

Лекція №17

Тема: «Достатні умови екстремуму»

План

1. Екстремуми функції.
2. Достатні умови екстремуму.
3. Найбільше і найменше значення функції на відрізку

1. Екстремуми функції.

Нехай функція $f(x)$ неперервна на деякому інтервалі, що містить у собі точку x_0 .

Означення. Точка x_0 називається точкою максимуму функції $f(x)$, якщо існує такий окіл точки x_0 , що для всіх значень x ($x \neq x_0$) з цього околу виконується нерівність $f(x) < f(x_0)$ (рис. 3.9, а). Точка x_0 називається точкою мінімуму функції $f(x)$, якщо існує такий окіл точки x_0 , що для всіх значень x ($x \neq x_0$) цього околу виконується нерівність $f(x) > f(x_0)$ (рис. 3.9, б).

Точки максимуму і мінімуму функції називають точками екстремуму. Значення функції $f(x)$ в точці максимуму (мінімуму) називають максимумом (мінімумом) функції чи екстремумом функції.

Функція $f(x)$ на даному проміжку може мати і декілька екстремумів, причому деякі з мінімумів функції можуть бути більше деяких її максимумів.

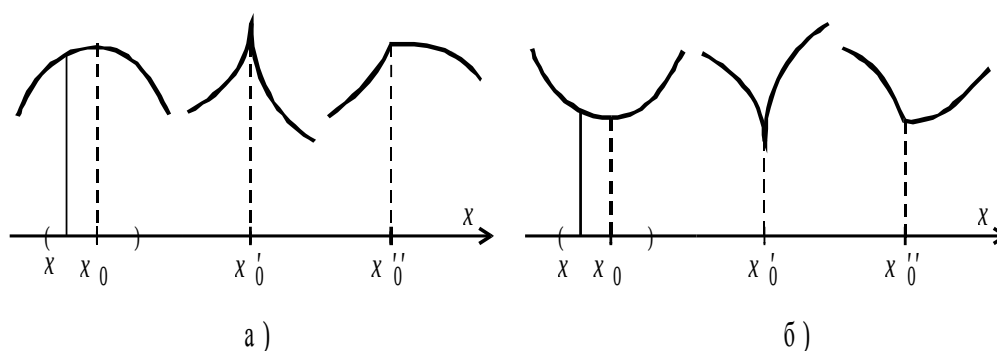


Рис. 3.9.

На рис. 3.10 зображена функція, у якої в точці x_1 максимум, а в точці x_4 — мінімум, причому $f(x_1) < f(x_4)$. Але це не суперечить означенню екстремуму функції, оскільки в означенні екстремуму порівнюються значення функції в точці і деякому її околі. Говорять, що мова йде про локальні екстремуми.

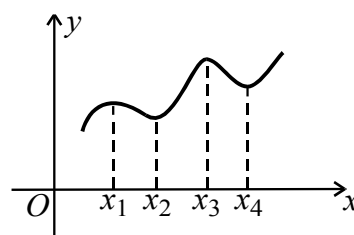


Рис. 3.10.

Необхідна умова: Якщо диференційована функція $f(x)$ має в точці x_0 екстремум, то $f'(x_0) = 0$ або $f'(x_0)$ не існує.

Нехай, наприклад, функція $y = f(x)$ має в точці x_0 максимум. Тоді при досить малому Δx маємо $f(x_0 + \Delta x) < f(x_0)$, тобто $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) < 0$, отже відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x} < 0$ при $\Delta x > 0$, і $\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$ при $\Delta x < 0$. Переходячи до границі при $\Delta x \rightarrow 0$, одержимо $\lim_{\Delta x \rightarrow 0+0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \leq 0$, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0-0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0$. За умовою функція $f(x)$ диференційована в точці x_0 , отже одержані нерівності сумісні тільки при $f'(x_0) = 0$.

Аналогічно доводиться теорема, якщо в точці x_0 функція $f(x)$ має мінімум.

Геометричний зміст доведеної умови полягає в тому, якщо в точках екстремуму функція $f(x)$ має похідну, тобто диференційована, то дотична до кривої $y = f(x)$ в цих точках буде паралельна вісі Ox . Такий екстремум називатимемо гладким.

