Лекція

Тема: «Інтегрування раціональних дробів»

План

1. Поняття раціонального дробу.
2. Подання раціонального дробу у вигляді суми простих дробів.
3. Інтегрування простих дробів.
4. Метод Остроградського.

1. Поняття раціонального дробу.

Означення. Нехай $P_m(x)$ та $Q_n(x)$ – це многочлени степенів відповідно m та n. *Відношення цих многочленів* $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ *називають* ***раціональною функцією*** *або* ***раціональним дробом***.

Означення. *Раціональний дріб називають* ***правильним****, якщо степінь чисельника менший, ніж степінь знаменника (*$m<n$*), у іншому випадку (*$m \geq n$*) раціональний дріб називають* ***неправильним***.

Будь-який неправильний раціональний дріб можна представити у вигляді суми многочлена степеня $m-n$ та правильного раціонального дробу, поділивши чисельник раціонального дробу на знаменник.

2. Подання раціонального дробу у вигляді суми простих дробів.

Означення. ***Елементарними раціональними дробами*** *називають раціональні дроби таких чотирьох видів: 1)* $\frac{A}{x-a}$*, 2)* $\frac{A}{(x-a)^n}$*, 3)* $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$*, 4)* $\frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^n}$. Тут A, a, M, N, p, q – дійсні числа, $n \in N$, $n \geq 2$, квадратний тричлен x^2+px+q не має дійсних коренів, тобто $p^2-4q<0$.

Нехай знаменник правильного раціонального дробу $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ розкладено на множники:

$$Q_n(x)=a(x-a_1)^{\alpha_1}\ldots(x-a_s)^{\alpha_s}\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{\beta_1}\ldots\left(x^2+p_rx+q_r\right)^{\beta_r},$$

де $a_1,\dots,a_s$ – дійсні корені многочлена $Q_n(x)$, кратності яких відповідно дорівнюють $\alpha_1,\dots,\alpha_s$, квадратні тричлени $x^2+p_ix+q_i$, $i=1, 2, ..., r$, не мають дійсних коренів, $\alpha_1+...+\alpha_s+2\beta_1+...+2\beta_r=n$. Тоді цей дріб можна подати у вигляді суми елементарних раціональних дробів:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{(x-a_1)^2}+...+\frac{A_{\alpha_1}}{(x-a_1)^{\alpha_1}}+...+\frac{B_1}{x-a_s}+\frac{B_2}{(x-a_s)^2}+...+$$
$$+\frac{B_{\alpha_s}}{(x-a_1)^{\alpha_s}}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^2}+...+\frac{M_{\beta_1}x+N_{\beta_1}}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{\beta_1}}+...+$$
$$+\frac{C_1x+D_1}{x^2+p_rx+q_r}+\frac{C_2x+D_2}{\left(x^2+p_rx+q_r\right)^2}+...+\frac{C_{\beta_r}x+D_{\beta_r}}{\left(x^2+p_rx+q_r\right)^{\beta_r}}.$$

Цю суму називають ***розкладом правильного раціонального дробу на елементарні дроби***.

Для знаходження чисел $A_1,\dots,D_{\beta_r}$ можна використати ***метод невизначених коефіцієнтів***. Цей метод полягає у тому, що знаходять суму елементарних дробів у правій частині останньої рівності, привівши їх до спільного знаменника, після чого прирівнюють коефіцієнти при однакових степенях змінної x у чисельнику отриманого дробу та многочлені $P_m(x)$ – чисельнику раціонального дробу з лівої частини рівності. Отримують систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів $A_1,\dots,D_{\beta_r}$, з якої визначають ці числа.

Приклад. Знайти розклад на елементарні дроби раціонального дробу $\frac{x^4+2x^3+5x^2-1}{x\left(x^2+1\right)^2}$**.**

Розв’язання. Заданий раціональний дріб є правильним, оскільки степінь чисельника ($m=4$) менший, ніж степінь знаменника ($n=5$). Розклад дробу на елементарні дроби має вигляд:

$$\frac{x^4+2x^3+5x^2-1}{x\left(x^2+1\right)^2}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Mx+N}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

Знайшовши суму дробів у правій частині цієї рівності, отримуємо:

$$\frac{x^4+2x^3+5x^2-1}{x\left(x^2+1\right)^2}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Mx+N}{\left(x^2+1\right)^2}=$$

$$=\frac{A\left(x^2+1\right)^2+\left(Bx+C\right)x\left(x^2+1\right)+\left(Mx+N\right)x}{x\left(x^2+1\right)^2}.$$

Прирівнюючи чисельники у лівій та правій частинах отриманої рівності, знаходимо, що $x^4+2x^3+5x^2-1=A\left(x^2+1\right)^2+\left(Bx+C\right)x\left(x^2+1\right)+\left(Mx+N\right)x$. Запишемо цю рівність у вигляді:

$$x^4+2x^3+5x^2-1=\left(A+B\right)x^4+Cx^3+\left(2A+B+M\right)x^2+\left(C+N\right)x+A.$$

