

Лекція №5

ЗМІНИ РЕОЛОГІЧНИХ МОДЕЛЕЙ


Мета: ознайомлення зі змінами реологічних моделей; вивчення механічної моделі тіла Кельвіна; вивчення механічної моделі тіла Максвелла.

План

5.1. Зміни реологічних моделей, що описують поведінку реальних матеріалів (модель в'язко-пластичного тіла Шведова-Бінгама, модель пружно-пластичного тіла).

5.2. Механічна модель тіла Кельвіна (тіла Фойгта).

5.3. Механічна модель тіла Максвелла.

 **Ключові терміни та поняття:** модель в'язко-пластичного тіла Шведова-Бінгама, модель пружно-пластичного тіла, механічна модель тіла Кельвіна (тіла Фойгта), механічна модель тіла Максвелла.

5.1. Зміни реологічних моделей, що описують поведінку реальних матеріалів (модель в'язко-пластичного тіла Шведова-Бінгама, модель пружно-пластичного тіла)

Реологічні рівняння поведінки реальних матеріалів під навантаженнями являють собою опис властивостей реального матеріалу як комбінацію тих чи інших ідеальних властивостей.

Наприклад, є в'язкий матеріал – ідеальний ньютонівський; є пластичний матеріал – ідеальний сен-венанівський; є реальний матеріал – в'язко-пластичний, що поєднує властивості в'язкості та пластичності.

Наприклад, якщо прикладаємо напруження – немає течії навіть із низькою швидкістю; збільшуємо напруження – все ще немає течії.

Після досягнення певної величини τ_0 починається в'язка течія з певним значенням в'язкості, яке називається **пластичною в'язкістю** (μ_{nl}). Механічна модель такої поведінки називається **в'язко-пластичним тілом Шведова-Бінгама** (рис. 10). Реологічне рівняння залежності при $\tau > \tau_0$ має такий вигляд:

$$\tau = \tau_0 + \mu_{nl} \cdot \dot{\gamma} \quad (9)$$

де τ_0 – межа плинності;

μ_{nl} – пластична в'язкість, Па · с;

$\dot{\gamma}$ – швидкість кутової деформації.

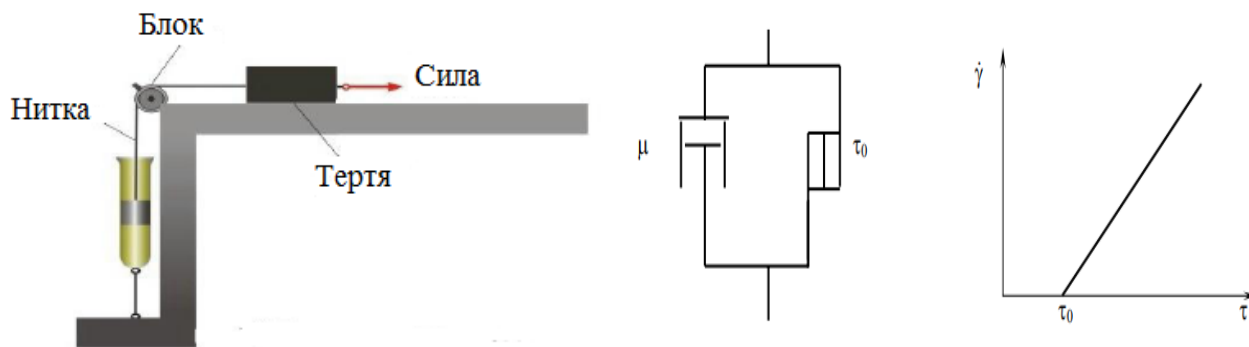


Рисунок 10 – Механічна модель в'язко-пластичного тіла Шведова-Бінгама

Механічною моделлю пружно-пластичного тіла є послідовне з'єднання пружного елемента Гука та пластичного елемента Сен-Венана-Кулона (рис. 11).

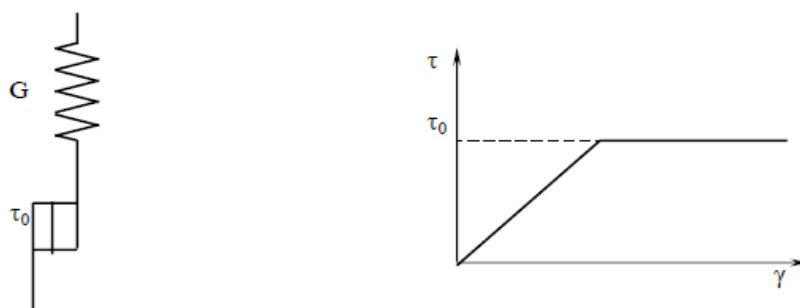


Рисунок 11 – Механічна модель пружно-пластичного тіла

При невеликих напруженнях це тіло поводить себе як пружне, а при перевищенні певної величини τ_0 спостерігається пластична течія.

