

Лекція №10

Тема: «Глобальні властивості неперервних функцій»

План

1. Монотонні функції.
2. Глобальні властивості неперервних функцій. Теорема Вєрштраса.
3. Рівномірна неперервність функції.

1. Монотонні функції.

Означення. Функція $f(x)$ є *зростаючою*, тоді і тільки тоді, коли $\forall x_1, x_2 \in D(f): x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Означення. Функція $f(x)$ є *спадною*, тоді і тільки тоді, коли $\forall x_1, x_2 \in D(f): x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Означення. Функція $f(x)$ є *незростаючою*, тоді і тільки тоді, коли $\forall x_1, x_2 \in D(f): x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.

Означення. Функція $f(x)$ є *неспадною*, тоді і тільки тоді, коли $\forall x_1, x_2 \in D(f): x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.

Означення 1.9. Незростаюча і неспадна функції називаються *монотонними*.

2. Глобальні властивості неперервних функцій. Теорема Вєрштраса.

Теорема Коші (про проходження неперервної функції через 0, при зміні знаку).

$$\left. \begin{array}{l} f - \text{неперер. на } [a; b] \\ f(a) \cdot f(b) < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \exists c \in (a; b): f(c) = 0.$$

Тобто, якщо неперервна на відрізку функція приймає на кінцях цього відрізка значення різних знаків, тоді можна знайти таку внутрішню точку цього відрізка, в якій функція приймає нульове значення (рис. .23).

Доведення. Нехай для $f(a) > 0; f(b) < 0$

$$\square M = \{x \in [a; b]: f(x) > 0\}$$

1. $M \neq \emptyset$, так як $a \in M$

2. M - обмежена зверху

$\forall x \in M \quad x < b$, отже $\exists c = \sup M$.

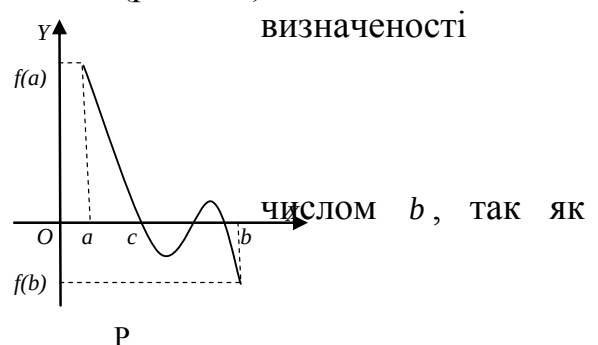
Довести: 1) $c \in (a; b)$,

2) $f(c) = 0$.

1) $c \in (a; b)$, так як, з одного боку, $f(a) > 0 \Rightarrow \exists \delta_1$ - окіл $B_{\delta_1}(a) = [a; a + \delta_1)$ такий, що $\forall x \in B_{\delta_1}(a), f(x) > 0$, а з іншого боку $f(b) < 0 \Rightarrow \exists \delta_2$ - окіл $B_{\delta_2}(b) = [b - \delta_2; b)$ такий, що $\forall x \in B_{\delta_2}(b), f(x) < 0$, тому, якщо $\delta_1 < (b - a)/3$ і $\delta_2 < (b - a)/3$, то $c \notin B_{\delta_1}(a) \wedge c \notin B_{\delta_2}(b) \Rightarrow c \in [a + \delta_1; b - \delta_2] \subset (a; b)$.

2) ПП: $f(c) \neq 0$. Тоді із теореми про сталість знаку неперервної в точці функції отримаємо

$$\exists \delta > 0: \forall x \in B_{\delta}(c) \quad f(x) \cdot f(c) > 0. \quad (*)$$

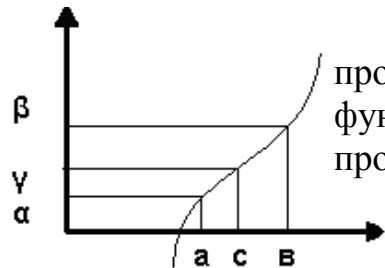


Оскільки $c = \sup M$, тоді для того ж самого δ

$$\exists x_1 \in M : c - \delta < x_1 \leq c \quad f(x_1) > 0.$$

Якщо $x_2 \in (c; c + \delta)$, то $x_2 \notin M \Rightarrow f(x_2) \leq 0$.

