

Лекція №9

Тема: «Локальні властивості неперервних функцій»

План

1. Локальні властивості неперервних функцій.
2. Асимптоти графіка функції

1. Локальні властивості неперервних функцій.

До локальних властивостей відносяться ті властивості які виконуються в якомусь околі точки. Це властивості, що характеризують поведінку функцій при прямуванні аргументу x до досліджуваної точки. До глобальних властивостей відносяться ті властивості які виконуються на всій області визначення функції.

Наприклад,

- 1) монотонність $f(x)$ на $(a;b)$ - глобальна властивість,
- 2) неперервність $f(x)$ в точці - локальна властивість.

Означення. Функція обмежена зверху (знизу) на множині $A \subset D_f$, якщо існує $M \in \mathbb{R}$ ($m \in \mathbb{R}$) таке що $f(x) \leq M$ ($f(x) \geq m$) $\forall x \in A$.

Означення. Функція обмежена (з обох боків) на множині $A \subset D_f$, якщо $\exists M \in \mathbb{R} \wedge \exists m \in \mathbb{R}$ такі що $m \leq f(x) \leq M \forall x \in A$.

Теорема 1 (теорема про локальну обмеженість функції, яка має скінчену границю в точці). Якщо в точці x_0 існує границя, то можна знайти δ -окіл точки x_0 , в якому функція буде обмежена. Тобто,

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b \Rightarrow \exists \delta > 0 : \forall x \in B_\delta(x_0) = (x_0 - \delta; x_0 + \delta) \cap D_f \quad m \leq f(x) \leq M.$$

Доведення.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall x \in D_f \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon \quad \forall x \in B_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}.$$

Два випадки.

$$\left. \begin{array}{l} 1. x_0 \in D_f \Rightarrow m = b - \varepsilon, M = b + \varepsilon \\ 2. x_0 \notin D_f \Rightarrow \left. \begin{array}{l} m = \min \{b - \varepsilon, f(x_0)\} \\ M = \max \{b + \varepsilon, f(x_0)\} \end{array} \right\} \Rightarrow \forall x \in B_\delta(x_0) \quad m \leq f(x) \leq M. \blacksquare \end{array} \right\}$$

Наслідок 1. Якщо $f(x)$ - неперер. в т. x_0 , тоді знайдеться δ -окіл т. x_0 , в якому функція буде обмежена.

Доведення. $f(x)$ - неперер. в т. $x_0 \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Далі потрібно застосувати попередню теорему. ■

Теорема (про сталість знаку неперер. в т. функції).

$$\left. \begin{array}{l} D_f - \text{область визнач.} \\ x_0 \in D_f - \text{точка неперер.} \\ f(x_0) > 0 \quad (< 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \exists \delta : \text{ в } B_\delta(x_0) \\ \text{функція має той самий} \\ \text{знак, що і } f(x_0), \text{ тобто} \\ \forall x \in B_\delta(x_0) \quad f(x) > 0 (< 0) \end{array} \right\}$$

Доведення.

$$f - \text{неперер. в т. } x_0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \forall x \in D_f \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Нехай $\varepsilon = \frac{|f(x_0)|}{2} \Rightarrow \forall x \in B_\delta(x_0) \quad |f(x) - f(x_0)| < \frac{|f(x_0)|}{2},$

$$f(x_0) - \frac{f(x_0)}{2} < f(x) < f(x_0) + \frac{f(x_0)}{2}.$$

$$\frac{f(x_0)}{2} < f(x) < \frac{3f(x_0)}{2}.$$

Випадок 1. $f(x_0) > 0 \Rightarrow f(x) > \frac{f(x_0)}{2} > 0 \quad \forall x \in B_\delta(x_0).$

Випадок 2. $f(x_0) < 0 \Rightarrow f(x) < \frac{3}{2} f(x_0) < 0 \quad \forall x \in B_\delta(x_0). \blacksquare$

Зауваження. До локальних властивостей відносять неперервність суми, різниці, добутку і частки непер. функцій в точці.