5.2. Механічна модель тіла Кельвіна (тіла Фойгта)

У 1890 р. Кельвін увів у науковий обіг поняття «в'язкість твердого тіла».

Механічна модель тіла Кельвіна – це паралельно з'єднані елементи Гука та Ньютона з реологічними характеристиками G і μ (рис. 12).

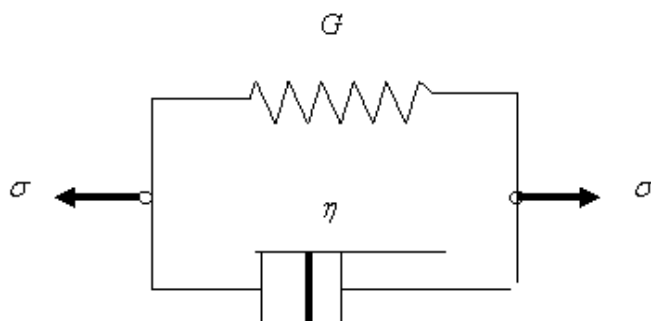


Рисунок 12 – Механічна модель тіла Кельвіна

При записі математичної моделі тіла Кельвіна необхідно звернути увагу на те, що при паралельному з'єднанні елементів деформація складного тіла γ_K

дорівнює деформації кожного елемента, а напруження сумарного елемента τ_K дорівнює сумі напружень в окремих елементах τ_G і τ_H .

Це дозволяє записати систему рівнянь:

$$\begin{cases} \gamma_K = \gamma_G = \gamma_H \\ \tau_K = \tau_G = \tau_H \end{cases} \quad (10)$$

Якщо скористатися реологічними рівняннями елементів Гука і Ньютона, тоді:

$$\begin{aligned} \tau_K &= G \cdot \gamma_G \\ \tau_H &= \mu \cdot \dot{\gamma}_H \end{aligned} \quad (11)$$

З урахуванням рівнянь 10 та 11 отримують математичну модель тіла Кельвіна в такому вигляді:

$$\tau = G \cdot \gamma + \mu \cdot \dot{\gamma} \quad (12)$$

Кельвін увів це тіло для того, щоб мати можливість показати властивість в'язкої течії для «твердого» тіла.

Явище, що характеризується самовільним розвитком деформації при постійному значенні прикладених напружень називається **повзучістю**.

Розв'язавши відносно γ рівняння тіла Кельвіна, при $\tau = \tau_c = \text{const}$, одержують рівняння кривої повзучості $\gamma = \gamma(t)$ (крива кінетики деформації):

$$\gamma = \frac{\tau_c}{G} + \frac{c \cdot e^{-Gt}}{\mu} \quad (13)$$

де c – довільна стала інтегрування, що визначається з вихідних умов.

У цьому випадку при $t = 0$, $\gamma = \gamma_0 = 0$, значення довільної постійної становитиме:

$$c = -\frac{\tau_c}{G} \quad (14)$$

При прагненні $t \rightarrow \infty$ деформація γ асимптотично наближається до значення $\frac{\tau_c}{G}$.

Для тіла Гука пружні деформації визначаються співвідношенням:

$$\gamma = \frac{\tau_c}{G} \quad (15)$$

При прикладанні напруження $\tau = \tau_0$ має місце деформація, що виникає миттєво та дорівнює $\gamma = \frac{\tau_c}{G}$, тобто деформація, яка дорівнює тому значенню, якого ґрешті-решт досягне деформація в тілі Кельвіна при дії на нього напруження τ_c . Цим пояснюється часто вживана назва однієї з характерних властивостей тіла Кельвіна – *запізнiла пружність*. Тобто не миттєва, як у тілі Гука, але така, яка досягає того самого значення, що і в тілі Гука.

5.3. Механічна модель тіла Максвелла

У 1920 р. Гесс спостерігав незвичну поведінку в'язкої рідини.

Наприклад, 1,5%-й розчин крохмалю, поміщений у посудину, зовні нагадував в'язку рідину. У ході досліду посудину обертали навколо осі та різко зупиняли. Рідина в ньому продовжувала обертатися зі швидкістю, що знижувалася в силу наявності в'язкості.

Аналогічний дослід було проведено з розчином гліцеролу у воді.

Виявилось, що в разі загасання обертання розчину гліцеролу з водою, який має, як здавалося, ту саму в'язкість, що й розчин крохмалю, досліджувана суміш зрештою зупинялася.

