Лекція №33

Тема: «Застосування визначеного інтегралу. Об'єм тіл обертання. Площа поверхні обертання»

План

1. Поняття кубованого тіла.
2. Об'єм тіла за площами паралельних поперечних перерізів.
3. Об'єм тіла обертання.
4. Об'єм кулі та конуса.
5. Обчислення площі поверхні обертання.

1. Поняття кубованого тіла.

Аналогічно плоскому випадку вводиться поняття тіла в $\mathbb{R}^3$.

Обмеженою множиною в просторі $\mathbb{R}^3$ називають множину, яку можна помістити всередину деякої кулі.

ε*-околом* точки (x_0, y_0, z_0) називають відкриту кулю з центром в цій точці радіуса ε, а саме:

$$B_\varepsilon(x_0, y_0, z_0) = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 < \varepsilon^2\right\}.$$

Поняття межової, граничної і внутрішньої точки $M_0(x_{0,}y_0, z_0)$ області $D \subset \mathbb{R}^3$, межі цієї множини, замкненої множини в просторі $\mathbb{R}^3$ вводяться аналогічно плоскому випадку.

🗁 **Означення 1.35**. *Тілом* або *областю* в просторі $\mathbb{R}^3$ називають обмежену замкнену множину в просторі.

🗁 **Означення 1.36**. *Многогранною фігурою* або просто *многогранником* називають фігуру (не обов'язково зв'язну), обмежену в просторі скінченною кількістю многокутників.

Для обчислення об'єму многогранника P його можна розбити на скінченну кількість пірамід, в основі яких лежать трикутники, і просумувати їх об'єми. Тому будемо вважати, що об'єм многогранника ми завжди можемо визначити. Об'єм многогранника P будемо позначати $V(P)$.

Навколо тіла $D \subset \mathbb{R}^3$ можна описати многогранник *A*, тобто помістити тіло *D* всередину многогранника *A*. Також можна вписати многогранник *B,* тобто помістити многогранник *B* всередину тіла *D*. Тоді $B \subset D \subset A$.

Розглянемо множини

$\tilde{A} = \{A$ – описаний навколо D многогранник$\}$,

$\tilde{B} = \{B$ – вписаний в D многогранник$\}$.

Множина $\{V(A), A \in \tilde{A}\}$ обмежена знизу будь-яким значенням $V(B), B \in \tilde{B}$. Множина $\{V(B), B \in \tilde{B}\}$ обмежена зверху будь-яким значенням $V(A), A \in \tilde{A}$. Тому

$$\boxed{\begin{array}{l} \exists \inf\{V(A)\} = \underline{V} \text{ – верхній об'єм тіла } D, \\ \exists \sup\{V(B)\} = \overline{V} \text{ – нижній об'єм тіла } D \end{array}}$$

Аналогічно плоскому випадку для многогранників $A \in \tilde{A}$ і $B \in \tilde{B}$ та довільних тіл D в просторі (тут $B \subset D \subset A$), мають місце нерівності

$$V(B) \le \overline{V} \le \underline{V} \le V(A).$$

Означення 1.37. Тіло D називають *кубовним*, якщо $\overline{V} = \underline{V} = V$, а значення V називають *об'ємом тіла* D і позначають $V(D)$.

Теорема 1.24 (*перший критерій кубовності тіла*). Тіло D є кубовним тоді й лише тоді, коли

$$\forall \varepsilon > 0\ (\exists A \in \tilde{A} \wedge \exists B \in \tilde{B}) : \left(A \supset D \supset B \quad \wedge \quad V(A) - V(B) < \varepsilon\right).$$

Доведення здійснюється аналогічно плоскому випадку ■

Теорема 1.24 а) (*узагальнений перший критерій кубовності тіла*). Тіло D є кубовним тоді й лише тоді, коли

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists P \text{ і } Q - \text{кубовні тіла} : \left(P \supset D \supset Q \quad \wedge \quad V(P) - V(Q) < \varepsilon\right).$$

Означення 1.39. *Циліндром* називають тіло, обмежене поверхнею, що має твірну, паралельну деякій осі, а також двома площинами α_1 і α_2, які перпендикулярні цій твірній.

Відстань між паралельними площинами α_1 і α_2 називають *висотою циліндра.* При перетині кожної з таких площин циліндричною поверхнею утворюється зімкнена крива на цій площині, яка обмежує плоску фігуру. Такі фігури на двох паралельних площинах рівні. Їх називають *основами циліндра.*

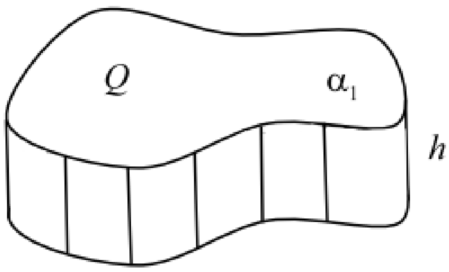


Рис. 1.20.

