quad b=1{,}2.$

Спочатку обчислимо цей інтеграл за формулою Сімпсона, розбивши інтервал $[0;1{,}2]$ на 6 частин.

Крок інтегрування при цьому $h=\dfrac{1{,}2-0}{6}=0{,}2$.

Точки поділу

$$x_0 = 0; \quad x_1 = 0{,}2; \quad x_2 = 0{,}4; \quad x_3 = 0{,}6; \quad x_4 = 0{,}8; \quad x_5 = 1{,}0; \quad x_6 = 1{,}2 .$$

Відповідні значення підінтегральної функції

$$y_0 = e^{-x_0^2} = 1; \;\; y_1 = e^{-(0,2)^2} = 0{,}960789; \;\; y_2 = 0{,}852144;$$

$$y_3 = 0{,}697676; \;\; y_4 = 0{,}527292; \;\; y_5 = 0{,}367879; \;\; y_6 = 0{,}236928.$$

Тоді

$$I_n = \int_0^{1,2} e^{-x^2}dx \approx \frac{0{,}2}{3}\left[1 + 0{,}236928 + 4(0{,}960789 + 0{,}697676 + 0{,}367879) + \right.$$

$$\left. + 2(0{,}852144 + 0{,}527292)\right] = 0{,}806745.$$

Тепер обчислимо той же інтеграл, розбивши інтервал інтегрування на 12 частин.

$$h = \frac{1{,}2}{12} = 0{,}1; \quad x_i = ih \; (i = 0{,}1{,}2).$$

$$y_0 = 1; \;\; y_1 = 0{,}990050; \;\; y_2 = 0{,}960789; \;\; y_3 = 0{,}913931;$$

$$y_4 = 0{,}852144; \;\; y_5 = 0{,}78801; \;\; y_6 = 0{,}697676; \;\; y_7 = 0{,}612626;$$

$$y_8 = 0{,}527292;$$

$$y_9 = 0{,}444858; \;\; y_{10} = 0{,}367879; \;\; y_{11} = 0{,}298197; \;\; y_{12} = 0{,}236928.$$

Тоді

$$I_{2n} = \int_0^{1,2} e^{-x^2}dx \approx \frac{0{,}1}{3}\left[y_0 + y_{12} + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9 + y_{11}) + \right.$$

$$\left. + 2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8 + y_{10})\right] = 0{,}806745.$$

За формулою (1) знаходимо

$$I = \int_0^{1,2} e^{-x^2}dx \approx 0{,}806745 + \frac{0{,}806745 - 0{,}806745}{15} = 0{,}806745.$$

З формули (3) випливає, що похибка цього результату $\varepsilon = 0$. Насправді це не так. Тут має місце випадок, коли похибка методу, обумовлена формулою (3), менше обчислювальної похибки, що має місце за рахунок округлення. Оскільки ми виконуємо обчислення, округляючи результати до 10^{-6}, то похибка обчислень не перевершує $\varepsilon \le 12 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^{-6} = 6{,}0 \cdot 10^{-6}$.

7.3. Квадратурна формула Гауса

Якщо в квадратурній формулі Ньютона-Котеса, що, як відомо, є точною для многочленів ступеня $n-1$, за вузли інтегрування взяти нулі многочлена Лежандра ступеня n, ортогонального до усіх многочленів нижчого ступеня, то одержимо квадратурну формулу Гауса, точну для многочленів ступеня $2n-1$:

$$\int_a^b f(x)p(x)dx \approx \frac{b-a}{2}\sum_{j=1}^{n} D_j f(x_j) \ . \qquad (1)$$

Для практичного застосування формул Гауса необхідно мати в розпорядженні вузли й коефіцієнти цих квадратур. Наведемо параметри квадратур Гауса для відрізка $[-1{,}1]$ при $p(x) \equiv 1$. У цьому випадку залишковий член $R(f)$ для квадратурної формули (1) має вигляд:

$$R(f) = f^{(2n)}(\xi)\frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n!)^3(2n+1)} \ .$$

Таблиця вузлів і коефіцієнтів квадратур Гауса для відрізка $[-1{,}1]$ при $p(x) \equiv 1$.

n	j	d_j	D_j
1	1	0	2,00000000
2	2; 1	±0,57735027	1,00000000
3	3; 1	±0,77459667	$\frac{5}{9} = 0{,}55555556$

	2	0,00000000	$\frac{8}{9}=0{,}88888889$
4	4; 1 3; 2	±0,86113631 ±0,33998104	0,34785484 0,65214516
5	5; 1 4; 2 3	±0,90617985 ±0,53846931 0,00000000	0,23692688 0,47862868 0,56888889
6	6; 1 5; 2 4; 3	±0,93246951 ±0,66120939 ±0,23861919	0,17132450 0,36076158 0,46791394
7	7; 1 6; 2 5; 3 4	±0,94910791 ±0,74153119 ±0,40584515 0,00000000	0,12948496 0,27970540 0,38183006 0,41795918
8	8; 1 7; 2 6; 3 5; 4	±0,96028986 ±0,79666648 ±0,52553242 ±0,18343464	0,10122854 0,22238104 0,31370664 0,36268378

Приклад. Обчислити інтеграл

$$I=\int_0^1 \sqrt{1+2x}dx,$$

застосовуючи формулу Гауса з трьома вузлами інтегрування. Оцінити похибку отриманого результату.

Розв'язок. Оцінку похибки виконаємо за правилом Рунге. Тому інтеграл обчислимо двічі. Спочатку застосуємо формулу Гауса з трьома вузлами по всьому інтервалу інтегрування. Позначимо це наближене значення I_1. Потім розіб'ємо інтервал інтегрування $[0;1]$ на два - $[0;0{,}5]$ і $[0{,}5;1]$, й за допомогою тієї ж формули обчислимо значення інтеграла на цих відрізках. Підсумовуючи отримані значення, знайдемо I_2.

