

Лекція №6  
**МЕХАНІЧНІ МОДЕЛІ РЕОЛОГІЧНИХ ТІЛ**

**Мета:** вивчення механічних моделей реологічних тіл та їх складових елементів; усвідомлення різниці між механічними моделями; засвоєння сутності та значення кривих повзучості.

**План**

- 6.1. Механічна модель тіла Бінгама. Механічна модель тіла Шведова.
- 6.2. Криві повзучості.
- 6.3. Механічна модель стандартного в'язкого пружного тіла Максвелла-Томпсона. Механічна модель тіла Бюргерса.

**Ключові терміни та поняття:** механічна модель тіла Бінгама, механічна модель тіла Шведова, криві повзучості, механічна модель тіла Максвелла-Томпсона, механічна модель тіла Бюргерса.

**6.1. Механічна модель Бінгама. Механічна модель Шведова**

У природі є матеріали, які в першому наближенні починають «текти», коли напруження зсуву досягне граничного значення. Якщо немає в'язкого опору, то швидкість течії матеріалу стає високою. Це свідчить про те, що такі матеріали можна розглядати як тіла Сен-Венана.

У другому наближенні вони повинні володіти ще й в'язкістю. Це зумовлює побудову тіла Бінгама, що поєднує пружність, в'язкість і пластичність.

**Механічна модель Бінгама** складається з елементів Гука (з модулем пружності  $G$ ), елементів Ньютона (з в'язкістю  $\mu$ ), елементів Сен-Венана (з межею плинності  $\tau_0$ ) (рис. 17).

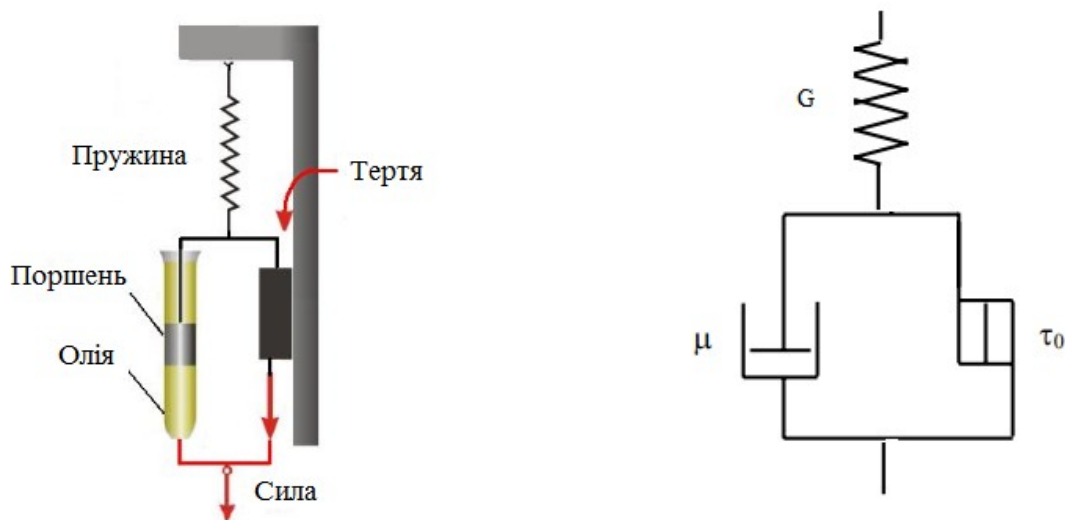


Рисунок 17 – Механічна модель тіла Бінгама

Елементи Ньютона та Сен-Венана з'єднані взаємно паралельно, а разом – послідовно з елементом Гука.

Під дією напруження  $\tau < \tau_0$  модель тіла Бінгама має тільки пружну деформацію.

Реологічне рівняння моделі тіла Бінгама при  $\tau > \tau_0$  має такий вигляд:

$$\dot{\gamma} = \frac{\tau}{G} + \frac{(\tau - \tau_0)}{\mu} \quad (21)$$

**Механічна модель тіла Шведова** складається з елемента Гука (з модулем пружності  $G_r$ ), елемента Сен-Венана (з межею плинності  $\tau_0$ ), елемента Максвелла (з модулем пружності  $G_M$  і в'язкістю  $\mu$ ) (рис. 18).