Тепер прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях x лівої та правої частин цієї рівності. Отримаємо систему:

$$A+B=1,\ C=2,\ 2A+B+M=5,\ C+N=0,\ A=-1.$$

Розв’язуючи цю систему, знаходимо значення невідомих коефіцієнтів: $A=-1,\ B=2,\ C=2,\ M=5,\ N=-2$. Підставивши їх у розклад заданого дробу на елементарні дроби, отримуємо:

$$\frac{x^4+2x^3+5x^2-1}{x\left(x^2+1\right)^2}=-\frac{1}{x}+\frac{2x+2}{x^2+1}+\frac{5x-2}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

Відповідь. $-\frac{1}{x}+\frac{2x+2}{x^2+1}+\frac{5x-2}{\left(x^2+1\right)^2}$.

3. Інтегрування простих дробів.

Теорема. Будь-яка раціональна функція інтегрується в елементарних функціях.

1) $\int\frac{Adx}{x-a}=\int\frac{Ad\left(x-a\right)}{x-a}=A\ln\left|x-a\right|+C$.

2) $\int \frac{Adx}{(x-a)^n} = \int A(x-a)^{-n}\,dx = \frac{A(x-a)^{-n+1}}{-n+1} + C = -\frac{A}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C,$

$n \neq 1.$

3) $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \frac{M}{2}\ln\left(x^2+px+q\right) + \frac{N-\frac{Mp}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C.$

4) $\int \frac{(Mx+N)}{\left(x^2+px+q\right)^n}dx = \frac{M}{2}\int \frac{(2x+p)dx}{\left(x^2+px+q\right)^n} + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^n} =$

$= \frac{M}{2}\int \frac{d\left(x^2+px+q\right)}{\left(x^2+px+q\right)^n} + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}\right)^n},\ n>1.$

Останній інтеграл підстановкою $t = x + \frac{p}{2}$ зводиться до інтегралу I_n, який інтегрується в елементарних функціях:

$$\frac{M}{2}\cdot\frac{(x^2+px+q)^{1-n}}{1-n} + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^n}$$

Зауваження. Невизначений інтеграл від будь-якої раціональної функції на всякому проміжку, який належить її області визначення, являється елементарною функцією, яка може бути представлена у вигляді алгебраїчної суми композицій раціональних функцій, логарифмів та арктангенсів.

Приклад. Знайти інтеграл $I = \int \frac{3x+2}{\left(x^2+2x+10\right)^2}dx$**.**

Розв’язання. Підінтегральна функція є елементарним дробом виду 4), тобто $\frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^n}$. Для знаходження інтеграла від цього дробу виділимо у чисельнику похідну від квадратного тричлена x^2+px+q, тобто для даного прикладу похідну від квадратного тричлена $x^2+2x+10$. Вона дорівнює $2x+2$, тому підінтегральну функцію перетворимо до вигляду

$$\frac{3x+2}{\left(x^2+2x+10\right)^2} = \frac{\frac{3}{2}(2x+2)-1}{\left(x^2+2x+10\right)^2} = \frac{3}{2}\cdot\frac{2x+2}{\left(x^2+2x+10\right)^2} - \frac{1}{\left((x+1)^2+9\right)^2}.$$

Інтеграл $I=\int\frac{3x+2}{\left(x^2+2x+10\right)^2}dx=\frac{3}{2}\cdot I_1-I_2$, де

$$I_1=\int\frac{d\left(x^2+2x+10\right)}{\left(x^2+2x+10\right)^2}=-\frac{1}{x^2+2x+10}+C_1,$$

а інтеграл $I_2=\int\frac{dx}{\left((x+1)^2+9\right)^2}$ заміною $x+1=t$ зводиться до інтеграла виду $J_n=\int\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^n}$, розглянутого у пункті 1.3, що обчислюється за рекурентною формулою, наведеною у прикладі 1.26:

$$I_2=\int\frac{dt}{\left(t^2+9\right)^2}=\frac{1}{18}\cdot\frac{t}{t^2+9}+\frac{1}{54}\cdot\operatorname{arctg}\frac{t}{3}+C_2.$$

Остаточно отримуємо:

$$I=-\frac{3}{2\left(x^2+2x+10\right)}-\frac{1}{54}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{3}+C.$$

Відповідь. $-\frac{3}{2\left(x^2+2x+10\right)}-\frac{1}{54}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{3}+C$.

4. Метод Остроградського.

Інтеграл від раціональної функції представляють у вигляді:

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx=\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}+\int\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}dx,$$

де $P_1(x)$ і $P_2(x)$ многочлени, коефіцієнти яких треба визначити, причому, дроби $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ і $\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$ є правильними. $Q_1(x)$ – це найбільший спільний дільник многочленів $Q(x)$ і $Q'(x)$: $Q_1(x)=\text{НСД}\left[Q(x);Q'(x)\right]$. $Q_2(x)=\frac{Q(x)}{Q_1(x)}$.