### Лекція №1

### Тема: «Основні поняття математичного моделювання»

### Мета: формування в студентів теоретичних знань з питань сутності моделювання, математичного моделювання та процесу побудови моделей.

**План**

* 1. **Поняття математичної моделі.**
	2. **Приклади математичних моделей.**
	3. **Класифікація математичних моделей.**
	4. **Побудова простіших математичних моделей.**

**Література**

**Основна:**

1. Самарский А. А., Михайлов А. П. Математическое моделирование. Идеи. Методы. Примеры. – Москва: Физматлит, 2001.– 436 с.

2. Введение в математическое моделирование: Учебное пособие / Под ред. П. В. Трусова.– Москва: Университетская книга, Логос, 2007.– 440 с.

3. Станжицький О.М., Таран Є.Ю., Гординський Л.Д. Основи математичного моделювання : Навчальний посібник. – Київ : Видавничо-поліграфічний центр “Київський університет”, 2006. – 96 с.

4. Павленко П.М. Основи математичного моделювання систем і процесів: Навчальний посібник. – Київ: Книжкове вид-во НАУ, 2010.– 198 с.

**Додаткова:**

1. Краснощеков П.С., Петров А.А. Принципы построения моделей. – Москва, 1983.

2. Веников В.А. Теория подобия и моделирования. – Москва, 1976.

3. Козин Р.Г. Математическое моделирование. Примеры решения задач: Учебно-методическое пособие.– Москва: НИЯУ МИФИ, 2010.– 176 с.

**Зміст лекції**

**1.1 Поняття математичної моделі**

Моделювання як метод дослідження відоме дуже давно – ще з часів Леонардо да Вінчі та Галілея. З розвитком виробничих сил суспільства воно знаходить усе нові й нові застосування. У сучасному світі моделювання стало складовою частиною не тільки експериментальних досліджень і конкретного технічного проектування – інженерної справи; завдяки моделюванню створюються абстрактні теорії, воно використовується в усіх галузях науки.

Математичне моделювання є найвищою формою моделювання. Воно сприяло розвитку науки й техніки індустріального суспільства, а з появою електронно-обчислювальних засобів обробки інформації привело до бурхливого розвитку сучасного – постіндустріального – суспільства.

**Моделювання.** Метод моделюванняє методом дослідження властивостей певного об’єкта (оригіналу) за допомогою вивчення властивостей іншого об’єкта (моделі), який є зручнішим для дослідження і знаходиться у певній відповідності до першого об’єкта (оригіналу).

Моделювання – це побудова (або вибір) і вивчення такого об’єкта будь-якої природи (моделі), що здатний замінити собою досліджуваний об’єкт (оригінал) і вивчення якого дає нову інформацію про досліджуваний об’єкт.

**Оригінал.** У теорії моделювання *оригінал* – це об’єкт, певні властивості (аспекти) якого підлягають вивченню методом моделювання.

У загальному випадку поняття оригіналу має широку інтерпретацію. Воно охоплює об’єкти (системи, підсистеми, елементи), як реально існуючі, так і такі, що проектуються, а також явища, режими і процеси, які в них відбуваються.

Означимо коротко терміни, які зустрічаються у визначенні оригіналу. *Система* – це сукупність компонентів, яка розглядається як єдине ціле й організована для розв’язання певних функціональних задач так, що два будь-які її компоненти взаємозалежні завдяки деякому системостворюючому відношенню.

У системі можуть бути виділені *підсистеми* – відносно самостійні частини системи, які пов’язані функціонально між собою, а також *елементи* – компоненти системи, які приймаються за відповідної постановки задачі як неподільні.

*Явище* – це сукупність процесів, які є супутніми функціонуванню або поведінці системи й виявляються у вигляді змін стану або режимів цієї системи.

*Стаціонарний режим* – це такий стан системи, за якого параметри режиму не змінюються в часі.

У протилежному випадку режим є *нестаціонарним* (перехідним).

*Процес* – це закономірна послідовна зміна деякої групи параметрів режиму, які називаються параметрами процесу.

