### Лекція №2

### Тема : «Лінійні балансові моделі»

### Мета: формування в студентів теоретичних знань з питань сутності лінійних балансових моделей, методики побудови моделі міжгалузевого балансу.

**План**

**2.1 Загальна структура міжгалузевого балансу.**

**2.2 Статична модель міжгалузевого балансу Леонт’єва.**

**2.3 Індекси цін у моделі міжгалузевого балансу. Модель міжнародної торгівлі (модель обміну).**

**2.4 Динамічна модель Леонт’єва. Модель Неймана.**

**Література**

**Основна:**

1.Самойленко М.І., Скоков Б.Г. Дослідження операцій (Математичне програмування. Теорія масового обслуговування): Навч. посібник. – Харків: ХНАМГ, 2005. – 176

2. Миксюк С.Ф., Комкова В.Н. Экономико-математические методы и модели – Минск: БГЭУ, 2006.

3. Браверман Э. М. Математические модели планирования и управления в экономических системах. – Москва: Наука, 1976. – 130 с.

4. Бушенков Ю.Н., Молородов Ю.И., Мороков Ю.Н.. Математическое моделирование физ-ких процессов. - Изд-во НГУ, Новосибирск, 2003.

**Додаткова:**

1. Краснощеков П.С., Петров А.А. Принципы построения моделей. – Москва, 1983.

2. Веников В.А. Теория подобия и моделирования. – Москва, 1976.

3. Козин Р.Г. Математическое моделирование. Примеры решения задач: Учебно-методическое пособие.– Москва: НИЯУ МИФИ, 2010.– 176 с.

**Зміст лекції**

**2.1 Загальна структура міжгалузевого балансу.**

Балансова модель виробництва є однією з найбільш простих математичних моделей. Вона записується у вигляді системи рівнянь, кожне з яких виражає вимогу рівності (балансу) між кількістю продукції, виробленої окремим економічним об'єктом, і сукупною потребою в цьому продукті. Під економічним об'єктом зазвичай розуміють так звану «чистий прибуток». Балансові моделі ґрунтуються на понятті міжгалузевого балансу, який представляє собою таблицю, що характеризує зв'язки між галузями (економічними об'єктами) економічної системи.

Припустимо, що економічна система складається з n взаємопов'язаних галузей P1, Р2, ..., Рn. Валовий продукт i-й галузі позначимо через Xi (X1 - валовий продукт P1 Х2 - валовий продукт Р2, ..., Хn валовий продукт Рn). Кінцевий продукт кожної галузі позначимо літерою Y з індексом, відповідним її номеру (Yi - кінцевий продукт Pi). Галузі взаємопов'язані, тобто кожна з них використовує продукцію інших галузей в якості сировини.

Нехай Xij - витрати продукції i-й галузі на виробництво продукції Рj. Умовно чисту продукцію i-й галузі позначимо Vi. Якщо перераховані показники представлені в міжгалузевому балансі в тоннах, літрах, кілометрах, штуках і т. Д., То говорять про міжгалузеву балансі в натуральному, виразів. Ми ж домовимося, що під Xi, уj, Vj та Xij будемо розуміти виражену в деяких фіксованих цінах вартість відповідної продукції. Всю інформацію про економічну систему зведемо в таблицю



**Перший квадрант.** У таблиці кожна галузь представлена ​​двояким чином. Як елемент рядка, вона виступає в ролі постачальника виробленої нею продукції, а як елемент шпальти - в ролі споживача продукції інших галузей економічної системи.

Якщо Р1 - виробництво електроенергії, а P2 - вугільна промисловість, то Х12 - річні витрати електроенергії на виробництво вугілля, а Х21 - аналогічні витрати вугілля на виробництво електроенергії. Р1 виступає як постачальник електроенергії і як споживач вугілля. Галузь Р1 є також споживачем своєї продукції. Електроенергія вартістю Х11 грошових одиниць використовується всередині галузі на забезпечення роботи електротехніки, на освітлення виробничих приміщень і т. Д. Аналогічний сенс має X22 і все Xii. У загальному випадку, хi1, Хi2, ..., ХII, ..., Хin - обсяги поставок продукції i-й галузі галузях, що входять в економічну систему. Сума цих поставок Xi1 + Xi2 + ... + Xin = Σ Xij висловлює сумарне виробниче споживання продукції Рi і записується в i-му рядку (n + 1) -го стовпця таблиці. У нашому прикладі X11 + X12 + ... + X1n = Σ X1j є сумарне виробниче споживання електроенергії, а X21 + X22 + ... + X2n = Σ X2j - сумарні витрати вугілля на виробничі потреби галузей, що входять в економічну систему.