Відрізок інтегрування $[-1,1]$, для якого наведена таблиця вузлів і коефіцієнтів квадратур Гауса, заміною змінних $x=\dfrac{b+a}{2}+\dfrac{b-a}{2}t$ відображається на $[a;b]$. Це дозволяє нам визначити вузли інтегрування

$$x_1=\frac{1+0}{2}+\frac{1-0}{2}d_1=0{,}11270;$$

$$x_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}d_2=0{,}5000;$$

$$x_3=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}d_3=0{,}88730.$$

Відповідні коефіцієнти квадратурної формули (1) для нашого випадку будуть:

$$C_1=\frac{b-a}{2}D_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{9}=\frac{5}{18};$$

$$C_2=\frac{b-a}{2}D_2=\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{9}=\frac{4}{9};$$

$$C_3=\frac{b-a}{2}D_3=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{9}=\frac{5}{18}.$$

Подальші обчислення зведемо в таблицю

j	x_j	y_j	C_j	$C_j\cdot y_j$
1	0,11270	1,10698	5/18	0,30749
2	0,50000	1,41421	4/9	0,62854
3	0,88730	1,66571	5/18	0,46270
$I_1=\sum_{j=1}^{3}C_jy_j=1{,}39873$				
1	0,05635	1,05485	5/36	0,14651
2	0,25000	1,22474	2/9	0,27217
3	0,44365	1,37379	5/36	0,19080
4	0,55635	1,45351	5/36	0,20188
5	0,75000	1,58114	2/9	0,35136
6	0,94365	1,69921	5/36	0,23600

$$I_2 = \sum_{j=1}^{6} C_j y_j = 1{,}39872$$

$$I = I_2 + \frac{I_2 - I_1}{63} = 1{,}3987198.$$

$$\varepsilon = \frac{|I_2 - I_1|}{63} \approx 2 \cdot 10^{-7}.$$

РОЗДІЛ 8. НАБЛИЖЕНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

8.1. Метод Ейлера

Розглянемо диференціальне рівняння

$$y' = f(x,y)$$

з початковою умовою $y(x_0) = y_0$. Вибравши досить малий крок h, побудуємо систему рівновіддалених точок $x_i = x_0 + ih$.

Наближені значення $y(x_i) = y_i$ обчислюються послідовно за формулами:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \quad (i = 0,1,2,\ldots).$$

При цьому шукана інтегральна крива $y = y(x)$, що проходить через точку $M_0(x,y)$ замінюється ламаною $M_0 M_1 M_2 \ldots$ з вершинами $M_i(x_i, y_i)$, $(i = 0,1,2,\ldots)$; кожна ланка цієї ламаної (ламаної Ейлера) має напрямок, що збігається з напрямком тієї інтегральної кривої вихідного рівняння, що проходить через точку M_0.

Похибка методу – величина порядку $O(h)$.

Приклад. Знайти розв'язок диференціального рівняння методом Ейлера на відрізку $(0;0{,}4)$ при $h=0{,}1$, якщо $y'=x+y$ при початковій умові $y(0)=1$.

Розв'язок. Знаходимо значення аргументу: $x_0=0$; $x_1=0{,}1$; $x_2=0{,}2$; $x_3=0{,}3$; $x_4=0{,}4$ і відповідні їм значення y:

$$y_1=y_0+hf(x_0;y_0)=1+0{,}1(0+1)=1{,}1;$$
$$y_2=y_1+hf(x_1;y_1)=1{,}1+0{,}1(0{,}1+1{,}1)=1{,}22;$$
$$y_3=y_2+hf(x_2;y_2)=1{,}22+0{,}1(0{,}2+1{,}22)=1{,}36;$$
$$y_4=y_3+hf(x_3;y_3)=1{,}36+0{,}1(0{,}3+1{,}36)=1{,}52.$$

Одержимо таблицю наближених значень шуканої функції

x_i	0	0,1	0,2	0,3	0,4
y_i	1	1,1	1,22	1,36	1,52
y анал.	1	1,1103	1,2428	1,3997	1,5836

8.2. Удосконалений метод Ейлера

Розглянемо задачу Коші:

$$y'=f(x,y)\ ;\ y(x_0)=y_0.$$

Виберемо крок h, прийнявши $x_i=x_0+ih$. Значення функції y обчислюються послідовно за формулами:

$$y_{i+1}=y_i+h\left(f(x_i,y_i)+f(x_{i+1},\bar{y}_{i+1})\right)/2\ ,\qquad i=0,1,2,...$$

Для обчислення $\bar{y}_{i+1}$ можна використовувати метод Ейлера:

$$\bar{y}_{i+1}=y_i+hf(x_i,y_i)\ .$$

Велика різниця між $\bar{y}_{i+1}$ і y_{i+1} вказує на те, що необхідно зменшити крок h. Удосконалений метод Ейлера дає порядок похибки $0\left(h^2\right)$.

Приклад. Розв’яжемо удосконаленим методом Ейлера задачу Коші: $y' = x + y$; $y(0) = 1$; $h = 0{,}1$ на інтервалі (0;0,4).

Розв’язок.

$$\bar{y}_1 = y_0 + hf\left(x_0, y_0\right) = 1 + 0{,}1 = 1{,}1,$$

$$y_1 = y_0 + h\left(f\left(x_0, y_0\right) + f\left(x_1, \bar{y}_1\right)\right)/2 = 1{,}11,$$

$$\bar{y}_2 = y_1 + hf\left(x_1, y_1\right) = 1{,}11 + 0{,}1\left(0{,}1 + 1{,}11\right) = 1{,}231,$$

$$y_2 = y_1 + h\left(f\left(x_1, y_1\right) + f\left(x_2, \bar{y}_2\right)\right)/2 = 1{,}2421,$$

$$\bar{y}_3 = y_2 + hf\left(x_2, y_2\right) = 1{,}2421 + 0{,}1\left(0{,}2 + 1{,}2421\right) = 1{,}3863,$$

$$y_3 = y_2 + h\left(f\left(x_2, y_2\right) + f\left(x_3, \bar{y}_3\right)\right)/2 = 1{,}3985,$$

$$\bar{y}_4 = y_3 + hf\left(x_3, y_3\right) = 1{,}3985 + 0{,}1\left(0{,}3 + 1{,}3985\right) = 1{,}5783,$$

$$y_4 = y_3 + h\left(f\left(x_3, y_3\right) + f\left(x_4, \bar{y}_4\right)\right)/2 = 1{,}5823.$$

Отримані значення функції занесемо в таблицю

x_i	0	0,1	0,2	0,3	0,4
y_i	1	1,11	1,2421	1,3985	1,5823
y анал.	1	1,1103	1,2428	1,3997	1,5836

8.3. Метод Рунге-Кутта четвертого порядку точності

Нехай дано диференціальне рівняння $y' = f(x, y)$ з початковою умовою $y(x_0) = y_0$. Виберемо крок h, позначивши $x_i = x_0 + ih$ і $y_i = y(x_i)$, $(i = 0,1,2,\ldots)$. Розглянемо числа:

$$k_1^i = hf(x_i; y_i);$$
$$k_2^i = hf\left(x_i + h/2; y_i + k_1^i/2\right);$$
$$k_3^i = hf\left(x_i + h/2; y_i + k_2^i/2\right);$$
$$k_4^i = hf\left(x_i + h; y_i + k_3^i\right).$$

Тоді значення шуканої функції y визначається за формулою $y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$,

де $\Delta y_i = \left(k_1^i + 2k_2^i + 2k_3^i + k_4^i\right)/6$; $(i = 0,1,2,...)$.

Похибка цього методу – величина порядку $0\left(h^4\right)$.