Теорема 1.27. Якщо основа $Q \subset \alpha_1$ циліндра E (див. рис. 1.20) є квадровною фігурою, то циліндр є кубовним тілом, причому $V(E) = S(Q) \cdot H$

🗁 **Означення 1.40**. Тіло називають *східчастим,* якщо воно є скінченним об'єднанням таких циліндрів, що верхня основа попереднього циліндра лежить в тій самій площині, що і нижня основа наступного (див. рис. 1.21).

Наслідком останньої теореми про кубовність циліндра і властивості адитивності є такий

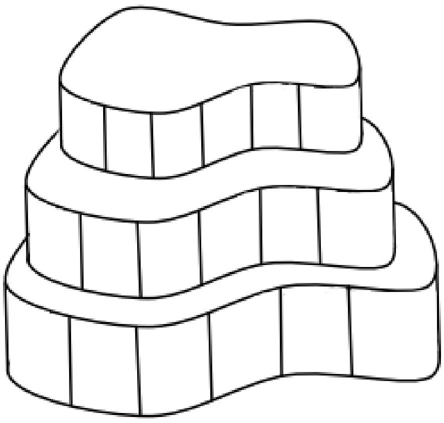


Рис. 1.21.

Наслідок 1.8. Східчасте тіло є кубовним, якщо кожен циліндр, що його утворює, має квадровну основу.

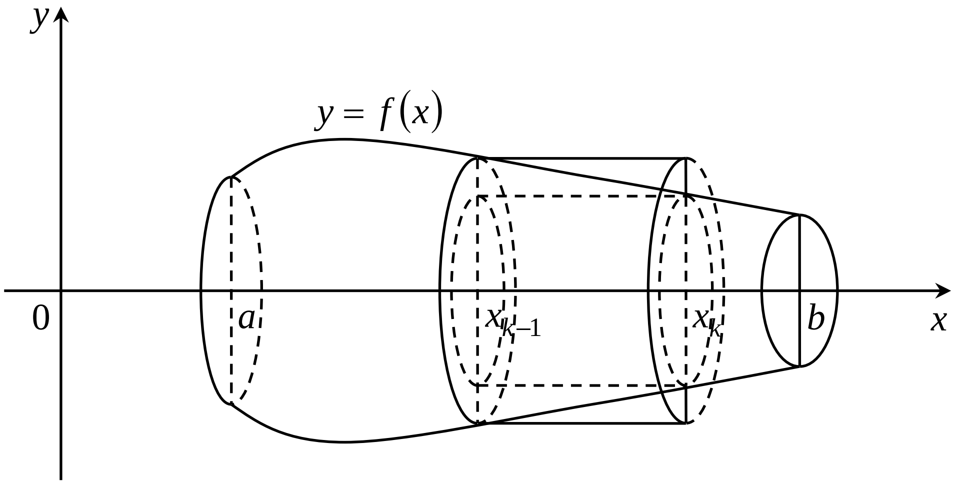
☝ **Теорема 1.28.** Якщо тіло T утворене обертанням криволінійної трапеції $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b \wedge 0 \le y \le f(x)\}$ (тут $f(x)$ – неперервна функція на $[a,b]$) навколо осі Ox, то це тіло T є кубовним, а його об'єм дорівнює

$$\boxed{☝\ V_x = V(T) = \pi \int_a^b f^2(x)dx}$$

2. Об'єм тіла за площами паралельних поперечних перерізів.

Нехай треба знайти об'єм тіла, якщо відомі площі $S(x)$ перерізів цього тіла площинами, перпендикулярними до осі Ox, що знаходяться на відстані x від початку координат, $a \le x \le b$. Для цього використовують формулу об'єму тіла за площами паралельних перерізів:

$$V = \int_a^b S(x)dx.$$



3. Об'єм тіла обертання.

🗁 **Означення 1.40**. Тіло називають *східчастим,* якщо воно є скінченним об'єднанням таких циліндрів, що верхня основа попереднього циліндра лежить в тій самій площині, що і нижня основа наступного (див. рис. 1.21).

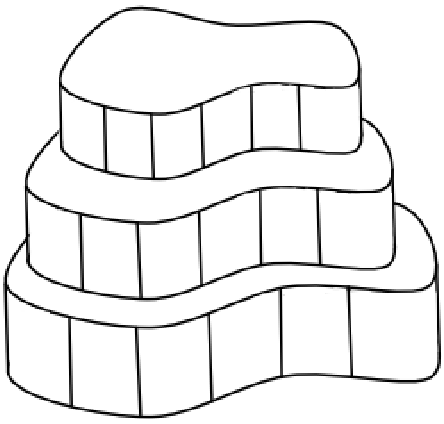


Рис. 1.21.

Наслідком останньої теореми про кубовність циліндра і властивості адитивності є такий

Наслідок 1.8. Східчасте тіло є кубовним, якщо кожен циліндр, що його утворює, має квадровну основу.