Подивимося тепер на Pi як на елемент стовпця. У стовпці з номером i розташовані обсяги поточних виробничих витрат продукції галузей, що входять в економічну систему, на виробництво продукції i-й галузі. В (n + 1) -му рядку вказаного стовпця записана сума поточних виробничих витрат Рi.

На перетині (n + 1) -го рядка і (n + 1) -го стовпця знаходиться величина  - так званий проміжний продукт економіки.

Другий розділ присвячений кінцевого продукту. Стовпець кінцевого продукту - (n + 2) -й стовпець. Під кінцевим споживанням розуміють особисте і суспільне споживання, що не йде на поточні виробничі потреби. У кінцеву продукцію, як правило, включаються: накопичення, відшкодування вибуття основних засобів, приріст запасів, особисте споживання населення, витрати на утримання державного апарату, охорону здоров'я, оборону і т.д., а також сальдо експорту та імпорту.

До другого розділу відноситься також стовпець валових випусків (Xi). У межах першого і другого розділів справедливо співвідношення:(3.1) Ця рівність означає, що вся вироблена i-й галуззю продукція споживається. Частина її, в формі сумарного виробничого споживання продукції Pi йде на виробничі потреби галузей, що входять в економічну систему. Інша частина споживається в формі кінцевого продукту.

Так, частина продукції вугільної промисловості, як ми вже відзначали, використовується всередині економічної системи, а інша - в якості сировини, палива - буде спожита галузями, що не ввійшли до складу економічної системи, і складе частина експорту країни, піде на опалення помешкань і т. п.

Квадранти I і II відображають баланс між виробництвом і споживанням. Третій квадрант міжгалузевого балансу відображає вартісну структуру валового продукту галузей. В (n + 2) -му рядку таблиці відображена умовно чиста продукція (Vj), що представляє собою різницю між величиною валової продукції галузі і сумарними витратами галузі:     (3.2)

Умовно чиста продукція підрозділяється на амортизаційні відрахування і чисту продукцію галузі. Найважливішими складовими чистої продукції галузі є заробітна плата, прибуток і податки. Можна показати, що сумарний кінцевий продукт дорівнює сумарній умовно чистої продукції. Зі співвідношень (3.1) і (3.2). Підсумуємо першу рівність по i, а друге - по j:



Ліві частини виразів рівні, значить рівні і праві:

звідки що й потрібно було довести. Отже, сумарний кінцевий продукт дорівнює сумарній умовно чистої продукції.

Таким чином, в третьому розділі також фігурує кінцевий продукт, але якщо в другому розділі він розбивається на величини yi, що характеризують структуру споживання, то в третьому розділі величини Vj показують, в яких галузях проведена вартість кінцевого продукту.

Четвертий розділ розташовується під другим. Він характеризує перерозподільні відносини в економіці, здійснювані через фінансово-кредитну систему. У планових розрахунках четвертий розділ, як правило, не використовується, і тому в межах нашого курсу розглядатися не буде.

**2.2 Статична модель міжгалузевого балансу Леонт’єва.**

Статистичні міжгалузеві моделі використовуються для розробки планів випуску і споживання продукції і ґрунтуються на співвідношеннях міжгалузевого балансу.

При побудові моделі роблять такі припущення:

1) всі продукти, вироблені однією галуззю, однорідні і розглядаються як єдине ціле, тобто фактично передбачається, що кожна галузь виробляє один продукт;

2) в кожній галузі є єдина технологія виробництва;

3) норми виробничих витрат не залежить від обсягу продукції, що випускається;

4) не допускається заміщення одного сировини іншим.

