Лекція

Тема: «Визначений інтеграл Рімана»

План

1. Площа криволінійної трапеції.
2. Класи інтегровних за Ріманом функцій.
3. Верхня та нижня інтегральні суми Дарбу.

1. Площа криволінійної трапеції.

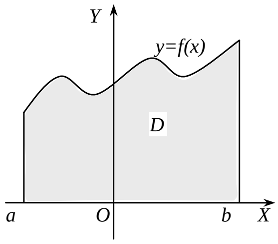


Рис. 7.1.

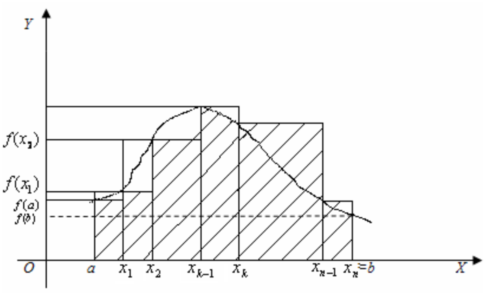


Рис. 7.2.

Нехай функція $y = f(x)$ неперервна і невід'ємна на відрізку $[a,b]$. Плоска фігура D, що обмежена на декартовій площині графіком функції $y = f(x)$, віссю абсцис, відрізками прямих $x = a$, $x = b$ називається *криволінійною трапецією* (див рис. 7.1).

Поки що будемо спиратися на інтуїтивне розуміння площі криволінійної трапеції.

Якщо $[a,b]$ розбивається відрізки, довжина яких дуже мала, тобто d=max$|x_k - x_{k-1}|$, $d \to 0$, d – діаметр розбиття, то площа сходинкової фігури (див. рис. 7.2) стає дуже близькою до площі криволінійної трапеції.

Далі буде доведено , що $S_{крив.трап.} = \lim\limits_{d\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})$,

а $\lim\limits_{d\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) = \int\limits_a^b f(x)dx$.

Введемо поняття визначеного інтегралу.

Нехай $f(x)$ – задана на $[a,b]$,

розглянемо розбиття відрізка $[a,b]$ скінченною кількістю точок

$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{k-1} < x_k < ... < x_{n-1} < x_n = b$,

позначимо розбиття $R = \{x_k\}$.

Розглянемо точки $\alpha_k \in [x_{k-1}, x_k]$ $\quad k = \overline{1,n}$, $P = \{\alpha_k\}$ - проміжні точки.

Розглянемо $\sigma = \sigma(f, R, P) = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\alpha_k)\Delta x_k$ - інтегральна сума, тут

$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $d = \max\limits_{k=\overline{1,n}} (x_k - x_{k-1})$ - діаметр розбиття.

Геометричний зміст інтегральної суми Рімана $\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_{k-1} - x_k)$**.** Значення $f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ відповідає площі прямокутника, що є складовою сходинкової фігури, зображеної на рис. 7.3. Значення площі усієї сходинкової фігури дорівнює значенню інтегральної суми $\sigma = \sigma(f, P, R)$.

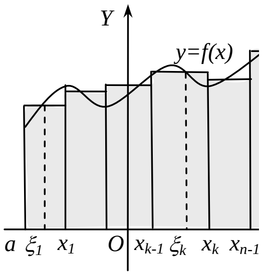


Рис. 7.3.

Означення *(на мові границь)***.** Якщо для функції $f(x)$, що задана на відрізку $[a,b]$, для будь-якого розбиття R відрізка $[a,b]$ і для будь якого набору проміжних точок P відрізків розбиття, існує скінченна границя I інтегральних сум $\sigma(f, R, P) = \sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k)\Delta x_k$ при діаметрі розбиття d, що прагне до нуля, тобто $I = \lim_{d \to 0} \sigma(f, R)$, яка не залежить від вибору розбиття R і набору проміжних точок P, то така функція називається *інтегрованою за Ріманом* на відрізку $[a,b]$, а значення границі – *визначеним інтегралом Рімана*, що позначається $I = \int_a^b f(x)dx$.

