**Практичне заняття №3**

### Тема: «Моделі сіткового планування й керування»

### Мета: формування умінь та навичок практичного застосування знань через виконання студентами завдань та вправ.

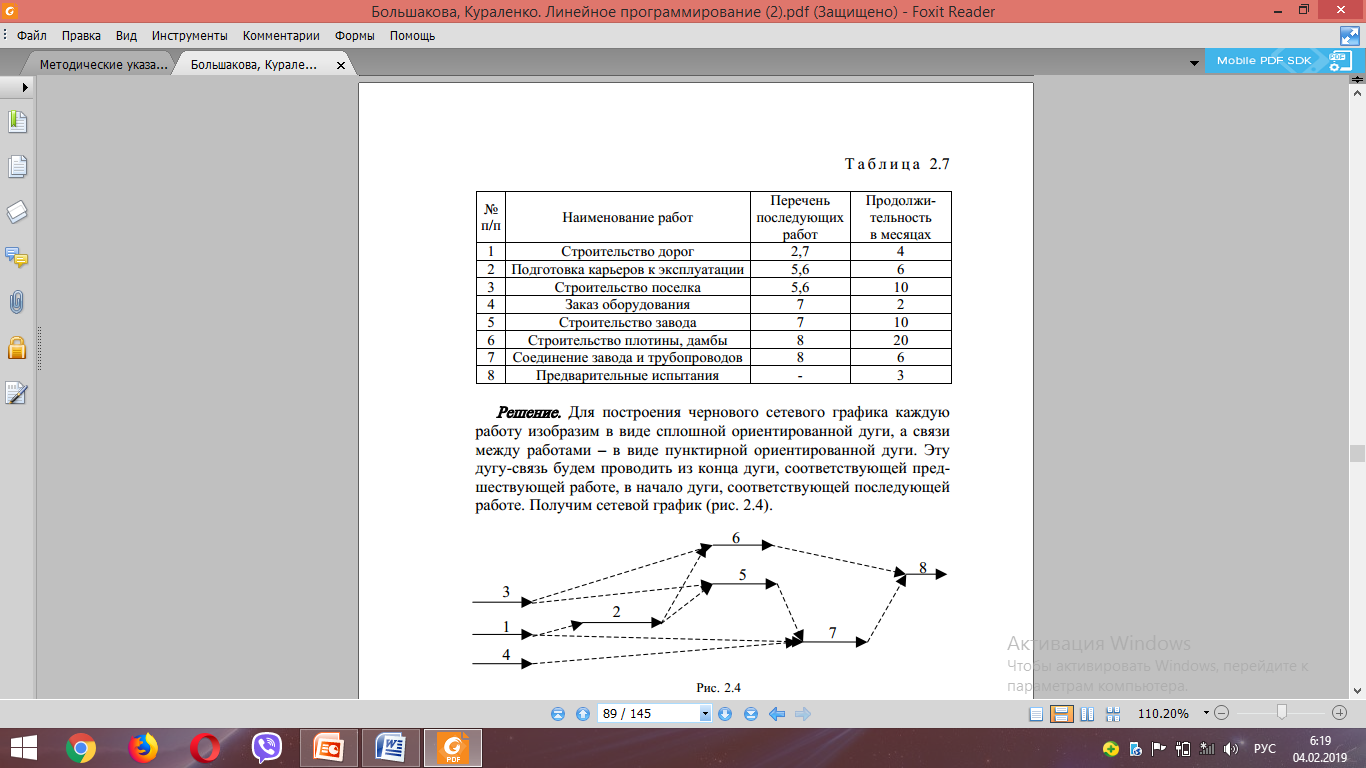
**Зміст заняття**

1. **Актуалізація знань.**

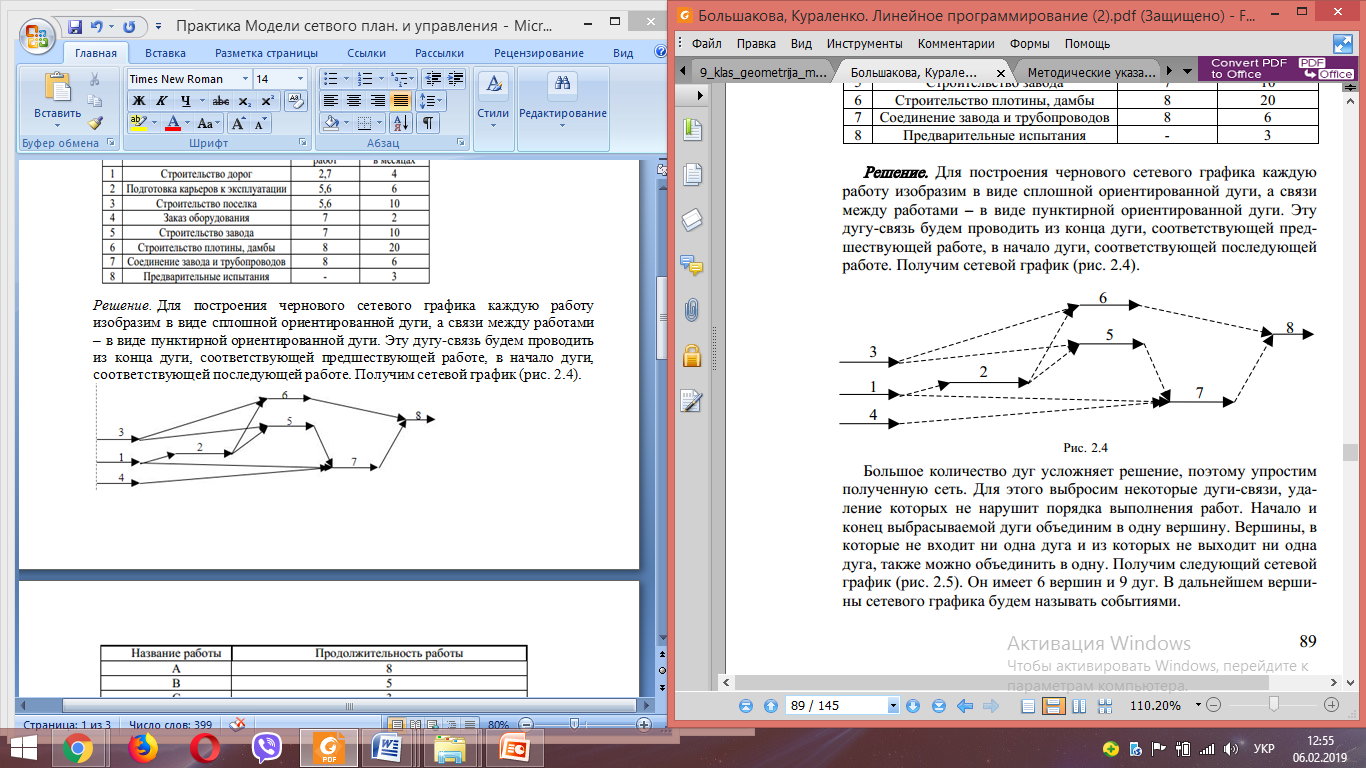
