Лекція №32

Тема: «Застосування визначеного інтегралу. Обчислення площ криволінійної трапеції та криволінійного сектора»

План

1. Поняття квадровної фігури.
2. Обчислення площ криволінійної трапеції.

1. Поняття квадровної фігури.

🗁 **Означення 1.29**. *Плоскою фігурою* або *областю* на площині $\mathbb{R}^2$ називають обмежену замкнену множину на площині.

Якщо область $D \subset \mathbb{R}^2$ являє собою множину, обмежену скінченною кількістю неперервних кривих, то її межею буде об'єднання кривих, що її обмежують. В загальному випадку межа області може мати дуже своєрідну форму. Наприклад, множина точок квадрату $[0,1]^2$ з раціональними координатами має межу, яка збігається з квадратом $[0,1]^2$.

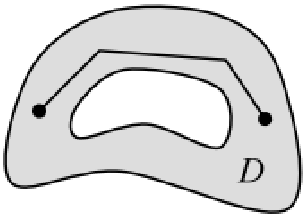

Рис. 1.13.

🗁 **Означення 1.30**. Множину $D \subset \mathbb{R}^2$ називають *зв'язною*, якщо будь-які дві її точки можна сполучити ламаною, яка цілком належить множині D (див. рис. 1.13).

🗁 **Означення 1.31**. *Многокутною фігурою* або просто *многокутником* називають фігуру (не обов'язково зв'язну), обмежену скінченною кількістю замкнених ламаних.

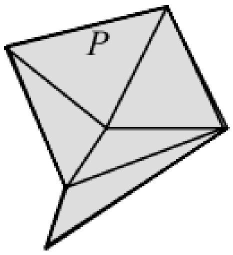

Рис. 1.14.

Площа многокутника P може бути знайдена шляхом підсумовування площ трикутників, на які він розбивається (рис. 1.14). Оскільки площу трикутника ми можемо обчислити, то будемо вважати, що площу многокутника ми завжди можемо визначити. Площу многокутника P будемо позначати $S(P)$.

Навколо фігури $D \subset \mathbb{R}^2$ можна описати многокутник *A*, тобто помістити фігуру *D* всередину многокутника *A*. Також можна вписати многокутник *B*, тобто помістити многокутник *B* всередину фігури *D* (рис. 1.15). Тоді $B \subset D \subset A$.

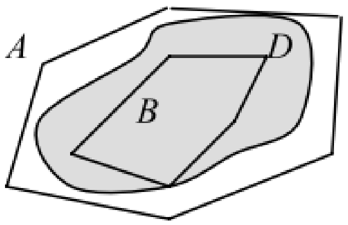

Рис. 1.15.

Розглянемо множини

$\tilde{A} = \{A$ – описаний навколо D многокутник$\}$,

$\tilde{B} = \{B$ – вписаний в D многокутник$\}$.

Множина $\{ S(A),\ A \in \tilde{A} \}$ обмежена знизу будь-яким значенням $S(B),\ B \in \tilde{B}$. Множина $\{ S(B),\ B \in \tilde{B} \}$ обмежена зверху будь-яким значенням $S(A),\ A \in \tilde{A}$. Тому

$$\boxed{\begin{array}{l} \exists \inf\{S(A)\} = \underline{I} \ \text{– верхня площа } D, \\ \exists \sup\{S(B)\} = \overline{I} \ \text{– нижня площа } D \end{array}}$$

Оскільки $B \subset D \subset A$, то $S(B) \le S(A)$. За означенням точних меж

$$S(B) \le \overline{I}, \quad S(A) \ge \underline{I}.$$

Доведення того факту, що $\overline{I} \le \underline{I}$, здійснюється аналогічно доведенню нерівності $I_* \le I^*$ для верхнього й нижнього інтегралів Дарбу (див. *властивість 4* в §2, п. 3 цього розділу). Таким чином,

$$S(B) \le \overline{I} \le \underline{I} \le S(A). \tag{1.31}$$

Означення 1.32. Плоску фігуру D називають *квадровною*, якщо $\overline{I} = \underline{I} = I$, а значення I називають *площею фігури* D і позначають $S(D)$.

Теорема 1.18 (*перший критерій квадровності плоскої фігури*). Фігура D є квадровною тоді й лише тоді, коли

$$\forall \varepsilon > 0\ (\exists A \in \tilde{A} \wedge \exists B \in \tilde{B}):\ \left(A \supset D \supset B \quad \wedge \quad S(A) - S(B) < \varepsilon \right).$$

Теорема 1.18 а) (*узагальнений перший критерій квадровності плоскої фігури*). Фігура D є квадровною тоді й лише тоді, коли

Означення 1.33. Кажуть, що множина Γ *має площу нуль* (тобто $S(\Gamma) = 0$), якщо

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists P \text{ – многокутник: } P \supset \Gamma\ (P \text{ покриває } \Gamma) \wedge S(P) < \varepsilon.$$

Теорема 1.19 (*другий критерій квадровності плоскої фігури*). Фігура D – квадровна тоді й лише тоді, коли її межа має площу нуль, тобто $S(\partial(D)) = 0$.

2. Обчислення площ криволінійної трапеції та криволінійного сектора.

