

Лекція №6

Тема: «Істотні границі та наслідки з них»

План

1. Основні теореми про границю функції.
2. Арифметичні операції над функціями, які мають границю.
3. Види невизначеностей.
4. Перша істотна границя функції
5. Друга істотна границя функції

1. Основні теореми про границю функції.

Теорема. Якщо число A є границею функції $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$, то справедлива рівність $f(x) = A + \alpha(x)$, де $\alpha(x)$ при $x \rightarrow x_0$ – нескінченно мала функція.

Дійсно, якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, виходить, що для кожного, як завгодно

малого, наперед заданого додатного числа ε можна вказати таке додатне число δ що для всіх x , що задовольняють нерівність $0 < |x - x_0| < \delta$, виконується умова $|f(x) - A| < \varepsilon$, тобто функція $f(x) - A$ є нескінченно малою при $x \rightarrow x_0$. Назвемо її $\alpha(x)$. Маємо $f(x) - A = \alpha(x)$, звідки $f(x) = A + \alpha(x)$.

Легко довести і зворотне твердження: якщо функція $f(x)$ представлена у вигляді суми сталої і нескінченно малої при $x \rightarrow x_0$ функції, то ця постійна є границею функції при $x \rightarrow x_0$.

Теорема. Якщо функція $f(x)$ має границю при $x \rightarrow x_0$, то вона єдина.

Припустимо, що при $x \rightarrow x_0$ функція має дві границі $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ і

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = B$, причому $A \neq B$. Але тоді в силу теореми 2.2 $f(x) = A + \alpha(x)$ і

$f(x) = B + \beta(x)$, де $\alpha(x)$, $\beta(x)$ – нескінченно малі при $x \rightarrow x_0$ функції. Віднімемо отримані рівності: $(A - B) + \alpha(x) - \beta(x) = 0$ або $A - B = \beta(x) - \alpha(x)$. Це можливо тільки при $A = B$, оскільки $\beta(x) - \alpha(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow x_0$.

2. Арифметичні операції над функціями, які мають границю.

Теорема. Якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = B$, то:

$$а) \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm \varphi(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x);$$

$$б) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x);$$

$$в) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)}, \text{ якщо } \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) \neq 0.$$

Сформулювати теорему можна так.

Якщо дві функції мають границі при $x \rightarrow x_0$, то границя їхньої алгебраїчної суми дорівнює алгебраїчній сумі границь цих функцій, границя добутку дорівнює добутку границь, границя частки дорівнює частці границь заданих функцій, за умови, що границя знаменника не дорівнює нулю при $x \rightarrow x_0$.

Доведемо теорему для випадку “а”.

Дійсно, оскільки $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = B$, то на підставі теореми 2.2.

$f(x) = A + \alpha(x)$ і $\varphi(x) = B + \beta(x)$, де $\alpha(x)$, $\beta(x)$ – нескінченно малі при $x \rightarrow x_0$.

Але тоді $f(x) \pm \varphi(x) = (A \pm B) + (\alpha(x) \pm \beta(x))$, де $A \pm B$ – стала, $\alpha(x) \pm \beta(x)$ – нескінченно мала при $x \rightarrow x_0$ функція. Отже, відповідно до теореми 2.2 число $A \pm B$ є границею функції $f(x) \pm \varphi(x)$, або

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm \varphi(x)) = A \pm B = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x).$$

Що і потрібно було довести.

Аналогічно доводиться теорема для випадку “б”.

Для випадку “в” дріб $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ представимо у вигляді

$$\frac{A + \alpha(x)}{B + \beta(x)} = \frac{A}{B} + \left(\frac{A + \alpha(x)}{B + \beta(x)} - \frac{A}{B} \right) = \frac{A}{B} + \frac{\alpha(x)B - \beta(x)A}{B(B + \beta(x))},$$

де функція $\frac{\alpha(x)B - \beta(x)A}{B(B + \beta(x))}$ є нескінченно малою при $x \rightarrow x_0$.

$$\text{Тому } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{A}{B} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)}.$$

Н а с л і д о к . Сталі множники можна виносити за знак границі, тобто

$$\lim_{x \rightarrow x_0} C f(x) = C \lim_{x \rightarrow x_0} f(x).$$

Теорема 2.5. Якщо в околі точки x_0 виконуються нерівності $f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x)$ і $\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) = A$, то і $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

Для доведення розглянемо $\{x_n\}$ – довільну, що збігається до x_0 , послідовність значень аргументу функцій $f_1(x)$ і $f_2(x)$.

