Лекція

Тема: «Первісна функції. Таблиця невизначених інтегралів»

План

1. Означення та властивості первісної функції.
2. Властивості невизначеного інтеграла.
3. Таблиця невизначених інтегралів.

1. Означення та властивості первісної функції.

Основною задачею диференціального числення є знаходження похідної $f'(x)$ заданої функції $f(x)$. Одним з можливих фізичних трактувань цієї задачі є визначення швидкості руху за функцією, що задає пройдений шлях за час руху. Можна розглядати обернену задачу, а саме, визначення пройденого шляху за відомою швидкістю руху як функцією часу. Остання задача зводиться до знаходження функції $f(x)$ за відомою її похідною $f'(x)$. Ця задача розв'язується за допомогою невизначеного інтеграла.

Означення 1.1 *Функцію* $F(x)$ *називають* ***первісною*** *функції* $f(x)$ *на проміжку* $(a;b)$, *якщо* $F(x)$ *диференційовна на* $(a;b)$ *і* $F'(x)=f(x)$, $x\in(a;b)$.

Наприклад, первісною функції $f(x)=x^2$, $x\in R$, є функція $F(x)=\dfrac{x^3}{3}$. Очевидно, що первісними будуть також функції $F(x)=\dfrac{x^3}{3}+1$, $F(x)=\dfrac{x^3}{3}-2$ і, взагалі, $F(x)=\dfrac{x^3}{3}+C$, де C – довільна стала, оскільки $F'(x)=\left(\dfrac{x^3}{3}+C\right)'=x^2$, $x\in R$.

Цей приклад свідчить, що задача знаходження первісної розв'язується неоднозначно, тобто, якщо для функції $f(x)$ існує первісна $F(x)$, то ця первісна не одна.

Теорема 1.1 *Якщо* $F(x)$ *– первісна функції* $f(x)$ *на проміжку* $(a;b)$, *то всяка інша первісна функції* $f(x)$ *на цьому проміжку має вигляд* $F(x)+C$, *де*

C – довільна стала.

Доведення. Нехай $\Phi(x)$ – деяка інша первісна функції $f(x)$, відмінна від $F(x)$. Тоді $\Phi'(x) = f(x)\ \forall x \in (a;b)$. Отже, на $(a;b)$

$$\left(\Phi(x) - F(x)\right)' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Це означає, що $\Phi(x) - F(x) = C$. Отже, $\Phi(x) = F(x) + C$. Теорему доведено.

З цієї теореми випливає, що множина функцій $F(x)+C$, де $F(x)$ – одна з первісних функції $f(x)$, а C – довільна стала, визначає всю сукупність первісних функції $f(x)$.

Означення 1.2 *Якщо $F(x)$ – первісна функції $f(x)$ на проміжку $(a;b)$ і C – довільна стала, то вираз $F(x)+C$ називають* ***невизначеним інтегралом*** *функції $f(x)$ на цьому проміжку і позначають символом $\int f(x)dx$.*

Таким чином, символ $\int f(x)dx$ означає множину всіх первісних функції $f(x)$. Знак $\int$, введений Лейбніцем, називають ***знаком інтегралу***, вираз $f(x)dx$ – ***підінтегральним виразом***, $f(x)$ – ***підінтегральною функцією***, x – ***змінною інтегрування***. Операцію знаходження невизначеного інтеграла від функції називають ***інтегруванням*** цієї функції.

З геометричної точки зору невизначений інтеграл $\int f(x)dx$ є множиною кривих $F(x)+C$, таких, що $F'(x) = f(x)$. Кожна з цих кривих називається ***інтегральною кривою*** і утворюється зсувом однієї з них паралельно самій собі вздовж осі Oy. Щоб з цієї множини виділити певну інтегральну криву $F(x)$, достатньо задати її значення $F(x_0)$ у якій-небудь точці $x_0 \in (a;b)$.

2. Властивості невизначеного інтеграла.
точці $x_0 \in (a;b)$.

З означення невизначеного інтеграла випливають наступні його властивості.

1. Похідна від невизначеного інтеграла дорівнює його підінтегральній функції:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

Отже, знаки похідної та невизначеного інтеграла взаємно знищуються, оскільки операції диференціювання та інтегрування є взаємно оберненими. Внаслідок цього вірність виконання операції інтегрування можна перевірити диференціюванням отриманого виразу. Наприклад, $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$, оскільки $\left(\frac{x^4}{4} + C\right)' = x^3$.