Приклад. Розв'яжемо методом Рунге-Кутта задачу Коші: $y' = x + y$; $y(0) = 1$; $h = 0,1$ на інтервалі (0;0,4).

Розв'язок. Покажемо початок процесу.

Для y_1 обчислюємо послідовно

$$k_1^0 = (0+1)0,1 = 0,1,$$
$$k_2^0 = (0,05 + (1+0,05))0,1 = 0,11,$$
$$k_3^0 = (0,05 + (1+0,055))0,1 = 0,1105,$$
$$k_4^0 = (0,01 + (1+0,1105))0,1 = 0,12105.$$

Звідси $\Delta y_0 = (0,1 + 2(0,1105 + 0,11) + 0,12105) = 0,1103$.

Отже $y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 1 + 0,1103 = 1,1103$.

Аналогічно обчислюються подальші наближення.

Отримані значення занесені в таблицю

x_i	0	0,1	0,2	0,3	0,4
y_i	1	1,1103	1,2427	1,3996	1,5836
y анал.	1	1,1103	1,2428	1,3997	1,5836

8.4. Метод Адамса

Розглянемо задачу

$$y' = f(x;y);\ y(x_0) = x_0\ .$$

Потрібно знайти розв'язок рівняння на скінченому відрізку $(x_0;x_n)$. Поклавши h – крок інтегрування і $h>0$, одержимо систему точок $x_k = x_0 + kh$ розташованих на відрізку $(x_0;x_n)$, $(k = 0,1,..,n)$.

Далі знаходять будь-яким методом наступні три значення шуканої функції:

$$y_1 = y(x_1)\ ;\ y_2 = y(x_2);\ y_3 = y(x_3);$$

(ці три значення можна одержати будь-яким методом, що забезпечує потрібну точність: можливо, методом Рунге-Кутта, але не методом Ейлера, через його недостатню точність).

За допомогою чисел x_0, x_1, x_2, x_3 і y_0, y_1, y_2, y_3 обчислюють величини

$$q_0 = hy_0' = hf(x_0;y_0);\ q_1 = hf(x_1;y_1);$$
$$q_2 = hf(x_2;y_2);\quad q_3 = hf(x_3;y_3).$$

Далі складають таблицю кінцевих різниць величин "y_k" і "q_k"

x_k	y_k	Δy_k	$q_k = hf(x_k;y_k)$	Δq_k	$\Delta^2 q_k$	$\Delta^3 q_k$
x_0	y_0		q_0			
		Δy_0		Δq_0		
x_1	y_1		q_1		$\Delta^2 q_0$	
		Δy_1		Δq_1		$\Delta^3 q_0$
x_2	y_2		q_2		$\Delta^2 q_1$	
		Δy_2		Δq_2		
x_3	y_3		q_3			

Знаючи числа в нижньому косому рядку, за формулою Адамса знаходять

$$\Delta y_3 = q_3 + \Delta q_2/2 + 5\Delta^2 q_1/12 + 3\Delta^3 q_0/8\ ,$$

а потім величину $y_4 = y_3 + \Delta y_3$. Знаючи тепер y_4, обчислюють $q_4 = hf(x_4; y_4)$, після чого можна написати наступний косий рядок:

$$\Delta q_3 = q_4 - q_3 \;; \qquad \Delta^2 q_2 = \Delta q_3 - \Delta q_2 \;; \qquad \Delta^3 q_1 = \Delta^2 q_2 - \Delta^2 q_1 .$$

Він дозволяє обчислити за формулою Адамса значення

$$\Delta y_4 = q_4 + \Delta q_3/2 + 5\Delta^2 q_2/12 + 3\Delta^3 q_1/8 \;,$$

а отже $y_5 = y_4 + \Delta y_4$ і т.д., тобто в загальному вигляді

$$\Delta y_k = q_k + \Delta q_{k-1}/2 + 5\Delta^2 q_{k-2}/12 + 3\Delta^3 q_{k-3}/8 \;.$$

Приклад. Методом Адамса знайти на відрізку [0;1] розв’язок рівняння $y' = x + y$, $y(0) = 1$.

Розв’язок. Приймемо крок $h = 0{,}1$. Для початку процесу використовуємо значення, знайдені методом Рунге-Кутта, тобто $y_0 = 1$; $y_1 = 1{,}1103$; $y_2 = 1{,}2427$; $y_3 = 1{,}3996$.

Подальші обчислення розташуємо в таблиці:

i	x	y	Δy	q	Δq	$\Delta^2 q$	$\Delta^3 q$	y аналіт.

0	0	1		0,1000				1
					210			
1	0,1	1,1103		0,1210		23		1,1103
					333		1	
2	0,2	1,2427		0,1443		24		1,2428
					257		2	
3	0,3	1,3996		0,1700		26		1,3997
			0,1838		283		5	
4	0,4	1,5834		0,1983		31		1,5836
			0,2137		314		2	
5	0,5	1,7971		0,2297		33		1,7974
			0,2469		347		3	
6	0,6	2,0440		0,2644		36		2,0442
			0,2833		383		5	
7	0,7	2,3273		0,3027		41		2,3275
			0,3235		424		3	
8	0,8	2,6508		0,3451		44		2,6511
			0,3682		468			
9	0,9	3,0190		0,3919				3,0192
			0,4172					
10	1	3,4362						3,4366

З таблиці видно, що максимальна похибка наближеного розв'язку y не перевершує чотирьох одиниць останнього десяткового розряду.

РОЗДІЛ 9. НАБЛИЖЕНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

9.1. Метод Рітца

Як відомо, закон, за яким кожній функції з певного класу функцій ставиться у відповідність певне число називається функціоналом. Наприклад, розглянемо множину функцій $y(x)$ неперервно-диференційованих на відрізку $[a;b]$. Тоді довжина дуги

s кривої $y = y(x)$ між точками $x = a$ і $x = b$ є функціонал від $y(x)$, який може бути виражений формулою $s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dx$.

Метод Рітца, запропонований у 1908 р. німецьким фізиком і математиком В.Рітцем, полягає в пошуку екстремуму функціонала при заданих граничних умовах.

Розглянемо звичайне диференціальне рівняння

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = \varphi(x) \tag{1}$$

з лінійними крайовими умовами

$$y(a) = A; \qquad y(b) = B, \tag{2}$$

де функції $p_1(x)$, $p_2(x)$, $\varphi(x)$ неперервні на відрізку $[a;b]$.

Домноживши (1) на $e^{\int p_1(x)dx}$, приведемо його до так званого самоспoлученого вигляду

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)y'\right) + q(x)y = f(x), \tag{3}$$

де $p(x) = e^{\int p_1(x)dx}$, $q(x) = p_2(x)e^{\int p_1(x)dx}$, $f(x) = \varphi(x)e^{\int p_1(x)dx}$.