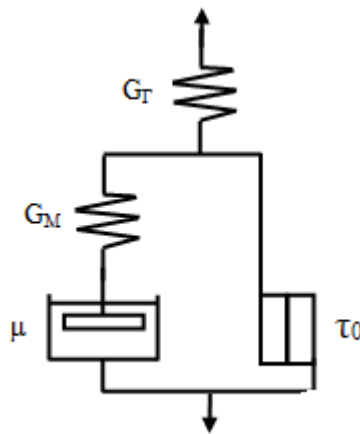


Рисунок 18 – Механічна модель тіла Шведова

Деформація моделі тіла Шведова відбувається тільки завдяки елементу Гука.

При  $\tau \geq \tau_0$  деформуються всі елементи моделі Шведова.

Реологічне рівняння моделі тіла Шведова в диференціальній формі має такий вигляд:

$$\dot{\gamma} = \dot{\tau} \cdot \left[ \frac{1}{G_H} + \frac{1}{C_M} \right] + \frac{(\tau - \tau_T)}{\mu} \quad (22)$$

Таким чином, механічна модель Шведова відрізняється від механічної моделі Бінгама тим, що паралельно моделі Сен-Венана-Кулона приєднана модель Максвелла, а в моделі Бінгама – модель Ньютона.

## 6.2. Криві повзучості

Методи фізико-хімічної механіки широко застосовуються в різних галузях виробництва харчових продуктів.

Визначення структурно-механічних властивостей харчових мас пов'язано з необхідністю технологічного контролю виробництва.

Відхилення від затверджених норм можуть позначитися на якості готових виробів і проведенні окремих технологічних процесів.

При діапазонах, що спостерігаються на практиці (зміни швидкості зсуву, температури, тиску) в'язкість харчових матеріалів варіюється в широких межах.

Основним завданням є визначення змін властивостей матеріалу, що відбуваються під впливом тих або інших чинників.

Для встановлення пружно-пластично-в'язких властивостей дисперсних систем харчових продуктів проводять визначення кривих деформації чистого зсуву ( $\epsilon$ ) за певний час ( $t$ ), що отримано при  $\tau = \text{const}$  (рис. 19 а, б).

При  $\tau < \tau_c$ , випробування проводять в області пружних оборотних деформацій (рис. 19 а).

При  $\tau > \tau_c$ , виникає залишкова деформація, яка після завершення пружної післядії зумовлює сталу течію (рис. 19, б).

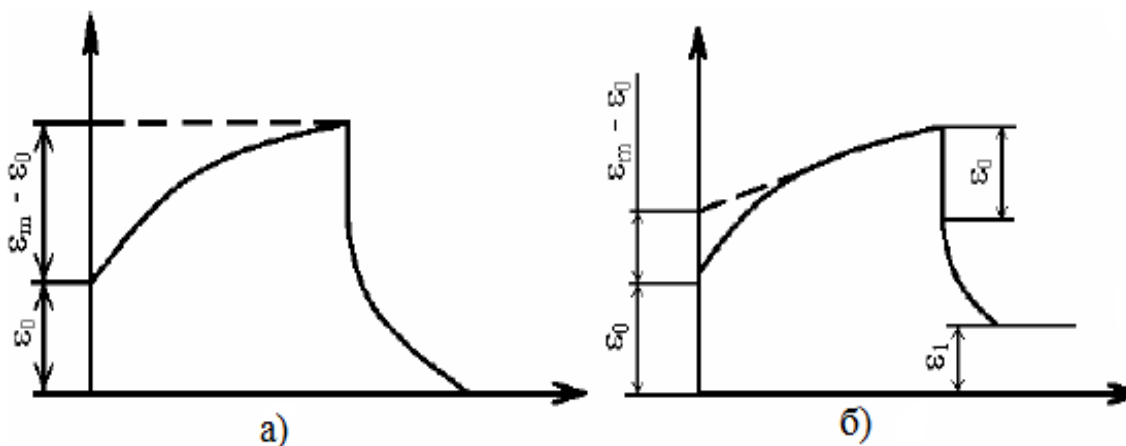


Рисунок 19 – Криві повзучості

Дослідження пружно-пластично-в'язких властивостей дисперсних харчових систем за кривими кінетики деформації проводять переважно за допомогою пластини, що зміщується тангенціально, на приладах типу Вейлера-Рєбіндера або Толстого, а також на ротатійних віскозиметрах Воларовича.