Перевірка засвоєних знань з теми за допомогою тестування.

**2. Відпрацювання практичний навичок**

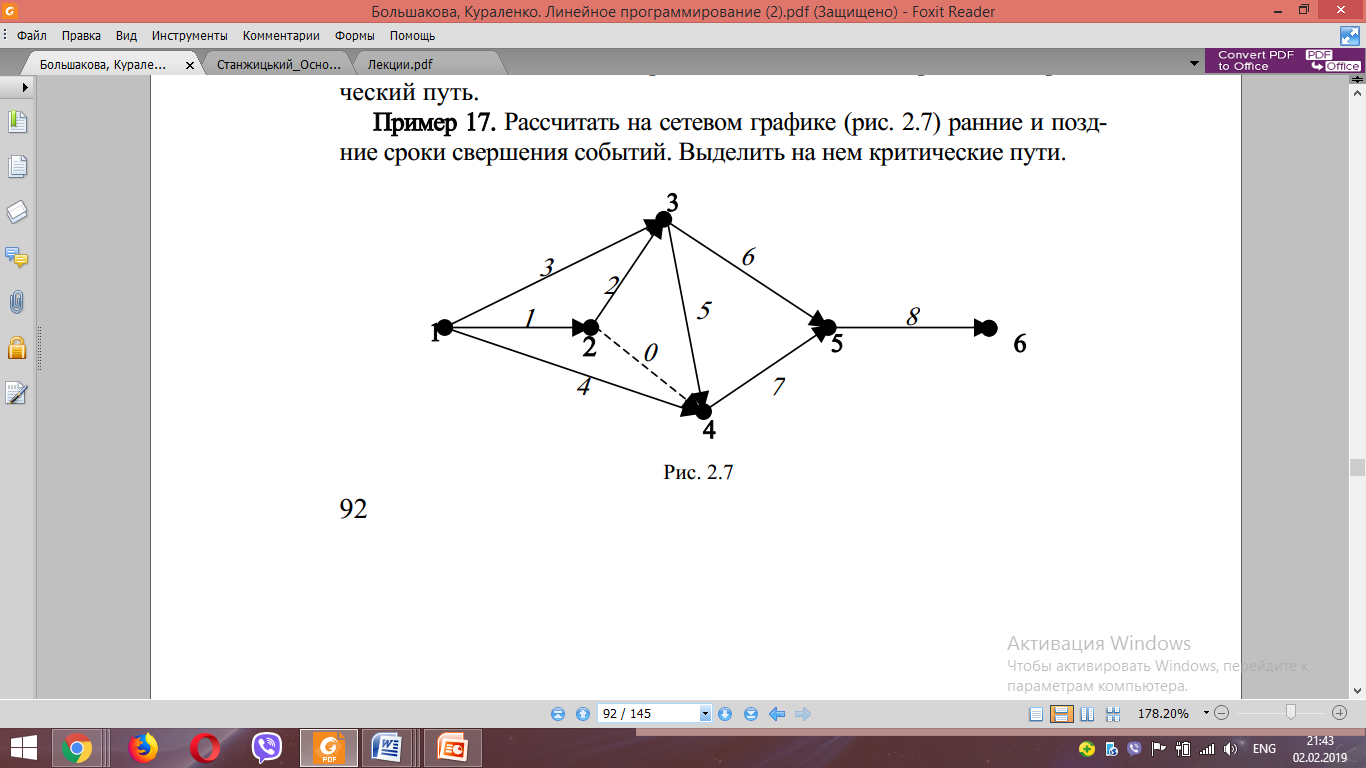
Задача №1 Інформація про будівництво комплексу задана переліком робіт, їх тривалістю, послідовністю виконання та оформлена у вигляді таблиці. Побудувати сітковий графік комплексу робіт і знайти правильну нумерацію його вершин.