Таким чином, в $B_\delta(c)$ знайдено дві точки, значення функції в яких має різні знаки, а саме: $f(x_1) > 0$ і $f(x_2) \leq 0$,. Це суперечить (*). ■



Теорема (про проходження неперервної функції через будь яке проміжне значення).

$$\left. \begin{array}{l} f(x) - \text{неперер. на } [a; b] \\ f(a) = \alpha \wedge f(b) = \beta \end{array} \right\} \Rightarrow \Rightarrow \forall \gamma \in [\alpha; \beta] ([\beta; \alpha]) \exists c \in [a; b] : f(c) = \gamma$$

Рис. 4.24.

Доведення. Якщо

$$\gamma = \alpha \vee \gamma = \beta \Rightarrow c = a \vee c = b.$$

Нехай $\gamma \in (\alpha; \beta)$ ($\gamma \in (\beta; \alpha)$). Уведемо допоміжну функцію $\varphi(x) = f(x) - \gamma$ неперер. на $[a; b]$. Тоді

$$\varphi(a) = f(a) - \gamma = \alpha - \gamma, \quad \varphi(b) = f(b) - \gamma = \beta - \gamma.$$

Оскільки $\alpha < \gamma < \beta \vee \beta < \gamma < \alpha$, то $\varphi(a) \cdot \varphi(b) < 0$. Тобто уведена функція задовольняє умовам попередньої теореми. $\Rightarrow \exists c \in (a; b) : \varphi(c) = 0 = f(c) - \gamma \Rightarrow f(c) = \gamma$. ■

Теорема (про неперервність монотонної на відрізку $[a; b]$ функції).

$$\left. \begin{array}{l} f(x) - \text{задана на } [a; b] \\ f(x) \square (\square) \\ f(a) = \alpha \wedge f(b) = \beta \end{array} \right\} \Rightarrow (f - \text{неперер. на } [a; b] \Leftrightarrow \forall \gamma \in [\alpha; \beta] ([\beta; \alpha]) \exists c \in [a; b] : f(c) = \gamma) \quad \text{Доведення.}$$

Необхідність є безпосереднім наслідком попередньої теореми (про проходження неперервної функції через будь яке проміжне значення).

Достатність. Дано:

$$f(x) \square \text{ на } [a; b],$$

$$\alpha = f(a); \beta = f(b),$$

$$\forall \gamma \in [\alpha; \beta] \exists c \in [a; b] : f(c) = \gamma.$$

Довести: $f(x)$ -неперер. на $[a; b]$, тобто $\forall c \in [a; b]$ f -неперер. в точці $c \Leftrightarrow f(c+0) = f(c) = f(c-0)$.

Доведемо, що $f(c+0) = f(c)$.

ПП: $f(c+0) \neq f(c)$. З наслідку про існування односторонньої границі монотонної функції маємо $f(a) \leq f(c) < f(c+0) \leq f(b)$.

Тоді $\forall \gamma \in (f(c); f(c+0)) \nexists c \in [a; b] : f(c) = \gamma \rightarrow$. ■

Теорема (про неперервність оберненої до монотонної на відрізку $[a; b]$ функції).

$$\left. \begin{array}{l} y = f(x) - \text{неперер. на } [a; b], \\ f(x) \square (\square) \text{ строго,} \\ f(a) = \alpha, \quad f(b) = \beta, \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 1. \exists f^{-1}(y) - \text{задана на } [\alpha; \beta] ([\beta; \alpha]); \\ 2. f^{-1}(y) \square (\square); \\ 3. f^{-1}(y) - \text{неперер. на } [\alpha; \beta] ([\beta; \alpha]). \end{array} \right.$$

Доведення.

$$\left. \begin{array}{l} y = f(x) \\ \alpha = f(a), \beta = f(b) \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha < \beta,$$

Використаємо лему про монотонність оберненої до монотонної функції:

$$D_f = [a; b] \wedge f(a) = \alpha; f(b) = \beta \wedge E_f = [\alpha; \beta] (E_f = [\beta; \alpha]) \Rightarrow \begin{cases} (1) \exists f^{-1}: E_f \rightarrow D_f \\ (2) f^{-1} \sqsubseteq (\sqsubseteq) \end{cases}$$

Тобто (1) $\exists f^{-1}(y)$ задана на $[\alpha; \beta]$ (відповідає висновку 1. теореми),

(2) $f^{-1}(y) \sqsubseteq$ на $[\alpha; \beta]$ (відповідає висновку 2. теореми).

