

Лекція №7

Тема: «Неперервність функції. О-символіка»

План

1. О-символіка.
2. Поняття неперервності функції.
3. Властивості функцій, неперервних в точці.
4. Одностороння неперервність функцій в точці.

1. О-символіка.

Нескінченно малі функції часто порівнюють між собою за швидкістю їхнього наближення до нуля. Нехай $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ нескінченно малі функції при $x \rightarrow x_0$.

Якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то говорять, що нескінченно мала $\alpha(x)$ більш

високого порядку, швидше наближається до нуля, ніж $\beta(x)$, або $\beta(x)$ нескінченно мала більш низького порядку, ніж $\alpha(x)$ при $x \rightarrow x_0$.

Якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \text{const} \neq 0$, то $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називаються нескінченно

малими одного порядку. Зокрема, якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то $\alpha(x)$ і $\beta(x)$

називаються еквівалентними нескінченно малими при $x \rightarrow x_0$. Той факт, що $\alpha(x)$ й $\beta(x)$ еквівалентні, записують так: $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \rightarrow x_0$.

Наприклад, функції $\alpha(x) = \sin 2x$, $\beta(x) = x$ при $x \rightarrow 0$ є нескінченно малими одного порядку, оскільки $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin 2x}{x} = 2$; функція $\alpha(x) = \sin^2 x$ є нескінченно

малою більш високого порядку, ніж $\beta(x) = x$, оскільки

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin^2 x}{x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = 1 \cdot 0 = 0$; функції $\alpha(x) = \sin x$ і $\beta(x) = x$ є

еквівалентними при $x \rightarrow 0$, оскільки $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Аналогічно можна показати,

що при $x \rightarrow 0$ $\text{tg } x \sim x$, $\arcsin x \sim x$, $\text{arctg } x \sim x$, $\ln(1+x) \sim x$, $e^x - 1 \sim x$.

Теорема. *Границя відношення нескінченно малих не змінюється при заміні їх еквівалентними нескінченно малими: якщо $\alpha \sim \alpha_1$, $\beta \sim \beta_1$, то*

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha_1}{\beta_1}.$$

Дійсно, помножимо і розділимо відношення $\frac{\alpha}{\beta}$ послідовно на α_1 і β_1 ,

одержимо

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\alpha_1}{\alpha_1} \cdot \frac{\beta_1}{\beta_1} = \lim \frac{\alpha}{\alpha_1} \cdot \frac{\beta_1}{\beta} \cdot \frac{\alpha_1}{\beta_1} = \lim \frac{\alpha}{\alpha_1} \cdot \lim \frac{\beta_1}{\beta} \cdot \lim \frac{\alpha_1}{\beta_1} = \lim \frac{\alpha_1}{\beta_1},$$

оскільки $\lim \frac{\alpha}{\alpha_1} = \lim \frac{\beta_1}{\beta} = 1$.

При обчисленні границь часто буває корисно замінити нескінченно малу в чисельнику чи знаменнику дробу більш простою, еквівалентною їй нескінченно малою функцією.

Приклад. Обчислити $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\arcsin 3x}$.

Розв'язання. Оскільки при $x \rightarrow 0$ функції $\alpha(x) = \operatorname{tg} 2x$, $\beta(x) = \arcsin 3x$ – нескінченно малі, замінимо їхніми еквівалентами: $\operatorname{tg} 2x \sim 2x$, $\arcsin 3x \sim 3x$.

Тоді
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\arcsin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}.$$

Властивості $o(x)$:

- 1) $o(cx) = o(x)$, $c = \text{const}$;
- 2) $c \cdot o(x) = o(x)$, $c = \text{const}$;
- 3) $o(x) + o(x) = o(x)$;
- 4) $o(o(x)) = o(x)$;
- 5) $o(x^n) \cdot o(x^m) = o(x^{n+m})$, $n, m \in \mathbb{N}$;
- 6) $x^{n-1} \cdot o(x) = o(x^n)$, $n \in \mathbb{N}$;
- 7) $\frac{o(x^n)}{x} = o(x^{n-1})$, $n \in \mathbb{N}$, $x \neq 0$.

2. Поняття неперервності функції.