*Розв’язання.* Для побудови початкового мережевого графіка кожну роботу зобразимо у вигляді суцільної орієнтованої дуги, а зв'язки між роботами - у вигляді пунктирною орієнтованої дуги. Цю дугу-зв'язок будемо проводити з кінця дуги, відповідної попередньої роботи, в початок дуги, відповідної подальшій роботі.

****

Викинемо деякі дуги-зв'язку, видалення яких не порушить порядку виконання робіт. Початок і кінець викидається дуги об'єднаємо в одну вершину. Вершини, в які не входить ні одна дуга і з яких не виходить жодна дуга, також можна об'єднати в одну. Отримали 6 вершин і 9 дуг.



Номер 1 отримує вершина, в яку не входить жодна дуга. Видаляємо (подумки) дуги, що виходять з вершини з номером 1. Вибираємо вершину в яку не входить жодна дуга. Вона буде номер 2. Далі знову (подумки) видаляємо дуги, але вже виходять з вершини з номером 2. Вибираємо вершину в яку не входить жодна дуга вона і отримує наступний за своєю чергою номер 3 і т.д.

Задачи №2 Користуючись умовою попередньої задачі знайти за який мінімальний час може бути завершений весь комплекс робіт?

*Розв’язання:* Ранній термін настання кінцевого події називається критичним часом і позначається Ткр. Далі для кожної вершини j в порядку зростання номерів розглядаємо всі вхідні дуги (i,j) і знайдемо за формулами:

=

 = =

 = =30+3=33

У нашому прикладі Ткр = Tp 6 =33 місяці. Це мінімальний час виконання всього комплексу робіт.

Задача №3 Використовуючи умову 1 задачі з'ясувати, як вплине на термін виконання проекту збільшення тривалості будівництва заводу на 4 місяці, а будівництва греблі, дамби на 1 місяць. На який час можна збільшити тривалість будівництва заводу і замовлення обладнання, не змінюючи ранні терміни виконання наступних робіт?

*Розв’язання:* Критичні роботи, як і критичні події, резервів часу не мають. В 1 задачі два критичних шляхи 6 - 5 - 3 - 1 і 6 - 5 - 3 - 2 – 1. Відмітимо, що 4 подія не критична отже ми можемо обчислити резерв його часу

*R*(4) = = 24 – 20 = 4(мiс.).

Отже, 4 подія може початися на 4 місяці пізніше. При цьому термін завершення всього комплексу робіт не зміниться. Обчислимо повні резерви часу некритичних робіт:

Обчислимо вільні резерви часу некритичних робіт:

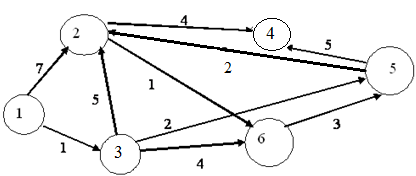
Проведемо аналіз мережевого графіка. З'ясуємо, як вплине на термін виконання проекту збільшення тривалості будівництва греблі, дамби (роботи № 6 або (3, 5)) на 1 місяць. Так як повний резерв часу цієї роботи дорівнює нулю (*R*35 = 0), то при збільшенні тривалості будівництва греблі, дамби (роботи № 6 або (3, 5)) на 1 місяць час виконання всього проекту також збільшиться на 1 місяць.

З'ясуємо, як вплине на термін виконання проекту збільшення тривалості будівництва заводу (роботи № 5 або (3, 4)) на 4 місяці. Так як *R*34 = 4, то на цій роботі можна використовувати її повний резерв. Іншими словами, можна затримати початок роботи (3, 4) або збільшити тривалість її виконання на 4 місяці, не змінюючи терміну завершення всього комплексу робіт. При цьому шлях, що проходить через цю роботу, стане критичним. Повний резерв часу будь-якої роботи на цьому шляху стане рівним нулю.

Визначимо, на який час можна збільшити тривалість будівництва заводу роботи № 5 не змінюючи ранні терміни виконання наступних робіт. Так як r34 = 0, то при затримці початку або збільшенні тривалості даної роботи ранні терміни початку всіх наступних робіт зміняться на ту ж величину.

Оскільки r14 = 18, то відкласти замовлення обладнання (роботи № 4) можна на 18 місяців. Це час, який можна додатково виділити для виконання роботи (1,4) без введення додаткових обмежень на час виконання наступних робіт.

Задача №4 (Задача про найкоротший шлях). Як найкоротшим шляхом потрапити з вершини 1 у вершину 4? Для вирішення цього завдання кожної дузі орієнтованого графа має бути зіставлено число - час руху по цій дузі від початкової вершини до кінцевої.



Розв’язання: Введемо позначення: С (Т) - довжина найкоротшого шляху з вершини 1 у вершину Т. Вже згадана завдання полягає в обчисленні С (4) і вказівці шляху, на якому цей мінімум досягається.

Для вихідних даних вершину 3 входить тільки одна стрілка, як раз з вершини 1 і біля цієї стрілки варто її довжина, рівна 1, тому С (3) = 1. Крім того, очевидно, що С (1) = 0 .