Відзначимо, що наведена необхідна умова екстремуму диференційованої функції не є достатньою, тобто зворотне ствердження невірне. Похідна в точці може обернутися в нуль, а функція в цій точці x_0 може не мати екстремуму.

Наприклад, для функції $y = x^3$ $y' = 3x^2 = 0$ при $x = 0$, але в цій точці функція не має екстремуму (рис. 3.11).

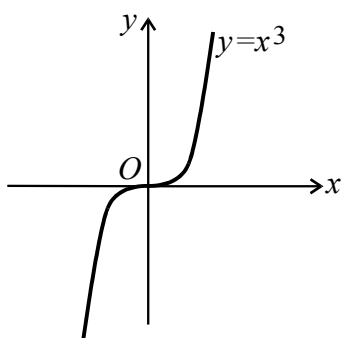


Рис. 3.11.

В цьому прикладі досліджували випадок, коли функція диференційована в точці і її околі. Але на рис. 3.9, а, б зображено графіки функцій, що мають у точках x'_0 , x''_0 екстремуми, але не мають скінченну похідну. Так, у точці x'_0 похідна обертається в нескінченність, у точці x''_0 похідна не існує. Такі екстремуми будемо називати гострими.

Таким чином, функція може мати екстремум як у точках,

де похідна існує і дорівнює нулю чи нескінченності, так і в точках, де похідна не існує.

Точки з області визначення функції $f(x)$, в яких похідна дорівнює нулю будемо називати *стаціонарними точками* цієї функції (таким чином, стаціонарні точки – це необхідна умова).

2. Достатні умови екстремуму.

Теорема (№1). Нехай функція $f(x)$ диференційована в деякій точці x_0 , яка є стаціонарною. Якщо з обох сторін від точки x_0 похідна функції $f(x)$ має різні знаки, то точка x_0 є точкою локального екстремуму, причому, якщо при переході через точку x_0 похідна змінює знак з плюса на мінус, то точка x_0 – точка максимуму, якщо з мінуса на плюс, то точка x_0 – точка мінімуму. Якщо ж з двох сторін від точки x_0 похідна не змінює знак, то точка x_0 не є точкою екстремуму.

Доведення. Нехай, наприклад, при переході через точку x_0 похідна $f'(x)$ змінює знак з плюса на мінус. Тоді за теоремою Лагранжа для будь-якої точки x з околу точки x_0 $f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0)$, де c лежить між x і x_0 .

Якщо $x < x_0$, то $f'(c) > 0$ і $f(x) - f(x_0) < 0$.

Якщо $x > x_0$, то $f'(c) < 0$ і $f(x) - f(x_0) < 0$.

Таким чином, в околі точки x_0 виконується нерівність $f(x) - f(x_0) < 0$ чи $f(x) < f(x_0)$, а це значить, що в точці x_0 функція має максимум.

Аналогічно розглядається випадок зміни знака похідної з мінуса на плюс.

Неважко бачити, що точка максимуму відокремлює інтервал зростання функції ($f'(x) > 0$) від інтервалу її спадання ($f'(x) < 0$), точка мінімуму відокремлює інтервал спадання від інтервалу зростання. Таким чином, якщо функція досліджена на зростання й спадання, то точки екстремуму визначаються автоматично.

Приклад. Дослідити на екстремум функцію $f(x) = \frac{3}{4}x^4 - x^3 - 9x^2 + 7$.

Розв'язання. Задана функція визначена та диференційована на всій числовій прямій, тому її критичними точками є лише стаціонарні точки – корені похідної $f'(x) = 3x^3 - 3x^2 - 18x$. З рівняння $f'(x) = 3x^3 - 3x^2 - 18x = 0$ або $3x(x^2 - x - 6) = 0$ знаходимо ці точки: $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 3$. Нанесемо їх на числову пряму. Отримуємо інтервали $(-\infty; -2)$, $(-2; 0)$, $(0; 3)$ та $(3; +\infty)$. Визначимо знак похідної на кожному з цих інтервалів. Для цього виберемо всередині кожного з них довільним чином внутрішню точку і підставимо її у вираз для похідної.

