

Лекція №19

Тема: «Загальна схема дослідження функції»

План

1. Загальна схема дослідження функції.
2. Приклади.

1. Загальна схема дослідження функції.

- 1) Знайти область визначення функції – $D(f)$.
- 2) Знайти область значень функції – $E(f)$.
- 3) Дослідити функцію на парність і непарність.
- 4) Дослідити функцію на періодичність.
- 5) Визначити область неперервності та точки розриву.
- 6) Знайти точки перетину з осями координат, значення функції в характерних точках.
- 7) Знайти локальні екстремуми та проміжки зростання та спадання функції.
- 8) Знайти точки перегину, проміжки опуклості і вгнутості.
- 9) Знайти асимптоти графіка функції.
- 10) За результатами виконаного дослідження побудувати ескіз графіка функції.

2. Приклади.

Приклад 1.. Дослідити функцію $y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$ і побудувати її графік.

Розв'язання. Дослідимо функцію відповідно до запропонованої схеми.

1. Функція існує при всіх значеннях x , крім $x = -1$, при якому знаменник дробу обертається в нуль. Таким чином, функція визначена в інтервалах $(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$.

2. Оскільки $f(-x) = \frac{(-x)^3}{2(-x+1)^2} = \frac{-x^3}{2(1-x)^2}$, то функція ні парна, ні непарна,

графік її не симетричний.

3. Точку перетину з віссю Oy визначимо, поклавши $x = 0$. Тоді $y(0) = 0$, отже, точка $(0,0)$ належить графіку функції.

Точки перетину з віссю Ox знайдемо, поклавши $y=0$. Розв'язуючи

рівняння $\frac{x^3}{2(x+1)^2} = 0$, одержуємо $x = 0$.

4. Оскільки вертикальні асимптоти функція може мати тільки в точках розриву, обчислимо однобічні границі функції при $x \rightarrow -1$:

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{x^3}{2(x+1)^2} = \left[\frac{-1}{+0} \right] = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{x^3}{2(x+1)^2} = \left[\frac{-1}{+0} \right] = -\infty.$$

Тобто, пряма $x = -1$ є вертикальною асимптотою графіка. Рівняння похилої асимптоти знайдемо у вигляді $y = kx + b$.

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{2x(x+1)^2} = \frac{1}{2}, b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{2x(x+1)^2} - \frac{1}{2}x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^2 - x}{2(x+1)^2} = -1.$$

Отже, пряма $y = \frac{1}{2}x - 1$ є похилою асимптотою графіка функції.

5. Обчислимо похідну: $y' = \frac{x^2(x+3)}{2(x+1)^3}$. Похідна дорівнює нулю в точках

$x_1 = 0$, $x_2 = -3$. Похідна не існує в точці $x = -1$, але варто пам'ятати, що ця точка не належить області визначення функції.

Розіб'ємо область визначення отриманими точками на проміжки і дослідимо знак першої похідної в кожному проміжку. Результат відобразимо на схемі (рис. 3.23).

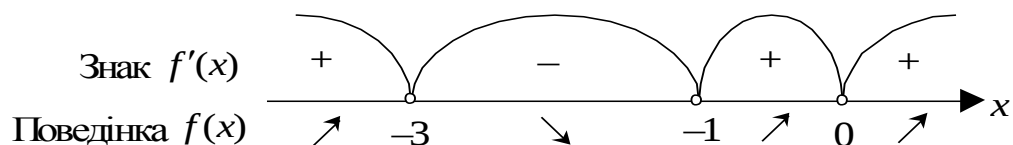


Рис. 3.23.

Функція зростає на проміжках $(-\infty; -3)$ і $(-1; +\infty)$, спадає на проміжку $(-3; -1)$. У точці $x = -3$ функція має максимум: $y_{\max}(-3) = -\frac{27}{8}$.

6. Обчислимо другу похідну: $y'' = \frac{3x}{(x+1)^4}$. Визначаємо критичні точки

другого роду, поклавши чисельник і знаменник дробу рівними нулю. Одержимо $x_1 = 0$, $x_2 = -1$. Точка $x_2 = -1$ не може бути критичною, оскільки вона не належить області визначення.

Розіб'ємо область визначення одержаними точками на проміжки і дослідимо знак другої похідної на кожному проміжку. Результат зобразимо на схемі (рис. 3.24).

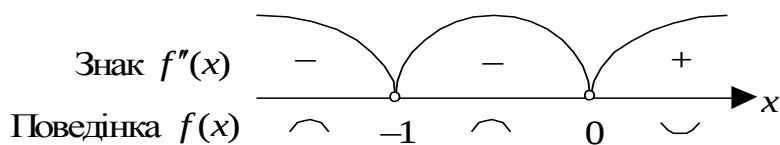


Рис. 3.24.

Графік функції випуклий на проміжках $(-\infty; -1)$ і $(-1; 0)$ й увігнутий на проміжку $(0; +\infty)$. При $x = 0$ друга похідна дорівнює нулю і при переході через цю точку змінює знак. Це означає, що точка $x = 0$ є точкою перегину.