Насправді ці припущення, звичайно, не виконуються. Навіть на окремому підприємстві зазвичай випускаються різні види продукції, використовуються різні технології, питомі витрати залежать від обсягу випуску і в тих чи інших межах допускається заміна одного сировини іншим. Отже, ці припущення тим більш невірні для галузі. Однак такі моделі отримали широке поширення і, як показала практика, вони цілком адекватні і застосовні для складання планів випуску продукції.

При цих припущеннях величина xij може бути представлена ​​наступним чином:     (3.3) Величина aij називається коефіцієнтом прямих матеріальних витрат. Вона показує, витрати i-й галузі на виробництво одиниці продукції j-й галузі. Коефіцієнти aij вважаються в міжгалузевої моделі постійними. Підставляючи вираз (3.3) в (3.1), отримаємо 

Це співвідношення можна записати в матричному вигляді: X = AX + Y,(3.4) где X = (X1, X2, ..., Xn) - вектор валових випуков; Y = (y1, y2, ..., yn) - вектор кінцевого продукту;

A = - матриця коефіцієнтів прямих матеріальних витрат.

Коефіцієнти прямих матеріальних витрат є основними параметрами статичної міжгалузевої моделі. Їх значення можуть бути отримані шляхами: 1) статистично. Коефіцієнти визначаються на основі аналізу звітних балансів за минулі роки. Їх незмінність у часі визначається вибором галузей;

2) нормативно. Передбачається, що галузь складається з окремих виробництв, для яких вже розроблені нормативи витрат; на їх основі розраховуються середньогалузеві коефіцієнти.

Вираз (3.4) прийнято називати балансом розподілу продукції. Його можна використовувати для аналізу та планування структури економіки. Якщо відомі коефіцієнти прямих матеріальних витрат, то, задавши кінцевий продукт по кожній галузі, можна визначити необхідні валові випуски галузей. В цьому закладена основна ідея використання матричних моделей для планування виробництва.

Перетворимо вираз (3.4): X - AX = Y,X (E - A) = Y,X = (E - A)-1Y,(3.5)

где E - одинична матриця.

До початку планування слід з'ясувати, чи існує матриця, зворотна матриці (E-A), і чи не будуть отримані негативні значення випуску по галузях.

Встановимо деякі властивості коефіцієнтів прямих матеріальних витрат. 1. Невідємність, тобто aij ≥ 0,     Це твердження випливає з невід'ємності величин xij і позитивності валових випусків Xj. 2. Сума елементів матриці A за допомогою одного з стовпців менше одиниці, тобто.    Довести це твердження нескладно.

Для будь-якої галузі умовно чиста продукція є величина позитивна, оскільки включає в себе заробітну плату, амортизацію, прибуток і т.д., тобто Vj> 0. Тому, використовуючи співвідношення (3.2), можна записати:зі співвідношення (3.3):  звідки таким чином, твердження доведено.

Можна показати, що при виконанні цих двох умов матриця B = (E - A) -1 існує і якщо її елементи невід'ємні. Кажуть, що в цьому випадку матриця прямих витрат А є продуктивною. Перепишемо формулу  (3.5): X = BY,(3.6)

Матриця В зветься матриці повних матеріальних витрат, а її елементи bij називають коефіцієнтами повних матеріальних витрат. Коефіцієнт bij показує, яким має бути валовий випуск i-й галузі для того, щоб забезпечити випуск одиниці кінцевого продукту j-й галузі.

Можна показати, що B = E + A + A2 + A3 + (3.7). Помножимо обидві частини на (E - A) отримаємо B(E - A) = (E + A + A2 + A3 + ...)(E - A),

 B(E - A) = E звідки  B = E / (E - A) тобто  B = (E - A)-1. Доведено.

З Співвідношення (3.7) слід bij ≥ aij, Таким чином, коефіцієнт повних матеріальних витрат bij, що описує потребу у випуску продукції i-й галузі в розрахунку на одиницю кінцевого продукту j-й галузі, які не менше коефіцієнта прямих матеріальних витрат aij, розрахунковано на одиницю валового випуску.

