### Лекція №4

### Тема: «Моделі й методи лінійного програмування»

### Мета: формування в студентів теоретичних знань з питань сутності моделей і методів лінійного програмування.

**План**

**4.1 Основні поняття. Загальна постановка задачі лінійного програмування.**

**4.2 Приклади задач, що описуються лінійними моделями.**

**4.3 Симплекс-алгоритм розв’язання ЗЛП. Розв’язання задачі лінійного програмування за допомогою симплекс-таблиць.**

**4.4 Штучний базис. Метод штучного базису побудови опорного плану ЗЛП.**

**Література**

**Основна:**

1. Акулич И. П. Математическое программирование в примерах и задачах: Учеб. пособие для студентов. – Москва: Высш. шк., 1986. – 319 c.

2. Банди Б. Основы линейного программирования. – Москва: Радио и связь, 1989.

3. Бушенков Ю.Н., Молородов Ю.И., Мороков Ю.Н.. Математическое моделирование физ-ких процессов. - Изд-во НГУ, Новосибирск, 2003.

4. Кузнецов Ю. Н., Козубов В. И., Волощенко А. Б. Математическое программирование. – Москва: Высш. шк., 1980. – 351 c.

**Додаткова:**

1. Горчаков А.А., Орлова И.В. Компьютерные экономико-математические модели. – Москва: ЮНИТИ, 1995.

2. Самойленко М.І., Скоков Б.Г. Дослідження операцій (Математичне програмування. Теорія масового обслуговування): Навч. посібник. – Харків: ХНАМГ, 2005. – 176 с.

**Зміст лекції**

**4.1 Основні поняття. Загальна постановка задачі лінійного програмування.**

Математичне програмування - це область математики, що розробляє теорію і чисельні методи розв'язання задач на екстремум функції багатьох змінних з обмеженнями на область зміни цих змінних.

Для практичного вирішення економічної задачі математичними методами її перш за все слід записати за допомогою математичних виразів (рівнянь, нерівностей тощо), тобто скласти економіко-математичну модель даного завдання. Для цього необхідно:

1) ввести змінні величини x1, x2, ..., xn, числові значення яких однозначно визначають одне з можливих станів досліджуваного явища;

2) висловити взаємозв'язку (властиві досліджуваному параметру) у вигляді математичних обмежень (рівнянь, нерівностей), що накладаються на невідомі величини. Ці співвідношення визначають систему обмежень задачі, яка утворює область допустимих рішень (область економічних можливостей). Рішення (план) Х = (х1, x2, ..., xn), яке задовольняє системі обмежень задачі, називають допустимим (базисним);

3) записати критерій оптимальності у формі цільової функції z = z (X), яка дозволяє вибрати найкращий варіант з безлічі можливих;

4) скласти математичну формулювання завдання відшукання екстремуму цільової функції за умови виконання обмежень, що накладаються на змінні. Допустимий план, який доставляє цільової функції екстремальне значення, називається оптимальним і позначається Xopt або Х\*

**4.2 Приклади задач, що описуються лінійними моделями.**

Приклад 1. Пошивний цех виготовляє три види взуття з надходять з розкрійного цеху заготовок. Витрата заготовок на пару взуття кожного виду, запаси заготівок, а також прибуток, одержуваний фабрикою при реалізації пари взуття кожного виду, задані в табл. 1.1. Скільки пар взуття кожного виду слід випускати фабриці для отримання максимального прибутку за умови, що заготовки II виду необхідно витратити повністю?

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Вид заготівок/ взуття виду | А | В | С | Запаси заготівок, од |
| I | 1 | 2 | - | 12 |
| II | 1 | - | 1 | 4 |
| III | 2 | 2 | - | 14 |
| Прибуток грош.од | 3 | 2 | 1 |  |

Рішення. Щоб сформулювати це завдання математично, позначимо через x1, x2, x3 кількість пар взуття відповідно видів А, В і С, яке необхідно випускати фабриці для отримання максимального прибутку. Згідно з умовами завдання прибуток від випуску взуття виду А складає 3x1 грош. од., від виду В- 2x2 ден. од., від С - x3 ден. од. Отже, цільова функція прибутку z виразиться формулою z = 3x1+2x2+ x3 → max.