При дослідженні 1,5%-го розчину крохмалю загасання обертання відбувалося таким чином: обертання (припустімо за годинниковою стрілкою) поступово згасало і, припинившись, мимовільно розпочиналося знову, але вже у зворотному (проти годинникової стрілки) напрямку. Потім – чергова зупинка й обертання за годинниковою стрілкою.

В'язка рідина виявляла пружні властивості (загасання пружних коливань сталеві пружини – тіла Гука).

Для опису такої поведінки як перше наближення можна взяти реологічну модель – **тіло Максвелла**.

Механічний варіант тіла Максвелла являє собою послідовно з'єднані елементи Гука і Ньютона (рис. 13).

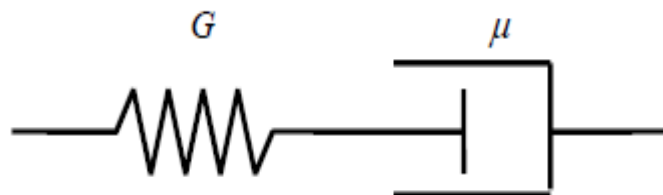


Рисунок 13 – Механічна модель тіла Максвелла

Розглядаючи механічну модель, можна переконатися, що вона «тече», як рідина, за рахунок руху елементів амортизатора. Вона володіє пружними властивостями.

Наприклад, при миттєвому прикладанні напружень – миттєво деформується, як пружне тіло, на якусь величину за рахунок деформації пружини. Після пружної миттєвої деформації, при тривалій дії напруження, відзначається в'язка течія. На механічній моделі тіла Максвелла можна відтворити варіант прикладання напруження та фіксації деформацій, які виникли, що зумовить зникнення напруження.

Три стани моделі, зображені на рис. 14, засвідчують, що прикладені напруження згодом зменшуватимуться і потім взагалі зникнуть.

Явище самовільного зменшення напружень при постійній деформації називається **релаксацією напружень**.

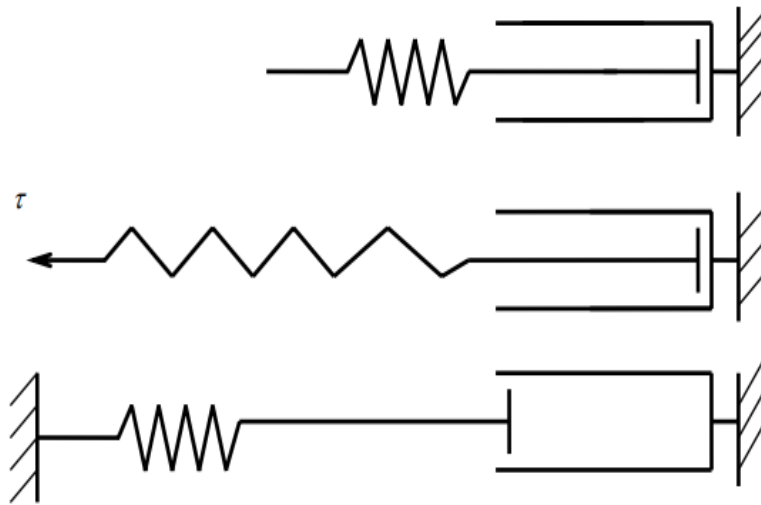


Рисунок 14 – Механічна інтерпретація явища релаксації напружень у тілі Максвелла

Реологічне рівняння тіла Максвелла:

$$\tau + \frac{\mu}{G} \cdot \dot{\tau} = \mu \cdot \dot{\gamma} \quad (16)$$

На основі цього рівняння знайдемо рівняння релаксації $\tau = \tau(t)$, при $\dot{\gamma} = \text{const}$.

Отже, $\gamma = \gamma_c = \text{const}$, $\dot{\gamma} = 0$, тоді й рівняння Максвелла матиме такий вигляд:

$$\tau + n \cdot \frac{d\tau}{dt} = 0 \quad (17)$$

де $n = \frac{\mu}{G}$

Розв'язавши це рівняння, знайдемо рівняння релаксації:

$$\tau = c \cdot e^{\frac{-t}{n}} \quad (18)$$

Для визначення довільної сталої пригадаємо, що в початковий момент прикладають напруження $\tau = \tau_0$. Звідки випливає, що $c = \tau_0$ та має вигляд:

$$t = t_0 \cdot e^{\frac{-t}{n}} = \frac{\tau_0}{e^{\frac{t}{n}}} \quad (19)$$

Випадки 2 і 3, показані на рис. 15, графічно підтверджують релаксацію (самовільне зменшення за експонентою) напружень у часі.