**2.3 Індекси цін у моделі міжгалузевого балансу. Модель міжнародної торгівлі (модель обміну).**

Припустимо, що на встановлення торгівельних зв’язків з бюджетів n країн виділено кошти у кількостях . Нехайчастка, якута країна витрачає на закупівлю товарів утої країни. Вважатимемо, що всі виділені кошти кожної країни витрачаються або на внутрішньому ринку, або на імпорт товарів. Остання умова забезпечує рівність

,. Матрицю з елементівназ. структурною матрицею торгівлі:

. Для тої країни виторг 

Бездефіцитність торгівлі для кожної країни забезпечується умовою ,. З економічної точки зору нерівністьнеможлива (всі країни не можуть одночасно отримувати прибуток), тому умова збалансованої торгівлі набуває вигляду,. Нехай Х=х1,х2…хn, тоді умову збалансованої торгівлі можна записати у матричній формі: , або . Остання рівність дозволяє визначити *Х.*

**Приклад.**Структурна матриця торгівлі трьох країн має вигляд:

Знайти співвідношення коштів цих країн для збалансованої бездефіцитної торгівлі. Якими повинні буті величини коштів за цієї умови, якщо сума їх задана .

***Розв’язування*.**Розв’яжемо рівняння . Маємо:

, або 

Використовуємо метод Гаусса для знаходження розв’язку одержаної однорідної системи рівнянь. Одержимо: ,,. Це означає, що збалансованість торгівлі даних країн може бути досягнута тільки у випадку коли бюджети знаходяться у відношенні. Підставимо знайдені значення у задану суму бюджетів, щоб визначити величину. Звідси остаточно одержимо шукані величини коштів країн за умови бездефіцитної торгівлі:,,.

**2.4 Динамічна модель Леонт’єва. Модель Неймана.**

Розглянута вище модель міжгалузевого балансу є статичною, оскільки в ній все співвідношення віднесені до одного моменту часу. Інвестиції (капіталовкладення), Представлені у другому квадраті, включені в кінцевий продукт. У цій моделі не аналізується розподіл, використання та виробнича ефективність капітальних вкладень. У динамічних моделях відбивається процес розвитку економіки. У них виробничі капітальні вкладення виділяються зі складу кінцевої продукції досліджується їх структура і вплив на зростання обсягу виробництва.

Схема динамічного міжгалузевого балансу представлена ​​в табл.2.3

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Галузі | Проміжне споживання (поточні витрати) | Валові інвестиції (Зміна основних і оборотних коштів) | Кінцеве споживання,*Y* | Валовoй продукт, *X* |
| 1 2 … … *n* | 1 2 … ... *n* |
| 12…*n* | *x11 x12*… *x1j*… *x1n**x21 x22*… *x2j*... *x2n*… … … …*xn1 xn2*… *xnj*... *xnn* | *К11 К12*… … *К1n**К21 К22*… … *К2n*… … … …*Кn1 Кn2*… … *Кnn* | *Y1**Y2*…*Yn* | *X1**X2*…*Xn* |

Табл. 2.3 містить дві матриці, що відповідають першому і другому квадранту статичного МОБ. Матриця проміжного споживання з елементами xij збігається з відповідною матрицею статичного балансу.

Елементи другої матриці показують, яка кількість продукції i-й галузі направлено в поточному періоді в j-ю галузь в якості виробничих капітальних вкладень в основні та оборотні кошти.

У динамічній схемі кінцевий продукт yi включає продукцію i-й галузі, що йде в особисте і суспільне споживання, накопичення невиробничої сфери, незавершене будівництво, на експорт. Всі показники дані в вартісної формі.

У таблиці виконуються наступні балансові співвідношення:



Як і в статичної моделі, Xij = aijXj. Міжгалузеві потоки капітальних вкладень відносяться до періоду (t-1, t). Динаміка задається додатковими співвідношеннями Кij = φijΔXj, ΔХj = Хj (t) - Хj (t - 1). (2.21) Економічний сенс коефіцієнтів φij = Кij / ΔХj наступний: вони показують, яка кількість продукції i-й галузі повинно бути вкладено вj-ю галузь для збільшення випуску її продукції на одиницю врозглянутих одиницях виміру. Коефіцієнти φij називаютьсякоефіцієнтами капітальних вкладень або коефіцієнтами приростномфондомісткості. Систему рівнянь (2.20) з урахуванням (2.21) можна записати як