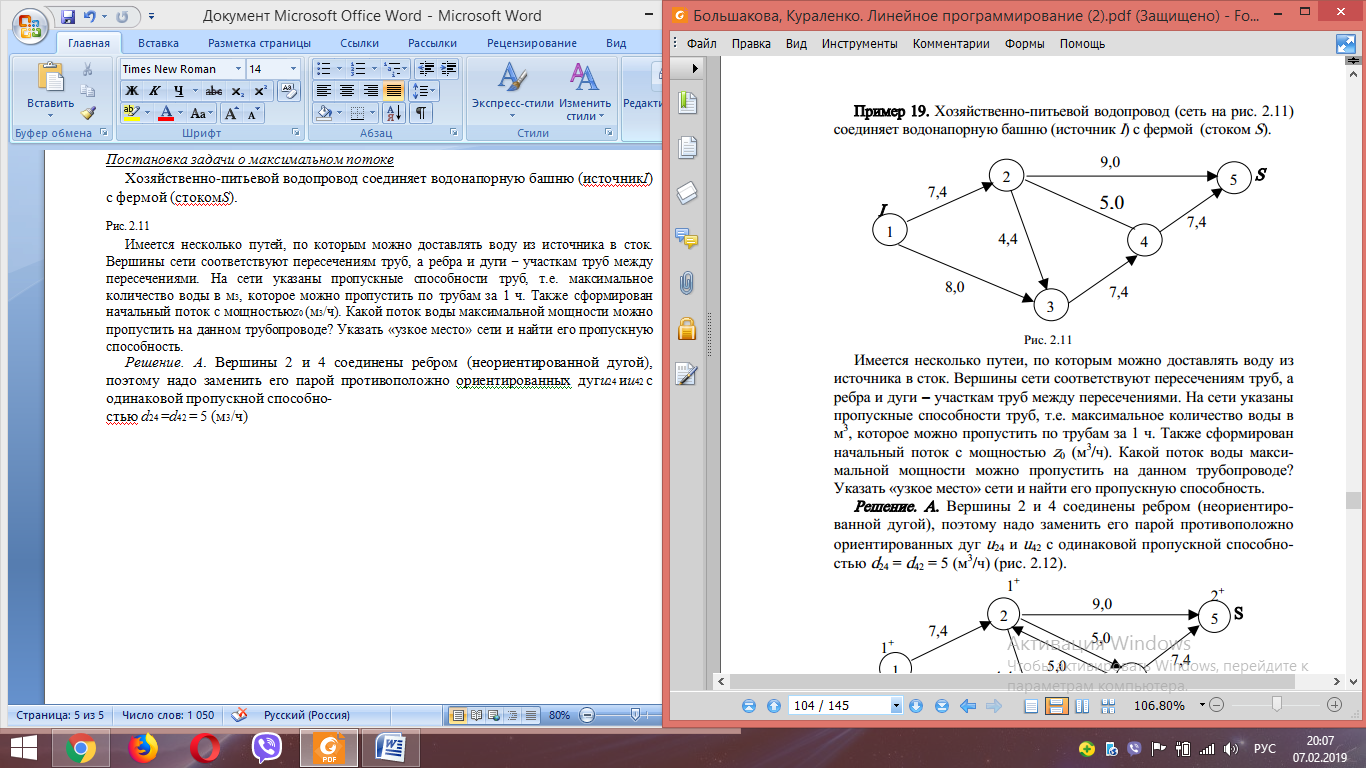
У вершину 4 можна потрапити або з вершини 2, пройшовши шлях, рівний 4, або з вершини 5, пройшовши шлях, рівний 5.

Тому С(4) = min {С(2) + 4 ; С(5) + 5}. У вершину 5 можна потрапити або з вершини 3, пройшовши шлях, рівний 2, або з вершини 6, пройшовши шлях, рівний 3. Тому С(5) = min {С(3) + 2 ; С(6) + 3}. Ми знаємо, що С (3) = 1. Тому С (5) = min {3; З (6) + 3}. Оскільки очевидно, що С (6) - додатне число, то з останнього співвідношення випливає, що С (5) = 3. У вершину 2 можна потрапити або з вершини 1, пройшовши шлях, рівний 7, або з вершини 3, пройшовши шлях, рівний 5, або з вершини 5, пройшовши шлях, рівний 2.

Тому справедливо С(2) = min {С(1) + 7 ; С(3) + 5 ; С(5) + 2}.Нам відомо, що С (1) = 0, С (3) = 1, С (5) = 3. Тому С(2) = min {0 + 7 ; 1 + 5 ; 3 + 2} = 5. Тепер знайдемо С(4) = min {С(2) + 4 ; С(5) + 5} = min {5 + 4 ; 3 + 5} = 8.

Таким чином, довжина найкоротшого шляху дорівнює 8. З останнього співвідношення ясно, що в вершину 4 треба йти через вершину 5. Повертаючись до обчислення С (5), бачимо, що в вершину 5 треба йти через вершину 3. А в вершину 3 можна потрапити тільки з вершини 1. Отже, найкоротший шлях такий: 1 → 3 → 5 → 4.

Задача №5 Господарсько-питний водопровід з'єднує водонапірну вежу (істочнік I) з фермою (стоком S).