Введемо лінійний оператор

$$Ly = -\frac{d}{dx}\left(p(x)y'\right) - q(x)y.$$

Тоді рівняння (3) запишеться у вигляді

$$Ly = -f(x). \tag{4}$$

Крайова задача (4), (2) рівносильна задачі про мінімум функціонала

$$F[y] = (Ly; y) + 2(f; y), \tag{5}$$

чи після перетворення

$$F[y] = \int_a^b \left[p(x)(y')^2 - q(x)y^2 + 2f(x)y\right]dx. \tag{6}$$

Метод Рітца для розв'язання цієї варіаційної задачі полягає в наступному.

Вибираємо систему лінійно-незалежних базисних функцій $u_0(x)$, $u_1(x)$, $u_2(x),\dots,u_n(x)$ таких, що $u_0(a)=A$, $u_0(b)=B$, а інші $u_i(x)$ задовольняють умовам $u_i(a)=u_i(b)=0 \quad (i=1,2,...,n)$. Розв'язок варіаційної задачі (6) будемо шукати у вигляді

$$y(x)=u_0(x)+\sum_{i=1}^{n}c_i u_i(x), \tag{7}$$

де $c_i \quad (i=1,2,...,n)$ певні сталі. При обраних базисних функціях $y(a)=A$, $y(b)=B$. Коефіцієнти $c_i \quad (i=1,2,...,n)$ підберемо таким чином, щоб (7) давала екстремум функціонала (6), при цьому отримаємо наступну систему лінійних алгебраїчних рівнянь щодо зазначених коефіцієнтів

$$\frac{\partial F}{\partial c_1}=0, \quad \frac{\partial F}{\partial c_2}=0, \quad \dots, \quad \frac{\partial F}{\partial c_n}=0 \tag{8}$$

Приклад. Знайти розв'язок крайової задачі

$$y''+\left(1+x^2\right)y+1=0,$$
$$y(-1)=y(1)=0.$$

Розв'язок. У якості базисних виберемо функції: $u_0(x)=0;\ u_1(x)=1-x^2;\ \ u_2(x)=1-x^4$. Тоді розв'язок буде мати вигляд:

$$y=c_1\left(1-x^2\right)+c_2\left(1-x^4\right). \tag{9}$$

Вихідне диференціальне рівняння, де $p(x)=1,\ q(x)=1+x^2$, $f(x)=-1$ є самоспоялученим. Складемо для нього відповідний функціонал

$$F[y]=\int_{-1}^{1}\left[(y')^2-\left(1+x^2\right)y^2-2y\right]dx.$$

Заміняючи y його виразом (9), одержимо

$$F[y]=\int_{-1}^{1}\left[\left(2c_1x+4c_2x^3\right)^2-\left(1+x^2\right)\left(c_1\left(1-x^2\right)+c_2\left(1-x^4\right)\right)^2-2\left(c_1\left(1-x^2\right)+c_2\left(1-x^4\right)\right)\right]dx.$$

Знаходимо часткові похідні функціонала $F[y]$ за параметрами c_1 і c_2:

$$\frac{\partial F[y]}{\partial c_1}=\int_{-1}^{1}\left[4x\left(2c_1x+4c_2x^3\right)-\left(1+x^2\right)2\left(1-x^2\right)\left(c_1\left(1-x^2\right)+c_2\left(1-x^4\right)\right)-2\left(1-x^2\right)\right]dx=$$

$$=8\left(\frac{38}{105}c_1+\frac{4}{9}c_2-\frac{1}{3}\right),$$

$$\frac{\partial F[y]}{\partial c_2}=\int_{-1}^{1}\left[8x^3\left(2c_1x+4c_2x^3\right)-2\left(1+x^2\right)\left(1-x^4\right)\left(c_1\left(1-x^2\right)+c_2\left(1-x^4\right)\right)-2\left(1-x^4\right)\right]dx=$$

$$=8\left(\frac{4}{9}c_1+\frac{2488}{3465}c_2-\frac{2}{5}\right).$$

Розв'язуючи систему

$$\frac{38}{105}c_1+\frac{4}{9}c_2=\frac{1}{3}; \qquad \frac{4}{9}c_1+\frac{2488}{3465}c_2=\frac{2}{5}$$

одержимо $c_1=0{,}988,\ c_2=-0{,}054.$

Розв'язком вихідної крайової задачі буде функція:

$$y=0{,}934-0{,}988x^2+0{,}054x^4.$$

9.2. Метод Гальоркіна

Нехай дана крайова задача

$$Ly\equiv y''+p(x)y'+q(x)y=f(x) \tag{1}$$

$$\begin{cases}\alpha_0y(a)+\alpha_1y'(a)=A\\ \beta_0y(b)+\beta_1y'(b)=B\end{cases} \tag{2}$$

Для знаходження наближеного розв'язку цієї задачі вчинимо так. Задаємося на (a,b) деякою системою лінійно-незалежних функцій $u_0,u_1,u_2,u_3,...,u_n$, неперервних і двічі неперервно-диференційованих.

Причому функція $u_0(x)$ повинна задовольняти неоднорідним крайовим умовам (2), а $u_1, u_2, u_3, ..., u_n$ повинні задовольняти однорідним крайовим умовам, тобто крайовим умовам

$$\begin{cases} \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = 0 \\ \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = 0 \end{cases}.$$

Розглянемо функцію y_n як лінійну комбінацію

$$y_n(x) = u_0(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i u_i(x) \qquad (3)$$

де c_i – невідомі константи.

Якщо базисні функції вибрати так, як це було описано вище, то y_n буде задовольняти крайовим умовам (2), незалежно від вибору c_i.

Розглянемо функцію $R(x, c_1, c_2, c_3, ..., c_n) = Ly_n - Ly$. Вона називається відхилом і отримується при підстановці в рівняння (1) виразу (3). Якщо відхил дорівнює нулю, то маємо випадок точного розв’язку. Задача розв’язання звичайного диференціального рівняння зводиться до того, щоб відхил був мінімальним. Тоді вираз (3) буде наближеним розв’язком задачі.

Підбір коефіцієнтів c_i породжує різні методи.

Суть методу Гальоркіна полягає в тому, що базисні функції повинні бути ортогональні до відхилу.

Умова ортогональності двох функцій має вигляд:

$$\int_a^b R(x, c_1, c_2, c_3, ..., c_n) u_i(x) dx = 0 \ , \qquad i = 1, 2, ..., n.$$

В результаті одержимо систему лінійних алгебраїчних рівнянь щодо невідомих коефіцієнтів $c_1, c_2, c_3, ..., c_n$. Знайшовши ці коефіцієнти і підставивши їх у (3), одержимо наближений розв’язок крайової задачі.

