

Лекція №8

Тема: «Класифікація точок розриву. Локальні властивості неперервних функцій»

План

1. Класифікація точок розриву функції.
2. Методика дослідження функції на неперервність.
3. Приклади.

1. Класифікація точок розриву функції.

Нехай функція $f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0 . Якщо функція неперервна в точці x_0 , для неї виконується означення неперервності. Якщо хоча б одна з рівностей (2.15) порушується, говорять, що функція в точці x_0 терпить розрив, а сама точка називається точкою розриву.

Якщо односторонні границі функції в точці x_0 рівні, але не дорівнюють значенню функції в точці, тобто $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0)$, говорять, що в точці x_0 усувний розрив. Прикладом такого розриву є розрив функції

$f(x) = \frac{\sin x}{x}$ в точці $x_0 = 0$. Дійсно, функція визначена, а значить і неперервна

для всіх x , крім $x = 0$. У самій точці $x = 0$ функція не визначена, але

$\lim_{x \rightarrow \pm 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, отже, маємо усувний розрив. Досить довизначити функцію в

точці $x = 0$, поклавши $f(0) = 1$. Нова функція

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 1 & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

неперервна в точці $x = 0$ і на всій числовій прямій.

Якщо односторонні границі функції в точці x_0 різні, але обидві скінченні, то говорять, що в цій точці розрив першого роду. Наприклад, функція

$f(x) = \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x-1}}}$ не визначена в точці $x = 1$.

Обчислимо односторонні границі функції в зазначеній точці, використовуючи символічні записи:

$$f(1-0)=\left[\frac{1}{1+\frac{1}{2^{1-0-1}}}=\frac{1}{1+2^{-\infty}}\right]=1, f(1+0)=\left[\frac{1}{1+\frac{1}{2^{1+0-1}}}=\frac{1}{1+2^{\infty}}\right]=0.$$

Отже, в точці $x=0$ функція терпить розрив першого роду. Графік такої функції зображений на рис. 2.32.

Розрив першого роду називають розривом зі скінченним стрибком.

Якщо ж хоча б одна з однобічних границь функції в точці x_0 дорівнює нескінченності, говорять, що в точці розрив другого роду або розрив з нескінченним стрибком.

Такий розрив має функція $y = 2^{\frac{1}{x}}$ в точці $x = 0$. Дійсно:

$$f(0-0)=\left[2^{\frac{1}{-0}}=2^{-\infty}\right]=0; f(0+0)=\left[2^{\frac{1}{+0}}=2^{+\infty}\right]=\infty.$$

Графік функції зображений на рис. 2.33.

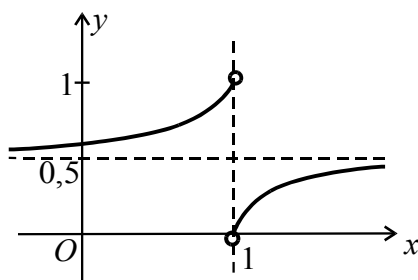


Рис. 2.32.

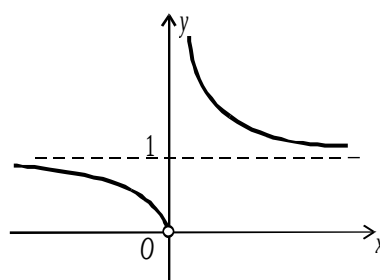


Рис. 2.33.

2. Методика дослідження функції на неперервність.

1. Знайти область визначення функції $D(f)$. Елементарна функція може мати розрив тільки в окремих точках, але не може бути розривною на певному інтервалі.

2. Дослідити функцію на неперервність у відкритих проміжках $D(f)$. Елементарна функція може мати розрив у точці де вона не визначена за умови, що вона буде визначена хоча б з однієї сторони від цієї точки.

3. Неелементарна функція може мати розриви як в точках, де вона невизначена, так і в тих, де вона визначена.

4. Обчислити односторонні границі функції у цих точках. Зробити висновок про характер точок розриву (якщо вони є). Введемо наступні позначення:

$$a = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x), \quad b = \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x), \quad c = f(x_0).$$

3. Приклади.

Приклад. Дослідити на неперервність функцію:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & x \leq 1, \\ 2x + 1, & x > 1. \end{cases}$$

Розв'язання. Оскільки всі елементарні функції неперервні в кожній точці своєї області визначення, функції $f_1(x) = 1 - x^2$ і $f_2(x) = 2x + 1$ неперервні на всій числовій прямій. Досліджуємо точку $x = 1$. Обчислимо односторонні границі функції в точці:

$$f(1-0) = f_1(1-0) = 1 - 1^2 = 0;$$

$$f(1+0) = f_2(1+0) = 2 \cdot 1 + 1 = 3;$$

$$f(1) = f_1(1) = 0.$$

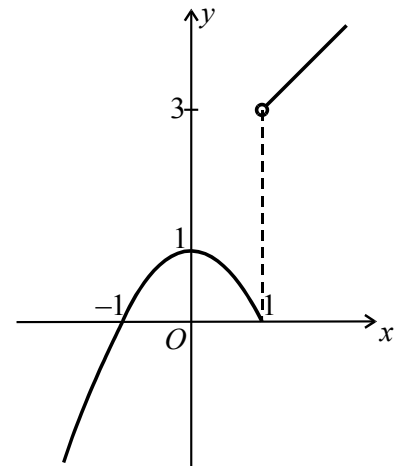


Рис. 2.34.

Отже, задана в умові функція неперервна в кожній точці числової прямої, крім точки $x = 1$. У точці $x = 1$ функція терпить розрив першого роду. Графік функції зображений на рис. 2.34.

Приклад. $f(x) = \text{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

1. $x_0 \neq 0 \Rightarrow$ за Каші довести:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Нехай $|x - x_0| < \delta \Rightarrow$ для достатньо малих δ , наприклад, $\delta < |x_0|$, значення x і x_0 мають однаковий знак $\Rightarrow f(x) = f(x_0) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$

Висновок. В усіх точках, окрім т. 0, $f(x) = \text{sign}(x)$ - неперер.

2. Якщо $x_0 = 0 \Rightarrow$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{в т. 0 } \nexists \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \Rightarrow \text{в т. 0 - розрив.}$$

Або те саме розглянемо за Гейне:

$$\left. \begin{array}{l} x_n > 0 \\ x_n \rightarrow 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} f(x_n) = 1 \\ f(x_0) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(x_n) \nrightarrow f(x_0) \Rightarrow \text{в т. } 0 - \text{розрив.}$$