Система також характеризується своїми параметрами. Наприклад, при дослідженні механічних явищ параметрами процесів є сили, швидкості, прискорення, а параметрами системи – маси тіл, коефіцієнти тертя, в’язкості рідин тощо.

Системи, у яких параметри є сталими на всьому інтервалі часу, протягом якого відбувається процес, що вивчається, називаються *лінійними*.

Системи, у яких хоча б один параметр змінюється як функція іншого або кількох інших параметрів, називаються *нелінійними*.

**Модель.** Це допоміжний об’єкт, який знаходиться у певній відповідності до об’єкта, що вивчається (оригіналу), і є більш зручним для дослідження оригіналу.

Відображаючи окремі особливості поведінки об’єкта-оригіналу, модель має деякі риси, ідентичні з оригіналом, і використовується для одержання такої інформації про оригінал, яку важко або неможливо одержати шляхом безпосереднього дослідження оригіналу.

Основним поняттям методу математичного моделювання є поняття математичної моделі. Математичною моделлю називається наближене описання якого-небудь явища або процесу оточуючого світу за допомогою математичної символіки.

* 1. **Приклади математичних моделей**

1) Розглянемо таку задачу механіки.Снаряд запущений з Землі з початковою швидкістю *v0* = 30 *м/с* під кутом *α* = 45° до її поверхні; потрібно знайти траєкторію його руху і відстань S між початковою і кінцевою точкою цієї траєкторії.

Нехтуючи розмірами снаряда, будемо вважати його матеріальною точкою. Введемо систему координат *x*O*y*, сумістивши її початок O з вихідною точкою, з якої запущений снаряд, вісь *x* направимо горизонтально, а вісь *y* – вертикально (рис. 1).



Рис. 1

Тоді, як це відомо з шкільного курсу фізики, рух снаряда описується формулами:$x=tv\_{0}cosα, y=tv\_{0}sinα-\frac{gt^{2}}{2},$ де *t* – час,  *g* =10 *м/с2*.

Ці формули і визначають математичну модель поставленої задачі. Виражаючи *t* через *x*з першого рівняння і підставляючи в друге, отримаємо рівняння траєкторії руху снаряда: $y=xtgα-\frac{gx^{2}}{2v\_{0}^{2}cos^{2}α}.$

Ця крива (парабола) перетинає вісь *x* в двох точках: *x1* = 0 (початок траєкторії) і $x\_{2}=S=\frac{v\_{0} ^{2}}{g}sin2α$ (місце падіння снаряда). Підставляючи в отримані формули задані значення *v0* і *a*, одержимо відповідь: *y* = *x* – 90x2,  *S* = 90*м*. Відмітимо, що при побудові цієї моделі використано ряд припущень: наприклад, вважається, що Земля плоска, а повітря і обертання Землі не впливають на рух снаряда.

2) Задача про бак з найменшою площею поверхні.Потрібно знайти висоту *h0* і радіус *r0* бляшаного бака об’ємом *V* = 30*м3*, що має форму закритого кругового циліндра, при яких площа його поверхні *S*мінімальна (в цьому випадку на його виготовлення піде найменша кількість бляхи). Запишемо наступні формули для об'єму і площі поверхні циліндра висоти *h* і радіуса *r*: *V = π r2h, S = 2π r (r + h).*$ $

Виражаючи *h* через *r* і *V* з першої формули і підставляючи отриманий вираз в другу, одержимо:$ S\left(r\right)=2πr^{2}+\frac{2V}{r}. $Таким чином, з математичної точки зору, задача зводиться до визначення такого значення *r*, при якому досягає свого мінімуму функція *S* *(r)*. Знайдемо ті значення *r0*, при яких похідна$S^{'\left(r\right)}=4πr-\frac{2V}{r^{2}}.$перетворюється в нуль:$ r\_{0}=\left(\frac{V}{2π}\right)^{\frac{1}{3}} .$

Можна перевірити, що друга похідна функції *S (r)* змінює знак з мінуса на плюс при переході аргументу *r* через точку *r0*. Отже, в точці *r0* функція *S (r)*досягає мінімуму. Відповідне значення *h0* = *2r0*. Підставляючи у вираз для *r0* і *h0* задане значення *V*, отримаємо шуканий радіус і висоту.