2. Невизначений інтеграл від диференціала деякої функції дорівнює сумі цієї функції та довільної сталої:

$$\int dF(x) = \int F'(x)dx = F(x) + C.$$

3. Диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу:

$$d\left(\int f(x)dx\right) = \left(\int f(x)dx\right)' dx = f(x)dx.$$

4. Сталий множник можна виносити за знак інтеграла:

$$\int C \cdot f(x)dx = C \cdot \int f(x)dx.$$

5. Невизначений інтеграл від суми (різниці) двох функцій дорівнює сумі (різниці) інтегралів від цих функцій:

$$\int \left(f(x) \pm g(x)\right)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

Ця властивість справедлива для довільного скінченного числа доданків.

6. Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$ і $u = \varphi(x)$ – довільна функція, що має неперервну похідну, то

$$\int f(u)du = F(u) + C.$$

Цю властивість називають ***інваріантністю формули інтегрування***. Вона означає, що формула для невизначеного інтеграла залишається справедливою незалежно від того, чи змінна інтегрування є незалежною змінною, чи довільною неперервно диференційовною функцією незалежної змінної. Користуючись властивістю інваріантності формули інтегрування, можна з однієї формули для обчислення невизначеного інтеграла отримати нескінченну кількість таких формул. Наприклад, з формули $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$ одержимо формулу $\int u^3 du = \frac{u^4}{4} + C$, де $u(x)$ – довільна неперервно диференційовна функція.

7. Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$, де a та b – довільні константи, $a \neq 0$.

Ця властивість випливає з попередньої властивості при $u = ax + b$. Тоді $du = adx$ і $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}\int f(u)du = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$. Наприклад,

$$\int \cos x dx = \sin x + C \Rightarrow \int \cos(2x+3)dx = \frac{1}{2}\sin(2x+3) + C.$$

3. Таблиця невизначених інтегралів.

1. $\int dx = x + C$.	2. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, $\alpha \neq -1$.
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$.	4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, $a > 0$, $a \neq 1$.

5. $\int e^x dx = e^x + C$.	6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.
7. $\int \cos dx = \sin x + C$.	8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$.
9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$.	10. $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$.
11. $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$.	12. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$
13. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$.	14. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C, \\ -\arccos x + C. \end{cases}$
15. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C, \\ -\operatorname{arcctg} x + C. \end{cases}$	16. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$, $a \neq 0$.
17. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left\| \frac{x-a}{x+a} \right\| + C$, $a \neq 0$.	18. $\int \frac{xdx}{a^2 \pm x^2} = \pm \frac{1}{2} \ln \left\| a^2 \pm x^2 \right\| + C$.
19. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln \left\| x + \sqrt{x^2 \pm 1} \right\| + C$.	20. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{\|a\|} + C, \quad a > 0$.
21. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left\| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right\| + C$, $a > 0$.	22. $\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \pm \sqrt{a^2 \pm x^2} + C$, $a > 0$.
23. $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C$, $a > 0$.	24. $\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln \left\| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right\| + C$, $a > 0$.
25. $\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$.	

$$\int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^n} = \frac{1}{2(n-1)a^2} \left(\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^{n-1}} + (2n-3) \int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^{n-1}} \right);$$

$$\int \frac{dx}{\left(x^2-a^2\right)^n} = -\frac{1}{2(n-1)a^2} \left(\frac{x}{\left(x^2-a^2\right)^{n-1}} + (2n-3) \int \frac{dx}{\left(x^2-a^2\right)^{n-1}} \right).$$

Операція інтегрування є значно складнішою, ніж операція диференціювання. У диференціальному численні таблиця похідних і правила диференціювання функцій дають змогу знайти похідну довільної диференційовної функції. У інтегральному численні таких простих і універсальних правил інтегрування не існує. Тут потрібен індивідуальний підхід до кожної підінтегральної функції.

У найпростіших випадках обчислити невизначений інтеграл можна за допомогою основних властивостей, розглянутих вище, а також таблиці інтегралів. Такий метод обчислення інтегралів називають безпосереднім інтегруванням. При цьому використовуються елементарні перетворення підінтегральної функції.

Приклад. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$.

Розв’язання. Перетворимо підінтегральний вираз, використавши основну тригонометричну тотожність:

$$\frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Підставимо отриманий вираз в інтеграл. Використавши формули таблиці основних інтегралів, отримуємо

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C.$$

Відповідь. $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C$.