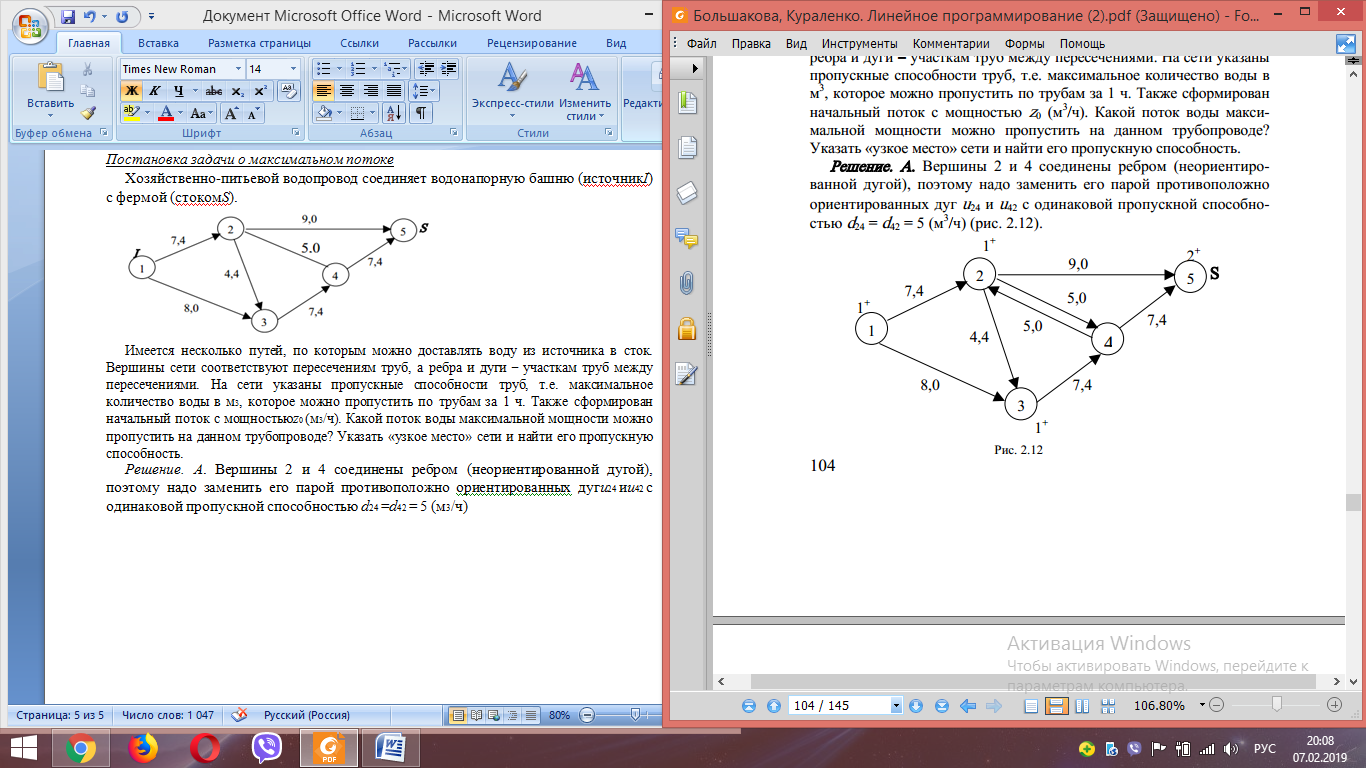
Є кілька шляхів, за якими можна доставляти воду з джерела в стік. Вершини мережі відповідають перетину труб, а ребра і дуги - ділянкам труб між перетинами. На мережі вказані пропускні спроможності труб, тобто максимальну кількість води в м3, яке можна пропустити по трубах за 1 год. Також сформовано початковий потік з мощностью z0=4 (м3 / год). Який потік води максимальної потужності можна пропустити на даному трубопроводі? Вказати «вузьке місце» мережі і знайти його пропускну здатність.

*Розв’язання:* Застосуємо алгоритм Форда-Фалкерсона для побудови максимального потоку і знаходження мінімального розрізу.

1. Знайдемо збільшує шлях методом розміщення міток. Джерело I = 1 отримує мітку 1+.

1.2. Переглядаємо всі непомічені вершини, сусідні з 1. Це вершини 2 і 3. Надаємо вершині 2 мітку 1+, так як u12-пряма дуга і x12 < d12 (4 <7). Вершині 3 також присвоюємо мітку 1+, оскільки u13 - пряма дуга і x13 < d13.