Існує дві основні схеми застосування визначеного інтеграла. Перша схема, яку називають методом інтегральних сум, ґрунтується на означенні визначеного інтеграла. Шукана величина спочатку наближено виражається у вигляді інтегральної суми, а потім точно виражається через границю цієї суми, тобто через визначений інтеграл.

Друга схема, яку називають методом диференціала, полягає у тому, що спочатку складають диференціал шуканої величини, а сама ця величина знаходиться інтегруванням отриманого диференціала у заданих межах.

Розглянемо застосування визначеного інтеграла до розв’язування деяких геометричних та фізичних задач.

З геометричного змісту визначеного інтеграла випливає, що його можна застосувати до обчислення площ плоских фігур. Було показано, що площа криволінійної трапеції, тобто фігури, обмеженої графіком функції $y = f(x)$ $\left(f(x) \geq 0\right)$, віссю Ox та прямими $x = a$ і $x = b$ $(a < b)$, обчислюється за формулою $S = \int_a^b f(x)dx$. При $f(x) \leq 0$, $a \leq x \leq b$, таку площу обчислюють за формулою $S = -\int_a^b f(x)dx$. Формулу площі криволінійної трапеції для обох випадків можна записати у вигляді однієї рівності:

$$S = \int_a^b \left|f(x)\right|dx. \qquad (2.22)$$

Ця формула залишається справедливою і у випадку, коли функція $y = f(x)$ на відрізку $[a;b]$ скінченне число разів змінює знак.

Для знаходження площі фігури, обмеженої кривими $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ та прямими $x = a$, $x = b$ $(a < b)$, якщо $f_1(x) \leq f_2(x)$, $x \in [a;b]$, використовують формулу:

$$S=\int_a^b\left(f_2(x)-f_1(x)\right)dx. \tag{2.23}$$

Нехай криволінійна трапеція обмежена кривою, заданою у *параметричній формі*:

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \end{cases} \quad \alpha\le t\le\beta,$$

де $x(t)$ та $y(t)$ – неперервні функції, які мають на відрізку $[\alpha;\beta]$ неперервні похідні $x'(t)$ та $y'(t)$. Тоді, якщо $x(t)$ на відрізку $[\alpha;\beta]$ є монотонною, причому $x(\alpha)=a$, $x(\beta)=b$, то для обчислення площі криволінійної трапеції у інтегралі (1.25) досить виконати заміну змінної $x=x(t),\ dx=x'(t)dt$. Отримаємо формулу:

$$S=\int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt. \tag{2.24}$$

Для обчислення площі фігури, обмеженої замкненою кривою, рівняння якої задані у параметричній формі, використовують формулу:

$$S=\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\left[x(t)y'(t)-x'(t)y(t)\right]dt. \tag{2.25}$$

Тепер розглянемо обчислення площі фігури, обмеженої лінією, що у полярній системі координат визначається рівністю $\rho=\rho(\varphi)$, а також променями $\varphi=\alpha$ та $\varphi=\beta$ ($\alpha<\beta$). Таку фігуру називають ***криволінійним сектором***. Застосовуючи метод інтегральних сум, можна показати, що його площа визначається за формулою:

$$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta\rho^2(\varphi)d\varphi. \tag{2.26}$$

Приклад. Обчислити площу фігури, обмеженої прямими $x=0$, $x=2$ та кривими $y=2^x$, $y=2x-x^2$.

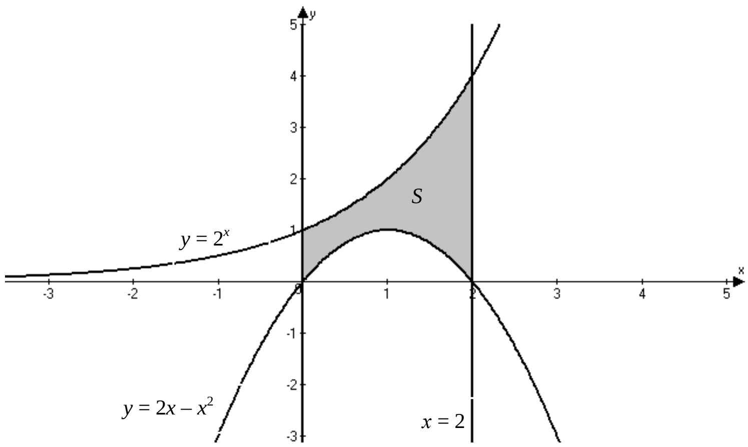

Рис. 2.1

Розв’язання. Побудуємо задану фігуру, площу якої потрібно обчислити (рис. 2.1).

Виходячи з розташування графіків кривих $y = 2^x$ та $y = 2x - x^2$ при $x \in [0;\, 2]$, знаходимо площу криволінійної трапеції, обмеженої заданими лініями, за формулою (2.23):

$$S = \int_0^2 \left(2^x - \left(2x - x^2\right)\right)dx = \left.\frac{2^x}{\ln 2}\right|_0^2 - \left.x^2\right|_0^2 + \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2 =$$

$$= \frac{3}{\ln 2} - 4 + \frac{8}{3} = \frac{3}{\ln 2} - \frac{4}{3}.$$

Відповідь. $\dfrac{3}{\ln 2} - \dfrac{4}{3}$.