Оскільки змінні x1, x2, x3 визначають кількість пар взуття, вони не можуть бути від’ємними тобто x1≥ 0, x2≥ 0, x3≥ 0.

Згідно з умовами завдання на виготовлення всієї взуття буде використано x1+2x2 заготовок 1-го виду. А так як запаси заготовок 1-го виду складають 12 штук, то повинно виконуватися x1+2x2 ≤12.

На виготовлення всьому взутті буде використано x1+ x3 заготовок 2-го виду. Але так як за умовою завдання запаси заготовок 2-го виду необхідно витратити повністю, то повинно виконуватися рівність

Аналогічно для заготовок 3-го виду має виконуватися

Отже, система обмежень буде мати вигляд

Отже, завдання полягає в тому, щоб знайти невід'ємні значення x1, x2, x3, що задовольняють системі обмежень і максимізує цільову функцію z.

**4.3 Симплекс-алгоритм розв’язання ЗЛП. Розв’язання задачі лінійного програмування за допомогою симплекс-таблиць**

Розглянемо симплексний метод розв’язування задач лінійного програмування у застосуванні до канонічної задачі мінімізації:

,,

Кількість рівнянь у системі обмежень дорівнює рангу системи, і тому число  є кількість незалежних змінних. Виберемо змінні  незалежними, а решту (базисні) -  та цільову функцію виразимо через них. Переозначимо базисні змінні: , ,…, . Отриману систему обмежень та цільову функцію запишемо у вигляді:





……………………………………………





і складемо симплекс-таблицю:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базисні змінні | Вільні члени | Незалежні змінні | | | | |
|  | … |  | … |  |
|  |  |  | … |  | … |  |
| … | … | … | … | … | … | … |
|  |  |  | … |  | … |  |
| … | … | … | … | … | … | … |
|  |  |  | … |  | … |  |
|  |  |  | … |  | … |  |

Припустимо, що всі вільні члени невід’ємні. Тоді, якщо надати незалежним змінним нульові значення, отримуємо базисний (опорний) розв’язок: ,…, , ,  і . Якщо серед коефіцієнтів цільової функції  додатні, то розв’язок не буде оптимальним і його можна поліпшити, тобто зменшити значення *L*.

Зменшення значення функції *L* пов’язане зі збільшенням значення незалежної змінної, для якої коефіцієнт в останньому рядку симплекс-таблиці більше за нуль. Виберемо її. Нехай це буде *xj*. Змінну *xj* необхідно ввести до складу базисних (додатних) змінних і одночасно якусь із базисних змінних *x1´, x2´, …, xm´* вивести до складу незалежних, тобто поміняти їх ролями. Визначення такої базисної змінної проводиться наступним чином: порівнюють між собою відношення вільних членів до додатних коефіцієнтів *j*–го стовпця таблиці і вибирають мінімальне, хай – *βi/aij*. Це означає, що необхідно поміняти місцями змінні *xj* і *xi´*. Якщо додатних коефіцієнтів у *j*–му стовпці немає, то цільова функція необмежена на множині припустимих розв’язків. Процедура заміни базисних змінних визначається коефіцієнтом *aij*, який називають розв’язувальнимелементом, а рядок і стовпець, на перетині яких він знаходиться, - розв’язуючими**.**

Табличний алгоритм заміни змінних полягає у наступному:

1. Виділити в таблиці розв’язуючий елемент *aij*, обчислити *λ=1/aij* і записати значення *λ* у нижню частину тієї ж клітинки.
2. Елементи розв’язувального рядка помножити на *λ*, розв’язувального стовпця – на *–λ* і знайдені значення записати до нижніх частин відповідних клітинок.
3. Підкреслити у розв’язувальному рядку верхні числа, а у розв’язувальному стовпці – нижні.
4. У нижні частини решти клітинок ( що не належать до розв’язувальних рядка та стовпця) записати добуток підкреслених чисел, які розташовані у тому ж рядку і тому ж стовпці.
5. Перейти до нової симплекс-таблиці, в якій
   * поміняти місцями *xj* і *xi´*;
   * в клітинки розв’язувальних рядка та стовпця записати числа з нижніх частин відповідних клітинок попередньої таблиці;
   * решту клітинок заповнити сумою чисел, розташованих у нижній та верхній частинах відповідних клітинок попередньої таблиці.

