

Лекція №16

Тема: «Розкриття невизначеностей (правило Лопіталя). Формула Тейлора.
Формула Маклорена»

План

1. Правило Лопіталя.
2. Формула Тейлора.
3. Формула Маклорена.

1. Правило Лопіталя.

Розглянемо спосіб обчислення границь, які потребують розкриття невизначеностей виду $\left(\frac{0}{0}\right)$ або $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, пов'язаний з застосуванням похідних.

Теорема 3.5 (правило Лопіталя розкриття невизначеностей виду $\left(\frac{0}{0}\right)$). Нехай функції $f(x)$ та $g(x)$ є неперервними та диференційованими у околі точки $x = x_0$ і при цьому $f(x_0) = g(x_0) = 0$, а $g'(x) \neq 0$ у околі цієї точки.

Якщо існує границя $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$, то існує $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, причому

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l. \quad (3.3)$$

Правило Лопіталя стверджує, що границя відношення двох нескінченно малих дорівнює границі відношення їх похідних, якщо ця границя існує.

Зауважимо, що теорема 3.5 виконується і у тому випадку, коли функції $f(x)$ та $g(x)$ невизначені при $x = x_0$, але $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$. Ця теорема виконується також при $x \rightarrow \infty$.

Приклад 3.4. Обчислити $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x \ln x}$.

Розв'язання. При підстановці у чисельник та знаменник дробу під знаком границі значення $x = 1$ отримуємо невизначеність виду $\left(\frac{0}{0}\right)$. Застосуємо до розкриття даної невизначеності правило Лопіталя:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x \ln x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)'}{(x \ln x)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\ln x + 1} = \frac{1}{1} = 1.$$

Приклад 3.5. Обчислити $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{2x^2}$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{2x^2} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos 6x)'}{(2x^2)'} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 \sin 6x}{4x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(6 \sin 6x)'}{(4x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{36 \cos 6x}{4} = \frac{36}{4} = 9. \end{aligned}$$

Наведемо без доведення формулювання правила Лопіталя знаходження границь, що зводяться до розкриття невизначеності виду $\left(\frac{\infty}{\infty} \right)$.

Теорема 3.6 (правило Лопіталя розкриття невизначеностей виду $\left(\frac{\infty}{\infty} \right)$). Нехай функції $f(x)$ та $g(x)$ є неперервними та диференційовними у околі точки x_0 (можливо, окрім самої цієї точки), і у цьому околі $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$, причому $g'(x) \neq 0$. Тоді, якщо існує границя

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l, \text{ то існує і границя } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}, \text{ причому } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l.$$

Приклад 3.5. Обчислити $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 5x}$.

Розв'язання. Оскільки $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} \pm 0} \operatorname{tg} 3x = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} \pm 0} \operatorname{tg} 5x = \mp \infty$, то дана границя

зводиться до невизначеності виду $\left(\frac{\infty}{\infty} \right)$, тому застосуємо правило Лопіталя:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 5x} &= \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(\operatorname{tg} 3x)'}{(\operatorname{tg} 5x)'} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{3}{\cos^2 3x}}{\frac{5}{\cos^2 5x}} = \frac{3}{5} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 5x}{\cos^2 3x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \\ &= \frac{3}{5} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 10x}{1 + \cos 6x} = \frac{3}{5} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(1 + \cos 10x)'}{(1 + \cos 6x)'} = \frac{3}{5} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-10 \sin 10x}{-6 \sin 6x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \\ &= \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{3} \cdot \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{10 \cos 10x}{6 \cos 6x} = \frac{5}{3}.\end{aligned}$$

До невизначеностей виду $\left(\frac{0}{0} \right)$ або $\left(\frac{\infty}{\infty} \right)$, для розкриття яких можна застосувати правило Лопіталя, зводяться невизначеності видів $(0 \cdot \infty)$, $(\infty - \infty)$, (1^∞) , (∞^0) , (0^0) . Для цього застосовують тотожні перетворення та логарифмування.

