**Практичне заняття №4**

### Тема: «Моделі і методи лінійного програмування»

### Мета: формування умінь та навичок практичного застосування знань через виконання студентами завдань та вправ.

**Зміст заняття**

1. **Актуалізація знань.**

Математичне програмування - це область математики, що розробляє теорію і чисельні методи розв'язання задач на екстремум функції багатьох змінних з обмеженнями на область зміни цих змінних.

Для практичного вирішення економічної задачі математичними методами її перш за все слід записати за допомогою математичних виразів (рівнянь, нерівностей тощо), тобто скласти економіко-математичну модель даної задачі. Для цього необхідно:

    1) ввести змінні величини x1, x2, ..., xn, числові значення яких однозначно визначають одне з можливих станів досліджуваного явища;

   2) висловити взаємозв'язку (властиві досліджуваному параметру) у вигляді математичних обмежень (рівнянь, нерівностей), що накладаються на невідомі величини. Ці співвідношення визначають систему обмежень задачі, яка утворює область допустимих рішень (область економічних можливостей). Рішення (план) Х = (x1, x2, ..., xn), яке задовольняє системі обмежень задачі, називають допустимим (базисним);

3) записати критерій оптимальності у формі цільової функції z = z (X), яка дозволяє вибрати найкращий варіант з безлічі можливих;

4)скласти математичну формулювання завдання відшукання екстремуму цільової функції за умови виконання обмежень, що накладаються на змінні. Допустимий план, який доставляє цільової функції екстремальне значення, називається оптимальним і позначається Xopt або Х \*.

**2. Відпрацювання практичний навичок**

Задача №1Скласти математичну модель: пошивний цех виготовляє три види взуття з надходять з розкрійного цеху заготовок. Витрата заготовок на пару взуття кожного виду, запаси заготовок, а також прибуток при реалізації пари взуття кожного виду, задані в табл. Скільки пар взуття кожного виду слід випускати фабриці для отримання максимального прибутку за умови, що заготовки II виду необхідно витратити повністю?

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Вид заготівок/ взуття виду | А | В | С | Запаси заготівок, од |
| I | 1 | 2 | - | 12 |
| II | 1 | - | 1 | 4 |
| III | 2 | 2 | - | 14 |
| Прибуток, грош.од | 3 | 2 | 1 |  |

Розв’язок: щоб сформулювати це завдання математично, позначимо через x1, x2, x3 кількість пар взуття відповідно видів А, В і С, яке необхідно випускати фабриці для отримання максимального прибутку. Згідно з умовами завдання прибуток від випуску взуття виду А складе 3x1 грош. од., від виду В - 2x2 грош. од., від виду С - x3 ден. од. Отже, цільова функція прибутку z виразиться формулою z = 3x1 + 2x2 + x3 → max.

Оскільки змінні x1, x2 і x3 визначають кількість пар взуття, вони не можуть бути від’ємними, тобто x1≥ 0, x2≥ 0, x3≥ 0.

Згідно з умовами завдання на виготовлення всієї взуття буде використано x1 + 2x2 заготовок 1-го виду. А так як запаси заготовок 1-го виду становлять 12 штук, то повинна виконуватись нерівність x1 + 2x2 ≤12.

На виготовлення всьому взутті буде використано x1 + x3 заготовок 2-го виду. Але так як за умовою завдання запаси заготовок2-говіда необхідно витратити повністю, то повинно виконуватися рівність x1 + x3 = 4.

Аналогічно для заготовок 3-говіда має виконуватися нерівність 2*x*1 + 2*x*2 ≤14 . Отже, система обмежень буде мати вигляд

$$\left\{\begin{array}{c}x1+2x2 \leq 12 кількість заготівок I вида \\x1+ x3 = 4 кількість заготівок II вида \\2x1+ 2x2 \leq 14 кількість заготівок III вида \end{array}\right.$$

1. **Додаткові теоретичні знання(** геометрична інтерпретація і графічне рішення задач лінійного програмування)

1.Уравненіе z = c1x1 + c2 x2 при фіксованому значенні z = z0 визначає на площині Ox1x2 пряму z0 = c1x1 + c2x2. При зміні z отримують сімейство паралельних прямих, званих лініями рівня.

2. Вектор коефіцієнтів цільової функції c = (c1; c2) називається градієнтом функції. Він перпендикулярний лініям рівня.

3. Градієнт функції c = (c1; c2) показує напрямок найбільшого зростання цільової функції

4. Антіградіента -c = (-c1; -c2) показує напрямок найбільшого убування цільової функції.

Графічне рішення задач лінійного програмування

Суть графічного методу розв'язання задач ЛП грунтується на наступних твердженнях:

1) сукупність опорних планів задачі ЛП збігається з системою вершин багатогранника рішень;

2) цільова функція досягає оптимального значення в вершині багатогранника рішень.