Означення *(на мові* $\varepsilon - \delta$ *)***.** Якщо

$$\exists I \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall \ R = \{x_k\} \forall P = \{\alpha_k\} \quad d < \delta \Rightarrow |I - \delta| < \varepsilon,$$

то число I називається границею інтегральних сум і позначається $I = \lim_{d \to 0} \sigma$. Якщо таке число I існує, то функція $f(x)$ називається *інтегрованою за Ріманом* на відрізку $[a,b]$, а значення границі I – *визначеним інтегралом Рімана.*

🗀**Означення 3** *(на мові послідовностей)***.** Якщо розбивати відрізок $[a,b]$ на n частин, то утвориться розбиття R_n, що відповідає кількості n точок розбиття. Таким чином утвориться послідовність розбиттів $\{R_n\}$, а разом з нею і послідовність діаметрів $\{d_n\}$ і проміжних точок $\{P_n\}$. Їм буде відповідати послідовність інтегральних сум $\sigma_n = \sigma_n(f, R_n, P_n)$. Якщо для будь якої послідовності розбиттів $\{R_n\}$ і для будь якого вибору проміжних точок $\{P_n\}$ із того, що послідовність діаметрів розбиття $\{d_n\}$ прагне до нуля випливає, що послідовність інтегральних сум прагне до числа I, яке не залежить ні від $\{R_n\}$, ні від $\{P_n\}$, тобто

$$\forall \{R_n\} \forall \{P_n\} \quad d_n \to 0 \Rightarrow \sigma_n \to I,$$

то функція $f(x)$ називається *інтегрованою за Ріманом* на відрізку $[a,b]$, а значення I – *визначеним інтегралом Рімана*.

Приклади. 1. $f(x) = c = const$.

Нехай $\{x_k\}$- розбиття відрізка $[a,b]$, $\{\alpha_k\}$- проміжні точки розбиття, то інтегральна сума має вигляд

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} C\Delta x_k = C\sum_{k=1}^{n} \Delta.x_k = C(a-b).$$

Тоді

$$\lim_{d\to 0}\delta = c(a-b) \Rightarrow f(x) = const \text{ інт. на } [a,b] \text{ , а } \int_a^b Cdx = C(a-b).$$

2. Розглянемо функцію Діріхле $D(x) = \begin{cases} 1, x \in \mathbb{Q} \\ 0, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$. Доведемо, що вона не інтегрована на будь – якому відрізку від $[a,b]$.

Нехай

$\{\alpha_k^{`}\} : \alpha_k^{`} \in \mathbb{Q} \bigcap [x_{k-1}, x_k]$,

$\{\alpha_k^{''}\} : \alpha_k^{''} \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \bigcap [x_{k-1}, x_k]$,

тоді

$$\sigma^{'} = \sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k^{'})\Delta x_k = \sum 0 \cdot x_k = 0 \Rightarrow \lim_{d\to 0}\sigma' = 0,$$

$$\sigma'' = \sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k^{''}) \cdot \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = b-a > 0 \Rightarrow \lim_{d\to 0}\sigma'' = b-a.$$

Отже, границя інтегральних сум залежить від вибору проміжних точок, тому фцнуція Діріхле не інтегрована за Ріманом.

2. Класи інтегровних за Ріманом функцій.

Теорема. $f(x) -$ неперервна на $[a,b]$ $\Rightarrow$ інтегрована на $[a,b]$

Теорема. Якщо множина точок розриву обмеженої функції така, що $\forall \varepsilon > 0$ всі точки цієї множини покриваються скінченною кількістю інтервалів сумарної довжини $< \varepsilon$, то така функція є інтегрованою на відр. [a,b].

Теорема. Якщо обмежена функція $f(x)$ є кусково неперервною на $[a,b]$, то вона інтегрована на $[a,b]$.

Теорема. Якщо обмежена функція є монотонною на $[a,b]$ то вона інтегрована на $[a,b]$.

Приклад *функції, інтегрованої на [a,b], що має нескінченну множину точок розриву.*

$$f(x) = \begin{cases} sign\left(\sin\frac{\pi}{x}\right), x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases} \quad \text{на } [0,1].$$

3. Верхня та нижня інтегральні суми Дарбу.

Означення. Нехай $f(x)$ – задана на $[a,b]$, розбиття відрізка $[a,b]$:

$R=\{a=x_0<x_1<x_2<...<x_{k-1}<x_k<...<x_{n-1}<x_n=b\}$.

Введемо позначення:

$m_k=\inf\limits_{[x_{k-1},x_k]} f(x)$; $\quad M_k=\sup\limits_{[x_{k-1},x_k]} f(x)$.

Суми вигляду

$$\underline{S}=\underline{S}(f,R)=\sum_{k=1}^{n} m_k\cdot\Delta x_k; \qquad \overline{S}=\overline{S}(f,R)=\sum_{k=1}^{n} M_k\cdot\Delta x_k$$

називаються відповідно *нижня і верхня інтегральні суми Дарбу*.