Приклад 3.6. Обчислити $\lim_{x \rightarrow 2} (2 - x) \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi x}{4}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність виду $(0 \cdot \infty)$. Зведемо її до невизначеності $\left(\frac{0}{0} \right)$, після чого застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (2 - x) \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi x}{4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - x}{\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{4}} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-1}{-\frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi x}{4}}} = \frac{4}{\pi}.$$

Приклад 3.7. Обчислити $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x - \sec x)$.

Розв'язання. Оскільки $\sec x = \frac{1}{\cos x}$, то при підстановці у вираз під знаком границі замість x значення $\frac{\pi}{2}$, маємо невизначеність виду $(\infty - \infty)$.

Зведемо її до невизначеності $\left(\frac{0}{0} \right)$, після чого застосуємо правило Лопіталя.

Отримуємо:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x - \sec x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{tg} x - \frac{1}{\cos x} \right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - 1}{\cos x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{-\sin x} = \frac{0}{-1} = 0.$$

Приклад 3.8. Обчислити границю $\lim_{x \rightarrow 0} x^n \ln x$, $n > 0$.

Розв'язання. Маємо невизначеність виду $(0 \cdot \infty)$. Для застосування правила Лопіталя перетворимо її до виду $\left(\frac{\infty}{\infty} \right)$. Маємо:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^n \ln x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x^{-n}} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-n \frac{1}{x^{n-1}}} = -\frac{1}{n} \lim_{x \rightarrow 0} x^n = 0.$$

Приклад 3.9. Обчислити $\lim_{x \rightarrow 0+0} \left(\frac{1}{x} \right)^{\sin x}$.

Розв'язання. Обчислення границі приводить до необхідності розкриття невизначеності виду (∞^0) . Позначимо $\left(\frac{1}{x} \right)^{\sin x} = y$. Тоді $\ln y = \sin x \cdot \ln \frac{1}{x}$. Знаходимо границю цього виразу при $x \rightarrow 0+0$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+0} \ln y &= \lim_{x \rightarrow 0+0} \left(\sin x \cdot \ln \frac{1}{x} \right) = (0 \cdot \infty) = \lim_{x \rightarrow 0+0} \left(\frac{-\ln x}{\frac{1}{\sin x}} \right) = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+0} \left(\frac{-\frac{1}{x}}{-\cos x \frac{1}{\sin^2 x}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\sin^2 x}{x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \sin x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot 0 \cdot 1 = 0. \end{aligned}$$

Оскільки логарифмічна функція є неперервною, то $\lim_{x \rightarrow 0+0} \ln y = \ln \left(\lim_{x \rightarrow 0+0} y \right)$,

тому $\lim_{x \rightarrow 0+0} y = e^0 = 1$.

Приклад 3.10. Обчислити $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність (1^∞) . Нехай $y = (\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$, тоді

$$\ln y = \frac{\ln(\cos 2x)}{x^2}. \text{ Знаходимо границю}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \ln y &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos 2x)}{x^2} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin 2x}{2x \cdot \cos 2x} = \\ &= -2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos 2x} = -2 \cdot 1 \cdot 1 = -2. \end{aligned}$$

$$\text{Тоді } \lim_{x \rightarrow 0} y = e^{-2}.$$

Приклад 3.11. Знайти границю $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin 2x)^{\operatorname{tg} 3x}$.

Розв'язання. Тут маємо невизначеність виду (0^0) . Запишемо вираз під знаком границі у вигляді: $(\sin 2x)^{\operatorname{tg} 3x} = e^{\ln(\sin 2x)^{\operatorname{tg} 3x}} = e^{\operatorname{tg} 3x \cdot \ln(\sin 2x)}$. Шукана границя набуває вигляду:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\sin 2x)^{\operatorname{tg} 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\operatorname{tg} 3x \cdot \ln(\sin 2x)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tg} 3x \cdot \ln(\sin 2x)}.$$

Знайдемо границю у показнику експоненти.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tg} 3x \cdot \ln(\sin 2x) &= (0 \cdot \infty) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin 2x)}{\operatorname{ctg} 3x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2 \cos 2x}{\sin 2x}}{\frac{-3}{\sin^2 3x}} = \\ &= -\frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x \cdot \sin^2 3x}{\sin 2x} = -\frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \cos 2x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{\sin 2x} = -\frac{2}{3} \cdot 1 \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

$$\text{Тоді шукана границя } \lim_{x \rightarrow 0} (\sin 2x)^{\operatorname{tg} 3x} = e^0 = 1.$$

2. Формула Тейлора.

