

Лекція №5

Тема: «Границя функції»

План

1. Означення границі функції за Коші та за Гейне.
2. Односторонні границі функції.
3. Границя функції на нескінченності.

1. Означення границі функції за Коші та за Гейне.

Нехай функція $f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0 , крім, може бути, самої точки x_0 . В точці x_0 функція може бути і не визначена.

Означення. Число A називається границею функції $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$, якщо для будь-якої числової послідовності значень аргументу $x_n \rightarrow x_0$ ($x_n \neq x_0$) відповідна послідовність значень функції $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots$ прямує до числа A . Позначають границю функції так: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

При цьому припускається, що послідовність $\{x_n\}$ належить області визначення функції.

Суть цього означення полягає в тому, що, як тільки значення аргументу необмежено близько наближаються до значення x_0 , відповідні значення функції необмежено близько наближаються до значення A .

Більш строгим є наступне означення границі.

Означення. Число A називається границею функції $f(x)$ при x прямуючому до x_0 , якщо для кожного скільки завгодно малого наперед заданого додатного числа ε можна вказати таке додатне число δ , що як тільки $0 < |x - x_0| < \delta$, то виконується умова $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Оскільки нерівність $|x - x_0| < \delta$ визначає δ -окіл точки x_0 на вісі абсцис, а нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$ визначає ε -окіл точки A на вісі ординат, геометричний зміст означення 2.8 такий: для будь-якого ε -околу точки A на вісі Oy можна знайти такий δ -окіл точки x_0 на вісі Ox , що як тільки значення аргументу x

попадає в δ -окіл точки x_0 , відповідне значення функції попадає в ε -окіл точки A .

Приклад. Довести, виходячи з означення границі функції, що $\lim_{x \rightarrow 2} (2x - 1) = 3$.

Розв'язання. Нехай ε – будь-яке, як завгодно мале, додатне число. Знайдемо таке $\delta > 0$, щоб для всіх x , що задовольняють нерівність $|x - 2| < \delta$, виконувалася нерівність

$$|(2x - 1) - 3| < \varepsilon \text{ або } 2|x - 2| < \varepsilon, \quad |x - 2| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Очевидно, що $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, оскільки при такому δ умова $|x - 2| < \delta$ приводить до виконання умови $|(2x - 1) - 3| < \varepsilon$, з чого випливає, що $\lim_{x \rightarrow 2} (2x - 1) = 3$.

Означення. Число $a \in \mathbb{R}$ називається *точкою скупчення*¹ множини X , якщо у будь-якому її ε -околі знайдеться хоча б одна точка множини X відмінна від a . В наступних означеннях будемо припускати, що точка a є точкою скупчення множини $D(f)$.

Означення границі функції за Гейне.

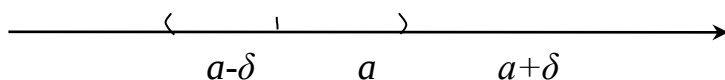
def Г.: $b = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall \{x_n\} \subset D(f) : (x_n \rightarrow a \wedge x_n \neq a) \Rightarrow f(x_n) \rightarrow b$.

Число b – називається границею функції $f(x)$ в точці a , якщо для будь-якої послідовності значень аргументу x_n із того, що вона збігається до a і утворена із членів, відмінних від a , випливає, що відповідна послідовність значень функції збігається до b .

Означення границі функції за Коші.

def К.: $b = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in D(f) : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$.

Множина $x = (a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}$ – це проколотий δ -окіл точки a .



Приклад. Розглянемо функцію $f(x) = x \cdot \sin \frac{1}{x}$. Маємо

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Доведемо, що $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

За Гейне. Нехай $x_n \rightarrow 0$, тоді $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \sin \frac{1}{x_n} = 0$.

За Коші. Нехай $|x-0|=|x|<\delta$, тоді $|f(x)-0|=|x \cdot \sin \frac{1}{x}|=|x| \cdot \left| \sin \frac{1}{x} \right| < \delta \cdot 1 = \varepsilon$. Тобто імплікація

означення за Коші виконується, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ обрати $\delta = \varepsilon$.

Твердження. Означення границі функції за Гейне і за Коші – еквівалентні.

2. Односторонні границі функції.

Якщо розглянути графік функції, зображений на рис. 2.28, то стане ясно, що ця функція не має границі при $x \rightarrow x_0$. У такій ситуації говорять про односторонні границі функції. Якщо $f(x) \rightarrow A$ за умови, що значення аргументу прямують до x_0 , залишаючись менше x_0 , число A називають границею функції $f(x)$ в точці $x = x_0$ зліва, і пишуть $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = A$.