Оскільки $\forall x\in[x_{k-1},x_h]; m_k\le f(x)\le M_k$, то для проміжних точок $P=\{\alpha_k\}$, $\alpha_k\in[x_{k-1},x_k]$, $k=\overline{1,n}$ виконується $m_k\le f(\alpha_k)\le M_k$, тому здійснюється нерівність для інтегральних сум:

$$\boxed{S\le\sigma\le\overline{S},} \qquad (1)$$

де $\sigma=\sigma(f,R,P)=\sum\limits_{k=1}^{n} f(\alpha_k)\Delta x_k$.

Нехай $f(x)$ неперервна на $[a,b]$, тоді вона неперервна на кожному відрізку розбиття $\Rightarrow$ за другою теоремою Вейєрштрасса

$$\forall k\in\{1,2,...,n\}\exists\alpha_k''\in[x_{k-1},x_k]: M_k=f(\alpha_k'') \quad \Rightarrow \underline{S}=\sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k')\Delta x_k,$$

тобто існують проміжні точки $\{\alpha_k''\}$, яким відповідає верхня сума Дарбу. Аналогічно для нижньої суми.

Висновок: для неперервної функції на $[a,b]$,верхня і нижня інтегр. сума Дарбу співпадають з однією із інтегральних сум Рімана.

Нехай $f(x)$ - не є неперервна на $[a,b]$. За означенням точної межі

$$m_k=\inf_{[x_{k-1},x_k]} f(x)\Rightarrow\forall\varepsilon>0\exists\alpha_k'\in[x_{k-1},x_k]:\ m_k\le f(\alpha_k')\le m_k+\frac{\varepsilon}{b-a}.$$

$m_k \quad f(\alpha_k') \quad m_k+\dfrac{\varepsilon}{b-a}$

Помножимо останню нерівність на Δx_k і просумуємо $\sum\limits_{k=1}^{n}$ отримаємо

$$\underline{S}\le\sigma(P')\le\underline{S}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\varepsilon}{b-a}\cdot\Delta x_k \Rightarrow \underline{S}\le\sigma(P')\le\underline{S}+\varepsilon.$$

Тобто для фіксованого розбиття $R=\{x_k\}$

$\forall\varepsilon>0\exists P'=\{\alpha_k'\}:\underline{S}\le\sigma(P')\le\underline{S}+\varepsilon$. $\qquad \underline{S} \quad \sigma(P') \quad \underline{S}+\varepsilon$

Висновок: 1) для фіксованого розбиття $R=\{x_k\}$

$\underline{S}=\inf\limits_{P}\sigma(f,R,P)$, $\overline{S}=\sup\limits_{P}\sigma(f,R,P)$;

2) для фікс. розбиття $R=\{x_k\}$ значення суми Дарбу можна із будь-яким степенем точності наблизити деякою інт. сумою Рімана.

Геометричний зміст верхніх і нижніх сум Дарбу.

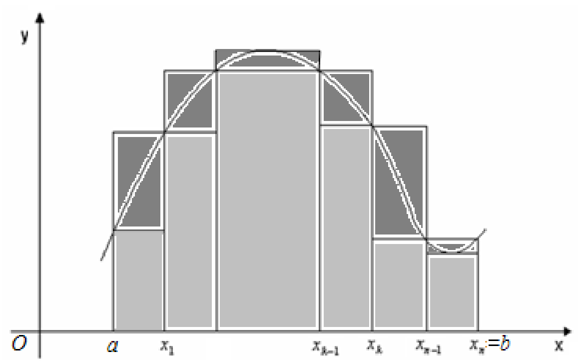


Рис. 7

Нижня інтегральна сума Дарбу – це площа сходинкової фігури, що вписана в криволінійну трапецію, а верхня інтегральна сума – це площа сходинкової фігури ,що описана навколо неї (рис. 7).

Властивості інтегральних сум Дарбу

Властивість 1.Для фіксованого розбиття $R=\{x_k\}$

$$\underline{S} \le \sigma \le \overline{S}\,, \quad \underline{S} = \inf_P \sigma(f,R,P)\,, \quad \overline{S} = \sup_P \sigma(f,R,P)\,.$$

Властивість 2. Додавання до точок розбиття додаткових точок приводить до того ,що $\underline{S}$ не зменшується ,а $\overline{S}$ не збільшується.