Означення 2.11. Функція $y = f(x)$ називається неперервною в точці x_0 , якщо вона визначена в точці x_0 та її околі, існує границя функції $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$, і ця границя співпадає зі значенням функції в точці x_0 , тобто

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0). \quad (2.13)$$

Рівність (2.13) можна записати у вигляді

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} x\right),$$

що дає можливість зробити наступний висновок: для функції, неперервної в точці, знаки функції і границі можна переставляти. Говорять, із границею можна переходити під знак функції. Наприклад,

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{x}{x+4}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x+4}} = e^0 = 1.$$

З виразу (2.13) на підставі теореми 2.2 випливає, що $f(x) = f(x_0) + \alpha(x)$ чи $f(x) - f(x_0) = \alpha(x)$, де $\alpha(x)$ функція нескінченно мала при $x \rightarrow x_0$ або $x - x_0 \rightarrow 0$.

Назвемо різницю $x - x_0$ приростом аргументу, а різницю $f(x) - f(x_0)$ *приростом функції*. Введемо позначення: $x - x_0 = \Delta x$; $f(x) - f(x_0) = \Delta y$. Тоді можна сформулювати інше означення функції, неперервної в точці.

Означення 2.12. Функція $f(x)$ називається неперервною в точці x_0 , якщо вона визначена в т. x_0 і нескінченно малому приросту аргументу відповідає нескінченно малий приріст функції, тобто

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0. \quad (2.14)$$

Означення 2.12 дає можливість стверджувати, що всі основні елементарні функції неперервні в кожній точці своєї області визначення.

Наприклад, для функції $f(x) = \sin x$ приріст в точці x_0 :

$$\Delta y = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0 = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left(x_0 + \frac{\Delta x}{2} \right).$$

Тоді:

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left(x_0 + \frac{\Delta x}{2} \right) = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x \cos \left(x_0 + \frac{\Delta x}{2} \right) = 0.\end{aligned}$$

А це значить, що функція $y = \sin x$ неперервна в кожній точці своєї області визначення.

Означення 2.13. Функція $f(x)$ називається неперервною в точці, якщо вона визначена в точці x_0 , і границя функції в точці ліворуч дорівнює границі функції в точці праворуч і дорівнює значенню функції в точці. Записують так:

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0), \quad (2.15)$$

або символічно $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$.

3. Властивості функцій, неперервних в точці.

Теорема 2.7. Сума, різниця, добуток скінченного числа функцій, неперервних у точці x_0 , також неперервні в цій точці.

Теорема 2.8. Частка від ділення двох функцій, неперервних у деякій точці x_0 , також неперервна в цій точці за умови, що знаменник у цій точці не дорівнює нулю.

Теореми доводяться на підставі відповідних теорем про границі.

Доведемо, наприклад, теорему 2.8. Нехай функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ неперервні в точці x_0 і $\varphi(x_0) \neq 0$. Це значить, що $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0)$.

Розглянемо функцію $F(x) = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$. Для цієї функції:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)} = \frac{f(x_0)}{\varphi(x_0)} = F(x_0),$$

тобто функція $F(x)$ неперервна в точці x_0 .

Теорема 2.9. Якщо функція $y = f(u)$ неперервна в точці u_0 , а функція $u = \varphi(x)$ неперервна в точці x_0 , причому $u_0 = \varphi(x_0)$, то складна функція $y = f(\varphi(x))$ неперервна в точці x_0 .

Покажемо, що для складної функції $y = f(\varphi(x))$ виконується означення неперервності: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(\varphi(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)\right) = f(\varphi(x_0))$, тобто складна функція $f(\varphi(x))$ неперервна в точці x_0 .

На підставі приведених теорем можна стверджувати, що всяка елементарна функція неперервна в кожній точці своєї області визначення.

4. Одностороння неперервність функцій в точці.

Одностороння неперервність функцій в точці a .

📁 **Означення** за Гейне. $f(x)$ - неперер. в т. a справа(зліва) $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$

$$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \quad \forall \{x_n\} \subset D_f : (x_n \rightarrow a \wedge x_n \geq a (x_n \leq a)) \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(a) .$$

📁 **Означення** за Коші: $f(x)$ - неперер. в т. a справа(зліва) $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$

$$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in D_f \quad a \leq x < a + \delta \quad (a - \delta < x \leq a) \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon .$$

📁 **Означення.** $f(x)$ - неперер. на множині A , якщо вона неперер. в $\forall$ точці $a \in A$.

📁 **Означення** Якщо в точці a функція не задовольняє умові неперервності $\Rightarrow$ кажуть, що $f(x)$ - має розрив в т. a .