$f'(-3) = 3(-3)^3 - 3(-3)^2 - 18 \cdot (-3) < 0$, отже на інтервалі $(-\infty; -2)$ $f'(x) < 0$.
 $f'(-1) = 3(-1)^3 - 3(-1)^2 - 18 \cdot (-1) > 0$, на $(-2; 0)$ $f'(x) > 0$. При $x = 1$
 $f'(1) = 3 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 - 18 \cdot 1 < 0$, на $(0; 3)$ $f'(x) < 0$. Якщо $x = 4$, то похідна
 $f'(4) = 3 \cdot 4^3 - 3 \cdot 4^2 - 18 \cdot 4 > 0$, на $(3; +\infty)$ $f'(x) > 0$.

При переході через критичну точку $x_1 = -2$ похідна змінює свій знак з мінуса на плюс, тому це точка локального мінімуму, $f(-2) = -9$. Знак похідної змінюється з плюса на мінус при переході через точку $x_2 = 0$, це точка локального максимуму і $f(0) = 7$. Точка $x = 3$ – це точка локального мінімуму, оскільки при переході через неї похідна змінює знак з мінуса на плюс, мінімум функції у цій точці $f(3) = -\frac{161}{4}$.
 Результати дослідження зведемо у таблицю.

x	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; 0)$	0	$(0; 3)$	3	$(3; +\infty)$
$f'(x)$	–	0	+	0	–	0	+
$f(x)$	↓	–9	↑	7	↓	$-\frac{161}{4}$	↑
		min		max		min	

У цій таблиці символами $\square$ та $\square$ позначено зростання та спадання функції на відповідних інтервалах.

Приклад. Знайти екстремуми функції $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2} + \sqrt[3]{(x+1)^2}$.

Розв'язання. Задана функція визначена на всій числовій прямій. Знайдемо похідну $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{2}{3}(x-1)^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}(x+1)^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}} \right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[3]{x^2-1}}.$$

У точках $x = \pm 1$ похідна не існує. Коренем рівняння $f'(x) = 0$ є $x = 0$. Отже, критичними точками функції $f(x)$ є $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$. Подальше дослідження представимо у вигляді таблиці.

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; +\infty)$
$f'(x)$	–	–	+	0	–	–	+

$f(x)$	$\downarrow$	$\sqrt[3]{4}$	$\uparrow$	2	$\downarrow$	$\sqrt[3]{4}$	$\uparrow$
		min		max		min	

Отже, задана функція має точки локального мінімуму $x = \pm 1$, $f(\pm 1) = \sqrt[3]{4}$. У цих точках похідна функції не існує. Стаціонарна точка $x = 0$ є точкою локального максимуму, $f(0) = 2$.

Приклад. Дослідити на екстремум функцію $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

Розв'язання. Функція визначене при всіх дійсних $x \neq 0$. Її похідна має вигляд: $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$. Вона визначена на всій області визначення функції – множині $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. Знайдемо стаціонарні точки:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1.$$

Нанесемо знайдені у стаціонарні точки на область визначення функції. Отримаємо проміжки $(-\infty; -1)$, $(-1; 0)$, $(0; 1)$ та $(1; +\infty)$. Результати подальшого дослідження представимо у наступній таблиці.

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	-	-	-	+
$f(x)$	$\uparrow$	-2	$\downarrow$	-	$\downarrow$	2	$\uparrow$
		max		-		min	

Отже, точка $x = -1$ є точкою локального мінімуму, $f(-1) = -2$, у точці $x = 1$ маємо локальний максимум, $f(1) = 2$.

У випадках, коли обчислення другої похідної функції є простішим, ніж дослідження знаків її першої похідної, для дослідження функції на екстремум доцільно використовувати другу достатню умову.

Теорема (№2). Нехай функція $f(x)$ визначена і двічі диференційована в стаціонарній точці x_0 . Тоді, якщо $f''(x_0) > 0$, функція $f(x)$ в точці x_0 має локальний мінімум, якщо ж $f''(x_0) < 0$, функція $f(x)$ в точці x_0 має локальний максимум.