Приклад. Методом Гальоркіна знайти наближений розв'язок рівняння $y''+xy'+y=2x$, що задовольняє крайовим умовам $y(0)=1;\ y(1)=0$.

Розв'язок. За систему базисних функцій обираємо функції $u_0(x)=1-x;\quad u_1(x)=x(1-x);\quad u_2(x)=x^2(1-x);$ $u_3(x)=x^3(1-x)$.

Наближений розв'язок задачі шукаємо у вигляді полінома

$$y_3=(1-x)+c_1x(1-x)+c_2x^2(1-x)+c_3x^3(1-x)\ .$$

Підставляючи y_3 в ліву частину заданого диференціального рівняння, одержуємо відхил:

$$\begin{aligned}&R(x,c_1,c_2,c_3)=(1-4x)+c_1(-2+2x-3x^2)+\\&+c_2(2-6x+3x^2-4x^3)+c_3(6x-12x^2+4x^3-5x^4)\end{aligned}\ .$$

Умови ортогональності функції R до функцій $u_i(x)$ приводять до системи

$$\begin{cases}\int\limits_0^1(x-x^2)R(x,c_1,c_2,c_3)dx=0\\ \int\limits_0^1(x^2-x^3)R(x,c_1,c_2,c_3)dx=0\\ \int\limits_0^1(x^3-x^4)R(x,c_1,c_2,c_3)dx=0\end{cases}$$

Підставляючи замість R її значення, після відповідного інтегрування одержуємо систему

$$\begin{cases}133c_1+63c_2+36c_3=-70\\ 140c_1+108c_2+79c_3=-98\\ 264c_1+252c_2+211c_3=-210\end{cases}\ .$$

Звідси знаходимо: $c_1=-0{,}2090$; $c_2=-0{,}7894$, $c_3=0{,}2090$, і, отже, $y_3=(1-x)\left(1-0{,}29x-0{,}7894x^2+0{,}2090x^3\right)$ –

наближений розв’язок крайової задачі. Похибка наближеного розв’язку залежить від кількості базисних функцій.

9.3. Інтегральний метод найменших квадратів

Нехай дана крайова задача

$$Ly \equiv y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \qquad (1)$$

$$\begin{cases} \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A \\ \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B \end{cases} \qquad (2)$$

Для знаходження наближеного розв’язку цієї задачі вчинимо так. Задаємося на (a,b) деякою системою лінійно-незалежних функцій $u_0, u_1, u_2, u_3, ..., u_n$, неперервних і двічі неперервно-диференційованих. Причому функція $u_0(x)$ повинна задовольняти неоднорідним крайовим умовам (2), а $u_1, u_2, u_3, ..., u_n$ повинні задовольняти однорідним крайовим умовам, тобто крайовим умовам

$$\begin{cases} \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = 0 \\ \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = 0 \end{cases}.$$

Розглянемо функцію y_n як лінійну комбінацію

$$y_n(x) = u_0(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i u_i(x) \qquad (3)$$

де c_i – невідомі константи.

Якщо базисні функції вибрати так, як це було описано вище, то y_n буде задовольняти крайовим умовам (2), незалежно від вибору c_i.

Розглянемо функцію $R(x, c_1, c_2, c_3, ..., c_n) = Ly_n - Ly$. Вона називається відхилом і отримується при підстановці в рівняння (1) виразу (3). Якщо відхил дорівнює нулю, то маємо випадок точного розв'язку. Задача розв'язання звичайного диференціального рівняння зводиться до того, щоб відхил був мінімальним. Тоді вираз (3) буде наближеним розв'язком задачі.

Підбір коефіцієнтів c_i породжує різні методи.

Суть інтегрального методу найменших квадратів в тому, щоб інтеграл

$$I = \int_a^b R^2(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)dx$$

був мінімальним. Для мінімуму інтеграла I необхідне виконання умов:

$$\frac{\partial I}{\partial c_k} = 0; \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

тобто

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\frac{\partial I}{\partial c_1} = \int_a^b \frac{\partial R}{\partial c_1} R dx = 0 \\ \frac{1}{2}\frac{\partial I}{\partial c_2} = \int_a^b \frac{\partial R}{\partial c_2} R dx = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{1}{2}\frac{\partial I}{\partial c_n} = \int_a^b \frac{\partial R}{\partial c_n} R dx = 0 \end{cases}.$$

Одержуємо систему лінійних рівнянь щодо коефіцієнтів $c_1, c_2, \ldots, c_n$, з якої й визначаються ці коефіцієнти.

Приклад. Інтегральним методом найменших квадратів розв'язати крайову задачу

$$y'' + (1 + x^2)y + 1 = 0 \;;\; y(-1) = 0;\; y(1) = 0.$$

Розв'язок. Поклавши $u_1 = 1 - x^2$; $u_2 = x^2 - x^4$, будемо мати

$$y_2 = c_1(1 - x^2) + c_2(x^2 - x^4).$$

Підставивши цей вираз у вихідне рівняння, одержимо відхил

$$R(x)=1-(1+x^4)c_1+(2-11x^2-x^6)c_2 \ .$$

Відповідно до наведеного вище принципу інтегрального методу найменших квадратів, складемо вираз

$$I=\int_{-1}^{1}R^2(x)dx=\int_{-1}^{1}(1-(1+x^4)c_1+(2-11x^2-x^6)c_2)^2\,dx$$

і підберемо коефіцієнти c_1 і c_2 так, щоб інтеграл I мав найменше значення. Це дає систему рівнянь

$$\frac{1}{2}\frac{\partial I}{\partial c_1}=-\int_{-1}^{1}(1+x^4)(1-(1+x^4)c_1+(2-11x^2-x^6)c_2)^2\,dx=0$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial I}{\partial c_2}=\int_{-1}^{1}(2-11x^2-x^6)(1-(1+x^4)c_1+(2-11x^2-x^6)c_2)^2\,dx=0$$

чи

$$\frac{68}{45}c_1+\frac{3548}{1155}c_2=\frac{5}{4}; \quad \frac{3548}{1155}c_1+\frac{63404}{4095}c_2=\frac{38}{21} \ ,$$

звідси $c_1=0{,}985$; $c_2=-0{,}078$.

Отже, $y_2=0{,}985\left(1-x^2\right)-0{,}078\left(x^2-x^4\right)$.

9.4. Метод кінцевих різниць

Розглянемо лінійне диференціальне рівняння 2-го порядку із змінними коефіцієнтами

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x) \qquad (1)$$

$$\begin{cases}\alpha_0 y(a)+\alpha_1 y'(a)=A\\ \beta_0 y(b)+\beta_1 y'(b)=B,\end{cases}$$

де $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ неперервні функції на $[a,b]$, α_i,β_i,A,B - сталі, такі, що $|\alpha_0|+|\alpha_1|\neq 0,;|\beta_0|+|\beta_1|\neq 0$.