Нехай функція $y = f(x)$ у деякому околі точки $x = a$ має всі похідні до $(n+1)$ -го порядку включно. Знайдемо многочлен $P_n(x)$, степінь якого не перевищує n , значення якого у точці $x = a$ дорівнює значенню функції $f(x)$ у

цій точці, а значення його похідних до n -го порядку у точці $x = a$ дорівнюють відповідним значенням похідних у цій точці:

$$P_n(a) = f(a), P_n'(a) = f'(a), P_n''(a) = f''(a), \dots, P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a). \quad (3.7)$$

Будемо шукати цей многочлен у вигляді многочлена за степенями $(x - a)$ з невизначеними коефіцієнтами:

$$P_n(x) = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + \dots + c_n(x - a)^n = \sum_{k=0}^n c_k(x - a)^k. \quad (3.8)$$

Невизначені коефіцієнти $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n$ знайдемо так, щоб виконувались умови (3.7). Для цього, диференціюючи (3.8), знайдемо похідні від $P_n(x)$. Отримуємо:

$$P_n'(x) = c_1 + 2 \cdot c_2 \cdot (x - a) + 3 \cdot c_3 \cdot (x - a)^2 \dots + n \cdot c_n \cdot (x - a)^{n-1};$$

$$P_n''(x) = 2 \cdot c_2 + 3 \cdot 2 \cdot c_3 \cdot (x - a) \dots + n \cdot (n - 1) \cdot c_n \cdot (x - a)^{n-2};$$

$$\dots\dots\dots;$$

$$P_n^{(n)}(x) = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 \cdot c_n.$$

Підставивши у ліві та праві частини останніх рівностей та рівності (3.8) замість x значення a та прирівнявши їх згідно з (3.7) до значень $f(a), f'(a), \dots, f^{(n)}(a)$, отримаємо рівності: $f(a) = c_0, f'(a) = c_1, f''(a) = 2 \cdot 1 \cdot c_2, f'''(a) = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot c_3, \dots, f^{(n)}(a) = n! \cdot c_n$. Звідси знаходимо коефіцієнти шуканого многочлена:

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (3.9)$$

Тут похідною нульового порядку вважають саму функцію.

Таким чином, шуканий многочлен (3.8) має вигляд:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k. \quad (3.10)$$

Нехай $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$. Звідси маємо

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + R_n(x). \quad (3.11)$$

Формулу (3.11) називають *формулою Тейлора* для функції $f(x)$ у околі точки $x=a$, а многочлен $P_n(x)$, коефіцієнти якого визначаються за формулою (3.9) – *многочленом Тейлора*. Вираз $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ називають *залишковим членом формули Тейлора*. Для значень x , при яких залишковий член є достатньо малим, многочлен $P_n(x)$ є наближенням функції $f(x)$. Таким чином, формула (3.11) дає можливість замінити функцію $f(x)$ многочленом Тейлора $P_n(x)$ з точністю, що дорівнює значенню залишкового члена $R_n(x)$.

Доведемо, що залишковий член формули Тейлора $R_n(x)$ можна представити у вигляді:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}, \quad (3.12)$$

де точка ξ знаходиться між точками x та a . Зафіксуємо довільне значення $x > a$ з околу точки a , де функція $f(x)$ диференційовна $n+1$ разів. Позначимо через t величину, що змінюється на відрізку $[x_0; x]$, тобто $x_0 \leq t \leq x$. Розглянемо функцію

$$F(t) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(t)}{k!} (x-t)^k - \frac{(x-t)^{n+1} R_n(x)}{(x-a)^{n+1}}. \quad (3.13)$$

Ця функція задовольняє всі умови теореми Ролля, тому знайдеться точка $\xi \in (a; x)$, для якої $F'(\xi) = 0$.