Відповідні послідовності $\{f_1(x_n)\}$ і $\{f_2(x_n)\}$ значень цих функцій мають границю, рівну A , тобто $f_1(x_n) \rightarrow A$, $f_2(x_n) \rightarrow A$ при $x_n \rightarrow x_0$.

Використовуючи нерівності, дані в умовах теореми, можна записати

$$f_1(x_n) \leq f(x_n) \leq f_2(x_n).$$

Звідси $f(x_n) \rightarrow A$, значить, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

З а у в а ж е н н я . Усі теореми про границі вірні також і у випадку, якщо x_0 є одним із символів ∞ , $-\infty$, $+\infty$.

3. Види невизначеностей.

Якщо ж у результаті підстановки замість x його граничного значення x_0

виходять так звані невизначеності $\left[\frac{0}{0}\right]$, $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, $[0 \cdot \infty]$, $[\infty - \infty]$, $[1^\infty]$, $[\infty^0]$, $[0^0]$,

для обчислення границі приходиться проводити перетворення функції, говорять, “звільнятися від невизначеності”.

Зокрема, якщо невизначеність $\left[\frac{0}{0}\right]$ отримана при обчисленні границі дробово-раціональної чи дробово-іраціональної функції при $x \rightarrow x_0$, необхідно в чисельнику і знаменнику дробу виділити нескінченно малу $x - x_0$ і скоротити на неї. Відзначимо, що ділення чисельника і знаменника дробу на нескінченно малу функцію можливо, оскільки це не нуль, а реальна величина, що змінюється так, що її значення можуть бути як завгодно малими.

Приклад 2.7. Обчислити $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 2x}$.

Розв'язання. Безпосередня підстановка у функцію граничного значення аргументу приводить до невизначеності вигляду $\left[\frac{0}{0}\right]$. Вирази чисельника і знаменника містять у собі нескінченно малу $x - 2$:

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3), \quad x^2 - 2x = x(x - 2).$$

$$\text{Тому } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 2x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 3}{x} = -\frac{1}{2}.$$

Приклад 2.8. Обчислити $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x - 4} - 1}{x^2 - 25}$.

Розв'язання. Тут безпосередня підстановка у функцію $x = 5$ приводить до невизначеності $\left[\frac{0}{0}\right]$. Щоб виділити в чисельнику нескінченно малу при $x \rightarrow 5$ ($x - 5$) помножимо чисельник і знаменник дробу на вираз, спряжений чисельнику (позбудемося від іраціональності в чисельнику):

$$\frac{\sqrt{x - 4} - 1}{x^2 - 25} = \frac{(\sqrt{x - 4} - 1)(\sqrt{x - 4} + 1)}{(x^2 - 25)(\sqrt{x - 4} + 1)} = \frac{x - 5}{(x^2 - 25)(\sqrt{x - 4} + 1)}.$$

$$\text{Тоді } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x - 4} - 1}{x^2 - 25} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x - 5}{(x^2 - 25)(\sqrt{x - 4} + 1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{(x+5)(\sqrt{x-4}+1)} = \frac{1}{20}.$$

Розповсюджена границя відношення многочленів при прямуюванні аргументу до нескінченності, що дає невизначеність $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n \left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_n}{x^n} \right)}{x^m \left(b_0 + \frac{b_1}{x} + \dots + \frac{b_m}{x^m} \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} x^{n-m} \frac{a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_n}{x^n}}{b_0 + \frac{b_1}{x} + \dots + \frac{b_m}{x^m}} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } n < m, \\ \frac{a_0}{b_0}, & \text{якщо } n = m, \\ \infty, & \text{якщо } n > m. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Тут } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_n}{x^n}}{b_0 + \frac{b_1}{x} + \dots + \frac{b_m}{x^m}} = \frac{a_0}{b_0}.$$

$$\text{Наприклад, } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 4x + 2}{3x^2 + 1} = \frac{5}{3}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2}{x^4 + 3x^2 + 1} = 0 \text{ і т.д.}$$

Невизначеності $[0 \cdot \infty]$ і $[\infty - \infty]$ приводять до невизначеностей $\left[\frac{0}{0} \right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$,

перетворивши досліджувану функцію у дріб.

$$\text{Приклад 2.9. Обчислити } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{4x^2 + 1} - x \right).$$

Розв'язання. Безпосередньою підстановкою замість x граничного значення одержимо невизначеність $[\infty - \infty]$.