За кривими деформації визначають основні характеристики хлібопекарського тіста, маргарину, кондитерських мас, бісквітного тіста та деяких інших харчових матеріалів.

Найбільш важливим реологічним показником властивостей матеріалу є залежність швидкості деформації від напруження. Для більшості харчових мас ця залежність носить складний характер. У цих випадках реологічні властивості характеризуються кривою залежності швидкості деформації від напруження.

### 6.3. Механічна модель стандартного в'язкого пружного тіла Максвелла-Томпсона. Механічна модель тіла Бюргера

Модель стандартного в'язкого пружного тіла Максвелла-Томпсона являє собою трьохелементну модель, що складається з моделі Кельвіна-Фойгта, до якої послідовно приєднаний пружний елемент Гука (рис. 20).

Закон деформації моделі стандартного в'язкого пружного тіла Максвелла-Томпсона має такий вигляд:

$$\tau + T_p \cdot \dot{\tau} = G_y + T_p \cdot G_2 \cdot \dot{\gamma} \quad (23)$$

де  $G$  – тривалий модуль пружності, Па;

$G_2$  – миттєвий модуль пружності, Па;

$T_p$  – час релаксації, с.

$$T_p = \frac{\mu}{(G_1 + G_2)} \quad (24)$$

$$G = \frac{G_1 \cdot G_2}{G_1 + G_2}$$

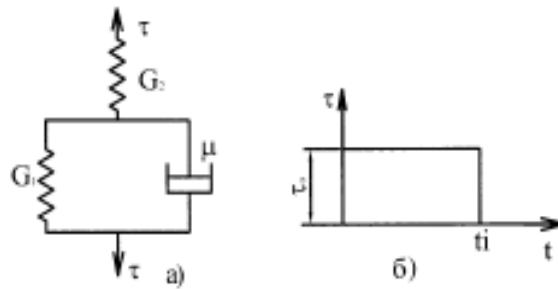


Рисунок 20 – Модель стандартного в'язкого пружного тіла Максвелла-Томпсона

**Модель тіла Бюргера** складається з послідовно з'єднаних моделей Кельвіна-Фойгта та Максвелла (чотирьохелементна модель) (рис. 21).

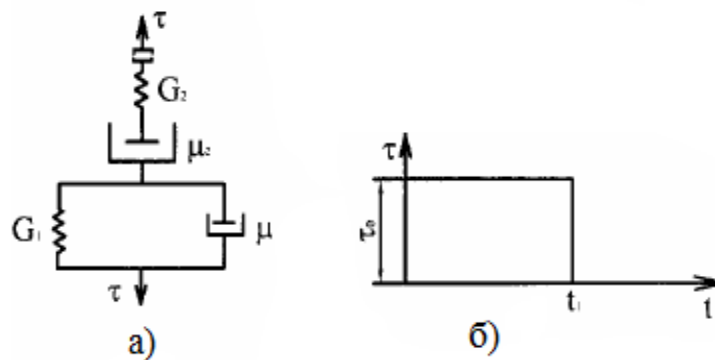


Рисунок 21 – Модель тіла Бюргера

Рівняння повзучості моделі тіла Бюргера має такий вигляд:

$$y = \frac{\tau}{G_2} + \frac{\tau_T}{\mu_2} + \frac{\tau}{G_1} \cdot \left[ 1 - e^{-\frac{t}{\mu_1}} \right] \quad (25)$$

Для більш точного відображення поведінки харчових матеріалів під дією навантаження необхідно створювати складні механічні моделі.