Диференціюючи (3.13) за t , отримаємо:

$$F'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + \frac{(n+1)(x-t)^n R_n(x)}{(x-a)^{n+1}}. \quad (3.14)$$

Прийнявши у рівності (3.14) $t = \xi$, з рівності $F'(\xi) = 0$ отримуємо:

$$-\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n + \frac{(n+1)(x-\xi)^n R_n(x)}{(x-a)^{n+1}} = 0.$$

Розв'язавши це рівняння відносно $R_n(x)$, отримаємо формулу (3.12). Цю формулу для залишкового члена формули Тейлора називають *залишковим членом у формі Лагранжа*.

При $x \rightarrow a$ $R_n(x)$ є нескінченно малою вищого порядку, ніж $(x-a)^n$, тому, використовуючи символи Ландау, ми можемо записати, що $R_n(x) = o((x-a)^n)$. Такий запис залишкового члена формули Тейлора називають *залишковим членом у формі Пеано*.

Величина $R_n(x)$ дорівнює величині похибки при заміні функції $f(x)$ її многочленом Тейлора. Формулу (3.12) можна використати для того, щоб оцінити величину такої похибки при фіксованих значеннях x , а також при $n \rightarrow \infty$. Многочлени Тейлора дають найкраще наближення функції $f(x)$ по відношенню до всіх многочленів заданого степеня у околі точки a , тобто використання для наближення функції многочлена Тейлора дає найменшу абсолютну похибку $|R_n(x)|$.

3. Формула Маклорена.

Формулу Тейлора (3.11) при $a = 0$ називають *формулою Маклорена*. Таким чином, формула Маклорена для функції $f(x)$ має вигляд:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x), \quad (3.15)$$

де $R_n(x)$ визначається за формулою:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}. \quad (3.16)$$

У формулі (3.16) точка ξ знаходиться між точками 0 та x , тобто $\xi = \theta x$, де $0 < \theta < 1$.

Формула (3.16) визначає залишковий член формули Маклорена у формі Лагранжа, цей залишковий член можна записати у формі Пеано:

$$R_n(x) = o(x^n). \quad (3.17)$$

Розглянемо основні розклади елементарних функцій за формулою Маклорена:

$$1) e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n), \quad \forall -\infty < x < \infty.$$

$$2) \sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} + o(x^{2n+2}) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o(x^{2n+2}),$$

$$\forall -\infty < x < \infty.$$

$$3) \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + o(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + o(x^{2n+1}),$$

$$\forall -\infty < x < \infty.$$

$$4) \ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} + o(x^{n+1}) =$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + o(x^n), \quad \forall -1 < x \leq 1.$$

$$5) (1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!} x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \dots +$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^n \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + o(x^n),$$

$$\forall |x| < 1.$$

$$6) \operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \dots, \quad \forall |x| < \frac{\pi}{2}.$$

$$7) \arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \dots + \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1} + o(x^{2n+2}) =$$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{(2k)!}{4^k (k!)^2 (2k+1)} x^{2k+1} + o(x^{2n+2}), \quad \forall |x| < 1.$$

$$\begin{aligned}
 8) \operatorname{arctg} x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} + o(x^{2n+2}) = \\
 &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} + o(x^{2n+2}), \quad \forall |x| < 1.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 9) \operatorname{sh} x &= \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1} + o(x^{2n+2}) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o(x^{2n+2}), \\
 &\forall -\infty < x < \infty.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 10) \operatorname{ch} x &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{1}{(2n)!} x^{2n} + o(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k)!} x^{2k} + o(x^{2n+1}), \\
 &\forall -\infty < x < \infty.
 \end{aligned}$$