Для практичного вирішення завдання необхідно:

1) побудувати з урахуванням системи обмежень область допустимих рішень D (багатогранник планів); 2) побудувати вектор градієнта c;

3) побудувати перпендикулярно до нього в області допустимих рішень одну з прямих сімейства z = const;

4) шукана точка екстремуму Xopt знайдеться паралельним переміщенням допоміжної прямої z = const в напрямку вектора c (якщо шукається zmax) і в напрямку вектора- c (якщо шукається zmin);

5) координати точки Xopt можна визначити, вирішивши спільно рівняння прямих, що перетинаються в цій точці, або за кресленням.

Задача №2 Вирішити задачу лінійного програмування графічним способом: *z*=3*x*1 +2*x*2 +*x*3 →max , *xj*≥ 0,*j*=1,3.$\left\{\begin{array}{c}x1+2x2 \leq 12\\x1+ x3 = 4\\2x1+ 2x2 \leq 14\end{array}\right.$

*Розв’язок:* це завдання з трьома змінними. Її можна вирішити графічно, якщо в канонічній або симетричною записи буде присутній не більше двох вільних змінних. Наведемо це завдання до симетричного виду. Для цього з 2-ї рівності висловимо базисну змінну x3: x3 = 4 - x1, підставимо її значення в цільову функцію:

*z*=3*x*1 +2*x*2 +*x*3 =3*x*1 +2*x*2 +4 −*x*1 =2*x*1 +2*x*2 +4 →max .

Так як *x*3 ≥ 0 , то 4 − *x*1 ≥ 0 , що дорівн.є нерівності *x*1 ≤ 4 . Отже, система обмежень прийме наступний симетричний вигляд:

$$\left\{\begin{array}{c}x1+2x2 \leq 12\\x1\leq 4\\2x1+ 2x2 \leq 14\end{array}\right.$$

Отриману двовимірну задачу вирішимо звичайним графічним способом. Так як x1 ≥ 0, x2 ≥ 0, то область допустимих рішень буде знаходитися в першій координатної чверті. На плоскостіOx1x2 (рис. 1.1) побудуємо прямі, породжувані рівняннями:

$$\left\{\begin{array}{c}x1+2x2 \leq 12 \leftrightarrow \frac{x1}{12}+\frac{x2}{6}=1 –пряма l1\\x1\leq 4 \leftrightarrow \frac{x1}{4}=1–пряма l2\\2x1+ 2x2 \leq 14 \leftrightarrow \frac{x1}{7}+\frac{x2}{7}=1–пряма l3\end{array}\right.$$

Рівняння прямої у відрізках $\frac{x1}{а}+\frac{x2}{в}=1$ означає, що пряма лінія відсікає на осі Ох1 відрізок довжини а, на осі ОХ2 відрізок довжиною в.

2. Щодо кожної прямий визначимо напівплощина, відповідну вихідним неравенствам $\left\{\begin{array}{c}x1+2x2 \leq 12\\x1\leq 4\\2x1+ 2x2 \leq 14\end{array}\right.$

Щоб визначити напівплощина, відповідну першій нерівності x1 + 2x2 ≤12, візьмемо точку, що не лежить на прямій x1 + 2x2 = 12 наприклад, (0; 0)), і підставимо її в нерівність x1 + 2x2 ≤ 12 (0 + 2 0≤ 12 0≤ 12). Якщо нерівність виконується, то точка належить даній півплощині, в іншому випадку - не належить. У нашому прикладі нерівність x1 + 2x2 ≤ 12 визначає напівплощину яка лежить нижче прямої l1: x1 + 2x2 = 12.

Побудуємо вектор градієнта c = (2,2), тобто з'єднаємо точки початку (0; 0) і кінця (2; 2) стрілкою. Перпендикулярно до нього побудуємо одну з прямих сімейства  z = 2x1 + 2x2 +4 = const.

Наприклад, при x1 = x2 = 1 отримаємо z = 8. Зауважимо, що ця пряма паралельна l3: 2x1 + 2x2 = 14. Допоміжну пряму z = 8 будемо паралельно переміщати в напрямку вектора c (так як шукається zmax) до останньої точки перетину з областю допустимих рішень D. У нашому випадку пряма zmax збігається з прямою l3: 2x1 + 2x2 = 14. Тому шуканих точок екстремуму Xopt буде безліч всі крапки відрізка [Xopt1 Xopt2]. Координати точок Xopt 1 Xopt2 можна визначити по рис. 1.1: Xopt1 = (2; 5) і Xopt2 = (4; 3). Але так як первинне завдання має три невідомі, то x3 знайдемо, підставивши значення змінної x1 В2-е обмежувальне уравненіе1) для X1 opt = (2; 5) отримаємо: x = 4 - x = 4 -2 = 2 → X1 opt = ( 2, 5, 2); 2) для Xopt2 = (4; 3) отримаємо: x3 = 4 - x1 = 4 -4 = 0 Xopt2 = = (4; 3; 0)

