Лекція
Тема: «Інтегрування деяких ірраціональних функцій»
План

1. Інтегрування ірраціональних функцій.
2. Підстановки Ейлера.
3. Підстановки Чебишева.

1. Інтегрування ірраціональних функцій.

Розглянемо інтеграли від деяких типів ірраціональних функцій і покажемо, що у ряді випадків їх можна звести до інтегралів від раціональних функцій.

Нехай інтеграл має вигляд:

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}, ..., \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_s}{n_s}}\right)dx,$$

де R – раціональна функція своїх аргументів x, $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_s}{n_s}}$. Тоді він зводиться до інтегралу від раціонального виразу шляхом підстановки $\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$, де k – спільний знаменник дробів $\frac{m_1}{n_1}, \ldots, \frac{m_s}{n_s}$.

Приклад. Знайти інтеграл $I = \int \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^5} - \sqrt[6]{x^7}} dx$ **.**

Розв'язання. Підінтегральна функція є раціональною функцією від величин $x^{\frac{1}{2}}$, $x^{\frac{1}{3}}$, $x^{\frac{5}{4}}$, $x^{\frac{7}{6}}$. Найменшим спільним знаменником дробів, що є степенями x у підінтегральному виразі, є 12, тому виконаємо заміну $x = t^{12}, dx = 12t^{11}dt$. Тоді $t = \sqrt[12]{x}, \sqrt{x} = t^6, \sqrt[3]{x} = t^4$, $\sqrt[4]{x^5} = t^{15}, \sqrt[6]{x^7} = t^{14}$. Інтеграл I набуває вигляду:

$$I=\int\frac{\left(t^6+t^4\right)12t^{11}dt}{t^{15}-t^{14}}=12\int\frac{t^3+t}{t-1}dt=12\int\frac{\left(t^3-1\right)+\left(t-1\right)+2}{t-1}dt=$$

$$=12\int\left(t^2+t+1\right)dt+12\int dt+24\int\frac{dt}{t-1}=4t^3+6t^2+24t+24\ln\left|t-1\right|+C=$$

$$=4\sqrt[4]{x}+6\sqrt[6]{x}+24\sqrt[12]{x}+24\ln\left|\sqrt[12]{x}-1\right|+C.$$

Відповідь. $4\sqrt[4]{x}+6\sqrt[6]{x}+24\sqrt[12]{x}+24\ln\left|\sqrt[12]{x}-1\right|+C$.

2. Підстановки Ейлера.

Означення. *Квадратичною ірраціональністю* називають функцію вигляду $\sqrt{ax^2+bx+c}$.

Розглянемо інтеграл наступного вигляду

$$\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx,\ a\neq 0,\ b^2-4ac\neq 0.$$

Теорема (*Ейлера*). Інтеграл $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ виражається через інтеграл від раціональної функції підстановками Ейлера:

1) $\sqrt{ax^2+bx+c}=t\pm x\sqrt{a}$, якщо $a>0$ (перша підстановка Ейлера);
2) $\sqrt{ax^2+bx+c}=xt\pm\sqrt{c}$, якщо $c>0$ (друга підстановка Ейлера);
3) $\sqrt{ax^2+bx+c}=t\left(x-x_1\right)$, якщо $b^2-4ac>0$ (третя підстановка Ейлера), де x_1 – один із коренів квадратного тричлена ax^2+bx+c.

Зауваження. Знак «+» або «–» обирається, виходячи зі зручності обчислень. Якщо $a>0$ і $c>0$ одночасно, то можна робити як першу так і другу підстановку Ейлера.

Якщо

$$\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx=\int\frac{P_n\left(x\right)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx,$$

де $P_1\left(x\right)$ – многочлен степеня n, зручно користуватися формулою:

$$\int\frac{P_n\left(x\right)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=Q_{n-1}\left(x\right)\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

де $Q_{n-1}\left(x\right)$ – многочлен степеня $n-1$, коефіцієнти якого треба визначити; λ – невизначений коефіцієнт. Інтеграл вказаного вигляду знаходять диференціюючи ліву і праву частини отриманої рівності, а потім застосовують метод невизначених коефіцієнтів для знаходження всіх невизначених коефіцієнтів.

3. Підстановки Чебишева.

Означення. *Вираз виду* $x^m\left(a+bx^n\right)^p$, *де* m, n *і* p *– задані раціональні* *числа,* a *та* b *– задані дійсні числа, називають* ***диференціальним біномом***.

Для інтегрування диференціальних біномів використовують наступну теорему.

Теорема (Теорема Чебишева). *Інтеграл від диференціального бінома* $\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$ *виражається через інтеграл від раціональної функції відносно нової змінної, якщо:*

1) p *– ціле число і виконано підстановку* $x=t^s$*, де* s *– найменший спільний знаменник дробів* m *і* n*;*

2) $\frac{m+1}{n}$ *– ціле число і виконано підстановку* $a+bx^n=t^r$*, де* r *– знаменник дробу* p*;*

3) $\frac{m+1}{n}+p$ *– ціле число і виконано підстановку* $ax^{-n}+b=t^r$*, де* r *– знаменник дробу* p.

