Лекція

Тема: «Невласні інтеграли»

План

1. Невласні інтеграли 1-го роду.
2. Ознаки збіжності невласних інтегралів 1-го роду.
3. Невласні інтеграли 2-го роду.
4. Ознаки збіжності невласних інтегралів 2-го роду.

1. Невласні інтеграли 1-го роду.

Поняття визначеного інтеграла було введене при припущеннях про те, що відрізок інтегрування є скінченним, а підінтегральна функція – обмеженою. Якщо хоча б одна з цих умов порушується, то означення визначеного інтеграла стає неприйнятним: у випадку нескінченного проміжку інтегрування цей проміжок не можна розділити на n елементарних відрізків скінченної довжини, а у випадку необмеженої функції інтегральна сума не матиме скінченної границі. Узагальнюючи поняття визначеного інтеграла на ці випадки, приходимо до поняття невласного інтеграла – інтеграла від функції на необмеженому проміжку або інтеграла від необмеженої функції.

Означення. *Невласні інтеграли з нескінченними межами інтегрування називають* ***невласними інтегралами першого роду****.*

Означення. Нехай функція $f(x)$ визначена на проміжку $[a;+\infty)$ і інтегровна на будь-якому відрізку $[a;b]$, $a<b$. *Тоді, якщо існує скінченна границя* $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$*, то її називають* ***невласним інтегралом першого роду*** *і позначають* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$. Отже, за означенням

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx. \qquad (2.16)$$

Означення. У *цьому випадку інтеграл* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *називають* ***збіжним****, а підінтегральну функцію* $f(x)$ – ***інтегровною*** *на* $[a;+\infty)$.

Якщо ж границя $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$ *не існує або нескінченна, то інтеграл* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *називають* ***розбіжним****, а функцію* $f(x)$ *–* ***неінтегровною*** *на* $[a;+\infty)$.

Аналогічно (2.16) визначається невласний інтеграл першого роду на проміжку $(-\infty;b]$:

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx=\lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)dx. \tag{2.17}$$

Невласний інтеграл з двома нескінченними межами визначається рівністю:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx+\int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx, \tag{2.18}$$

де c – довільне число. Отже, інтеграл у лівій частині (2.18) є збіжним тоді і лише тоді, коли є збіжними обидва інтеграли у правій частині цієї рівності. Можна довести. що інтеграл визначений формулою (2.18), не залежить від вибору числа c.

З наведених означень видно, що невласний інтеграл не є границею інтегральних сум, а є границею визначеного інтеграла зі змінною межею інтегрування.

Зауважимо, що коли функція $f(x)$ є неперервною та невід’ємною на проміжку $[a;+\infty)$ і коли інтеграл (2.16) збігається, то природно вважати, що він виражає площу області, обмеженої зверху графіком функції $f(x)$, а знизу – віссю Ox.

Приклад. Обчислити наступні невласні інтеграли або встановити їх розбіжність: а) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$**; б)** $\int\limits_0^{+\infty}\sin 4x dx$**; в)** $\int\limits_{-\infty}^{1} x dx$**; г)** $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^k}$**.**

Розв'язання. а) До обчислення даного інтеграла застосуємо формулу (2.16), згідно з якою отримуємо:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} \operatorname{arctg} x\Big|_0^b = \lim_{b\to+\infty} \left(\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} 0\right) = \frac{\pi}{2};$$

б) $\int\limits_0^{+\infty} \sin 4x dx = \lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_0^b \sin 4x dx = -\frac{1}{4} \lim\limits_{b\to+\infty} \cos 4x\Big|_0^b = -\frac{1}{4} \lim\limits_{b\to+\infty} \left(\cos 4b\right) + \frac{1}{4}$.

Оскільки $\lim\limits_{b\to+\infty} \left(\cos 4b\right)$ не існує, то даний інтеграл розбіжний.

2. Ознаки збіжності невласних інтегралів 1-го роду.

У розглянутих прикладах обчислення невласного інтеграла ґрунтувалося на його означенні. Проте у деяких випадках немає необхідності обчислювати інтеграл, а достатньо знати, збіжний він чи ні. Наведемо без доведення деякі ознаки збіжності.

Теорема. *Якщо на проміжку* $\left[a; +\infty\right)$ *функції* $f\left(x\right)$ *та* $g\left(x\right)$ *є неперервними та задовольняють умову* $0 \le f\left(x\right) \le g\left(x\right)$, *то із збіжності інтеграла* $\int\limits_a^{+\infty} g\left(x\right) dx$ *випливає збіжність інтеграла* $\int\limits_a^{+\infty} f\left(x\right) dx$, *а із розбіжності інтеграла* $\int\limits_a^{+\infty} f\left(x\right) dx$ *випливає розбіжність інтеграла* $\int\limits_a^{+\infty} g\left(x\right) dx$.