Розіб'ємо відрізок $[a,b]$ на n рівних частин, тобто одержимо $h=(b-a)/n$; побудуємо систему рівновіддалених вузлів

$$x_i = x_0 + ih \quad (i=1,\ldots,n-1); \quad x_0 = a; \quad x_n = b \ .$$

Розв’язок задачі будемо шукати чисельно. Для цього в рівнянні (1) похідні замінимо кінцевими різницями другого порядку точності.

Введемо позначення $y(x_i)=y_i$, $p(x_i)=p_i$, $q(x_i)=q_i$, $f(x_i)=f_i$.

Одержимо:

$$\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2}+p_i\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h}+q_iy_i=f_i \quad (i=1,2,...,n-1). \qquad (2)$$

Граничні умови запишемо в такому вигляді:

$$\begin{cases}\alpha_0 y_0+\alpha_1\dfrac{-3y_0+4y_1-y_2}{2h}=A\\ \beta_0 y_n+\beta_1\dfrac{3y_n-4y_{n-1}+y_{n-2}}{2h}=B\end{cases}. \qquad (3)$$

Таким чином одержимо систему $n+1$ рівнянь з $n+1$ невідомими. Розв’язуючи цю систему, знайдемо значення функції y у відповідних точках.

Приклад. Методом кінцевих різниць знайти розв’язок крайової задачі:

$$y''+\left(1+x^2\right)y=-1$$
$$y(-1)=y(1)=0 \ .$$

Розв’язок. Виберемо крок $h=0{,}5$. Поклавши $x_{-2}=-1; \ x_{-1}=-0{,}5; \ x_0=0; \ x_1=0{,}5; \ x_2=1$, з огляду на симетрію рівняння і крайових умов будемо мати $y_{-2}=y_2=0; \ y_{-1}=y_1$. Таким чином, потрібно визначити лише дві ординати: y_0 і y_1. Запишемо рівняння (2) у вигляді

$$\left(y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}\right)/h^2+\left(1-x_i^2\right)y_i=-1 \ .$$

При $i=0$, тобто при $x_0=0$ будемо мати

$$\left(y_1-2y_0+y_{-1}\right)/0{,}25+y_0=-1\ .$$

Аналогічно при $i=1$, тобто при $x_1=0{,}5$ будемо мати

$$\left(y_0-2y_1+y_2\right)/0{,}25+\left(1+0{,}25\right)y_1=-1\ .$$

З огляду на $y_{-1}=y_1$ і використовуючи крайову умову $y_2=0$, маємо систему

$$-7y_0+8y_1=-1 \qquad\qquad 4y_0-6{,}75y_1=-1.$$

Звідси $y_0=0{,}967$; $y_1=0{,}721$.

Отримані значення занесемо в таблицю

i	0	1	2	3	4
x	-1	-0,5	0	0,5	1
y	0	0,721	0,967	0,721	0

РОЗДІЛ 10. ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ’ЯЗАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

10.1. Різницевий метод розв’язання задачі Діріхле для рівняння Пуассона

Розглянемо задачу Діріхле для рівняння еліптичного типу - рівняння Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f\left(x,y\right) \quad \text{на } G, \tag{1}$$

$$u=\varphi \quad \text{на } \Gamma, \tag{2}$$

де G – деяка скінчена область (рис. 1), Γ – границя області G, $f\left(x,y\right)$ – задана на G функція, φ – задана на Γ функція.

Суть різницевого методу розв’язання задачі (1), (2) така. Будуємо квадратну сітку з кроком $h = 1/M$ (M –

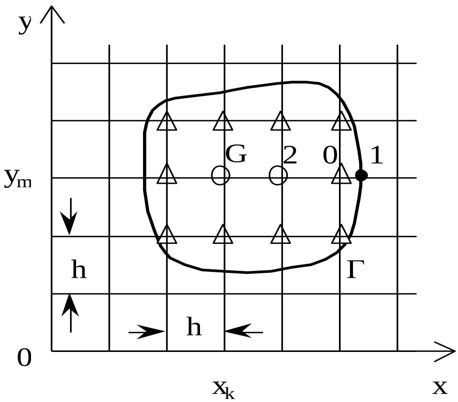

Рис.1.

натуральне): $x_k = kh$, $y_m = mh$. В усіх розташованих в області G вузлах сітки, які можна з'єднати з чотирма найближчими вузлами відрізками прямих, не перетинаючи границю Γ, частинні похідні $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, що входять у рівняння (1), замінимо формулами чисельного диференціювання другого порядку точності (порядку $O(h^2)$):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{V_{k-1,m} - 2V_{km} + V_{k+1,m}}{h^2},$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{V_{k,m-1} - 2V_{km} + V_{k,m+1}}{h^2}, \qquad (3)$$

де $V_{km} = V(x_k, y_m)$ – наближений розв’язок задачі (1), (2).

Підставляючи (3) у (1), одержимо:

$$\frac{V_{k-1,m}-2V_{km}+V_{k+1,m}}{h^2}+\frac{V_{k,m-1}-2V_{km}+V_{k,m+1}}{h^2}=f_{km}\ , \qquad (4)$$

де $f_{km}=f(x_k,y_m)$.

Для всіх внутрішніх вузлів області G поблизу її границі Γ (позначених на рис. 1 трикутниками), для задання різницевих рівнянь застосовується лінійна інтерполяція в напрямку осі x. Наприклад, у точці з номером 0 рівняння має вигляд

$$V_0=\frac{\rho_1}{\rho_1+\rho_2}V_2+\frac{\rho_2}{\rho_1+\rho_2}\varphi_1\ , \qquad (5)$$

де ρ_1 – відстань від точки 0 до точки 1 на границі Γ, у якій береться задане значення функції φ, позначене через φ_1; V_0, V_2 – невідомі в точках $0,2$; $\rho_2=h$ – відстань між цими точками. Тут для простоти використовується один індекс. Формула (5) означає лінійну інтерполяцію між точками $1,2$ в точці 0.

Аналогічні різницеві рівняння задаються в інших вузлах, позначених трикутниками. При цьому відстань від точки, в яку відбувається інтерполяція, до обох крайніх точок не повинна перевищувати h і одна чи обидві крайні точки повинні лежати на границі Γ.

Отже, у кожному вузлі, позначеному кружком, задане рівняння (4), а в кожному вузлі, позначеному трикутниками, рівняння має вид типу (5). Загальне число рівнянь збігається з числом невідомих. Отримана система лінійних алгебраїчних рівнянь має єдиний розв’язок V, для знаходження якого можуть бути застосовані прямі й ітераційні методи розв’язання систем рівнянь, викладені вище.