Для аналітичної записи будь-якого оптимального рішення Xopt необхідно скласти опуклу лінійну комбінацію опорних рішень Xopt1 і Xopt2: Xopt = λ1Xopt1 + λ2 Xopt2 де λ1 + λ2 = 1 іλ1 ≥ 0, λ2 ≥ 0. Отже Xopt = λ1 (2; 5; 4) + λ2 (4; 3; 0) = (2λ1 + 4λ2; 5λ1 + 3λ2; 2λ1), де λ1 + λ2 = 1 і λ1 ≥0 λ2 ≥0. Тоді z max = z (X1 opt) = 3 2 + 2 5 + 1 2 = 18 = z (X2 opt)



Отже, щоб отримати максимальний прибуток, рівну 18 ден. од., фабриці необхідно: 1) по Xopt1: випускати 2 пари взуття виду А, 5 пар взуття виду В і 2 пари взуття виду С. При цьому заготовкі1-гоі3-говідов будуть витрачені повністю (так какx4 \* = 0 іx5 \* = 0 ).

2) по Xopt2: випускати 4 пари взуття виду А, 3 пари взуття виду В і не випускати взуття виду С. При цьому 2 заготовкі1-говіда (з 12) будуть не використані (так какx4 \* = 2), а заготовкі3-го виду будуть витрачені повністю (оскільки x5 \* = 0).

1. **Завдання для самостійної роботи**

Задача №1: Скласти математичну молель задачі: цех випускає два види фарби: для внутрішніх (А) і зовнішніх (В) робіт. Для виробництва фарби використовують два види сировини:  і. Вихідні дані наведені в таблиці. Добовий попит на фарбу А не перевищує попиту на фарбу В більш ніж на 1 т, а попит на фарбу А ніколи не перевищує 2 т на добу. Кількість фарби кожного виду має виробляти цех, щоб мати максимальний дохід від реалізації продукції?

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Вид сировини | Добові запаси сировини | Витрати сировини на 1 т продукції |
| А | В |
|  | 6 | 1 | 2 |
|  | 8 | 2 | 1 |
| Ціна 1 т продукції | 3 | 2 |

Розв’язання: щоб скласти математичну модель, необхідно:

- ідентифікувати змінні (величини даного завдання, знаходимо)

- записати обмеження, які накладаються на змінні, щоб виконувалися умови, характерні для системи, яка моделюється;

- сформулювати мету, для досягнення якої з допустимих значень змінних необхідно вибрати ті, що відповідають оптимальному (кращому) вирішення завдання.

Змінні: - добовий обсяг (т) виробництва фарби А, - фарби В.

Цільова функція: Якщо вартість 1 т фарби А дорівнює 3 умов. ден. од., то добовий доход від реалізації буде , а прибуток від реалізації фарби В - Загальний дохід:  Обмеження:

1) витрати сировини не повинні перевищувати її запасів, 

2) обмеження на попит продукції 

3) природне обмеження полягає в тому, що обсяги виробництва продукції не можуть бути відємним: ,.Таким чином, математична модель задачі має наступний вигляд: Знайти неотрецательное рішення системи нерівностей:

 при яких функція досягає свого макс.значення.

Задача №2. Знайти максимальне та мінімальне значення функції  за даних умов:



 Розв’язання. Будуємо багатокутник розв’язків. Для цього в нерівностях системи обмежень змінимо знаки на знаки точних рівностей:



 Побудуємо отримані прямі, знайдемо відповідні нерівностям площини та їх перетин (рис. 1).



 Багатокутником розв’язків задачі є трикутник . Координати точок  задовольняють умову невід’ємності та нерівностям – обмеженням задачі. Серед точок цього трикутника треба знайти такі, у яких функція  буде мати максимальне та мінімальне значення. Для цього побудуємо вектор  і пряму  (число 4 узято довільно).

 Переміщуємо пряму  паралельно самій собі у напрямку градієнта і бачимо, що її останньою спільною точкою з багатокутником розв’язків буде т.. таким чином у цій точці функція приймає максимальне значення. Точка  є точкою перетину двох прямих (1) і (3), її координати визначаються як розв’язок системи рівнянь.



. Отже, .

 Для знаходження мінімального значення функції переміщуємо пряму  в напрямку, протилежному градієнту. Останньою спільною точкою з багатокутником розв’язків буде т., координати якої визначаються як розв’язок системи рівнянь:



Отже, т. має координати  і  .

**4. Домашнє завдання, відповіді на дані питання:**

1.Сформулюйте загальну задачу математичного програмування.

2.Сформулюйте задачу лінійного (нелінійного, цілочислового) програмування.

3.Математична модель економічної задачі, її типи та принципи побудови.

4. Які види обмеження входять до задач ЛП?

5. Як перейти від нерівностей до рівнянь та навпаки у задачах ЛП?

6. Що називають багатогранником розв’язків?

7. Які задачі ЛП можна розв’язувати графічним методом?