Аналогічно, якщо $f(x) \rightarrow A$ за умови, що, $x \rightarrow x_0$ залишаючись більше x_0 , то A називають правосторонньою границею функції $f(x)$ в точці $x = x_0$, і пишуть

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = A.$$

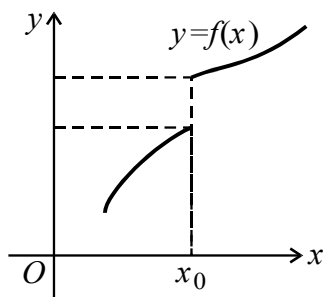


Рис. 2.28.

Якщо односторонні границі функції в точці існують і рівні, то функція має границю, і вона дорівнює загальному значенню цих границь.

Говорять, що границя функції при $x \rightarrow x_0$ дорівнює нескінченності, якщо для кожного як завгодно великого додатного числа M можна вказати таке додатне число δ , що для всіх x , які задовольняють нерівність $0 < |x - x_0| < \delta$, виконується умова $|f(x)| > M$.

У цьому випадку пишуть $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ (рис. 2.29).

Функція $f(x)$ має границею число A при $x \rightarrow \infty$, якщо для будь-якого, скільки завгодно малого $\varepsilon > 0$, можна вказати таке число $M > 0$, що для всіх x , які задовольняють нерівність $|x| > M$ виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$ (рис. 2.30). Пишуть $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$.

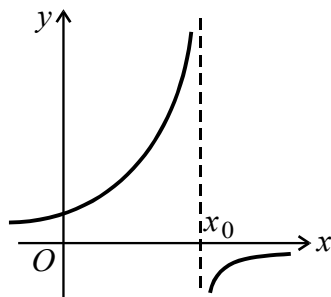


Рис. 2.29.

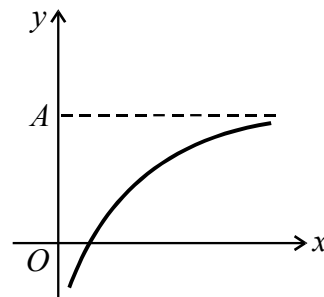


Рис. 2.30.

Скрізь будемо припускати далі, що точка a є точкою скупчення для множини $D(f) \cap (a, a + \delta)$ у означенні границі справа, а у означенні границі зліва точка a є точкою скупчення для множини $D(f) \cap (a - \delta, a)$.

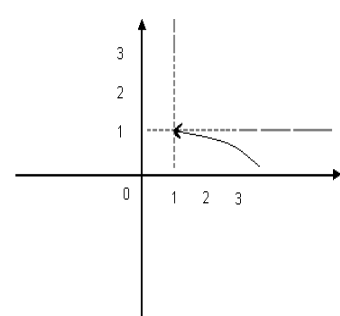
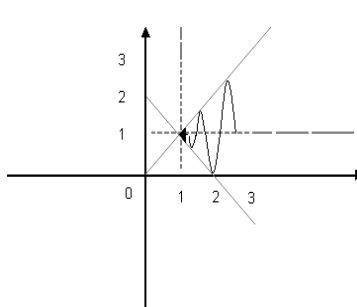
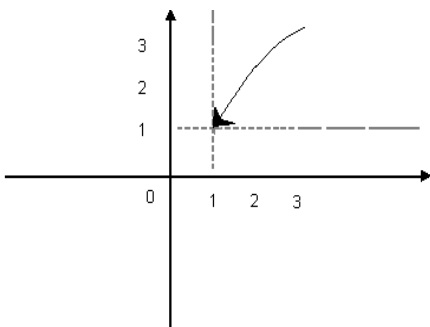
def I. Границею функції $f(x)$ в точці a справа називають таке число b , для якого справедливо

$$\forall \{x_n\} \in D(f): (x_n \rightarrow a \wedge x_n > a) \Rightarrow f(x_n) \rightarrow b.$$

Позначення: $b = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a+0)$.

def K.

$$b = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D(f) \ a < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$



$$\underbrace{\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b+0 \quad \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b \quad \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b-0}_{\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b}$$

Рис. 4.2.

def Г. $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b-0 \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall \{x_n\} \in D(f) : (x_n \rightarrow a \wedge x_n > a) \Rightarrow (f(x_n) \rightarrow b \wedge f(x_n) \leq b).$

def К. $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b-0 \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in D(f) : a < x < a + \delta \Rightarrow b - \varepsilon < f(x) \leq b$

3. Границя функції на нескінченності.

У загальному випадку коли $x \rightarrow \infty$ будемо припускати, що $\forall \delta > 0 \exists x \in D(f) \cap [(-\infty; -\delta) \cup (\delta; +\infty)]$ (рис. 2.11).

У випадку $x \rightarrow +\infty$ припускаємо, що $\forall \delta > 0 \exists x \in D(f) \cap (\delta; +\infty)$.