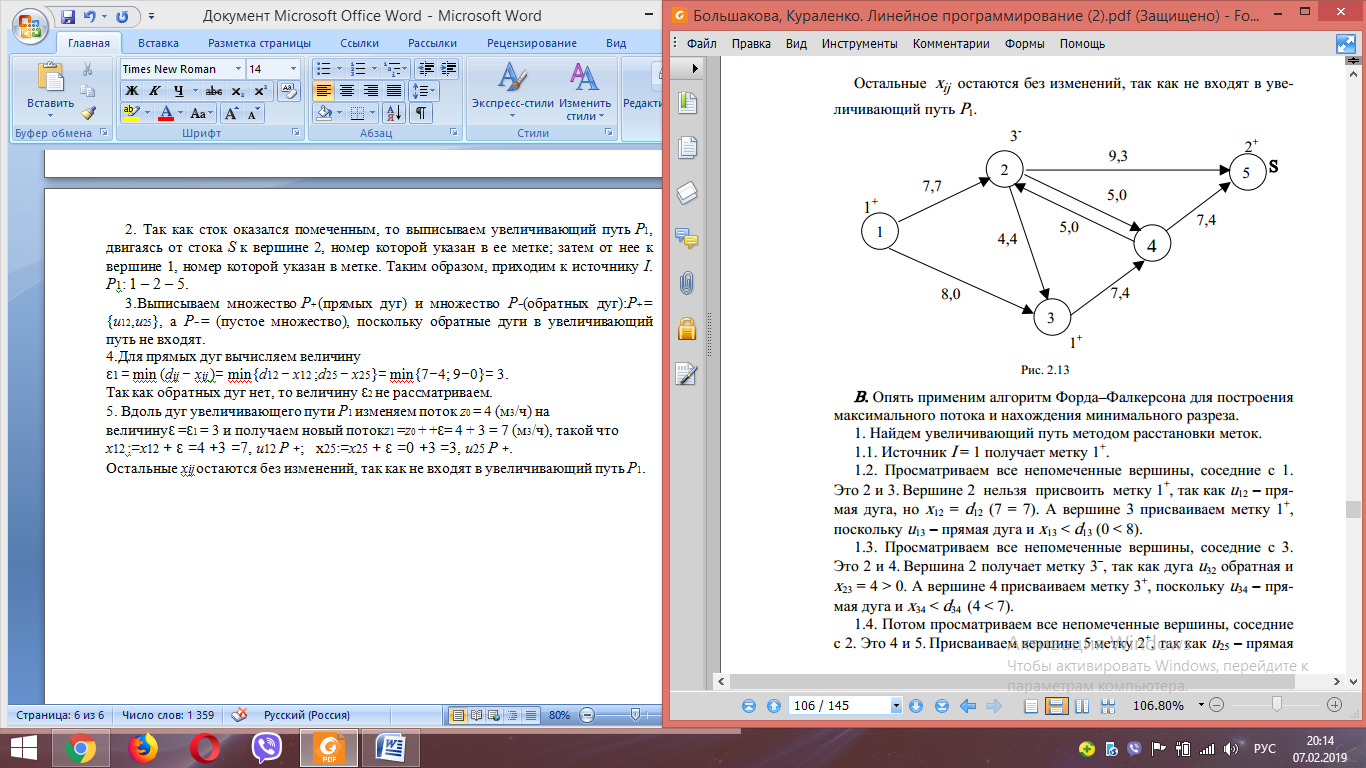
1.3. Тепер переглядаємо всі непомічені вершини, сусідні з 2. Це вершини 4 і 5. Надаємо вершині 5 мітку 2+, так как u25 - пряма дуга і x25 < d25 (0 <9). Оскільки вершина 5 - це стік S, то на даному етапі вершину 4 можна не розглядати.

****

2. Так як стік виявився поміченим, то виписуємо збільшує шлях P1, рухаючись від стоку S до вершини 2, номер якої зазначений в її мітці; потім від неї до вершини 1, номер якої зазначений в мітці. Таким чином, приходимо до джерела I. Р1: 1 - 2 - 5.

3.Випісиваем безліч P + (прямих дуг) і безліч P- (зворотних дуг):

P + = {u12, u25}, а P- = Ø оскільки зворотні дуги в збільшує шлях не входять. Для прямих дуг обчислюємо величину ε1 = min (dij - xij) = min {d12 - x12; d25 - x25} = min {7-4; 9-0} = 3. Так як зворотних дуг немає, то величину ε2 не розглядаємо. Уздовж дуг збільшує шляху P1 змінюємо потік z0 = 4 (м3 / год) на величину ε1 = 3 і отримуємо новий потік z1 = z0 + ε = 4 + 3 = 7 (м3 / год), такий що x12: = x12 + ε = 4 + 3 = 7, х25: = x25 + ε = 0 +3 = 3.Решта xij залишаються без змін, тому що не входять в збільшує шлях P1.



В. Знову застосуємо алгоритм. I = 1 отримує мітку 1+ . Дивимося на всі непомічені вершини, сусідні з 1. Це 2 і 3. Вершини 2 не можна прикріпити мітку 1+, так як u12-пряма дуга, але x12 = d12 (7 = 7). А вершині 3 присвоюємо мітку 1+, оскільки u13 - пряма дуга і x13 < d13 (0 <8). Переглядаємо всі непомічені вершини, сусідні з 3. Це 2 і 4. Вершина 2 отримує мітку 3-, так як дуга u32 зворотня і x23 = 4> 0. А вершині 4 присвоюємо мітку 3+, оскільки u34-пряма дуга і x34 < d34 (4 < 7).Потом переглядаємо всі непомічені вершини, сусідні з 2. Це 4 і 5. Надаємо вершині 5 мітку 2+, так як u25 - пряма дуга і x25 < d25 (3 <9). Оскільки вершина 5 - це стік S, то на даному етапі вершину 4 можна не розглядати.

