Лекція

Тема: «Інтегрування тригонометричних функцій»

План

1. Універсальна тригонометрична підстановка.
2. Інтегрування добутків синусів та косинусів

1. Універсальна тригонометрична підстановка.

Розглянемо основні методи знаходження інтегралів від виразів, що містять тригонометричні функції. Вираз, що містить функції $\sin x$, $\cos x$, $\mathrm{tg}\, x$, $\mathrm{ctg}\, x$, над якими виконуються дії додавання, віднімання, множення та ділення, будемо позначати $R(\sin x, \cos x, \mathrm{tg}\, x, \mathrm{ctg}\, x)$, де R – знак раціональної функції.

Обчислення невизначених інтегралів $\int R(\sin x, \cos x, \mathrm{tg}\, x, \mathrm{ctg}\, x)dx$ можна звести до обчислення інтегралів від раціональної функції за допомогою ***універсальної тригонометричної підстановки*** $\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} = t$. Тоді отримуємо:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ \mathrm{tg}\, x = \frac{2t}{1-t^2},\ \mathrm{ctg}\, x = \frac{1-t^2}{2t}.$$

Оскільки у цьому випадку $x = 2\mathrm{arctg}\, t$, то $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$.

Приклад. Знайти інтеграл $I = \int \frac{dx}{3+\sin x+\cos x}$**.**

Розв'язання. Застосуємо універсальну тригонометричну підстановку $\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} = t$. Підставивши у заданий інтеграл вирази для $\sin x$ та $\cos x$ через нову змінну t і враховуючи, що $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, отримуємо:

$$\int \frac{dx}{3+\sin x+\cos x} = \int \frac{2dt}{\left(1+t^2\right)\left(3+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} = \int \frac{dt}{t^2+t+2} = \int \frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{7}}\mathrm{arctg}\,\frac{t+\frac{1}{2}}{\sqrt{7}/2} + C = \frac{2}{\sqrt{7}}\mathrm{arctg}\,\frac{2t+1}{\sqrt{7}} + C = \frac{2}{\sqrt{7}}\mathrm{arctg}\,\frac{2\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}+1}{\sqrt{7}} + C.$$

Відповідь. $\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{7}}+C$.

На практиці застосовують і інші, простіші підстановки, у залежності від властивостей та вигляду підінтегральної функції. Зокрема, застосовують наступні правила.

1. Інтеграл $\int R(\sin x, \cos x)dx$ зводиться до інтеграла від раціонального дробу, якщо функція $R(\sin x, \cos x)$ непарна відносно $\sin x$, тобто виконується рівність $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$. У цьому випадку використовують підстановку $\cos x = t$.

2. Якщо функція $R(\sin x, \cos x)$ непарна відносно $\cos x$, тобто виконується рівність $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то підстановка $\sin x = t$ зводить інтеграл до інтеграла від раціонального дробу.

3. Функція $R(\sin x, \cos x)$ є парною відносно $\sin x$ та $\cos x$, тобто є справедливою рівність $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$. Використовуємо підстановку $\operatorname{tg} x = t$. Ця ж підстановка використовується і коли підінтегральна функція має вигляд $R(\operatorname{tg} x)$.

Приклад. Знайти інтеграл $I = \int \frac{dx}{\sin x \cdot \sin 2x}$.

Розв'язання. Запишемо інтеграл I у вигляді:

$$I = \int \frac{dx}{\sin x \cdot 2\sin x \cos x} = \int \frac{dx}{2\sin^2 x \cos x}.$$

Під інтегралом знаходиться раціональна відносно $\sin x$ та $\cos x$ функція, яка змінює знак при заміні $\cos x$ на $(-\cos x)$, тому маємо другий випадок з розглянутих вище і для інтегрування доцільно використати заміну $\sin x = t, \cos x dx = dt$. Помноживши чисельник та знаменник підінтегрального виразу на $\cos x$, отримаємо:

$$I=\int\frac{\cos x dx}{2\sin^2 x\cos^2 x}=\int\frac{dt}{2t^2\left(1-t^2\right)}=\frac{1}{2}\int\frac{t^2+\left(1-t^2\right)}{t^2\left(1-t^2\right)}dt=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\int\frac{dt}{1-t^2}+\int\frac{dt}{t^2}\right)=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|-\frac{1}{2t}+C.$$

Перейдемо до змінної x:

$$I=-\frac{1}{2\sin x}+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+C.$$

Відповідь. $-\frac{1}{2\sin x}+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+C$.

2. Інтегрування добутків синусів та косинусів

Розглянемо інтеграл наступного вигляду:

$$\int\sin^p x\cos^q x dx,\ \int \mathrm{sh}^p x\,\mathrm{ch}^q x dx,$$

які підстановками $t=\sin x$ або $t=\cos x$ і відповідно $t=\mathrm{sh}\,x$ або $t=\mathrm{ch}\,x$ завжди можна звести до інтегралів від диференціального бінома.

При досить великих степенях зручно застосовувати формули зниження степеня:

$$\int\cos^n ax dx=\frac{1}{na}\cos^{n-1}ax\cdot\sin ax+\frac{n-1}{n}\int\cos^{n-2}ax dx,$$

$$\int\sin^n ax dx=-\frac{1}{na}\sin^{n-1}ax\cdot\cos ax+\frac{n-1}{n}\int\sin^{n-2}ax dx.$$

Інтеграли вигляду:

$$\int\sin mx\cos nx dx,\ \int\cos mx\cos nx dx,\ \int\sin mx\sin nx dx$$

обчислюються після перетворення добутку тригонометричних функцій в алгебраїчну суму за допомогою формул тригонометрії:

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left(\cos\left(\alpha-\beta\right)-\cos\left(\alpha+\beta\right)\right),$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\cos\left(\alpha+\beta\right)+\cos\left(\alpha-\beta\right)\right),$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\sin\left(\alpha+\beta\right)+\cos\left(\alpha-\beta\right)\right).$$