* 1. **Класифікація математичних моделей**

Моделі класифікують за такими параметрами: за складністю об'єкта моделювання; за типом оператора моделі; за типом вхідних та вихідних параметрів; за метою моделювання.

**Детерміновані (визначені) математичні моделі**. Всі співвідношення а також параметри в детермінованій математичній моделі є *однозначно визначеними.* Результат рішення також дає групу однозначних чисел – значень вихідних параметрів Y1,Y2,Y3…YN .

**Стохастичні** ***математичні моделі*** на відміну від детермінованих містять параметри або окремі співвідношення імовірного характеру. Ці моделі описують стохастичні (випадкові) процеси, в яких значення параметрів є випадковими і підлягають дії статистичних законів і теорії імовірності. В різних технологіях стохастичними є процеси виготовлення штучної продукції. В безперервному дискретному потокові виробів , наприклад, однотипних деталей після процесу гальванопокриття, окремі вироби відрізняються один від другого своїми вихідними характеристиками (товщина покриття, рівномірність, блиск, адгезія, тощо). Вхідні параметри також випадкові – локальна густина струму, швидкість конвекції і гранична густина струму, локальна концентрація при слабому перемішуванні електроліту. В математичному моделюванні таких систем для обробки результатів використовують методи теорії імовірності та мат.статистики.

**Математичні моделі*систем з розподіленими параметрам.***В багатьох задачах, де розглядають функціонування електрохімічних систем, *процеси розподіляються нерівномірно* в геометричному просторі модельованого об’єкта. Наприклад, нерівномірно розподілені густини струму на поверхні великогабаритних електродів, концентрації учасників електрохімічних реакцій вздовж потоку розчину в електрохімічних апаратах витискування, концентрації і густини струму в пористих електродах, тощо. Такі об’єкти описують системами диференційних рівнянь другого порядку, які належать до математичної теорії поля.

Важливою ознакою математичних моделей цього типу є наявність похідних по геометричних координатах робочого простору і залежність вихідних характеристик системи від її геометричних параметрів – геометричної форми, габаритних розмірів тощо.

Математичні моделі систем з розподіленими параметрами використовують для вирішення задач *електрохімічної макрокінетики*. Цим терміном позначають комплекс теоретичних положень про визначення інтегральної швидкості електрохімічного процесу для електрохімічних пристроїв, де має місце значна нерівномірність розподілу локальної швидкості процесу всередині пристрою.

**Математичні моделі*систем з зосередженими параметрами.*** На відміну від попереднього варіанту в цій групі розглядають технічні об’єкти в цілому, в умовах, коли можна вважати розподіл процесу у внутрішній частині об’єкта рівномірним. Тоді в математичній моделі координати внутрішнього простору відсутні, а з геометричних факторів враховують практично лише площі електродів для визначення струму, міжелектродну відстань та об’єм робочої частини. Ці параметри входять в математичні моделі як константи.

***Математичні моделі*** ***динамічних систем.***До динамічних систем відносять такі технічні об’єкти (технологічні процеси), стан яких, тобто група характерних вихідних параметрів Y1, Y2,Y3…YN, закономірно змінюється з часом. Математична модель містить диференційні рівняння з похідними $\frac{dY}{dt}$.

Процес, стан якого з часом змінюється, називають ***нестаціонарним***. Мета моделювання – знайти ***динамічні характеристики*** об’єкта, тобто часові залежності невідомих параметрів Yn= f(t).

**Математичні моделі** ***статичних систем.*** На відміну від динамічних, в статичних системах (технологічних процесах) стан системи не змінюється протягом необмеженого часу. Такі процеси називають ***стаціонарними***, в їх математичні моделі час як параметр не входить. Проте часова тривалість процесу при цьому може фігурувати в математичній моделі як константа.