2. Асимптоти графіка функції

Означення 1.8. *Асимптота* – це пряма, яка має властивість, що відстань від точки кривої до цієї прямої прямує до нуля при віддаленні точки вздовж гілки кривої до нескінченності.

Асимптоти діляться на вертикальні, горизонтальні та похилі.

Означення 1.9. Пряма $x = a$ називається *вертикальною асимптотою* графіка функції $y = f(x)$, якщо хоча б одна границя $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ або $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ дорівнює $+\infty$ або $-\infty$.

Зауваження. Пряма $x = a$ не може бути вертикальною асимптотою, якщо функція неперервна у точці $x = a$. Тому вертикальні асимптоти треба шукати у точках розриву (точки розриву другого роду).

Означення 1.10. Пряма $y = b$ називається *горизонтальною асимптотою* графіка функції $y = f(x)$, якщо хоча б одна границя $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ або $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ дорівнює b .

Зауваження. Графік функції може мати тільки праву горизонтальну асимптоту або тільки ліву.

Означення 1.11. Пряма $y = kx + b$ називається *похилою асимптотою* графіка функції $y = f(x)$, якщо скінченні границі $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = k$ і $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = b$

Зауваження. Якщо хоча б одна з границь дорівнює ∞ , то похилої асимптоти немає. Горизонтальна асимптота є частинним випадком похилої асимптоти при $k = 0$.

Приклад. Знайти асимптоти графіка функції $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 1}$.

1) Область визначення функції $D(f): x \in (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$.

2) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 1} = \left\| \frac{6}{0} \right\| = \infty$, отже пряма $x = -1$ – вертикальна асимптота.

3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 1} = \infty$, отже горизонтальних асимптот немає.

4) $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x + 2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x} = 1$;

$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 3x + 2}{x + 1} - 1 \cdot x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x + 2 - x^2 - x}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x + 2}{x + 1} = -4$,

отже $y = x - 4$ – похила асимптота.

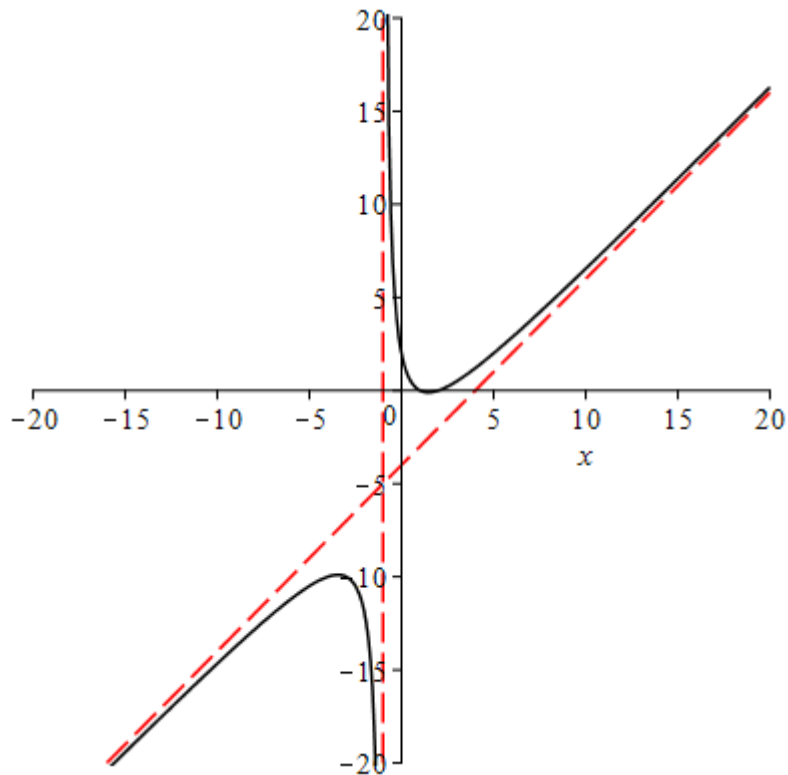


Рис. 2