Лекція

Тема: «Основні методи інтегрування»

План

1. Безпосереднє інтегрування.
2. Метод підстановки (інтегрування заміною змінної).
3. Метод внесення функції під диференціал.
4. Інтегрування частинами.

1. Безпосереднє інтегрування.

У найпростіших випадках обчислити невизначений інтеграл можна за допомогою основних властивостей, розглянутих вище, а також таблиці інтегралів. Такий метод обчислення інтегралів називають безпосереднім інтегруванням. При цьому використовуються елементарні перетворення підінтегральної функції.

Приклад. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$.

Розв'язання. Перетворимо підінтегральний вираз, використавши основну тригонометричну тотожність:

$$\frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Підставимо отриманий вираз в інтеграл. Використавши формули таблиці основних інтегралів, отримуємо

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C.$$

Відповідь. $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C$.

2. Метод підстановки (інтегрування заміною змінної).

Суть цього методу полягає у введенні нової змінної інтегрування. Він ґрунтується на наступній теоремі.

Теорема 1. *Нехай* $F(x)$ *є первісною функції* $f(x)$ *на проміжку* $(a;b)$, *тобто* $\int f(x)dx = F(x) + C$, $x \in (a;b)$, *і нехай функція* $x = \varphi(t)$ *визначена та* *диференційовна на проміжку* $(\alpha;\beta)$, *причому множиною значень цієї функції є проміжок* $(a;b)$. *Тоді має місце формула*:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C = F(x) + C\,. \tag{1.1}$$

Доведення. Згідно з правилом диференціювання складеної функції маємо:

$$\left(F(\varphi(t))\right)' = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$$

і тоді формула (1.1) випливає з властивості 1 невизначеного інтеграла, розглянутій у п. 1.1. Теорема доведена.

Доведена теорема, як правило, застосовується одним з двох способів.

1. Інтеграл $\int g(x)dx$ записують у вигляді:

$$\int g(x)dx = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = F(\varphi(x)) + C\,.$$

На практиці зручнішим є наступний запис:

$$\int g(x)dx = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \begin{Vmatrix}\varphi(x) = u, \\ \varphi'(x)dx = du\end{Vmatrix} = \int f(u)du =$$
$$= F(u) + C = F(\varphi(x)) + C.$$

2. Інтеграл $\int g(x)dx$ представляють у вигляді:

$$\int g(x)dx = \int g(\varphi(t))\varphi'(t)dt\,,$$

де функція $x = \varphi(t)$ має обернену функцію $t = \psi(x)$ і для функції $g(\varphi)\cdot\varphi'$ відома первісна G, тоді

$$\int g(x)dx = \int g(\varphi(t))\varphi'(t)dt = G(t) + C = G(\psi(x)) + C\,. \tag{1.2}$$

При першому способі заміни змінної функція $\varphi(x)$, присутня у підінтегральному виразі, вводиться під знак диференціала:

$\varphi'(x)dx = d(\varphi(x)) = du$, $u = \varphi(x)$. Введення під знак диференціала використовується, коли підінтегральний вираз має вигляд: $f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$.

При використанні другого способу штучно вводиться нова функція $x = \varphi(t)$ так, щоб новий підінтегральний вираз $g(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ був зручнішим для інтегрування, ніж $g(x)dx$.

Після застосування будь-якого способу заміни змінної потрібно виконати зворотній перехід від нової змінної u чи t до заданої змінної x.

Таким чином, при інтегруванні методом заміни змінної виконуються підстановки двох видів: $u = \varphi(x)$ або $x = \varphi(t)$. Ці підстановки підбирають так, щоб отримані після відповідних перетворень нові інтеграли були табличними або зводилися до відомих. Загальних методів підбору підстановок не існує, але можна вказати підстановки, які доцільно використовувати при інтегруванні певних класів функцій.

Розглянемо приклади на застосування методу заміни змінної для знаходження невизначених інтегралів.

Приклад. Знайти інтеграл $\int \frac{(5\ln x + 3)^3}{x} dx$**.**

Розв'язання. Оскільки підінтегральний вираз є добутком функції, що залежить від $\varphi(x) = \ln x$ на диференціал $d(\varphi(x)) = d(\ln x) = \frac{dx}{x}$, то доцільно використати перший спосіб заміни змінної – введення під знак диференціала. Нехай $u = \ln x$, $du = \frac{dx}{x}$. Тоді отримуємо:

$$\int \frac{(5\ln x + 3)^3}{x} dx = \left\| \begin{matrix} \ln x = u \\ \frac{dx}{x} = du \end{matrix} \right\| = \int (5u+3)^3 du = \frac{1}{5} \frac{(5u+3)^4}{4} + C = \frac{(5\ln x + 3)^4}{20} + C$$

.

Відповідь. $\dfrac{\left(5\ln x+3\right)^4}{20}+C$.

3. Метод внесення функції під знак диференціала.

Введення під знак диференціала використовується, коли підінтегральний вираз має вигляд: $f\left(\phi(x)\right)\phi'(x)dx$:

$$\int f(x)dx=\int f\left(\phi(x)\right)\phi'(x)dx=\int f\left(\phi(x)\right)d\phi(x)=F\left(\phi(x)\right)+C.$$

Найпростішим випадком інтегрування внесення функції під знак диференціала є формула:

$$\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C.$$

При інтегруванні зручно використовувати властивість інваріантності диференціалу:

$d\left(x^n\right)=nx^{n-1}dx$;	$d(\ln x)=\dfrac{dx}{x}$;	$d(\mathrm{tg}\,x)=\dfrac{dx}{\cos^2 x}$;
$d(\sin x)=\cos x dx$;	$d(\cos x)=-\sin x dx$;	$d\left(e^x\right)=e^x dx$;
$d(\arcsin x)=\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$;	$d(\arccos x)=-\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$;	$d(\mathrm{arctg}\,x)=\dfrac{dx}{1+x^2}$.