Якщо розв’язок задачі Дирихле (1), (2) $u(x,y)\in C_4(\overline{G})$, то справедлива оцінка похибки

$$\max_{G_h}|u-V|=O(h^2)\ ,$$

де $\overline{G} = G \bigcup \Gamma$, G_h – множина усіх вузлів, позначених кружками й трикутниками.

Приклад. Розв'язати задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \cos(x - y) + \frac{1{,}25y}{1{,}5 + x}$$

$$u(x,y)\big|_{\Gamma} = |x| + |y| \ ,$$

де $\Gamma: x^2 + y^2 = 1$.

Розв'язок. Візьмемо крок $h = 0{,}5$ і побудуємо сітку (див. рис.2).

З метою спрощення запису будемо використовувати один нижній індекс. Для зручності обчислень рівняння (4) розв'яжемо відносно V_{km}:

$$V_{km} = \frac{V_{k-1,m} + V_{k+1,m} + V_{k,m-1} + V_{k,m+1}}{4} - \frac{h^2}{4} f_{km} \cdot \qquad (4^*)$$

Використовуючи далі формули (4^*), (5), одержимо систему рівнянь щодо невідомих $V_i (i = 1,2,\ldots,9)$:

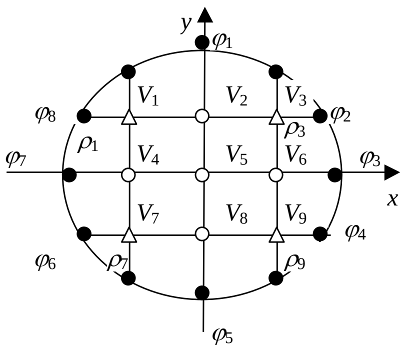

Рис.2

$$\left.\begin{aligned}
V_1 &= \frac{\rho_1}{\rho_1+h}V_2+\frac{h}{\rho_1+h}\varphi_8\\
V_2 &= \frac{V_1+\varphi_1+V_3+V_5}{4}-\frac{h^2}{4}f_2\\
V_3 &= \frac{\rho_3}{\rho_3+h}V_2+\frac{h}{\rho_3+h}\varphi_2\\
V_4 &= \frac{\varphi_7+V_1+V_5+V_7}{4}-\frac{h^2}{4}f_4\\
V_5 &= \frac{V_4+V_2+V_6+V_8}{4}-\frac{h^2}{4}f_5
\end{aligned}\right\}
\qquad
\left.\begin{aligned}
V_6 &= \frac{V_5+V_3+\varphi_3+V_9}{4}-\frac{h^2}{4}f_6\\
V_7 &= \frac{\rho_7}{\rho_7+h}V_8+\frac{h}{\rho_7+h}\varphi_6\\
V_8 &= \frac{V_7+V_5+V_9+\varphi_5}{4}-\frac{h^2}{4}f_8\\
V_9 &= \frac{\rho_9}{\rho_9+h}V_8+\frac{h}{\rho_9+h}\varphi_4
\end{aligned}\right\}$$

Обчислимо величини $\varphi_i (i=1,2,\ldots,8)$, f_2, f_4, f_5, f_6, f_8, ρ_1, ρ_3, ρ_7, ρ_9, використовуючи умови задачі:

$$\varphi_1=\varphi_3=\varphi_5=\varphi_7=1; \quad \varphi_2=\varphi_4=\varphi_6=\varphi_8=\left|\sqrt{1-0{,}5^2}\right|+|0{,}5|\approx 1{,}366;$$

$$f_2=\cos(0-0{,}5)+\frac{1{,}25\cdot 0{,}5}{1{,}5+0}\approx 1{,}295; \quad f_4=\cos(-0{,}5-0)+\frac{1{,}25\cdot 0}{1{,}5-0{,}5}\approx 0{,}878;$$

$$f_5=\cos 0+\frac{1{,}25\cdot 0}{1{,}5+0}=1; \quad f_6=\cos(0{,}5-0)+\frac{1{,}25\cdot 0}{1{,}5+0{,}5}\approx 0{,}878;$$

$$f_8=\cos(0+0{,}5)+\frac{1{,}25\cdot(-0{,}5)}{1{,}5+0}\approx 0{,}461;$$

$$\rho_1=\rho_3=\rho_7=\rho_9=\sqrt{1-0{,}5^2}-0{,}5\approx 0{,}366 \;.$$

Підставляючи обчислені значення в останню систему, перетворимо її до вигляду

$$\left.\begin{aligned}
V_1 &= 0{,}423V_2+0{,}788\\
V_2 &= 0{,}25(V_1+V_3+V_5)-0{,}169\\
V_3 &= 0{,}423V_2+0{,}788\\
V_4 &= 0{,}25(V_1+V_5+V_7)-0{,}195\\
V_5 &= 0{,}25(V_2+V_4+V_6+V_8)-0{,}063
\end{aligned}\right\}
\left.\begin{aligned}
V_6 &= 0{,}25(V_3+V_5+V_9)-0{,}195\\
V_7 &= 0{,}423V_8+0{,}788\\
V_8 &= 0{,}25(V_5+V_7+V_9)-0{,}221\\
V_9 &= 0{,}423V_8+0{,}788
\end{aligned}\right\}$$

Розв'язуючи систему, одержимо наближений розв'язок задачі: $V_1 = 0{,}946$; $V_2 = 0{,}374$; $V_3 = 0{,}946$; $V_4 = 0{,}340$; $V_5 = 0{,}277$; $V_6 = 0{,}340$; $V_7 = 0{,}918$; $V_8 = 0{,}307$; $V_9 = 0{,}918$.

РОЗДІЛ 11. ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ФРЕДГОЛЬМА II РОДУ

11.1. Наближене розв'язання інтегрального рівняння Фредгольма II роду шляхом зведення його до системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Нехай дано інтегральне рівняння Фредгольма другого роду

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,y)\varphi(y)dy = f(x) , \qquad (1)$$

де $K(x,y)$, $f(x)$ – ядро рівняння й вільний член відповідно, λ – чисельний параметр, $\varphi(x)$ – шукана функція.

Інтеграл, що входить у цю рівність, ми можемо за допомогою будь-якої квадратурної формули приблизно замінити на деякий простого виду вираз, що не містить знака інтеграла. Дійсно, усяка лінійна формула наближеного інтегрування має вид:

$$\int_a^b \psi(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k \psi(x_k) , \qquad (2)$$

де A_k, x_k – ваги і вузли квадратурної формули відповідно.

Після застосування формули (2) до інтеграла в лівій частині рівняння (1) приходимо до рівності:

$$\tilde{\varphi}(x) - \lambda \sum_{k=1}^{n} A_k K(x, x_k)\tilde{\varphi}(x_k) = f(x) , \qquad (3)$$

де через $\tilde{\varphi}(x)$ позначений наближений розв'язок для шуканої функції $\varphi(x)$.

