Лекція №31

Тема: «Застосування визначеного інтегралу. Довжина дуги кривої»

План

1. Поняття спрямлюваної кривої.
2. Властивості спрямлюваних кривих.
3. Полярна система координат.

1. Поняття спрямлюваної кривої.

Розглянемо на декартовій площині множину точок $M(x,y)$, координати яких задовольняють рівнянням

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t \in \left[t_0, T\right], \tag{1.29}$$

де функції $\varphi(t)$ і $\psi(t)$ – неперервні на відрізку $\left[t_0, T\right]$. Кажуть, що таким чином утворюється *плоска крива*. Аргумент t функцій із (1.29) називають параметром.

Означення 1.17. Множину точок $\{M\}$ на декартовій площині, координати яких задовольняють рівнянням (1.29), називають *плоскою простою кривою* L, якщо кожній точці $M(x,y)$ із цієї множини відповідає єдине значення параметра $t \in \left[t_0, T\right]$. Тобто

$$\forall M\left(x,y\right) \in \{M\} \ \exists! t \in \left[t_0, T\right]: \ \ x = \varphi(t), y = \psi(t) .$$

Те саме можна сформулювати в інший спосіб. Множину точок $\{M\}$ на декартовій площині, які задаються рівняннями (1.29), називають *плоскою простою кривою* L, якщо двом різним значенням параметра $t_1, t_2 \in [t_0, T]$ відповідають дві різні точки площини $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$, координати яких задовольняють рівнянням (1.29). Тобто

$$\forall t_1, t_2 \in (t_0, T) \quad t_1 \neq t_2 \Rightarrow \ M_1(\varphi(t_1), \psi(t_1)) \neq M_2(\varphi(t_2), \psi(t_2)) .$$

При цьому кажуть, що «рівняння (1.29) визначають плоску просту криву» або «плоска проста крива є параметризованою рівняннями (1.29)». Зауважимо, що одна й та сама крива може бути параметризованою різними способами, тобто різними рівняннями типу (1.29).

Із означення випливає, що проста плоска крива не може мати самоперетинів.

🗁 **Означення 1.18.** Криву називають *простою зімкненою*, якщо двом значенням параметра $t = t_0$ і $t = T$ відповідає одна і та сама точка площини, а всім іншим різним значенням параметра $t_1, t_2 \in (t_0, T)$ відповідають дві різні точки площини $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$, координати яких задовольняють рівнянням (1.29).

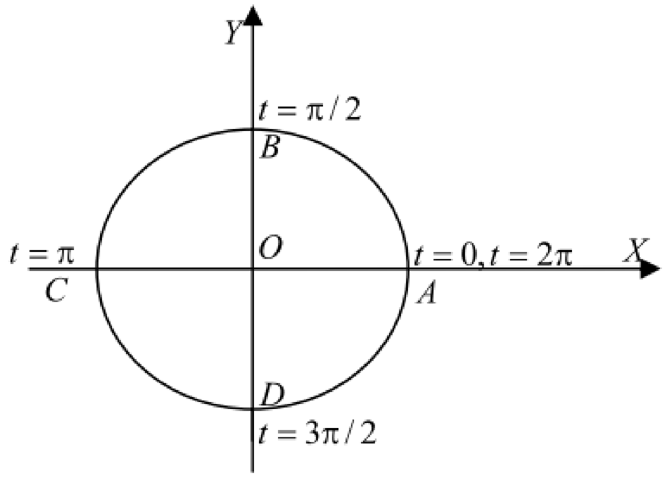

Рис. 1.10.

Приклад 1.20. Розглянемо множину точок площини, які задаються рівняннями

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]. \quad (1.30)$$

Систему (1.30) можна замінити еквівалентним рівнянням:

$$x^2 + y^2 = 1,$$

яке визначає коло з центром в точці O(0,0) радіуса 1.

Крива L (коло), параметризована рівняннями (1.30), не є простою, оскільки точці *A* відповідають два різні значення параметра (див. рис. 1.10).

Якщо розглянути криву ABC, то параметризація

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases} \quad t \in [0, \pi]$$

задає просту криву ABC. Аналогічно крива CDA з параметризацією

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases} \quad t \in [\pi, 2\pi]$$

визначає просту криву (дугу). Таким чином, коло L розбито на дві прості плоскі криві. Крива, параметризована рівняннями (1.30), є простою зімкненою.

Позначимо через $\{t\}$ множину, що може бути однією з чотирьох таких множин:

$$\{t\} = \left| \begin{array}{l} [t_0, T], \\ (-\infty; +\infty), \\ (-\infty; a], \\ [a, +\infty). \end{array} \right.$$

🗁 **Означення 1.19.** Нехай крива L визначається рівняннями $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases}$ на $\{t\}$, причому множину $\{t\}$ можна подати у вигляді скінченного об'єднання відрізків $\{t\} = \bigcup\limits_{i=1}^{n}[t_{i-1}, t_i]$, що не мають спільних внутрішніх точок, на кожному з яких крива, що задається цими рівняннями, є простою, то кажуть, що крива *є параметризовною*.