Приклад. Знайти максимум лінійної форми *L=2x1-x4* при обмеженнях



Задача знаходження максимуму функції  еквівалентна задачі знаходження мінімуму функції .

Введемо допоміжні змінні ( і ) і запишемо обмеження у вигляді системи рівнянь:



Кількість змінних задачі - , кількість обмежень - , тоді кількість незалежних змінних - . Виберемо незалежними змінні , ,  і виразимо через них базисні змінні (, , ) та цільову функцію. Маємо: 

Стандартний запис задачі:



Складаємо симплекс-таблицю3.3.1:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Базисні змінні | Вільні члени | Незалежні змінні | | |
|  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

Таблиці 3.3.1 відповідає опорний розв’язок:

; ; ; ; ;  та . Так як серед коефіцієнтів цільової функції є додатний, то розв’язок неоптимальний.

Виберемо розв’язувальний елемент. Розв’язувальним стовпцем буде стовпець коефіцієнтів при змінних , а розв’язувальним рядком – рядок коефіцієнтів при , розв’язувальний елемент - .

Згідно з наведеним вище алгоритмом роботи з симплекс-таблицею, виділимо розв’язувальний елемент, обчислимо , помножимо на  всі елементи розв’язувального рядка, та на  - всі елементи розв’язувального стовпця. Знайдені значення запишемо у нижні частини відповідних клітинок таблиці. Підкреслимо в розв’язувальному рядку верхні числа, а у розв’язувальному стовпці нижні. У нижній частині решти клітинок таблиці записуємо добуток підкреслених чисел, які розташовані у тому ж рядку і тому ж стовпці (див. табл.. 3.3.2). Маємо:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Базисні змінні | Вільні члени | Незалежні змінні | | |
|  |  |  |
|  | 5 | 0 | 1 | -1 |
|  | 5/2 | 0 | 1/2 | -1/2 |
|  | 0 | 0 | 0 | 0 |
|  | -15/2 | 0 | -3/2 | 3/2 |

Таблиці 3.3.3 відповідає розв’язок:       та  . Так як серед коефіцієнтів цільової функції нема додатних, то знайдений розв’язок є оптимальним.

Перейдемо до нової симплекс-таблиці, керуючись правилами алгоритму, наведеного вище.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Базисні змінні | Вільні члени | Незалежні змінні | | |
|  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

Таким чином, при тих же значеннях змінних досягається  .

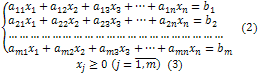
Розглянутий алгоритм не є єдино можливим, у літературі наведена велика кількість його модифікацій.

**4.4 Штучний базис. Метод штучного базису побудови опорного плану ЗЛП.**

Отже, нехай потрібно знайти максимальне значення цільової функції:

http://www.mathros.net.ua/wp-content/uploads/2012/09/metod_shtychnoho_bazusy3.gif

при обмеженнях :

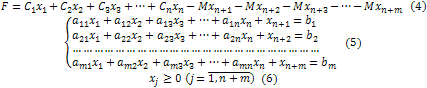


І серед векторів:

http://www.mathros.net.ua/wp-content/uploads/2012/09/metod_shtychnoho_bazusy18.gif

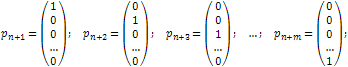
немає http://www.mathros.net.ua/wp-content/uploads/2012/09/metod_shtychnoho_bazusy2.gif одиничних.