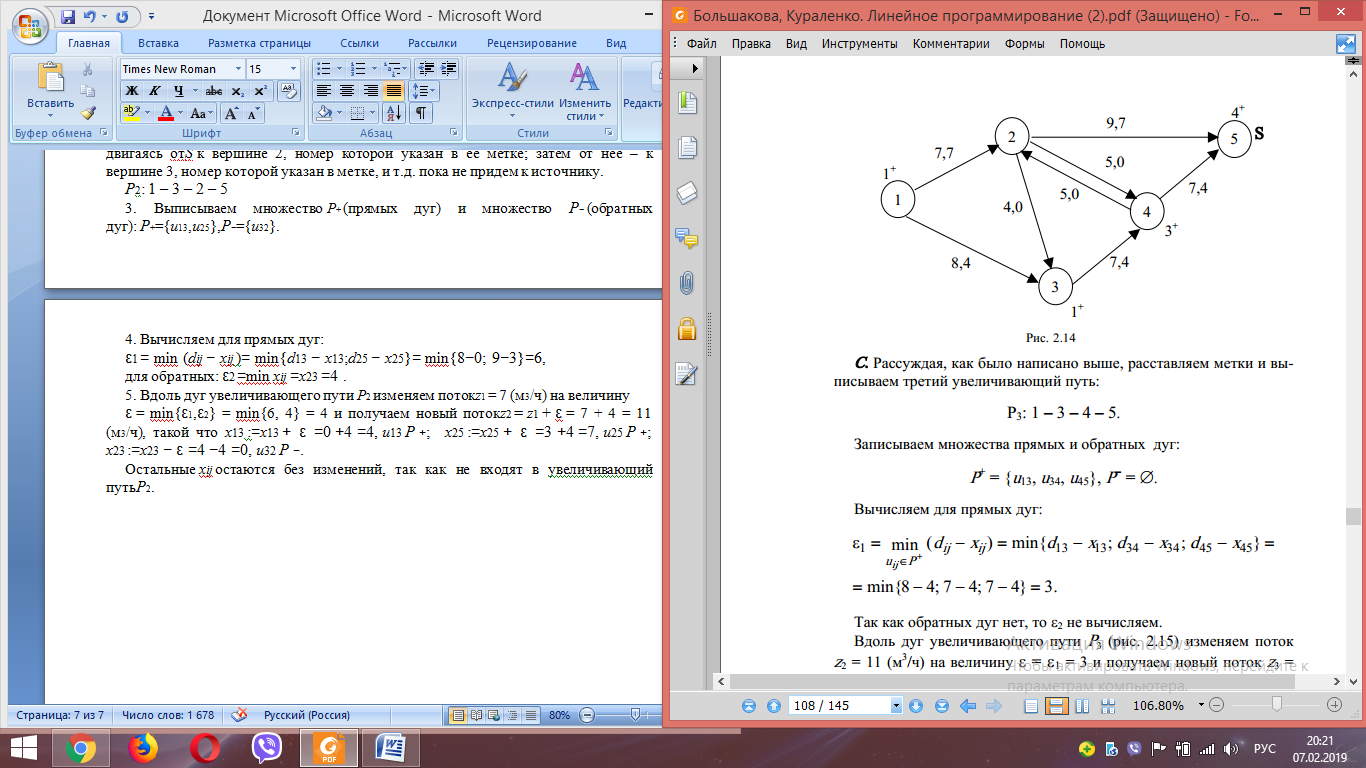
Виписуємо збільшує шлях Р2: 1 - 3 - 2 – 5. P + = {u13, u25}, P- = {u32}.

ε1 = min (dij - xij) = min {d13 - x13; d25 - x25} = min {8-0; 9-3} = 6, для зворотних: ε2 = min xij = x23 = 4. Уздовж дуг збільшує шляху P2 змінюємо потік z1 = 7 (м3 / год) на величину ε = min {ε1, ε2} = min {6, 4} = 4 і отримуємо новий потік z2 = z1 + ε = 7 + 4 = 11 (м3 / год), такий що

x13: = x13 + ε = 0 +4 = 4, u13 P +; x25: = x25 + ε = 3 +4 = 7, u25 P +;

х23: = x23 - ε = 4 -4 = 0, u32 P -.

Решта xij залишаються без змін, тому що не входять в збільшує путьP2.