Перетворимо досліджувану функцію, помноживши і розділивши її на суму $\sqrt{4x^2 + 1} + x$, одержимо

$$\frac{\left(\sqrt{4x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{4x^2+1}+x\right)}{\sqrt{4x^2+1}+x} = \frac{3x^2+1}{\sqrt{4x^2+1}+x}.$$

Тоді $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{4x^2+1}-x\right) = [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2+1}{\sqrt{4x^2+1}+x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \left(3 + \frac{1}{x^2}\right)}{x \left(\sqrt{4 + \frac{1}{x^2}} + 1\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \frac{3 + \frac{1}{x^2}}{\sqrt{4 + \frac{1}{x^2}} + 1} = \infty.$$

4. Перша істотна границя функції

Розглянемо границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$. Функція $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ парна,

$$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin x}{x} = f(x). \text{ За умовою } x \rightarrow 0, \text{ тому досить розглянути}$$

значення x , що задовольняють нерівності $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Візьмемо дугу кола радіуса R і кут, радіанна міра якого дорівнює x (рис.

2.31). На рис. 2.31: $OA = OB = R$, $\sin x = \frac{AD}{R}$, $\operatorname{tg} x = \frac{BC}{R}$

Порівняємо площі трикутника OAB , сектора OAB і

трикутника OBC , що відповідно дорівнюють $\frac{1}{2}OB \cdot AD$,

$$\frac{1}{2}R^2 x, \quad \frac{1}{2}OB \cdot BC \quad \text{або} \quad \frac{1}{2}R^2 \sin x, \quad \frac{1}{2}R^2 x, \quad \frac{1}{2}R^2 \operatorname{tg} x.$$

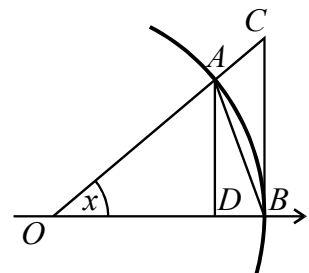


Рис. 2.31.

Очевидно $\frac{1}{2}R^2 \sin x < \frac{1}{2}R^2 x < \frac{1}{2}R^2 \operatorname{tg} x$, звідки

$\sin x < x < \operatorname{tg} x$. Розділимо останні нерівності на $\sin x$ ($\sin x > 0$) і одержимо

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}, \quad 1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x.$$

Функція $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ розташована між функціями $f_1(x) = 1$ і $f_2(x) = \cos x$,

причому $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$, тому за теоремою 2.5 одержимо

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad (2.5)$$

Границя (2.5) називається першою істотною границею. Використовуючи першу істотну границю можна показати, що

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1. \quad (2.6)$$

$$\text{Дійсно, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1,$$

і також

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1. \quad (2.7)$$

Замінімо $\arcsin x = y$, звідки $x = \sin y$, причому при $x \rightarrow 0$, $y \rightarrow 0$.

$$\text{Одержимо } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\sin y} = \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y}} = 1.$$

Аналогічно,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{artg} x}{x} = 1. \quad (2.8)$$

Границі 2.5–2.8 допомагають розкрити невизначеність $\left[\frac{0}{0} \right]$ у випадку,

якщо під знаком границі тригонометричні функції.

Приклад 2.10. Обчислити $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$.

Розв'язання. Безпосередньою підстановкою замість x граничного значення одержуємо невизначеність $\left[\frac{0}{0}\right]$. Перетворимо даний дріб, застосувавши формулу $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$, одержимо

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} &= \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \sin \frac{x}{2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{x}{2} = 1 \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

5. Друга істотна границя функції

Границю виду:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e \quad (2.9)$$

називають другою істотною границею.

Можна використовуючи границю (2.9) показати, що:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1; \quad (2.10)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e; \quad (2.11)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1. \quad (2.12)$$

Приклад. Обчислити $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$.

Розв'язання. Маємо

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x = \left[1^\infty\right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{\frac{x \cdot 2}{2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}} = e^2.$$