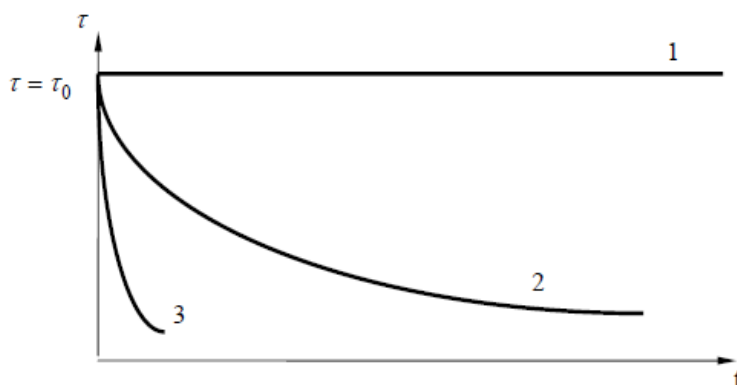


Рисунок 15 – Графік релаксації напружень у тілі Максвелла при різних значеннях n

Коефіцієнт n , що входить до рівняння тіла Максвелла й має розмірність часу, називається **коефіцієнтом релаксації**.

$$[n] = \frac{[\mu]}{[G]} = \frac{H \cdot c \cdot M^2}{M^2 \cdot H} = c \quad (20)$$

При $n \rightarrow \infty$ релаксація напружень не відбувається (випадок 1), тоді як при $n \rightarrow 0$ релаксація напружень відбувається практично миттєво (випадок 3).

Графіки поведінки тіла Максвелла при докладанні постійного напруження (а) і при постійній швидкості зсуву (б) показано на рис. 16.

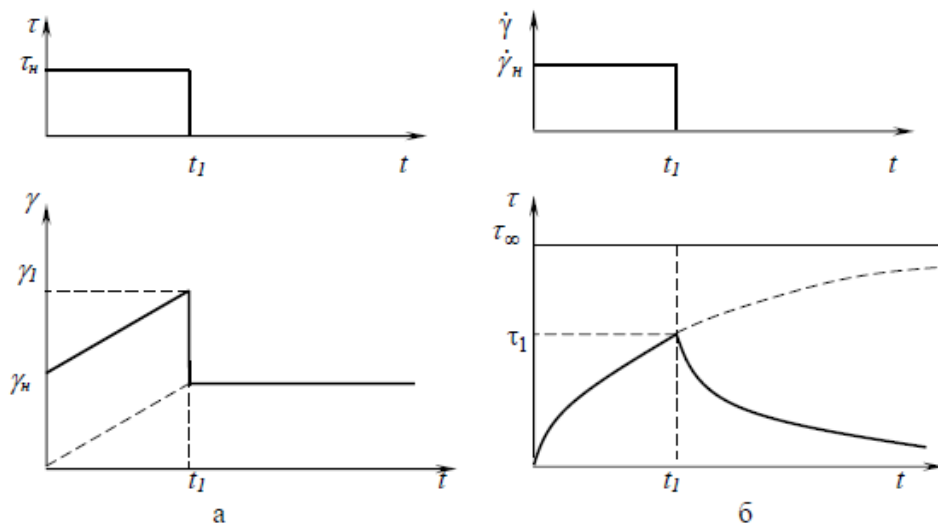


Рисунок 16 – Графіки поведінки тіла Максвелла при дії постійного напруження (а) і постійної швидкості зсуву (б)

? Контрольні питання

1. Охарактеризуйте пластичну в'язкість. Як вона позначається?
2. Що являє собою в'язко-пластичне тіло Шведова-Бінгама? Наведіть реологічне рівняння в'язко-пластичного тіла Шведова-Бінгама.
3. Охарактеризуйте механічну модель пружно-пластичного тіла.
4. Охарактеризуйте механічну модель тіла Кельвіна (тіла Фойгта).
5. У якому році Кельвін увів поняття «в'язкість твердого тіла»?
6. Поясніть, з якою метою Кельвін увів тіло Кельвіна до механічної моделі тіла Кельвіна.
7. Розкрийте сутність повзучості.
8. Охарактеризуйте механічну модель тіла Максвелла. Які властивості виявляє в'язка рідина? Які послідовно з'єднані елементи являють собою механічний варіант тіла Максвелла?
9. Як називається явище самовільного зменшення напружень при постійній деформації?
10. Що таке коефіцієнт релаксації? Як він позначається?

Практичні завдання

1. Змодельуйте механічну модель в'язко-пластичного тіла Шведова-Бінгама, механічну модель пружно-пластичного тіла та механічну модель тіла Максвелла.
2. Повторіть дослід Гесса з 1,5%-м розчином крохмалю у хімічній посудині та дослід із розчином гліцеролу у воді. Поясніть, що при цьому відбувається.
3. У чому полягають зміни реологічних моделей, що описують поведінку реальних харчових матеріалів?