Припускаючи потім у рівності (3) послідовно $x = x_1, x_2, ..., x_n$ приходимо, до наступної системи лінійних алгебраїчних рівнянь щодо невідомих $\tilde{\varphi}(x_i)$ $(i = 1, 2, ..., n)$ – наближень для значень шуканої функції $\varphi(x_i)$:

$$\tilde{\varphi}(x_i) - \lambda \sum_{k=1}^{n} A_k K(x_i, x_k) \tilde{\varphi}(x_k) = f(x_i) \quad (i = 1, 2, ..., n) \ . \qquad (4)$$

За цими значеннями наближене значення самої функції може бути знайдене за допомогою того чи іншого прийому інтерполяції. У даному спеціальному випадку зручніше за все одержати це значення, виходячи з рівності (3), а саме:

$$\tilde{\varphi}(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^{n} A_k K(x, x_k) \tilde{\varphi}(x_k) \ . \qquad (5)$$

Очевидно, що точність результату, отриманого при заміні інтегрального рівняння (1) системою лінійних рівнянь (4), буде тим вище, чим меншу похибку ми робимо, заміняючи інтеграл сумою, тобто буде залежати від того, яку квадратурну формулу ми застосовуємо для апроксимації інтеграла в рівності (1).

Приклад. Застосуємо розглянутий вище спосіб наближеного розв'язання інтегральних рівнянь до знаходження розв'язку рівняння

$$\varphi(x) - \frac{1}{2}\int_0^1 e^{xy} \varphi(y) dy = 1 - \frac{1}{2x}\left(e^x - 1\right) \ ,$$

використовуючи при цьому квадратурну формулу Гауса.

Заміняючи це інтегральне рівняння на систему, при $n = 2$, і прийнявши до уваги, що $\lambda = \frac{1}{2}$, $A_1 = A_2 = \frac{1}{2}$, одержимо систему (4) для даного випадку у вигляді:

$$\left(1-\frac{1}{4}K_{1,1}\right)\tilde{\varphi}(x_1)-\frac{1}{4}K_{1,2}\tilde{\varphi}(x_2)=f_1 \ ,$$

$$-\frac{1}{4}K_{2,1}\tilde{\varphi}(x_1)+\left(1-\frac{1}{4}K_{2,2}\right)\tilde{\varphi}(x_2)=f_2 \ .$$

Відповідно до викладеного вище, за x_1 й x_2 взяті вузли квадратурної формули Гауса для інтервалу $(0;1)$: $x_1=0{,}2113$; $x_2=0{,}7887$. Обчисливши значення $K_{i,k}=K(x_i,x_k)$, $f_i=f(x_i)$ і підставивши їх у систему, приведемо її до вигляду

$$0{,}7386\tilde{\varphi}(x_1)-0{,}2954\tilde{\varphi}(x_2)=0{,}4434$$

$$-0{,}2954\tilde{\varphi}(x_1)+0{,}5343\tilde{\varphi}(x_2)=0{,}2384 \ .$$

Розв’язуючи дану систему, одержимо:

$$\tilde{\varphi}(x_1)=0{,}9997 \ ; \ \tilde{\varphi}(x_2)=0{,}9990 .$$

Тоді наближений розв’язок в інших точках, згідно (5), може бути записаний у вигляді:

$$\tilde{\varphi}(x)=\frac{1}{4}\left(e^{0,2113x}\cdot 0{,}9997+e^{0,7887x}\cdot 0{,}9990\right)+1-\frac{1}{2x}\left(e^{x}-1\right) \ .$$

11.2. Метод послідовних наближень

Розглянемо інтегральне рівняння другого роду:

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,y)\varphi(y)dy=f(x) \ . \qquad (1)$$

Метод послідовних наближень для його розв’язання полягає в такому. Шукаємо розв’язок у вигляді ряду, розташованого за ступенями λ:

$$\varphi(x)=\varphi_0(x)+\lambda\varphi_1(x)+\lambda^2\varphi_2(x)+\ldots \qquad (2)$$

Підставляючи цей ряд у рівняння (1) і прирівнюючи коефіцієнти при однакових ступенях λ, одержимо:

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_0(x) = f(x) \\ &\varphi_1(x) = \int_a^b K(x,y)\varphi_0(y)dy \\ &\varphi_2(x) = \int_a^b K(x,y)\varphi_1(y)dy \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

З цих рівностей можна визначити послідовно усі функції $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$,..., підставивши які потім в (2), закінчимо процес побудови розв'язку.

Можна довести, припускаючи обмеженим ядро $|K(x,y)| \le M$, що ряд (2) буде рівномірно збігатися до розв'язку рівняння (1), якщо λ задовольняє умові:

$$|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)} \ . \qquad (4)$$

Похибка ε, яку ми допустимо, якщо обмежимося n членами в ряду (2), може бути оцінена досить просто. А саме, припускаючи $|f(x)| \le N$, легко одержати, що

$$\varepsilon < \frac{NM^n(b-a)^n|\lambda|^n}{1-M(b-a)|\lambda|} \ .$$

Зазначимо, що якщо інтеграли (3) не можуть бути обчислені точно, то потрібно застосувати формули наближеного інтегрування, що, однак, внесе додаткову похибку в розв'язок.

Приклад. Методом послідовних наближень розв'язати рівняння

$$\varphi(x) - \frac{1}{2}\int_0^1 \varphi(y)dy = \sin \pi x \ .$$

Розв'язок. У даному випадку, оскільки $\lambda = \frac{1}{2}$ і $K(x,y) = 1$, умова (4) виконана. Прийнявши $\varphi_0(x) = \sin \pi x$, послідовно знаходимо

$$\varphi_1(x) = \sin \pi x + \frac{1}{2}\int_0^1 \varphi_0(y)dy = \sin \pi x + \frac{1}{2}\int_0^1 \sin \pi y dy = \sin \pi x + \frac{1}{\pi};$$

$$\varphi_2(x) = \sin \pi x + \frac{1}{2}\int_0^1 \varphi_1(y)dy = \sin \pi x + \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\sin \pi y + \frac{1}{\pi}\right)dy = \sin \pi x + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2\pi};$$

$$\varphi_3(x) = \sin \pi x + \frac{1}{2}\int_0^1 \varphi_2(y)dy = \sin \pi x + \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\sin \pi y + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2\pi}\right)dy =$$

$$= \sin \pi x + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{2^2\pi}.$$

Взагалі,

$$\varphi_n(x) = \sin \pi x + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2\pi} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}\pi} = \sin \pi x + \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^k},$$

звідси

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \sin \pi x + \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k} = \sin \pi x + \frac{2}{\pi}.$$

Тому розв'язком вихідного рівняння є функція

$$\varphi(x) = \sin \pi x + \frac{2}{\pi},$$

у чому можна переконатися за допомогою безпосередньої перевірки.