

Лекція №18

Тема: «Опуклість графіка функції»

План

1. Означення опуклості графіка функції.
2. Необхідна умова точки перегину.
3. Достатні умови перегину графіка функції.

1. Означення опуклості графіка функції.

Графік диференційованої на $(a; b)$ функції $y = f(x)$ називають *опуклим вниз* на цьому інтервалі, якщо він розташований вище будь-якої дотичної до цього графіка на $(a; b)$.

Графік диференційованої на $(a; b)$ функції $y = f(x)$ називають *опуклим вгору* на цьому інтервалі, якщо він розташований нижче будь-якої дотичної до цього графіка на $(a; b)$.

Точку на графіку функції $y = f(x)$, що відокремлює його частини з різною випуклістю, називають *точкою перегину*.

2. Необхідна умова точки перегину.

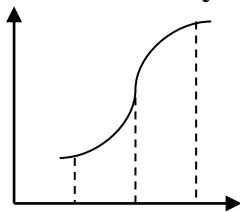


Рис. 5.16.

Означення 1. x_0 - точка перегину

графіка функції $y = f(x)$ $\Leftrightarrow^{\text{def}} \exists \delta > 0$ в δ -околі точки x_0 при переході через цю точку функція змінює напрямок опуклості, тобто

x_0 - точка перегину графіка функції

$$y = f(x) \Leftrightarrow^{\text{def}}$$

$$\exists \delta > 0 \left(\hat{a}(x_0 - \delta; x_0) f(x) - \cup (\cap) \right) \wedge \left(\hat{a}(x_0; x_0 + \delta) f(x) - \cap (\cup) \right).$$

Теорема (необхідна умова перегину).

$$\left| \begin{array}{l} 1) f(x) \text{ диференційовна в } B_\delta(x_0), \\ 2) x_0 \text{ - точка перегину, } 3) \exists f''(x_0), \end{array} \right. \Rightarrow f''(x_0) = 0$$

Доведення. Нехай $f(x)$ диф. в $B_\delta(x_0)$.

Оскільки т. x_0 - точка перегину, то

$$\left. \begin{array}{l} \text{в } (x_0 - \delta; x_0) \quad f(x) \text{ опукла} \quad \downarrow \Rightarrow f'(x) \square \\ \text{в } (x_0; x_0 + \delta) \quad f(x) \text{ опукла} \quad \uparrow \Rightarrow f'(x) \square \end{array} \right\} \Rightarrow \text{т. } x_0 \text{ - точка лок. максимуму } f(x)$$

$$f'(x) \Rightarrow f''(x_0) = 0. \blacksquare$$

Умова $f''(x_0)=0$ є тільки необхідною умовою перегику в т. x_0 , але не є достатньою. Наприклад, для функції $y=x^4$ в точці $x_0=0$ маємо $y''(0)=12x^2|_{x=0}=0$, але ця функція в цій точці не має перегику.

На рис. 5.17 зображено можливі типи перегику функцій. Перегики, зображені на рис. 5.17 в, г, ж, з відповідають піковидним екстремумам. Зауважимо, що при переході через точки екстремумів, зображених на рис. 5.11 а, г, д, з, функція не змінює напрям опуклості, тому в цих точках немає перегику.

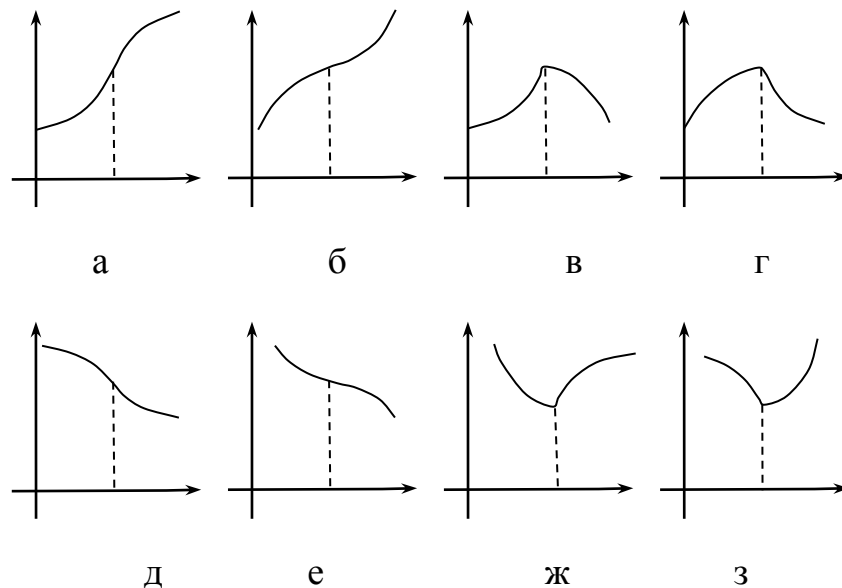


Рис. 5.17. Можливі типи перегику функцій.

3. Достатні умови перегику графіка функції.

Теорема (достатня умова перегику)

- | | |
|---|---|
| <div style="display: flex; align-items: center;"> <div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px; margin-left: 10px;"> <p>1) $f(x)$ двічі диференційовна в $B_\delta(x_0)$,</p> <p>2) $f''(x_0)=0$; 3) при переході через</p> <p>в $B_\delta(x_0)$ $f''(x)$ змінює свій знак,</p> </div> <div style="margin-left: 20px;"> <p>т. x_0</p> </div> </div> | <p>x_0 - точка перегику.</p> |
|---|---|

Доведення. При переході через т. x_0 в $B_\delta(x_0)$ $f''(x)$ змінює свій знак, тому

$$\left. \begin{array}{l} \forall x \in (x_0 - \delta; x_0) \quad f'(x) > 0 (< 0) \Rightarrow f(x) \nearrow (\searrow) \\ \forall x \in (x_0; x_0 + \delta) \quad f'(x) < 0 (> 0) \Rightarrow f(x) \searrow (\nearrow) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{т. } x_0 \text{ точки перегику (за визнач.).} \blacksquare$$

Теорема (достатня умова перегику). Нехай n – парне натуральне число і функція $y=f(x)$ n разів диференційована у деякому околі точки x_0 та $(n+1)$ разів у самій точці x_0 . Тоді, якщо всі похідні до n -го порядку дорівнюють нулю, а $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$, то точка x_0 є точкою перегику.

Приклад. Дослідити на опуклість та визначити точки перегину графіка функції $y = x^5 - x + 2$.

Розв'язання. Задана функція визначена на всій числовій прямій. Знайдемо її другу похідну. $y'(x) = 5x^4 - 1$, $y''(x) = 20x^3$. Друга похідна існує у всіх точках числової прямої. З рівняння $y'' = 0$ знаходимо $x = 0$. При $x < 0$ $y'' < 0$, тут графік функції опуклий вгору. При $x > 0$ $y'' > 0$, тому при $x < 0$ графік опуклий вниз. Точка з абсцисою $x = 0$ є точкою перегину, її ордината $y(0) = 2$.