Тоді, задачу (1) — (3) переводимо до еквівалентної задачі наступним чином:



де http://www.mathros.net.ua/wp-content/uploads/2012/09/metod_shtychnoho_bazusy8.gif — достатньо велике число, значення якого, практично, не задається, а змінні http://www.mathros.net.ua/wp-content/uploads/2012/09/metod_shtychnoho_bazusy9.gifназиваються штучними. Тоді задачу (4) — (6) називають **розширеною задачею** по відношенню до задачі (1) — (3).

Вектори, що відповідають коефіцієнтам при **штучних змінних**, а саме:



називаються **штучними векторами**.

Тепер **розширена задача** матиме опорний план:

http://www.mathros.net.ua/wp-content/uploads/2012/09/metod_shtychnoho_bazusy11.gif

Маючи початковий опорний план, за допомогою симплекс методу ми отримуємо розв'язок розширеної задачі (4) — (6).

Теорема: якщо в оптимальному розв'язку http://www.mathros.net.ua/wp-content/uploads/2012/09/metod_shtychnoho_bazusy12.gif розширеної задачі (4) — (6), штучні змінні http://www.mathros.net.ua/wp-content/uploads/2012/09/metod_shtychnoho_bazusy13.gif, то пан http://www.mathros.net.ua/wp-content/uploads/2012/09/metod_shtychnoho_bazusy14.gif буде служити оптимальним розв'язком задачі лінійного програмування (1-3).

Характерною ознакою симплекс таблиць застосованих до методу штучного базису є наявність http://www.mathros.net.ua/wp-content/uploads/2012/09/metod_shtychnoho_bazusy15.gif-го та http://www.mathros.net.ua/wp-content/uploads/2012/09/metod_shtychnoho_bazusy16.gif-го рядків. Де http://www.mathros.net.ua/wp-content/uploads/2012/09/metod_shtychnoho_bazusy15.gif-й рядок містить доданок без коефіцієнта http://www.mathros.net.ua/wp-content/uploads/2012/09/metod_shtychnoho_bazusy8.gif, а http://www.mathros.net.ua/wp-content/uploads/2012/09/metod_shtychnoho_bazusy16.gif-й — містить коефіцієнти при http://www.mathros.net.ua/wp-content/uploads/2012/09/metod_shtychnoho_bazusy8.gif.

Початок розвя'зку в симплекс таблиці здійснюється по http://www.mathros.net.ua/wp-content/uploads/2012/09/metod_shtychnoho_bazusy16.gif-му рядку (аналогічно, як і у симплекс методі по http://www.mathros.net.ua/wp-content/uploads/2012/09/metod_shtychnoho_bazusy15.gif-му). І ітераційний процес продовжується до тих пір, поки:

1. Усі штучні вектори не будуть виключені із базису.
2. Елементи http://www.mathros.net.ua/wp-content/uploads/2012/09/metod_shtychnoho_bazusy16.gif-го рядка не міститимуть від'ємних значень, і не всі штучні вектори виключені з базису.

В першому випадку знайдено деякий опорний план розширеної задачі, а знаходження оптимального плану ведеться за симплекс методом по http://www.mathros.net.ua/wp-content/uploads/2012/09/metod_shtychnoho_bazusy15.gif-му рядку. В другому випадку, якщо в стовпці http://www.mathros.net.ua/wp-content/uploads/2012/09/metod_shtychnoho_bazusy17.gif знаходиться від'ємне значення, то задача лінійного програмування немає розв'язку.

Якщо в стовпці http://www.mathros.net.ua/wp-content/uploads/2012/09/metod_shtychnoho_bazusy17.gif стоїть значення 0, то дана задача є виродженою і її розв'язок містить принаймі один чи декілька штучних векторів.

**Питання для перевірки засвоєння знань:**

1. У чому сутність загальної постановки задачі лінійного програмування?

2. У чому полягає ідея симплексного методу розв’язування задач ЛП?

3. Як знайти початковий опорний розв’язок задачі?

4. Як визначити розв’язувальний елемент у симплекс-таблиці?

5. Коли цільова функція необмежена на МПР?

6. Як методом штучного базису побудувати опорний план ЗЛП?