Лекція

Тема: «Методи обчислення визначених інтегралів»

План

1. Заміна змінної у визначеному інтегралі.
2. Інтегрування частинами у визначеному інтегралі.
3. Інтегрування парних і непарних функцій.

1. Заміна змінної у визначеному інтегралі.

При обчисленні визначених інтегралів, як і невизначених, користуються методом заміни змінної (методом підстановки).

Теорема. *Нехай функція* $f(x)$ *є неперервною на відрізку* $[a;b]$, *функція* $x=\varphi(t)$ *і її похідна* $x'=\varphi'(t)$ *є неперервними на відрізку* $[\alpha;\beta]$, *причому* $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$ *і* $\forall t\in(\alpha;\beta)$ $\alpha<\varphi(t)<\beta$. *Тоді виконується рівність:*

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \tag{2.14}$$

Доведення. Оскільки функція $f(x)$ є неперервною на відрізку $[a;b]$, то вона має первісну. Позначимо її через $F(x)$, $x\in[a;b]$. Тоді функція $F(\varphi(t))$ є первісною функції $f(\varphi(t))\varphi'(t)$. Дійсно, $\frac{dF}{dt}=f(\varphi(t))\varphi'(t)$, $t\in[\alpha;\beta]$. Застосувавши формулу Ньютона-Лейбніца, маємо:

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a),$$

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=F(\varphi(\beta))-F(\varphi(\alpha))=F(b)-F(a).$$

Отже, виконується рівність (2.14). Теорему доведено.

Означення. *Формулу* (2.14) *називають* ***формулою заміни змінної у визначеному інтегралі***.

Якщо при обчисленні невизначеного інтеграла заміною $x=\varphi(t)$ у первісній функції необхідно було від змінної t повернутися до змінної x, то при обчисленні визначеного інтеграла замість цього потрібно змінити межі інтегрування. Нижня межа α знаходиться як розв'язок рівняння $\varphi(\alpha)=a$, верхня межа β – з рівняння $\varphi(\beta)=b$. Якщо функція $\varphi(t)$ не монотонна, то може статися, що ці рівняння дадуть кілька різних пар α та β. У цьому випадку можна взяти будь-яку з таких пар.

Часто замість заміни змінної $x=\varphi(t)$ використовують заміну $t=\psi(x)$. У цьому випадку нові межі інтегрування визначаються безпосередньо: $\alpha=\psi(a)$, $\beta=\psi(b)$. При цьому слід враховувати, що функція $x=\varphi(t)$, обернена до функції $t=\psi(x)$, має задовольняти всі умови теореми 2.6. Зокрема, у межах інтегрування функція $x=\varphi(t)$ має бути неперервно диференційовною функцією змінної t і при зміні t від α до β змінна $x(t)$ повинна змінюватися від a до b.

Найзручніше виконувати заміну змінної з допомогою монотонних диференційовних функцій. Такі функції гарантують однозначність прямої та оберненої функцій.

Приклад. Обчислити інтеграл $I=\int\limits_0^a \sqrt{a^2-x^2}dx$**.**

Розв'язання. Нехай $x=a\sin t$. Тоді $dx=a\cos t dt$. Функція $x=a\sin t$ і її похідна $a\cos t$ є неперервними при всіх значеннях аргументу t. При цьому, якщо $x=0$, то $a\sin t=0$ і $t=0$, якщо $x=a$, то $a\sin t=a$, $\sin t=1$ і $t=\frac{\pi}{2}$. Отже, $\alpha=0$ і $\beta=\frac{\pi}{2}$. Функція $x=a\sin t$ не є монотонною, тому існують і інші пари значень α та β, що можуть бути використані як межі інтегрування по змінній t, наприклад, $\alpha=2\pi$, $\beta=\frac{5\pi}{2}$ та інші.

Далі отримуємо:

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\cdot a\cos t\,dt = a^2\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,dt =$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2t)\,dt = \frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{\pi a^2}{4}.$$

Відповідь. $\dfrac{\pi a^2}{4}$.

Приклад. Обчислити інтеграл $\displaystyle\int_{\ln 3}^{\ln 8}\frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$**.**

Розв'язання. Використаємо підстановку $t=\sqrt{e^x+1}$. Тоді $e^x+1=t^2$, $x=\ln\left(t^2-1\right)$, $dx=\dfrac{2tdt}{t^2-1}$. Знайдемо межі інтегрування для змінної t. При $x=\ln 3$ отримуємо, що $t=\sqrt{e^x+1}=\sqrt{e^{\ln 3}+1}=\sqrt{3+1}=2$, при $x=\ln 3$ отримуємо значення $t=\sqrt{e^{\ln 8}+1}=\sqrt{8+1}=3$. Таким чином, маємо:

$$\int_{\ln 3}^{\ln 8}\frac{dx}{\sqrt{e^x+1}} = \int_2^3\frac{2tdt}{t\left(t^2-1\right)} = 2\int_2^3\frac{dt}{t^2-1} = 2\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Bigg|_2^3 = \ln\frac{3}{2}.$$

Відповідь. $\ln\dfrac{3}{2}$.

2. Інтегрування частинами у визначеному інтегралі.

Теорема. *Якщо функції* $u=u(x)$ *і* $v=v(x)$ *мають на відрізку* $[a;b]$ *неперервні похідні, то виконується формула:*

$$\int_a^b u\,dv = (uv)\Big|_a^b - \int_a^b v\,du. \tag{2.15}$$

Доведення. Оскільки функція uv є первісною функції $(uv)'=u'v+uv'$, то за формулою Ньютона-Лейбніца отримуємо, що $\int_a^b\left(u'v+uv'\right)dx=(uv)\Big|_a^b$. З іншого боку, маємо: $\int_a^b (u'v + uv')dx = \int_a^b vdu + \int_a^b udv$. Тому справедливою є рівність:

$$\int_a^b vdu + \int_a^b udv = (uv)\Big|_a^b.$$

Звідси випливає рівність (2.15).

Означення. *Формулу* (2.15) *називають* ***формулою інтегрування частинами визначеного інтеграла***.

Розглянемо приклади застосування цієї формули.

Приклад. Обчислити інтеграл $\int_0^{\pi} x\sin xdx$**.**

Розв'язання. Застосуємо формулу інтегрування частинами у визначеному інтегралі:

$$\int_0^{\pi} x\sin xdx = \begin{vmatrix} u = x,\ dv = \sin xdx, \\ du = dx,\ v = -\cos x \end{vmatrix} = -x\cos x\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos xdx = \pi + \sin x\Big|_0^{\pi} = \pi .$$

Відповідь. π

Приклад. Обчислити інтеграл $\int_1^{e} \ln xdx$**.**

Розв'язання. За формулою інтегрування частинами маємо:

$$\int_1^{e} \ln xdx = \begin{vmatrix} u = \ln x,\ dv = dx, \\ du = \dfrac{dx}{x},\ v = x. \end{vmatrix} = x\ln x\Big|_1^{e} - \int_1^{e} x \cdot \frac{1}{x}dx = e - x\Big|_1^{e} = 1.$$

Відповідь. 1.

3. Інтегрування парних і непарних функцій.

Якщо в інтегралі симетричні межі інтегрування, то

1) якщо функція $y = f(x)$ парна, тоді $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^{a} f(x)dx$;

2) якщо функція $y = f(x)$ непарна, тоді $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.