Приклад. Дослідити на збіжність інтеграли:

а) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^8+7}}$; б) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{2+\ln x}{\sqrt{x}} dx$.

Розв'язання. а) Оскільки $\forall x \in \left[1; +\infty\right)$ $0 < \frac{x}{\sqrt{x^8+7}} < \frac{1}{x^3}$, а інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$ є збіжним (приклад 2.22 (г)), то за теоремою 2.8 даний інтеграл є збіжним.

б) Для підінтегральної функції можна записати нерівність

$\frac{2+\ln x}{\sqrt{x}} > \frac{1}{\sqrt{x}} > 0$, інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ є розбіжним, тому $\int_1^{+\infty} \frac{2+\ln x}{\sqrt{x}} dx$ також є розбіжним.

Відповідь. а) збіжний; б) розбіжний.

Теорема. *Якщо $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ та існує скінченна границя $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k$, $k > 0$, то інтеграли $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ та $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ або обидва збігаються, або обидва розбігаються одночасно.*

Приклад. Дослідити на збіжність інтеграл $\int_1^{+\infty} \ln \frac{x^2+2}{x^2+1} dx$.

Розв'язання. Запишемо підінтегральну функцію у вигляді:

$$\ln \frac{x^2+2}{x^2+1} = \ln\left(1 + \frac{1}{x^2+1}\right).$$

При $x \to +\infty$ $\ln\left(1 + \frac{1}{x^2+1}\right)$ та $\frac{1}{x^2+1}$ є еквівалентними нескінченно малими, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x^2+1}\right)}{1/(x^2+1)} = 1$. При цьому інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ є збіжним, тому збіжним є і інтеграл $\int_1^{+\infty} \ln \frac{x^2+2}{x^2+1} dx$.

Слід зауважити, що із збіжності інтеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ ще не випливає збіжність інтеграла $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$. Якщо разом з інтегралом $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ збігається і інтеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$, то інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ називають ***абсолютно збіжним***, а функцію $f(x)$ – ***абсолютно інтегровною*** на проміжку $[a; +\infty)$. Якщо ж інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ збігається, а $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ є розбіжним, то інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ називають ***умовно збіжним***.

Теорема (*ознака Діріхле*). Нехай для неперервних на $[a;+\infty)$ функцій $f(x)$ та $g(x)$ виконуються умови:

1) $\exists C>0:\forall A\geq a: \left|\int\limits_a^A f(x)dx\right| \leq C$;

2) функція $g(x)$ монотонна на $[a;+\infty)$;

3) $g(x)\to 0$ при $x\to+\infty$.

Тоді невласний інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ є збіжним.

Теорема (*ознака Абеля*). Нехай для неперервних на $[a;+\infty)$ функцій $f(x)$ та $g(x)$ виконуються умови:

1) інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ є збіжним;

2) функція $g(x)$ монотонна на $[a;+\infty)$;

3) функція $g(x)$ обмежена на $[a;+\infty)$.

Тоді невласний інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ є збіжним.

Кажуть, що невласний інтеграл 1-го роду збігається у розумінні *головного значення за Коші*, якщо існує границя:

$$V.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty}\int\limits_{-A}^{+A} f(x)dx.$$

3. Невласні інтеграли 2-го роду.

Означення. *Нехай функція* $f(x)$ *визначена на проміжку* $[a;b)$. *Точку* $x=b$ *назвемо* ***особливою точкою*** *функції* $f(x)$, *якщо* $f(x)\to\infty$ *при* $x\to b-0$ *(*$x\to b$ *і* $x<b$*). Нехай функція* $f(x)$ *інтегровна на відрізку* $[a;b-\varepsilon]$ *при довільному* $\varepsilon>0$ *такому, що* $b-\varepsilon>a$. *Тоді, якщо існує скінченна границя* $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$, *то її називають* ***невласним інтегралом другого роду***:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx. \qquad (2.19)$$

У цьому випадку кажуть, що невласний інтеграл другого роду (2.19) існує або ***збігається.*** Якщо ж границя у правій частині рівності (2.19) не існує або є нескінченною, то інтеграл (2.19) називають ***розбіжним невласним інтегралом***.

Аналогічно, якщо особливою точкою є $x = a$, то невласний інтеграл другого роду визначається рівністю

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx. \qquad (2.20)$$

Якщо $f(x)$ необмежена у околі якої-небудь внутрішньої точки $x = c \in (a;b)$, то за умови існування обох невласних інтегралів другого роду, – $\int_a^c f(x)dx$ та $\int_c^b f(x)dx$, за означенням покладають:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \qquad (2.21)$$

Якщо особливими точками є кінці відрізка інтегрування $x = a$ та $x = b$, то за умови існування обох невласних інтегралів, – $\int_a^c f(x)dx$ та $\int_c^b f(x)dx$, де $x = c$ – довільна точка інтервалу $(a;b)$, за означенням покладають:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Приклад. Використовуючи означення, обчислити наступні невласні інтеграли, або встановити їх розбіжність:

а) $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}$; б) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\cos x}$; в) $\int_0^1 \frac{dx}{1-x^3}$.