Із необхідної умови попередньої теореми

$$\left. \begin{array}{l} f(x) - \text{непер. на } [a; b] \\ f(x) \sqsubseteq (\sqsubseteq) \\ f(a) = \alpha \wedge f(b) = \beta \end{array} \right\} \Rightarrow \forall \gamma_1 \in [\alpha; \beta] \exists c \in [a; b]: \gamma_1 = f(c).$$

Звідки отримаємо: $f^{-1}: [\alpha; \beta] \rightarrow [a; b]$, тобто функція f^{-1} приймає всі свої проміжні значення з відрізка $[a; b]$:

$$\forall \gamma \in [\alpha; \beta] \exists c \in [a; b]: f^{-1}(c) = \gamma.$$

Із достатністю умови попередньої теореми маємо, що $f^{-1}(y)$ - неперер. на $[\alpha; \beta]$ (відповідає висновку 3. теореми). ■

Позначення:

$f \in C[a; b]$ - f - неперер. на $[a; b]$,

$f \in C(A)$ - f - неперер. на множині A .

Теорема (перша теорема Вейєрштрасса).

$f \in C[a; b] \Rightarrow f$ - обмежена на $[a; b]$.

Доведення.

ПП: $f(x)$ - необмеж. на $[a; b] \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in [a; b]: |f(x_n)| > n$.

$a \leq x_n \leq b \Rightarrow \{x_n\}$ - обмеж. $\xrightarrow{\text{т.Б.Б.}} \exists \{x_{k_n}\}$ - збіжна. Тобто $\exists x_0 \in [a; b]: x_{k_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0$.

Здійснимо граничний перехід під знаком нерівності $a \leq x_{k_n} \leq b$. Отримаємо: $a \leq x_0 \leq b$. Таким чином, границя послідовності $\{x_{k_n}\}$ належить відрізку $[a; b]$, тобто $x_0 \in [a; b]$.

З одного боку, оскільки $f(x)$ - неперер. в точці $x_0 \in [a; b]$, то при $x_{k_n} \rightarrow x_0$ будемо мати $f(x_{k_n}) \rightarrow f(x_0)$. З іншого боку, $|f(x_n)| > n \Rightarrow |f(x_{k_n})| > k_n \Rightarrow f(x_{k_n}) \rightarrow \infty$. Одночасне виконання отриманих висновків є неможливим. ■

Зауваження. Перша теорема Вейєрштрасса здійснюється тільки для неперервних на відрізку, а не на півінтервалу чи інтервалі, функцій.

Приклад: $f(x) = \frac{1}{x}$ на $(0; 1)$ - неперер., однак $f(x)$ - необмежена.

Теорема (друга теорема Вейєрштрасса). Якщо $f(x)$ - неперер. на $[a; b] \Rightarrow$ вона досягає свого $\sup$ та $\inf$, тобто

$$\exists x_1 \in [a; b] \wedge \exists x_2 \in [a; b]: f(x_1) = \sup_{[a; b]} f(x) \wedge f(x_2) = \inf_{[a; b]} f(x)$$

Доведення. Доведемо, що $\exists x_1 \in [a; b]$ такий, що

$$f(x_1) = \sup_{[a; b]} f(x).$$

$f(x)$ - неперер. на $[a; b] \Rightarrow$ за першою теоремою В. $f(x)$ - обмежена $\Rightarrow E_f$ - обмежена $\Rightarrow \exists M = \sup E_f$.

$$\text{ПП: } \forall x_1 \in [a; b] \quad f(x_1) < M \Rightarrow \forall x \in [a; b] \quad M - f(x) > 0.$$

Уведемо допоміжну функцію $g(x) = \frac{1}{M - f(x)}$ - неперер. на $[a; b]$.

$$\left. \begin{array}{l} g(x) > 0 \quad \forall x \in [a; b] \\ g(x) - \text{неперер. на } [a; b] \end{array} \right\} \overset{1^{th} B.}{\Rightarrow} \exists A > 0: g(x) \leq \frac{1}{A} \quad \forall x \in [a; b].$$