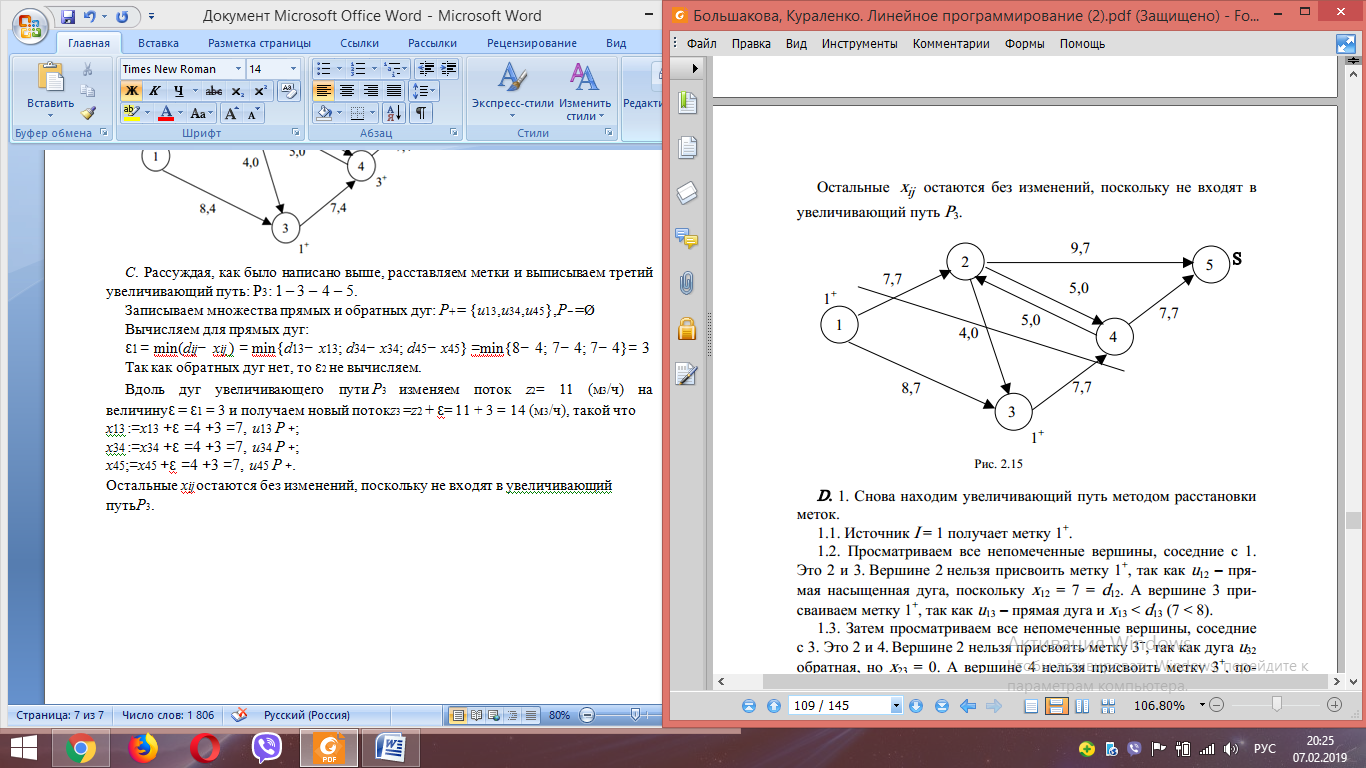


Розмірковуючи, як було написано вище, розставляємо мітки і виписуємо третій збільшує шлях: Р3: 1 - 3 - 4 - 5.

Записуємо прямі і зворотні дуги: P + = {u13, u34, u45}, P- = Ø. Обчислюємо ε1 = min (dij- xij) = min {d13- x13; d34- x34; d45- x45} = min {8- 4; 7- 4; 7- 4} = 3

Уздовж дуг збільшує шляху P3 змінюємо потік z2 = 11 (м3 / год) на велічіну ε = ε1 = 3 і отримуємо новий потік z3 = z2 + ε = 11 + 3 = 14 (м3 / год), такий що x13: = x13 + ε = 4 + 3 = 7, u13 P +; x34: = x34 + ε = 4 + 3 = 7, u34 P +;

x45; = x45 + ε = 4 + 3 = 7, u45 P +. Решта xij залишаються без змін, оскільки не входять в збільшує путьP3.

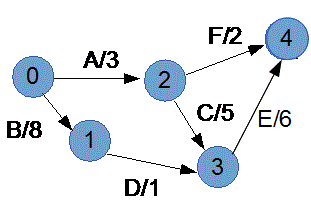


Знову знаходимо збільшує шлях методом розміщення міток. Істочнік I = 1 отримує мітку 1+.Все непомічені вершини, сусідні з 1.Це 2 і 3. Вершини 2 не можна прикріпити мітку 1+, так як u12-пряма насичена дуга, оскільки x12 = 7 = d12. А вершині 3 присвоюємо мітку 1+, так як u13 - пряма дуга і x13 <d13 (7 <8). Переглядаємо всі непомічені вершини, сусідні з 3. Це 2 і 4. Вершини 2 не можна прикріпити мітку 3-, так як дуга u32 зворотна, але x23 = 0. І вершині 4 не можна прикріпити мітку 3+, оскільки u34 - пряма дуга, але x34 = d34 (7 = 7). Так як ми не можемо помітити стік S, то збільшує шляху немає і потік в мережі є максимальним: z max = z3 = 14 (м3 / год).

Нехай R - безліч помічених вершин в мережі тобто R = {1, 3}, R'- безліч непомічених вершин, тобто R' = {2, 4, 5}. Тоді побудований розріз (R, R ') = {u12, u34} є мінімальним (дуга u23 в розріз не входить, так як її початок-непомічені вершина, а кінець - позначена). І алгоритм закінчує свою роботу.

Мінімальний розріз (R, R ') є «вузьким місцем» мережі. Знайдемо його пропускну здатність: C (R, R) = Σdij = d12 + d34 = 7 + 7 = 14 (м / ч) що збігається з величиною максимального потоку води у водопроводі.

**3. Завдання для самостійної роботи**

1. Компанія планує відкриття нової торгової точки. Передбачуваний склад робіт по проекту включає 6 заходів. Тривалість роботи в місцях представлена в таблиці. Побудувати сітковий графік комплексу робіт і знайти правильну нумерацію його вершин.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Работи | Попередні | Тривалість |
| А | - | 3 |
| В | - | 8 |
| С | А | 5 |
| D | B | 1 |
| E | C,D | 6 |
| F | A | 2 |

Розв’язок наведено на малюнку справа.

2.Використовуючи умову задачі 1знайти за який мінімальний час може бути завершений весь комплекс робіт?

*Розв’язок* Ранній термін настання кінцевого події називається критичним часом і позначається Ткр. .

=

 = =

*Т*кр =  = 15 місяців.

3. Використовуючи умову 1 задачі з'ясувати, як вплине на термін виконання проекту збільшення тривалості роботи №4 на 1 місяц. На який час можна збільшити тривалість роботи №1, не змінюючи ранні терміни виконання наступних робіт?

*Розв’язання:* Критичні роботи, як і критичні події, резервів часу не мають. В 1 задачі критичний шлях 1-2-4-5. Отже при збільшенні тривалості робіт на 1 місяць час виконання всього проекту також збільшиться на 1 місяць.