Доведемо це твердження, використовуючи означення другої похідної:

$$f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0} \quad (f'(x_0) = 0 \text{ за умовою}).$$

Нехай $f''(x_0) > 0$, тоді $\frac{f'(x)}{x - x_0} > 0$. При $x < x_0$ (ліворуч від точки x_0) різниця $x - x_0 < 0$, з чого випливає, що $f'(x) < 0$. При $x > x_0$ (праворуч від точки x_0) різниця $x - x_0 > 0$, отже $f'(x) > 0$. Як бачимо, при переході через точку x_0 перша похідна змінює знак з від'ємного на додатний, значить у точці x_0 функція має мінімум.

Аналогічно можна показати, що якщо $f''(x_0) < 0$, то функція має в точці x_0 максимум.

Дана достатня умова дозволяє швидко знаходити гладкі екстремуми функції, якщо обчислення проміжків монотонності необов'язкове. Особливо ця умова полегшує дослідження екстремальних значень у прикладних задачах.

Приклад. Знайти точки екстремуму функції $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 2x - 3$.

Розв'язання. Областю визначення даної функції є вся числова пряма. Похідна $f'(x) = x^2 - 3x + 2$ має корені $x_1 = 1$ та $x_2 = 2$. Знайдемо другу похідну заданої функції: $f''(x) = 2x - 3$. У точці $x_1 = 1$ $f''(1) = 2 \cdot 1 - 3 < 0$, тому $x = 1$ – точка локального максимуму, оскільки $f''(2) = 2 \cdot 2 - 3 > 0$, то точка $x = 2$ – точка локального мінімуму.

Теорема (№3). Нехай n – довільне непарне натуральне число і функція $f(x)$ n раз диференційована в деякому околі стаціонарної точки x_0 і $(n+1)$ раз в самій точці x_0 . Тоді, якщо всі похідні до n -го порядку включно дорівнюють нулю:

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n)}(x_0) = 0, \quad f^{(n+1)}(x_0) \neq 0,$$

то при $f^{(n+1)}(x_0) > 0$ точка x_0 – точка локального мінімуму, при $f^{(n+1)}(x_0) < 0$ точка x_0 – точка локального максимуму.

3. Найбільше і найменше значення функції на відрізку

Нехай функція $f(x)$ є неперервною на відрізку $[a; b]$. Тоді вона повинна досягати на цьому відрізку своїх найбільшого та найменшого значень, тобто абсолютних екстремумів $f(x)$ на цьому відрізку. Будемо позначати їх відповідно $M = \max_{[a; b]} f(x)$ та $m = \min_{[a; b]} f(x)$.

Точки, у яких досягається найбільше та найменше значення функції на відрізку, можуть бути кінцями цього відрізка, або його внутрішніми точками. Якщо точка x_0 , у якій досягається абсолютний екстремум, належить $(a; b)$, то таку точку потрібно шукати серед критичних точок даної функції.

Отже, щоб знайти найбільше та найменше значення функції $f(x)$ на відрізку $[a; b]$, потрібно:

- 1) знайти критичні точки цієї функції, що належать інтервалу $(a; b)$;
- 2) обчислити значення функції у знайдених критичних точках та на кінцях відрізка – точках $x = a$ та $x = b$;
- 3) вибрати серед них найбільше та найменше значення.

Якщо функція неперервна у інтервалі $(a; b)$, то вона може й не мати абсолютних екстремумів у цьому інтервалі. Про їх наявність роблять висновок на основі дослідження поведінки функції на кінцях інтервалу (знаходження границь $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ та $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x)$) та значень функції у критичних точках, що належать $(a; b)$.

Приклад. Знайти найбільше та найменше значення функції $f(x) = x^4 - 8x^2$ на відрізку $[-1; 3]$.

Розв'язання. Знайдемо критичні точки даної функції. Її похідна $f'(x) = 4x^3 - 16x = 4x(x^2 - 4)$ має корені $x_1 = -2$, $x_2 = 0$ та $x_3 = 2$. На інтервалі $(-1; 3)$ знаходяться критичні точки $x = 0$ та $x = 2$. Обчислимо значення функції у цих точках: $f(2) = -16$, $f(0) = 0$. На кінцях відрізка $[-1; 3]$ маємо $f(-1) = -7$, $f(3) = 9$. Вибравши серед знайдених значень функції найбільше та найменше, остаточно визначаємо, що $M = \max_{[-1; 3]} f(x) = f(3) = 9$, $m = \min_{[-1; 3]} f(x) = f(2) = -16$.