У випадку $x \rightarrow -\infty$ припускаємо, що $\forall \delta > 0 \exists x \in D(f) \cap (-\infty; -\delta)$.

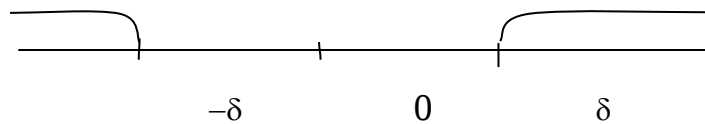


Рис. 2.11

Нижче наведено означення деяких границь на нескінченності за Гейне і за Коші, а на рис. 2.12 – деякі графічні приклади.

def Г. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall \{x_n\} \in D(f) : x_n \rightarrow \infty \Rightarrow f(x_n) \rightarrow b.$

def К. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D(f) : |x| > \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$

def Г. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b-0 \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall \{x_n\} \in D(f) : x_n \rightarrow +\infty \Rightarrow (f(x_n) \rightarrow b \wedge f(x_n) \leq b).$

def К. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b-0 \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D(f) : x > \delta \Rightarrow b - \varepsilon < f(x) \leq b.$

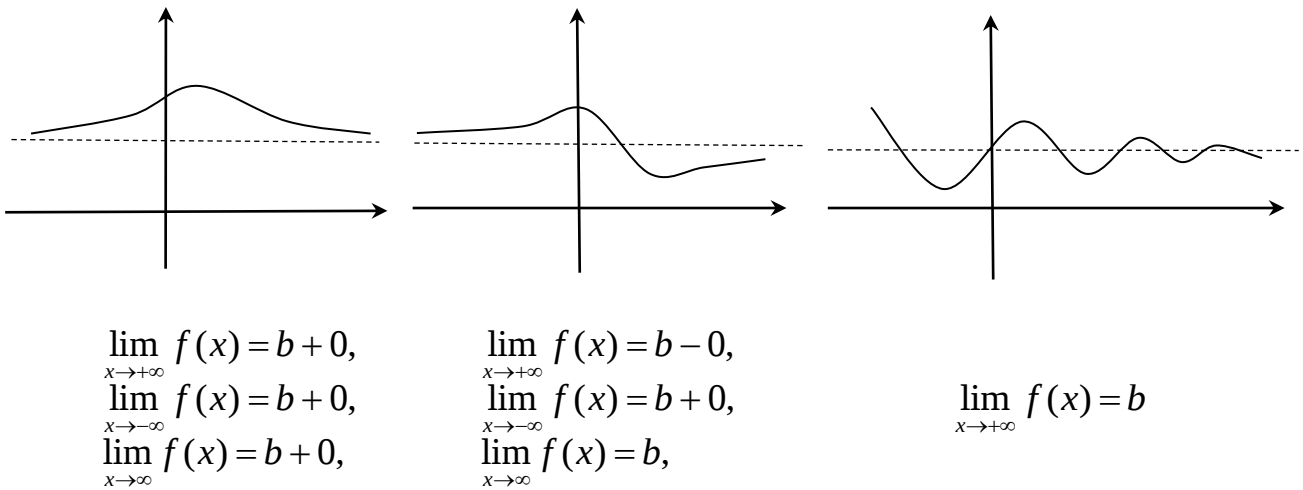


Рис. 2.12

Приклад 2.11. Для функції $f(x) = \frac{1}{x}$

(див. рис.2.13) маємо

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -0, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +0.$$

Дійсно, розглянемо, наприклад, першу границю. За означенням за Коші маємо:

$\forall \varepsilon > 0$ для $\delta = \frac{1}{\varepsilon}$ справедливою є імплікація

$$|x| > \delta \Rightarrow \left| \frac{1}{x} \right| < \frac{1}{\delta} = \varepsilon.$$

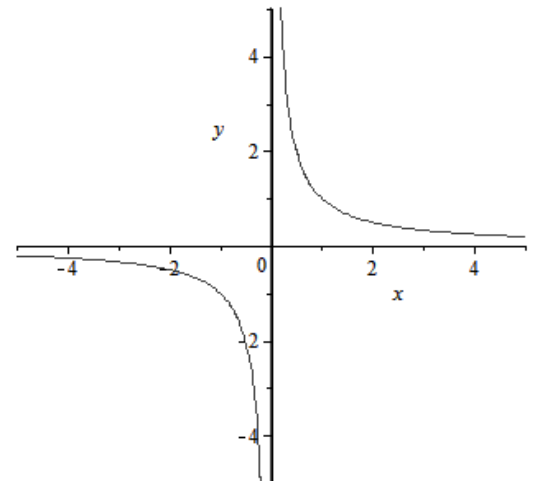


Рис. 2.13