Наприклад, Н.К. Гупта та К.Д. Чойшнер запропонували описувати деформацію свіжого хліба при різанні реологічною **моделлю Шофільда-Скотт-Блера** з елементом, що відображає втрату міцності хліба при зрізі (рис. 22).

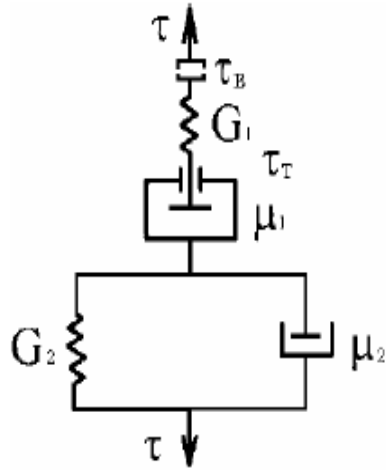


Рисунок 22 – Модель Шофільда-Скотт-Блера

При різанні тиск через ніж передається хлібу, який спочатку зазнає миттєвої еластичної ( $G_1$ ) та сповільненої в'язко-пружної ( $G_2, \mu_2$ ) деформації, а потім при напруженні, що перевищує межу плинності ( $\tau_T$ ), матеріал пластично деформується ( $\tau_T, \mu_1$ ).

При напруженні, що дорівнює межі міцності при зрізі ( $\tau_B$ ), відбувається поділ матеріалу (різання) хлібу.

Реологічне рівняння моделі Шофільда-Скотт-Блера має такий вигляд:

$$\dot{\gamma} = \frac{t}{G_1} + \left[ \frac{\tau}{\mu_2} \right] \cdot e^{-\frac{G_2 t}{\mu_2}} + \frac{(\tau - \tau_T)}{\mu_1} \quad (26)$$

Різання хліба починається при  $\tau > \tau_B$ .

Для невеликої пластичної деформації хліба необхідно, щоб час прикладання навантаження (різання) був якомога меншим, тобто швидкість деформації має забезпечувати стрімке створення максимального напруження на зріз, а пластична деформація повинна бути незначною.

Модель пшеничного тіста при розтягуванні має більш складний вигляд (рис. 23).

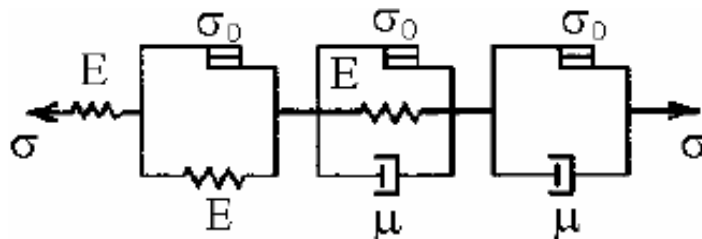


Рисунок 23 – Модель пшеничного тіста при розтягуванні

## **? Контрольні питання**

1. Назвіть структурні елементи механічної моделі тіла Бінгама.
2. Як з'єднані елементи Ньютона і Сен-Венана в механічній моделі тіла Бінгама?
3. Назвіть структурні елементи механічної моделі тіла Шведова.
4. Чим відрізняється механічна модель тіла Шведова від механічної моделі тіла Бінгама?
5. Що являє собою модель тіла Максвелла-Томпсона?
6. З яких послідовно з'єднаних моделей складається модель тіла Бюргерса?
7. Поясніть, навіщо потрібно визначати структурно-механічні властивості харчових мас на виробництві.
8. Що визначають за кривими повзучості?
9. Охарактеризуйте процес деформації хліба при різанні.
10. Що потрібно для створення невеликої пластичної деформації хліба?

## **Практичні завдання**

1. Змоделюйте механічну модель тіла Бінгама, механічну модель тіла Шведова, модель стандартного в'язкого пружного тіла Максвелла-Томпсона та модель тіла Бюргерса.
2. Відтворіть модель Шофільда-Скотт-Блера та модель пшеничного тіста при розтягуванні.