Тоді

$$\begin{aligned} \frac{1}{M - f(x)} &\leq \frac{1}{A} \Rightarrow M - f(x) \geq A \Rightarrow \\ &\Rightarrow f(x) \leq M - A \quad \forall x \in [a; b]. \end{aligned} \quad (1)$$

Це з одного боку, а з іншого, за побудовою

$$M = \sup f(x) \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} 1. & \forall x \in [a; b] \quad f(x) \leq M \\ 2. & \forall A > 0 \quad \exists x_1 \in [a; b]: f(x_1) > M - A \end{aligned} \quad (2)$$

Висловлювання (1) і (2) одночасно є неможливими. ■

Зауваження.

1. Теореми Вейерштрасса можуть виконуватися в деяких випадках, не тільки для неперервних функцій. Наприклад, функція Діріхле $D(x)$ - розривна в будь якій точці відрізка $[a; b]$, але обмежена знизу 0, а зверху 1; вона досягає $\sup D(x) = 1$ у будь-якому $\square$ -числі і $\inf D(x) = 0$ у будь-якому $\square \setminus \square$ -числі відрізка $[a; b]$.

2. У другій теоремі Вейерштрасса також істотно те, що функція задана на відрізку $[a; b]$. Не завжди неперервна на інтервалі або півінтервалі функція на ньому буде обмежена (потрібно розглянути, як контрприклад, $f(x) = \frac{1}{x}$).

3. Рівномірна неперервність функції.

$f(x)$ - задана на множині A . Припущення на цю множину: кожна точка цієї множини є граничною її точкою. Що до означення граничної точки множини A , то воно майже співпадає з означенням граничної точки послідовності.

 **Означення.** $f(x)$ - **рівномірно неперервна на множині A , якщо**
 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0: \forall x_1, x_2 \in A \quad |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$

Зауваження 1. Якщо $f(x)$ - рівномірно неперервна на множині A , то вона неперервна у будь якій точці множини A . Дійсно, якщо у означенні рівномірної неперервності обрати $x_1 = x$, $x_2 = x_0$, то будемо мати:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \forall x, x_0 \in A \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

Зокрема

$$\forall x_0 \in A \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \forall x \in A \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Останнє і дає означення неперервності функції на множині.

$$\forall x_0 \in A \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0: \forall x \in A \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Зауваження 2. Із неперервності функції на множині A не завжди буде витікати рівномірна неперервність на цій множині. Дійсно, за означенням неперервності функції на множині

$$\forall x_0 \in A \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0 : \forall x \in A \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Навіть перепозначення нічого не дадуть, оскільки рівномірна неперервність вимагає одне, спільне для усіх елементів із множини $x_0 \in A$ значення δ . Згідно до наведеного означення шукане δ можна знайти як $\delta = \delta(\varepsilon) = \inf_{x_0 \in A} \delta(\varepsilon, x_0)$. Може статися, що $\delta = 0$, а це нас не влаштовує.

Приклад.

1) $f(x) = x^2$ - неперервна на $A = [1; \infty)$. Доведемо, що ця функція не є рівномірно неперервною: $\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x_1, x_2 \in A : |x_1 - x_2| < \delta \wedge |f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon$.

Розглянемо $x'_n = n$; $x''_n = n + \frac{1}{n} \Rightarrow x'_n, x''_n \in A$. Маємо:

$$|x''_n - x'_n| = \left| n + \frac{1}{n} - n \right| = \left| \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n} - \text{н.м.п.} \Rightarrow \forall \delta > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} : |x''_n - x'_n| < \delta;$$

$$|f(x''_n) - f(x'_n)| = \left| \left(n + \frac{1}{n} \right)^2 - n^2 \right| = 2 + \frac{1}{n^2} \geq 2 = \varepsilon.$$

Що доводить той факт, що функція $f(x) = x^2$ не є рівномірно неперервною.

Теорема Кантора. Якщо функція неперервна на відрізку, тоді вона рівномірно неперервна на цьому відрізку.