Наприклад: $\int e^{3-7x}dx=-\dfrac{1}{7}\int e^{3-7x}d(3-7x)=-\dfrac{1}{7}e^{3-7x}+C$.

4. Інтегрування частинами.

Нехай функції $u(x)$ і $v(x)$ мають неперервні похідні. Тоді диференціал їх добутку $d(uv)=u\cdot dv+v\cdot du$. Інтегруючи цю рівність, отримуємо:

$$\int d(uv)=uv=\int u\cdot dv+\int v\cdot du.$$

Звідси отримуємо ***формулу інтегрування частинами***:

$$\int u\cdot dv=u\cdot v-\int v\cdot du. \tag{1.3}$$

Формула інтегрування частинами (1.3) дає змогу звести знаходження інтеграла $\int u\cdot dv$ до знаходження інтеграла $\int v\cdot du$, який може виявитися набагато простішим, ніж вихідний інтеграл $\int u\cdot dv$.

Інтегрування частинами полягає у тому, що підінтегральний вираз заданого інтеграла записують у вигляді добутку двох співмножників: u та dv.

Потім, після знаходження du та $v=\int dv$, використовують формулу інтегрування частинами (1.3). При цьому у знайденому виразі для v звичайно приймають $C=0$. Інколи цю формулу доводиться використовувати декілька разів.

Наведемо деякі типи інтегралів, для обчислення яких зручно використовувати метод інтегрування частинами.

1. Інтеграли виду $\int P(x)e^{kx}dx$, $\int P(x)\sin kxdx$, $\int P(x)\cos kxdx$, де $P(x)$ – многочлен, k – задане число. Тут зручно прийняти $u=P(x)$, а dv позначити інший співмножник у підінтегральному виразі.

2. Інтеграли виду $\int P(x)\arcsin x\,dx$, $\int P(x)\arccos x\,dx$, $\int P(x)\operatorname{arctg} x\,dx$, $\int P(x)\operatorname{arcctg} x\,dx$, $\int P(x)\ln x\,dx$. Тут зручно прийняти $P(x)dx=dv$, а за u позначити інший співмножник.

3. Інтеграли виду $\int e^{ax}\sin bxdx$, $\int e^{ax}\cos bxdx$, де a та b – задані числа, знаходять дворазовим інтегруванням частинами. За u можна прийняти функцію e^{ax}.

Приклад. Знайти інтеграл $\int(2x+1)e^{3x}dx$.

Розв’язання. Застосуємо формулу (1.3) інтегрування частинами. Виберемо $u=2x+1$, $dv=e^{3x}dx$. Тоді $du=2dx$, $v=\int dv=\int e^{3x}dx=\frac{1}{3}e^{3x}$. Тоді за формулою (1.3) отримуємо:

$$\int(2x+1)e^{3x}dx=\frac{2x+1}{3}e^{3x}-\frac{2}{3}\int e^{3x}dx=\frac{2x+1}{3}e^{3x}-\frac{2}{9}e^{3x}+C=$$
$$=\frac{6x+1}{9}e^{3x}+C.$$

Відповідь. $\frac{6x+1}{9}e^{3x}+C$.

Приклад. Знайти інтеграл $\int e^{ax}\sin bxdx$.

Розв'язання. Для знаходження даного інтеграла застосуємо метод інтегрування частинами, для чого виберемо $u = e^{ax}$, $dv = \sin bxdx$. Тоді $du = ae^{ax}dx$, $v = \int \sin bxdx = -\frac{1}{b}\cos bx$. За формулою (1.3) знаходимо:

$$\int e^{ax}\sin bxdx = -\frac{e^{ax}}{b}\cos bx + \frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bxdx.$$

До інтеграла $\int e^{ax}\cos bxdx$ у правій частині отриманої рівності ще раз застосуємо формулу інтегрування частинами:

$$\int e^{ax}\cos bxdx = \left\| \begin{matrix} u = e^{ax}, dv = \cos bxdx, \\ du = ae^{ax}dx, v = \frac{1}{b}\sin bx \end{matrix} \right\| = \frac{e^{ax}}{b}\sin bx - \frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bxdx.$$

Підставивши знайдене значення цього інтеграла у вираз для шуканого інтеграла $\int e^{ax}\sin bxdx$, отримаємо:

$$\int e^{ax}\sin bxdx = -\frac{e^{ax}}{b}\cos bx + \frac{a}{b}\left(\frac{e^{ax}}{b}\sin bx - \frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bxdx\right).$$

Отримали рівняння відносно інтеграла $I = \int e^{ax}\sin bxdx$:

$$I = -\frac{e^{ax}}{b}\cos bx + \frac{a}{b}\left(\frac{e^{ax}}{b}\sin bx - \frac{a}{b}I\right).$$

Звідси знаходимо:

$$I = \frac{b \cdot e^{ax}}{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{b}\sin bx - \cos bx\right) + C.$$

Відповідь. $\frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}\left(a\sin bx - b\cos bx\right) + C$.