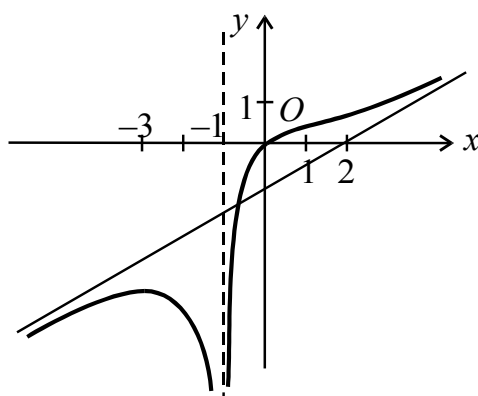


Рис. 3.25.

Побудову графіка починаємо з зображення його асимптот і всіх точок, одержаних у процесі дослідження.

Графік функції зображено на рис. 3.25.

Приклад 2. Провести повне дослідження та побудувати графік функції

$$y = \frac{x^3}{x^2 - 1}.$$

1) $D(y) = (-\infty; 1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$. 2) $E(y) = \emptyset$.

3) $y(-x) = -y(x) \Rightarrow$ непарна, тому її графік симетричний відносно точки $O(0,0)$.

4) Функція неперіодична.

5) Точки розриву $x = -1$; $x = 1$; оскільки

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \left[\frac{1}{(1+0)^2 - 1} \right] = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \left[\frac{1}{(1-0)^2 - 1} \right] = -\infty,$$

то в точці $x=1$ розрив II роду. Так як функція непарна, то в точці $x=-1$ теж розрив II роду, а $\lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{x^3}{x^2 - 1} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{x^3}{x^2 - 1} = +\infty$.

Функції $g(x) = x^3$ і $h(x) = 1 - x^2$ неперервні як многочлени, тому надана функція у точках, де знаменник $h(x) = 1 - x^2$ не обертається в нуль (тобто $x \neq \pm 1$), є неперервною функцією, як частка двох неперервних функцій.

6) З п. 5) випливає, що $x = -1$; $x = 1$; - вертикальні асимптоти.

Знайдемо похилі асимптоти:

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 - 1} = 1, \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 - x^3 + x}{x^2 - 1} = 0,$$

тому $y = x$ - похила асимптота на $\pm\infty$.

Оскільки на $\pm\infty$ є похилі асимптоти, то горизонтальних немає.

7) Для дослідження функції на монотонність і пошуку її точок екстремуму знайдемо першу похідну:

$$y' = \frac{3x^2(x^2 - 1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2}.$$

Знайдемо критичні точки, тобто точки, в яких похідна обертається в нуль або не існує.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}, x = 0;$$

y' не існує в точках $x = \pm 1$.

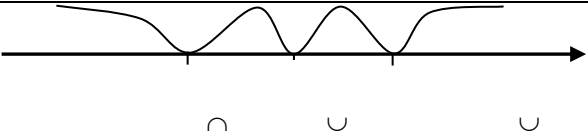
Знаки y' :	
Характерні точки	
Напрямки монотонності, loc extr	

Значення функції в точках loc extr	$-\frac{3}{2}\sqrt{3}$	$\frac{3}{2}\sqrt{3}$
---------------------------------------	------------------------	-----------------------

8) Для дослідження функції на опуклість і пошуку її точок перегину знайдемо другу похідну:

$$y'' = \frac{(4x^3 - 6x)(x^2 - 1)^2 - (x^4 - 3x^2)(2(x^2 - 1) \cdot 2x)}{(x^2 - 1)^4} = \frac{2x[x^2 + 3]}{(x^2 - 1)^3}.$$

Оскільки $y''(x) \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}$, то точок перегину немає.

Знаки y'' :	
Характерні точки	
Напрямки опуклості, т. перегину	
Значення функції в точках перегину	0

9) Точки перетину з осями: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$.

Точка мінімуму $x = \sqrt{3}$ має тип, зображений на рис. 5.11 д,
точка максимуму $x = -\sqrt{3}$ має тип, зображений на рис. 5.11 а,
точка перегину $x = 0$ має тип, зображений на рис. 5.17 е.

10) Графік побудовано на рис 5.20.

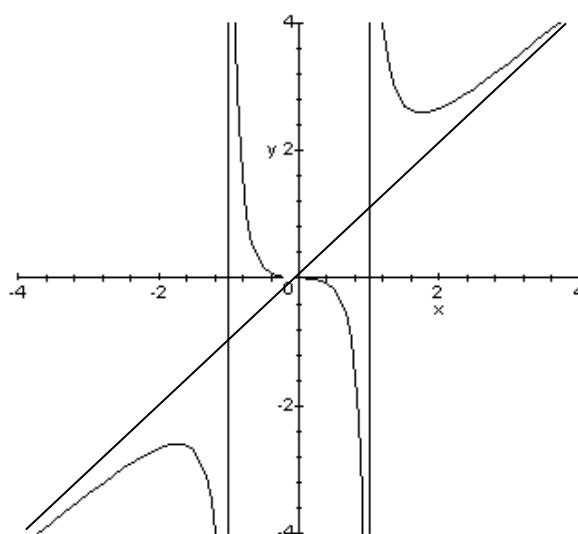


Рис. 5.20. Графік функції $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$.