* 1. **Побудова простіших математичних моделей**

Створюючи модель об'єкту, дослідник пізнає об'єкт, тобто виділяє його з навколишнього середовища і будує його формальний опис. Основні цілі моделювання:

• опис об'єкту;

• пояснення об'єкту;

• прогнозування поведінки і властивостей об'єкту.

Мету опису і пояснення об'єкту можна об'єднати в одну – вивчення об'єкту (пізнавальна мета). Модель потрібна для того, щоб зрозуміти, як влаштований конкретний досліджуваний об'єкт, які його структура, внутрішні зв'язки, основні властивості, закони розвитку, саморозвитку і взаємодії з навколишнім середовищем. Ще одна мета (прогнозування поведінки і властивостей об'єкту) є частиною стратегічної мети – управляти об'єктом, визначаючи по моделі оптимальні дії, що управляють, при заданих цілях і критеріях. Модель потрібна і для того, щоб прогнозувати наслідки різних дій на об'єкт.

Процес побудови математичних моделей може бути умовно розбитий на такі етапи.

1. Побудова моделі починається зі словесно-змістового описання об’єкта чи явища. Окрім знань загального характеру про природу об’єкта і мету його дослідження, ця стадія може містити також деякі припущення(невагомий стрижень, товстий шар речовини, прямолінійне поширення світла тощо). Даний етап можна назвати формулюванням передмоделі*.*

2. Наступний етап – завершення ідеалізації об’єкта. Відкидаються всі фактори та ефекти, які вважаються не самими суттєвими для його поведінки. Наприклад, при складанні балансу матерії не враховувався, через його мализну, дефект мас, яким супроводжується радіоактивне розщеплення. За можливості припущення, які використовуються при ідеалізації, записуються в математичній формі. Наприклад,  – довжина вільного пробігу продуктів розщеплення  значно більша за характерний розмір самого матеріалу  (у прикладі про зберігання радіоактивних матеріалів). Це необхідно, щоб справедливість цих припущень піддавалась кількісному контролю.

3. Після виконання перших двох етапів можна переходити до вибору чи формулювання закону (варіаційного принципу, аналогії тощо), якому підлягає об’єкт, і його запису в математичній формі. За необхідності використовуються додаткові дані про об’єкт, які також записуються математично (напр., сталість величини  для всіх траєкторій руху автомобіля – у прикладі про рух автомобіля з точки А у точку В з дотиком до деякої прямої). Слід мати на увазі, що навіть для простих об’єктів вибір відповідного закону є зовсім не тривіальною задачею.

4. Формулювання моделі завершує її “оснащення”. Наприклад, необхідно задати дані про початковий стан об’єкта (швидкість ракети та її масу в момент ) або інші його характеристики, без знання яких неможливо визначити поведінку об’єкта. І, нарешті, формулюється мета дослідження моделі (напр., досягнути розуміння закономірностей зміни популяції, встановити вимоги до конструкції ракети, яка запускає супутник тощо).

5. Побудована модель вивчається всіма доступними методами, у тому числі – перевіркою з використанням різних підходів. На відміну від найпростіших випадків, які ми розглянули до цього часу, більшість моделей не піддаються чисто теоретичному аналізу, і тому необхідно широко застосовувати обчислювальні методи. Ця обставина особливо важлива при вивченні нелінійних об’єктів, оскільки їх якісна поведінка заздалегідь, як правило, невідома.

6. У результаті дослідження моделі не тільки досягається поставлена мета, але має бути встановлена усіма можливими способами (порівнянням з практикою, з іншими підходами) адекватність моделі – відповідність моделі до об’єкта та сформульованих припущень. Неадекватнамодель може дати результат, який буде як завгодно відрізнятися від істинного. Така модель має бути відкинутою або відповідним чином модифікованою.

**Питання для перевірки засвоєння знань :**

1. Дайте визначення поняття модель і моделювання.

2. В чому відмінність між моделлю та математичною моделлю?

3. Як класифікують математичні моделі?

4. Які етапи побудови моделей?

5. Яке практичне завдання математичного моделювання?