☝ **Теорема 1.28.** Якщо тіло T утворене обертанням криволінійної трапеції $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : a\le x\le b \wedge 0\le y\le f(x)\}$ (тут $f(x)$ – неперервна функція на $[a,b]$) навколо осі Ox, то це тіло T є кубовним, а його об'єм дорівнює

$$\boxed{☝\ V_x = V(T) = \pi\int_a^b f^2(x)dx}$$

Означення 2.13 Нехай криволінійна трапеція обмежена зверху графіком функції $y = f(x)$, де $a \le x \le b$. *Якщо цю трапецію обертати навколо осі* Ox, *утвориться просторова фігура, яку називають* ***тілом обертання***.

Об'єм тіла, утвореного від обертання криволінійної трапеції навколо осі OY, обчислюється за формулою:

$$V_{OY} = 2\pi\int_a^b x\cdot f\left(x\right)dx.$$

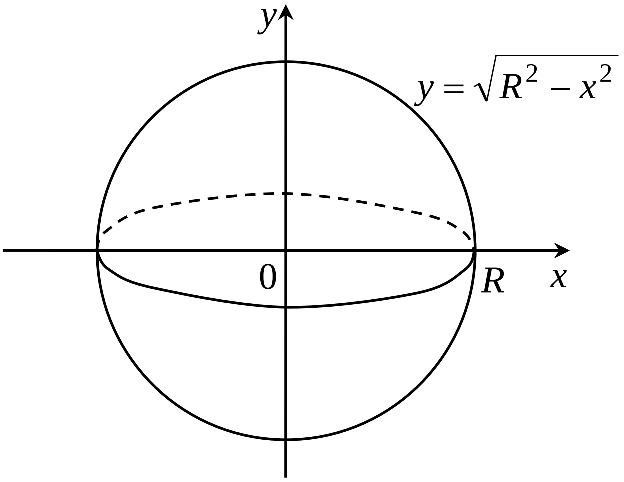
Об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі OX плоскої фігури D, що обмежена на декартовій площині графіками неперервних на відрізку $\left[a;b\right]$ функції $y = f_1\left(x\right)$ і $y = f_2\left(x\right)$, де $0 \le f_1\left(x\right) \le f_2\left(x\right)$, відрізками прямих $x = a$ і $x = b$, обчислюється за формулою:

$$V_{OX} = \pi\int_a^b \left[f_2^2\left(x\right) - f_1^2\left(x\right)\right]dx.$$

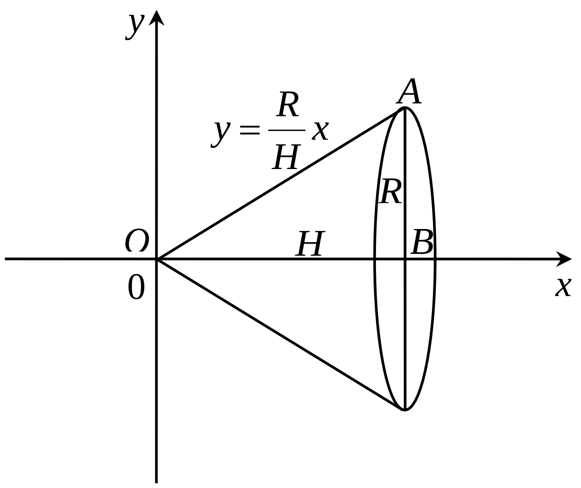
Якщо криволінійний сектор, обмежений кривою $\rho = \rho\left(\phi\right)$ і променями $\phi_1 = \alpha$ та $\phi_2 = \beta$ $\left(0 \le \alpha \le \beta \le 2\pi\right)$, обертається навколо полярної осі, то об'єм тіла обертання обчислюється за формулою:

$$V = \frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta \rho^3\left(\phi\right)\cdot\sin\phi d\phi .$$

4. Об'єм кулі та конуса.



$$V_{OX} = \pi\int_{-R}^{R}\left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)^2 dx = \frac{4}{3}\pi R^3 .$$



$$V_{OX} = \pi\int_0^H\left(\frac{R}{H}x\right)^2 dx = \frac{1}{3}\pi R^2 H .$$

5. Обчислення площі поверхні обертання.

Нехай крива, задана неперервною функцією $y = f(x) \geq 0$, $x \in [a;b]$, обертається навколо осі OX. Для кривої, заданої у декартовій системі координат, площа поверхні дорівнює:

$$P_{OX} = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + \left(f'(x) \right)^2} dx .$$

Для кривої, заданої параметрично $\begin{cases} x = \phi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$ $t \in [\alpha;\beta]$, площа поверхні дорівнює:

$$P_{OX} = 2\pi \int_\alpha^\beta \psi(t) \sqrt{\left(\phi'(t) \right)^2 + \left(\psi'(t) \right)^2} dt .$$

Для кривої, заданої у полярній системі координат $\rho = \rho(\phi)$, $\phi \in [\alpha;\beta]$, площа поверхні дорівнює:

$$P_{OX} = 2\pi \int_\alpha^\beta \rho(\phi) \cdot \sin\phi \sqrt{\rho^2(\phi) + \left(\rho'(\phi) \right)^2} d\phi .$$