Приклад. Знайти інтеграл $I=\int\frac{\sqrt{x}dx}{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2}$ **.**

Розв'язання. Підінтегральний вираз даного інтеграла є диференціальним біномом, при цьому $p=-2$ – ціле число. Найменшим спільним знаменником дробів $m=\frac{1}{2}$ та $n=\frac{1}{3}$ є 6, тому виконуємо підстановку $x=t^6$. Тоді $dx=6t^5dt$, $\sqrt{x}=t^3$, $\sqrt[3]{x}=t^2$. Отримуємо інтеграл від раціональної функції:

$$I=6\int\frac{t^8dt}{\left(t^2+1\right)^2}=6\int\left(t^4-2t^2+3-\frac{4t^2+3}{\left(t^2+1\right)^2}\right)dt=$$

$$=\frac{6}{5}t^5-4t^3+18t-18\operatorname{arctg}t-6\int\frac{t^2dt}{\left(t^2+1\right)^2}.$$

Обчислимо інтеграл у правій частині даної рівності.

$$\int \frac{t^2dt}{\left(t^2+1\right)^2} = -\frac{1}{2}\int t\cdot d\left(\frac{1}{1+t^2}\right) = -\frac{t}{2\left(1+t^2\right)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + C.$$

Враховуючи, що $t=\sqrt[6]{x}$, остаточно отримуємо:

$$I = \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} - 4\sqrt{x} + 18\sqrt[6]{x} + \frac{3\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}} - 21\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x} + C.$$

Відповідь. $\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} - 4\sqrt{x} + 18\sqrt[6]{x} + \frac{3\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}} - 21\cdot\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x} + C$.

Приклад. Знайти інтеграл $I=\int\frac{\sqrt{1+\sqrt[4]{x}}dx}{\sqrt{x}}$.

Розв'язання. Маємо диференціальний біном, у якому $m=-\frac{1}{2}$, $n=\frac{1}{4}$, $p=\frac{1}{2}$, $\frac{m+1}{n}=2\in Z$. Отже, маємо другий випадок диференціального бінома, що потребує використання підстановки $1+\sqrt[4]{x}=t^2$. Звідси отримуємо:

$$x=\left(t^2-1\right)^4,\ \sqrt{x}=\left(t^2-1\right)^2,\ t=\sqrt{1+\sqrt[4]{x}},\ dx=4\left(t^2-1\right)^3 2tdt=8t\left(t^2-1\right)^3 dt.$$

Підставивши ці вирази у інтеграл I, отримуємо інтеграл від раціональної функції:

$$I=8\int\frac{t^2\left(t^2-1\right)^3dt}{\left(t^2-1\right)^2}=8\int\left(t^4-t^2\right)dt=\frac{8}{5}t^5-\frac{8}{3}t^3+C=$$

$$=\frac{8}{5}\left(\sqrt{1+\sqrt[4]{x}}\right)^5-\frac{8}{3}\left(\sqrt{1+\sqrt[4]{x}}\right)^3+C.$$

Відповідь. $\frac{8}{5}\sqrt{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^5}-\frac{8}{3}\sqrt{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^3}+C$.

Приклад. Знайти інтеграл $I=\int\frac{dx}{\sqrt{x^3}\left(1+\sqrt[4]{x^3}\right)^{\frac{1}{3}}}$.

Розв'язання. Для диференціального бінома, що знаходиться під знаком даного інтеграла $m=-\dfrac{3}{2}$, інші параметри бінома $n=\dfrac{3}{4}$, $p=-\dfrac{1}{3}$. Знаходимо $\dfrac{m+1}{n}+p=-\dfrac{1}{3}=-1\in Z$. Тому маємо третій випадок диференціального бінома і виконуємо підстановку $x^{-\frac{3}{4}}+1=t^3$, тобто $x=\left(t^3-1\right)^{-\frac{4}{3}}$, звідки отримуємо, що

$$dx=-\frac{4}{3}\left(t^3-1\right)^{-\frac{7}{3}}\cdot 3t^2dt=-4t^2\left(t^3-1\right)^{-\frac{7}{3}}dt.$$

Перейдемо у підінтегральному виразі до змінної t. Отримаємо:

$$x^{-\frac{3}{2}}\left(1+x^{\frac{3}{4}}\right)^{-\frac{1}{3}}dx=x^{-\frac{3}{2}}\left[x^{-\frac{1}{4}}\left(x^{-\frac{3}{4}}+1\right)^{-\frac{1}{3}}\right]dx=x^{-\frac{7}{4}}\left(x^{-\frac{3}{4}}+1\right)^{-\frac{1}{3}}dx=$$

$$=-\left(t^3-1\right)^{\frac{7}{3}}\cdot 4t\left(t^3-1\right)^{-\frac{7}{3}}dt.$$

Таким чином, отримуємо інтеграл від раціональної функції:

$$I=-4\int tdt=-2t^2+C=-2\sqrt[3]{\left(x^{-\frac{3}{4}}+1\right)^2}+C.$$

Відповідь. $-2\cdot\sqrt[3]{\left(x^{-\frac{3}{4}}+1\right)^2}+C$.