Доведення. Без обмеження роздумів можна розглянути лише одну додаткову точку розбиття.

Нехай

$R=\{x_k\}$- розбиття, x'- додаткова точка

нове розбиття $\{x_k\}\bigcup\{x'\}=\{x'_k\}$.

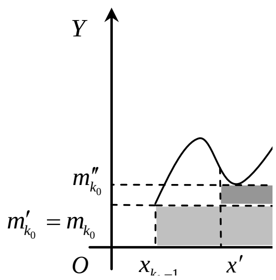
Позначимо через k_0 той номер відрізка розбиття, в середину якого потрапила додаткова точка x', тобто $x_{k_0-1} < x' < x_{k_0}$, тоді

$$\underline{S}' = \underline{S}(f,R') = \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot \Delta x'_k = \sum_{k<k_0} m_k \cdot (x_k - x_{k-1}) +$$

$$+m'_{k_0} \cdot (x' - x_{k_0-1}) + m''_{k_0} \cdot (x_{k_0} - x') + \sum_{k>k_0} m_k \cdot (x_k - x_{k-1}),$$

$$m'_{k_0} = \inf_{[x_{k_0-1},x']} f(x) \ge \inf_{[x_{k_0-1},x_{k_0}]}$$

$$m''_{k_0} = \inf_{[x',x_{k_0}]} f(x) \ge \inf_{[x_{k_0-1},x_{k_0}]} f$$



$$\underline{S}' \ge \sum_{k \ne k_0} m_k \cdot (x_k - x_{k-1}) +$$

$$\underbrace{+m_{k_0} \cdot (x' - x_{k_0-1}) + m_{k_0} \cdot (x_{k_0} - x')}_{=m_{k_0}\cdot(x_{k_0}-x_{k_0-1})} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot \Delta x_k = \underline{S}.$$

Для верхньої суми аналогічно. ■

Властивість 3. Будь яка нижня інтегральна сума Дарбу не більше за верхню інтегральну суму, навіть для різних розбиттів: $\underline{S}_1 \le \overline{S_2}$, для $R_1 = \{x_k^{(1)}\}, \quad R_2 = \{x_i^{(2)}\}$.

Доведення. Введемо до розгляду розбиття $R_3 = R_1 \bigcup R_2$ і інтегральні суми Дарбу, що йому відповідають $\underline{S}_3$ *і* $\overline{S}_3$. Розбиття R_3 є подрібненням як розбиття R_1, так і розбиття R_2, тому згідно до властивості 2, маємо

$\underline{S}_1 \le \underline{S}_3 \le \overline{S}_3 \le \overline{S_2}$. ■

Наслідок 1. Множина $\{\underline{S} = \underline{S}(f,P)\}_P$ - обмежена зверху, а множина $\{\overline{S} = \overline{S}(f,P)\}_P$ обмежена знизу.

Дійсно, множина $\{\underline{S} = \underline{S}(f,P)\}_P$ обмежена зверху будь-якою фіксованою верхньою сумою Дарбу згідно до властивості 3.

Наслідок 2. $\exists \sup\{\underline{S}(f,P)\} = I_* -$ *нижній інтеграл Дарбу,*
$\exists \inf\{\overline{S}(f,P)\} = I^* -$ *верхній інтеграл Дарбу.*

Властивість 4. $\underline{S}_1 \le I_* \le I^* \le \overline{S_2}$.

Доведення. Нерівності $\underline{S}_1 \le I_*$ *і* $I^* \le \overline{S_2}$ випливають із наслідку 2. Доведемо, що $I_* \le I^*$.

Пп.: $I_* > I^*$. За означенням точних меж

$I_* = \sup\{\underline{S}(f,P)\} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists P_1 : I_* - \varepsilon / 2 < \underline{S}_1,$

$I^* = \inf\{\overline{S}(f,P)\} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists P_2 : \overline{S}_2 < I^* + \varepsilon / 2.$

Звідси

$$0 < I_* - I^* < \underline{S}_1 + \frac{\varepsilon}{2} - \left(\overline{S}_2 - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \underline{S}_1 - \overline{S}_2 + \varepsilon .$$

В наслідок довільності ε отримаємо $\underline{S}_1 - \overline{S}_2 \ge 0$. Це суперечить властивості 3, згідно до якої $\underline{S}_1 \le \overline{S_2}$. ■

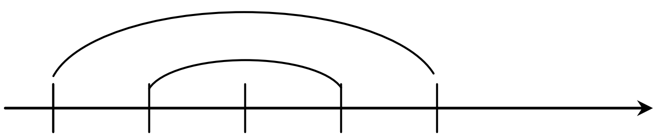
7.3 Критерії Дарбу інтегрованості функцій за Ріманом

Теорема *(критерій Дарбу інтігровності функції)***.** Для того, щоб функція $f(x)$ була інтеровною на$[a,b]$ необхідно і достатньо, щоб $\lim\limits_{d \to 0}(\overline{S} - \underline{S}) = 0$.