Задамо *відношення упорядкування на параметризовній кривій*. Будемо казати, що точка M_1 *передує* точці M_2 (позначення: $M_1 \prec M_2$) на простій кривій L, якщо відповідні значення параметрів t_1 і t_2, що задають точки M_1 і M_2, пов'язані нерівністю $t_1 < t_2$.

Якщо на кривій L задано відношення упорядкування, то кажуть, що на цій кривій задано *напрям оббігу кривої.* Пояснімо це.

Нехай рівняння

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t \in [t_0, T]$$

визначають криву L. Якщо крива є параметризовною, то:

1) спочатку розіб'ємо множину $\{t\}$ на відрізки, що взаємно не перетинаються і на яких крива є простою;

2) потім упорядкуємо значення параметра в порядку його зростання;

3) завдяки заданому на ній відношенню порядку отримаємо:

$$\begin{array}{ccccccccccc} t_0 & < & t_1 < \ldots < t_{i-1} & < & t_i < \ldots < t_{n-1} & < & t_n = T \\ \updownarrow & & \updownarrow \qquad\quad \updownarrow & & \updownarrow \qquad\quad \updownarrow & & \updownarrow \\ M_0 & \prec & M_1 \prec \ldots \prec M_{i-1} & \prec & M_i \prec \ldots \prec M_{n-1} & \prec & M_n \end{array}$$

утворення порядку (тут $M_i = (\varphi(t_i), \psi(t_i))$).

Введемо поняття довжини кривої. Будемо вважати, що довжина ламаної є визначеним поняттям. Введемо позначення: $P_{[M_{i-1},M_i]} = P_i$ – довжина ланки ламаної, $P = \sum_{i=1}^{n} P_i$ – довжина ламаної, що сполучає точки-вузли $M_0, M_1, \dots, M_{i-1}, M_i, \dots, M_{n-1}, M_n$ (див. рис. 1.11). Якщо вузли ламаної належать кривій, то кажуть, що *ламана вписана в криву.*

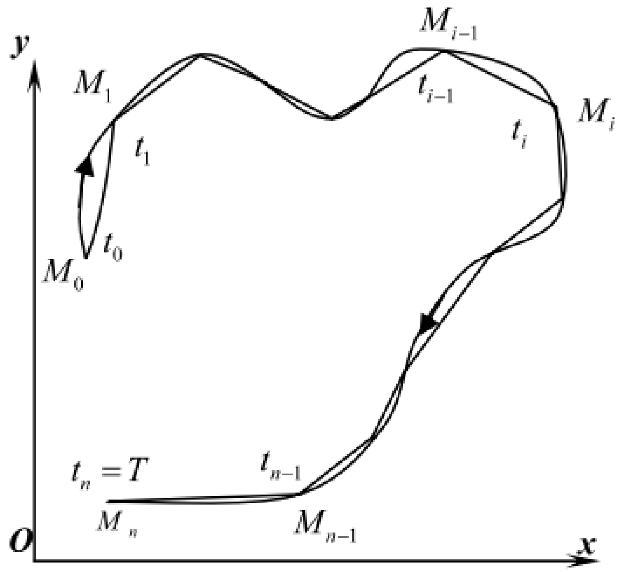

Рис. 1.11.

При додаванні точок розбиття параметра t і, відповідно, вузлів ламаної, довжина ламаної не зменшиться. Дійсно, додавання, наприклад, одного додаткового вузла ламаної, що відповідає новій точці розбиття значень параметра *t*, призводить до заміни однієї ланки ламаної двома іншими. Дві нові ланки й стара утворюють трикутник, тому сума довжин двох нових ланок не менша за довжину однієї старої. Оскільки інші ланки нової і старої ламаної не змінюються, то довжина нової ламаної не менша за довжину старої.

Означення 1.20. Криву називають *спрямлюваною*, якщо довжини всіх ламаних, уписаних у криву, які відповідають різноманітним розбиттям відрізка $[t_0, T]$, утворюють множину, яка є обмеженою зверху. Значення величини $|L| = \sup\{P\}$ називають *довжиною кривої.*

2. Властивості спрямлюваних кривих.

1. Якщо крива L спрямлювана, то її довжина $|L|$ не залежить від способу параметризації цієї кривої.

2. Якщо спрямлювана крива L розбита скінченою кількістю точок $M_0, M_1, M_2, \dots, M_n$ на скінчену кількість кривих, крім того цим точкам відповідають значення параметра $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_{i-1} < t_i < \dots < t_n = \beta$, то кожна з кривих, що сполучає точки $M_{i-1}M_i$, є спрямлюваною, і відповідно довжина кривої дорівнює сумі довжин кривих, що її утворюють:

$$|L| = \sum_{i=1}^{n} \left| L_{M_{i-1}M_i} \right|.$$

🗀 **Означення 1.21.** Функцію $f(x)$ називають *неперервно диференційовною на відрізку* $[a,b]$, якщо функція $f'(x)$ неперервна на інтервалі (a,b) й існують скінченні границі $\lim\limits_{x\to a+0} f'(x)$ та $\lim\limits_{x\to b-0} f'(x)$.