Доведення. ПП: $f(x)$ - не є рівномірно неперервною:

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x_1, x_2 \in [a; b] \quad |x_1 - x_2| < \delta \wedge |f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon.$$

Нехай $\delta_n = \frac{1}{n}$, тоді за припущенням

$$\exists x'_n, x''_n \in [a; b] : |x'_n - x''_n| < \frac{1}{n} \wedge |f(x'_n) - f(x''_n)| \geq \varepsilon. \quad (1)$$

Розглянемо першу з цих послідовностей

$$\{x'_n\} \subset [a; b] \Rightarrow a \leq x'_n \leq b \xrightarrow{\text{Th. Б.-В.}} \exists \{x'_{k_n}\} \wedge \exists c \in [a; b] : x'_{k_n} \rightarrow c.$$

За теоремою про граничний перехід під знаком нерівності маємо:
 $a \leq x'_{k_n} \leq b \Rightarrow a \leq c \leq b \Rightarrow c \in [a; b] \Rightarrow$

$\Rightarrow$ точка c - точка неперер. функції. Із непер. функції в точці c маємо:

$$x'_{k_n} \rightarrow c \Rightarrow f(x'_{k_n}) \rightarrow f(c).$$

Оскільки $|x'_n - x''_n| < \frac{1}{n}$, то $|x'_{k_n} - x''_{k_n}| < \frac{1}{k_n} \Rightarrow$

$$\begin{array}{ccc} x'_{k_n} - \frac{1}{k_n} < x''_{k_n} < x'_{k_n} + \frac{1}{k_n} \\ \square \quad \downarrow \quad \square \\ \quad \quad c \end{array}$$

$\Rightarrow$ за теоремою «по двох міліціонерів» $x'_{k_n} \rightarrow c$, а внаслідок неперервності функції в точці c отримаємо $f(x'_{k_n}) \rightarrow f(c)$.

Таким чином, маємо:

$$\left. \begin{array}{l} f(x'_{k_n}) \rightarrow f(c) \\ f(x''_{k_n}) \rightarrow f(c) \end{array} \right\} \Rightarrow |f(x'_{k_n}) - f(x''_{k_n})| \rightarrow 0 \text{ (н.м.п.)}.$$

Останнє суперечить (1). ■

Твердження.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) - \text{неперер. на } [a; +\infty) \\ \exists \left| \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right| < \infty \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) - \text{рівномірно неперервна на } [a; +\infty)$$

Доведення.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall x \in D_f \quad x > \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

За рівномірною неперервністю маємо

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2 \in D_f : |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon,$$

а за означенням границі –

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : & \left. \begin{array}{l} \forall x_1 \in D_f : x_1 > \delta \Rightarrow |f(x_1) - A| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \forall x_2 \in D_f : x_2 > \delta \Rightarrow |f(x_2) - A| < \frac{\varepsilon}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow (x_1 > \delta \wedge x_2 > \delta) \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| \leq |f(x_1) - A| + |f(x_2) - A| < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \\ = \varepsilon \Rightarrow \forall x_1, x_2 \in (\delta; +\infty) \quad |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon. \end{aligned} \quad (3)$$

□ $\frac{1}{a} \text{ — } \frac{1}{\delta}$ на цьому відрізку функція неперервна.

За теоремою Кантора, функція рівномірно неперервна на $[a; \delta] \Leftrightarrow \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2 \in [a; \delta] \quad |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon. \quad (4)$

(3) + (4) $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2 \in [a; +\infty] \quad |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon \Rightarrow$ функція рівномірно неперервна на $[a; +\infty)$. ■

Зауваження. Аналогічно доведенню останнього твердження, можна показати, що

$$\left. \begin{array}{l} f(x) - \text{неперер. на } [-\infty; +\infty] \\ \exists \left| \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right| < \infty \\ \exists \left| \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right| < \infty \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) \text{ рівномірно неперер. на } (-\infty; +\infty)$$

Приклад. 1. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ на $(0; 1)$ дослідити на рівномірну неперервність.

Уведемо допоміжну функцію $g(x) = \begin{cases} f(x), x \in (0, 1) \\ 1, x = 0 \\ \sin 1, x = 1 \end{cases}$ - непер. на $[0; 1]$.

За теоремою Кантора $g(x)$ - рівномірно неперервна на $[0; 1]$.