Доведення. *Необхідність.*

$f(x)$ -інт. на $[a,b] \Leftrightarrow \exists \mathrm{I} \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall R \, \forall P \quad d < \delta \Rightarrow \left| \mathrm{I} - \sigma(f,R,P) \right| < \varepsilon$. Тоді $\mathrm{I} - \varepsilon < \sigma < \mathrm{I} + \varepsilon$. За властивістю 1 маємо

$$\mathrm{I} - \varepsilon \le \inf_P \sigma(f,R,P) = \underline{S} \le \sigma \le \underline{S} = \sup_P \sigma(f,R,P) \le I + \varepsilon .$$



$\mathrm{I}-\varepsilon \qquad \underline{S} \qquad \sigma \qquad \overline{S} \qquad \mathrm{I}+\varepsilon$

Тому $\overline{S}-\underline{S}<2\varepsilon \ \forall\varepsilon>0 \forall R \Rightarrow \lim\limits_{d\to 0}(\overline{S}-\underline{S})=0$.

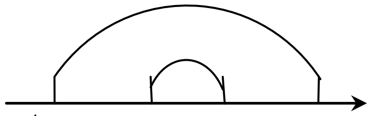
Достатність.

$\lim\limits_{d\to 0}(\overline{S}-\underline{S})=0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0 \exists\delta>0: \forall R \quad d<\delta \Rightarrow \overline{S}(f,R)-\underline{S}(f,R)<\varepsilon$.

За властивістю 4 $\qquad < \varepsilon$

$\underline{S}\le \mathrm{I}_*\le \mathrm{I}^*\le \overline{S}$,

Тому

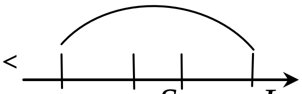


$\forall\varepsilon>0 \ \ \mathrm{I}^*-\mathrm{I}_*<\varepsilon \quad \Rightarrow \mathrm{I}^*=\mathrm{I}_*=\mathrm{I} \qquad \underline{S} \qquad \mathrm{I}_* \qquad \mathrm{I}^* \qquad \overline{S}$

$\overline{S}-\underline{S}<\varepsilon$,

$\underline{S}\le \mathrm{I}\le \overline{S}$ (із доведення),

$|\mathrm{I}-\delta|<$



$\underline{S} \qquad I$

$\forall\varepsilon>0 \quad \sigma \quad \overline{S}$

$\underline{S}\le\sigma\le\overline{S} \quad \forall P$ (вл. 1), $\qquad \forall P$

Отже, $f(x)$ - інтер. на$[a,b]$. ■

Теорема *(2 критерій Дарбу інтегрованої функції на [a,b])*

$f(x)-$інтегрована на [a,b] $\Leftrightarrow \mathrm{I}_*=\mathrm{I}^*$.

Доведення достатності було присутнє в попередній теоремі. Довести необхідність пропонується самостійно ✍.

Означення. Якщо $M=\sup\limits_A f(x)$, $m=\inf\limits_A f(x)$, то *коливанням функції на множині А* називається величина $\omega_A(f)=M-m$.

Через ω_k позначимо коливання функції на k-ому відрізку розбиття.

Теорема *(3 критерій Дарбу інтегрованої функції на [a,b])*

$f(x)-$інтегрована на $[a,b]$ $\Leftrightarrow \lim\limits_{d\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n}\omega_k\Delta x_k=0$.

Доведення. Оскільки

$$\overline{S}-\underline{S}=\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)\Delta x_k=\sum_{k=1}^{n}\omega_k\Delta x_k$$

і $f(x)$ інтер. на$[a,b]$ $\Leftrightarrow \lim\limits_{d\to 0}(\overline{S}-\underline{S})=0$, то

$f(x)$ інтер. на $[a,b]$ $\Leftrightarrow \lim\limits_{d\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n}\omega_k\Delta x_k=0$. ■