Запишемо в матричному вигляді $X\left(t\right)=A\*X\left(t\right)+Ф\*∆X\left(t\right)+Y\left(t\right), \left(2.23\right)$

$A=\left‖a\_{ij}\right‖, Ф=\left‖φ\_{ij}\right‖, i,j=1,2,…,n$*.*З чого слідує$\left(E-A-Ф\right)\left(X\left(t\right)\right)=Y\left(t\right)-ФX\left(t-1\right),X\left(t\right)=\left(E-A-Ф\right)^{-1}(Y\left(t\right)-ФX\left(t-1\right))$(2.24)

Модель (2.22) називається дискретною динамічною моделлю міжгалузевого балансу Леонтьєва. Система рівнянь (2.22) являє собою систему лінійних різницевих рівнянь 1-го порядку. Для дослідження даної моделі треба поставити в початковий момент часу вектори X (0) і Y (t) для t = 1, 2, ..., T. Рішенням моделі будуть значення векторів X (t), K (t), t = 1, 2, ..., T. Умовою можливості розв'язання системи (2.22) щодо вектора Х (t) є вимога det (E - A - Ф) ≠ 0.

У даній моделі передбачається, що приріст продукції в періоді (t - 1, t) обумовлений капіталовкладеннями, зробленими в тому ж періоді. Для коротких періодів це припущення нереально, тому що існують відставання в часі (часові лаги) між вкладенням коштів у виробничі фонди і приростом випуску продукції. Моделі, що враховують лаги капітальних вкладень, утворюють особливу групу динамічних моделей МОБ.

Якщо перейти до безперервного часу, то рівняння (2.22) перепишуть у вигляді системи диференціальних рівнянь 1-го порядку з постійними коефіцієнтами (2.25)

Для її вирішення крім матриць коефіцієнтів поточних прямих матеріальних витрат A = (aij) і коефіцієнтів капітальних витрат Ф = (φij)необхідно знати рівні валового випуску в початковий момент часу t = 0(X (0)) і закон зміни величин кінцевого продукту y (t) на відрізку [0, T]. Рішенням системи рівнянь (2.25) будуть значення вектор-функції x (t)на відрізку [0, T]. Умовою можливості розв'язання системи (2.25) является det Ф ≠ 0.Більш загальною динамічної міжгалузевої моделлю є модель, що враховує виробничі потужності галузей. Вона представлена ​​нижче у вигляді наступних співвідношень:$ x\_{i}\geq Ax\_{i}+Фv\_{i}+y\_{i}, \left(2.26\right) x\_{i}\leq \overbar{x\_{i}}$(2.27)

Модель Неймана призначена для знаходження максимально можливого темпу зростання економічної системи, а також пропорцій і цін, що відповідають цьому темпу; найпростіша модель розширюється економіки. Запропоновано Дж. Фон Нейманом в 1937 р М.Н. задається двома невід'ємними матрицями A і B порядку m\*n. Матриця A = (aij) називається матрицею витрат, B = (bij) - матрицею випуску. Коефіцієнт aij показує величину витрат продукту або фактора i в виробничому способі j, коефіцієнт bij - випуск продукту i за способом j при одиничній інтенсивності його використання. Основний недолік моделі - неврахування зовнішніх факторів обмежують зростання економіки (головним чином невідтворюваних ресурсів). Максимальний технологічний темп зростання економіки визначається за формулою: Тут x = x1, ..., xn - вектор інтенсивностей виробничих способів, а min береться за всіма i, для яких знаменник відмінний від нуля. Темп зростання і вектор інтенсивностей x, на якому досягається max, називається Неймановская. З Неймановская темпом зв'язуються Неймановская ціни всіх продуктів і факторів p = (p1, ..., pm) № 0, визначаються співвідношеннями: для всіх способів j = 1, 2, ..., n. Відмітною властивістю Неймановская інтенсивностей і цін є те, що вони дають можливість описати оптимальну траєкторію зростання і відповідну їй оптимальну траєкторію цін.

**Питання для перевірки засвоєння знань :**

1. Структура міжгалузевого балансу.

2. Зв'язок між кінцевою і умовно чистою продукцією.

3. Економічний сенс коефіцієнтів прямих витрат праці.