Розв'язання. а) Підінтегральна функція $f(x)=\dfrac{1}{x\sqrt[3]{\ln x}}$ є необмеженою у околі точки $x=1$. На будь-якому відрізку $[1+\varepsilon; e]$ вона є неперервною, а тому інтегровною. За визначенням невласного інтеграла другого роду маємо:

$$\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1+\varepsilon}^{e}\frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}=\lim_{\varepsilon\to +0}\left(\frac{3}{2}(\ln x)^{\frac{2}{3}}\Bigg|_{1+\varepsilon}^{e}\right)=\frac{3}{2}\lim_{\varepsilon\to +0}\left(1-\sqrt[3]{\ln^2(1+\varepsilon)}\right)=\frac{3}{2}.$$

б) Підінтегральна функція $f(x)=\dfrac{1}{\cos x}$ є необмеженою у околі точки $x=\dfrac{\pi}{2}$ і є інтегровною на будь-якому відрізку $\left[0;\dfrac{\pi}{2}-\varepsilon\right]$, де $\varepsilon>0$, оскільки є неперервною на цьому відрізку. Тому отримуємо:

$$\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\cos x}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}\frac{dx}{\cos x}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\ln\left(\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}\right]=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\ln\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)\right]=+\infty.$$

Інтеграл є розбіжним.

в) Розкладемо підінтегральну функцію $f(x)=\dfrac{1}{1-x^3}$ на суму елементарних дробів:

$$f(x)=\frac{1}{1-x^3}=\frac{1}{(1-x)\left(x^2+x+1\right)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{x+2}{x^2+x+1}\right).$$

Тоді отримуємо:

$$\int_0^1\frac{dx}{1-x^3}=\frac{1}{3}\int_0^1\frac{dx}{1-x}+\frac{1}{3}\int_0^1\frac{x+2}{x^2+x+1}.$$

Другий доданок у правій частині даної рівності є власним визначеним інтегралом, тому він не впливає на характер збіжності заданого інтеграла. Вона визначається збіжністю інтеграла $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{1-x}$.

$$\int_0^1 \frac{dx}{1-x} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{1-x} = -\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\ln(1-x) \right) \Big|_0^{1-\varepsilon} = -\infty .$$

Таким чином, заданий інтеграл є розбіжним.

Відповідь. а) $\frac{3}{2}$; б) розбіжний; в) розбіжний.

4. Ознаки збіжності невласних інтегралів 2-го роду.

Сформулюємо тепер ознаки збіжності для невласних інтегралів другого роду.

Теорема. *Якщо функції* $f(x)$ *та* $g(x)$ *неперервні на проміжку* $[a;b)$, *мають особливу точку* $x=b$ *та задовольняють умову* $0 \le f(x) \le g(x)$, *то із збіжності інтеграла* $\int_a^b g(x)dx$ *випливає збіжність інтеграла* $\int_a^b f(x)dx$, *а із розбіжності інтеграла* $\int_a^b f(x)dx$ *випливає розбіжність інтеграла* $\int_a^b g(x)dx$.

Теорема.*. Нехай функції* $f(x)$ *та* $g(x)$ *проміжку* $[a;b)$ *неперервні, додатні і мають особливу точку* $x=b$. *Тоді, якщо існує границя* $\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = k > 0$, *де* k *– скінченне число, то інтеграли* $\int_a^b f(x)dx$ *та* $\int_a^b g(x)dx$ *або одночасно збігаються, або одночасно розбігаються.*

Теорема.*. Якщо* $x=b$ *– особлива точка функції* $f(x)$ *і інтеграл* $\int_a^b |f(x)|dx$ *збігається, то інтеграл* $\int_a^b f(x)dx$ *також збігається.*

Твердження, аналогічні теоремам 2.11 – 2.13, виконуються і якщо особливою точкою є $x=a$.

Приклад. Дослідити на збіжність інтеграл $\int_1^2 \frac{\cos x}{\sqrt[3]{x-1}}dx$ **.**

Розв’язання. $\left|\frac{\cos x}{\sqrt[3]{x-1}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$. При цьому інтеграл $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$ є збіжним, тому збігається інтеграл $\int_1^2 \left|\frac{\cos x}{\sqrt[3]{x-1}}\right| dx$, звідки, за теоремою 2.13, випливає збіжність інтеграла $\int_1^2 \frac{\cos x}{\sqrt[3]{x-1}} dx$.

Відповідь. Інтеграл збіжний.

Кажуть, що невласний інтеграл 2-го роду збігається у розумінні *головного значення за Коші*, якщо існує границя:

$$V.p.\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0+0}\left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx\right).$$