🗀 **Означення 1.22.** Просту криву, параметризовану рівняннями $L:\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases}$ $t\in[t_0,T]$ називають *простою гладкою кривою*, якщо функції $\varphi(t)$, $\psi(t)$ неперервно диференційовні на $[t_0,T]$.

Теорема 1.17. Проста гладка крива $L:\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases}$ $t\in[t_0,T]$ є спрямлюваною, а її довжина $|L|$ обчислюється за формулою:

$$\boxed{|L|=\int\limits_{t_0}^{T}\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\,dt}$$

Теорема 1 (*критерій спрямлюваності кривої*). Проста гладка крива $L:\begin{cases} x=\phi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases}$ $t\in[\alpha;\beta]$ є спрямлюваною, а її довжина $|L|$ обчислюється за формулою:

$$|L|=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\left(\phi'(t)\right)^2+\left(\psi'(t)\right)^2}\,dt.$$

Приклад. Знайти довжину дуги кривої $y=\operatorname{ch}x$ від точки $A(0;1)$ до точки $B(b;\operatorname{ch}b)$.

Розв'язання. Використаємо формулу (2.27) для знаходження довжини дуги графіка функції $y=y(x)$, заданої у декартових координатах на відрізку $[a;b]$. У нашому випадку $y'(x)=\operatorname{sh}x$, $1+y'^2=1+\operatorname{sh}^2x=\operatorname{ch}^2x$, тому

$$l=\int\limits_0^b\sqrt{1+y'^2}\,dx=\int\limits_0^b\operatorname{ch}x\,dx=\operatorname{sh}x\Big|_0^b=\operatorname{sh}b.$$

Відповідь. $\operatorname{sh}b$.

Приклад. Знайти довжину дуги l кривої, заданої у параметричній формі: $x=a\cos^4t,\ y=a\sin^4t,\ a>0$.

Розв'язання. Оскільки для даної дуги $x > 0, y > 0$, то можна прийняти, що $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Тоді кожному значенню t відповідає єдина точка на заданій кривій і можна використати формулу для обчислення довжини дуги кривої, заданої у параметричній формі.

Для заданої кривої $x'(t) = -4a\cos^3 t \cdot \sin t,\ y'(t) = 4a\sin^3 t\cos t$. Тоді отримуємо:

$$x'^2(t) + y'^2(t) = 16a^2\cos^6 t\sin^2 t + 16a^2\sin^6 t\cos^2 t = 2a^2\sin^2 2t\left(1+\cos^2 2t\right).$$

Шукана довжина дуги дорівнює:

$$l = a\sqrt{2}\int_0^{\pi/2}\sqrt{1+\cos^2 2t}\,\sin 2t\,dt = \left\|\begin{matrix}\cos 2t = z, -2\sin 2tdt = dz, \\ t = 0 \Rightarrow z = 1, t = \pi/2 \Rightarrow z = -1\end{matrix}\right\| = \frac{a}{\sqrt{2}}\int_{-1}^{1}\sqrt{1+z^2}dz.$$

Використавши відомий табличний інтеграл

$$\int\sqrt{a^2+x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C,$$

отримаємо:

$$l = \frac{a}{\sqrt{2}}\int_{-1}^{1}\sqrt{1+z^2}dz = \frac{a}{\sqrt{2}}\left(z\sqrt{1+z^2} + \ln\left(z+\sqrt{z^2+1}\right)\right)\Bigg|_0^1 = a + \frac{a\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}{\sqrt{2}}.$$

Відповідь. $a + \dfrac{a\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}{\sqrt{2}}$.

3. Полярна система координат.

Нехай $\rho = \rho(\phi)$, $\phi \in [\alpha;\beta]$, функція $\rho(\phi)$ – неперервно диференційована на відрізку $[\alpha;\beta]$, тоді $\begin{cases} x = \rho(\phi)\cos\phi \\ y = \rho(\phi)\sin\phi \end{cases}$ – параметризація кривої, $\phi \in [\alpha;\beta]$. Тоді

$$|L| = \int_\alpha^\beta\sqrt{\left(\rho(\phi)\right)^2 + \left(\rho'(\phi)\right)^2}d\phi = \int_\alpha^\beta\sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}d\phi$$

Приклад. Знайти довжину дуги кривої $r = a(1+\cos\varphi),\, a>0$ **(кардіоїда), заданої у полярній системі координат.**

Розв'язання. Кардіоїда є замкненою кривою, для неї $\varphi \in [0; 2\pi)$. Використаємо формулу для знаходження довжини дуги кривої, заданої у полярних координатах. Для кардіоїди маємо:

$$\rho' = -a\sin\varphi,\ \rho^2 + \rho'^2 = a^2\left(2+2\cos\varphi\right) = 4a^2\cos^2\frac{\varphi}{2};$$

$$l = \int_0^{2\pi} 2a\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right| d\varphi = 4a\int_0^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi = 8a\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} = 8a\ .$$

Відповідь. $8a$.