Лекція

Тема: «Знакопостійні числові ряди»

План

1. Сума ряду. Критерій Коші.
2. Властивості збіжних рядів.
2. Ознаки збіжності знакопостійних рядів.

1. Сума ряду. Критерій Коші.

Розглянемо числову послідовність $\{a_n\}$. Формально утворену суму елементів цієї послідовності

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (1.1)$$

назвемо числовим рядом. При цьому числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ називаються членами ряду, a_n – загальним членом ряду, а $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ – частковою сумою ряду (1.1).

🗁**Означення 1.1.** Якщо існує границя послідовності часткових сум $\{S_n\}$, тоді ряд (1.1) називають *збіжним,* при цьому число $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ називається *сумою* ряду. Позначення: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$. Якщо послідовність часткових сум не збігається, тобто $\nexists \lim\limits_{n\to\infty} S_n$, тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називають *розбіжним*.

Приклад. Дослідити числовий ряд, що утворюється членами геометричної прогресії

$$1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} q^n$$

на збіжність за означенням.

Розв'язання. Знайдемо часткову суму даного ряду:

$$S_n = 1 + q + \ldots + q^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q}, q \neq \pm 1.$$

Застосуємо той факт, що

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0, \text{ якщо } |q| < 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \infty, \text{ якщо } |q| > 1$$

для пошуку границі послідовності часткових сум. Отримаємо:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \begin{cases} \dfrac{1}{1-q}, & |q|<1 \\ \infty, & |q|>1 \end{cases}.$$

Розглянемо окремо випадок $|q|=1$. Якщо $q=1$, тоді часткова сума ряду має вигляд $S_n = \underbrace{1+1+\ldots+1}_{n} = n \to \infty$, тобто є нескінченно великою (розбіжною). Якщо $q=-1$, то послідовність $\{S_n = 1-1+1-\ldots+(-1)^{n-1}\} = \{1;0;1;0;\ldots\}$також розбігається. Отже, у випадку $|q|<1$ заданий ряд збігається, при цьому його сума дорівнює $\dfrac{1}{1-q}$. У всіх інших випадках ($|q|\geq 1$) розглянутий ряд розбігається. ■

Приклад. Дослідити числовий ряд

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot(n+1)}$$

на збіжність за означенням і знайти його суму.

Розв'язання. Розглянемо часткову суму даного ряду:

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)} =$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}.$$

Оскільки існує границя

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1,$$

то даний ряд збігається, а його сума дорівнює 1, тобто $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\cdot(n+1)}=1$. ■

2. Властивості збіжних рядів.

1) Розглянемо два ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a'_n$, де $a'_n = ca_n$, $c = const \neq 0$. Тоді $S'_n = cS_n$, тобто границі часткових послідовностей цих рядів існують або не існують одночасно. Якщо границі існують, тоді $\lim\limits_{n} S'_n = \lim\limits_{n} cS_n$, тобто $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(c\cdot a_n) = c\cdot\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Висновок: ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$ збігаються або розбігаються одночасно, а їх суми (у випадку збіжності) відрізняються сталою *c:* $\sum_{n=1}^{\infty}(c \cdot a_n) = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

2) Якщо ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ збігаються, тоді збігаються ряди $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$, крім того, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

3) Додавання чи відкидання від ряду скінченої кількості членів не впливає на його збіжність.

4) При групуванні членів збіжного ряду одержимо новий теж збіжний ряд.

Теорема 1 (*критерій Коші збіжності числового ряду*). Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається тоді і лише тоді, коли він задовольняє вимогу:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in N\ \forall n \geq n_0\ \forall p \in N \quad \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon .$$

Доведення. Пригадаємо критерій Коші для послідовності:

$$\{S_n\} - \text{збігається} \ \Leftrightarrow\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n \in \mathrm{N}\ \forall n \geq n_0\ \forall p \in \mathrm{N} \quad \left| S_{n+p} - S_n \right| < \varepsilon . \qquad (1.2)$$

Якщо $\{S_n\}$ – послідовність часткових сум ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, тоді

$$S_{n+p} - S_n = \underline{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} + a_{n+1} + \ldots + a_{n+p} - (\underline{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}) = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k . \qquad (1.3)$$

Підставляючи (1.3) в (1.2) отримаємо потрібне. ■

Теорема 3 (*необхідна умова збіжності числового ряду*). Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ є збіжним, то $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Зауваження. Якщо $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ розбігається. У такому випадку будемо писати: «н.у. не виконується».

Приклад. Розглянемо ряд

$$\sum_{n}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots \text{ – гармонічний ряд.}$$

Для нього $\lim\limits_{n} a_n = \lim\limits_{n} \frac{1}{n} = 0$, тобто *необхідна умова виконується*. Доведемо за критерієм Коші розбіжність ряду. Для $p = n \in \mathrm{N}$ маємо:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+p} \geq \frac{p}{n+p} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Отже,

для $\varepsilon = \frac{1}{2}$ $\forall n_0 \in \mathrm{N}$ для $n = n_0 \in \mathrm{N}$ і для $p = n$ виконується нерівність $\left| \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| \geq \varepsilon$.

2. Ознаки збіжності знакопостійних рядів.

Означення 4. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, у якого $a_n \geq 0$ $(a_n \leq 0)$ $\forall n \in N$, називають *рядом з невід'ємними* (*недодатними*) членами або *знакопостійним рядом*.

Далі будемо розглядати ряди з невід'ємними членами.

Теорема 1.3 *(загальна ознака порівняння).* Нехай $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ – ряди з невід'ємними членами, тобто такі, що $a_n \geq 0,\ b_n \geq 0$ $\forall n \in \mathrm{N}$, тоді

I) $$\left. \begin{array}{l} a_n \leq b_n \ \forall n \in \mathrm{N}, \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n - \text{збігається} \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \text{збігається};$$

II) $$\left. \begin{array}{l} a_n \leq b_n \forall n \in \mathrm{N}, \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n - \text{розбігається} \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n - \text{розбігається.}$$

Доведення. I) Для часткових сум даних рядів маємо:

$$\left. \begin{array}{l} A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k, B_n = \sum\limits_{k=1}^{n} b_n, \\ a_n \leq b_n \ \ \forall n \in \mathrm{N}, \end{array} \right\} \Rightarrow A_n \leq B_n \ \forall n \in \mathrm{N}.$$

Для ряду з невід'ємними членами –

$$\left. \begin{array}{l} \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n - \text{збігається}, \\ b_n \geq 0 \ \forall n \in \mathrm{N}, \end{array} \right\} \Rightarrow \{B_n\} - \text{обмежена} \Rightarrow \exists M > 0 \ \forall n \in \mathrm{N} : B_n \leq M.$$

Отже,

$$\left.\begin{array}{l} A_n \le B_n \ \forall n \in \mathrm{N}, \\ \exists M > 0 \ \forall n \in \mathrm{N} : B_n \le M \end{array}\right\} \Rightarrow A_n \le B_n \le M \ \forall n \in \mathrm{N},$$

тобто послідовність часткових сум $\{A_n\}$ ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ є обмеженою. Тоді, за критерієм збіжності ряду з невід'ємними членами, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається.

II) Для отримання другої частини твердження теореми достатньо пригадати, що для двох висловлювань V і U імплікація $V \Rightarrow U$ рівносильна імплікації $\overline{U} \Rightarrow \overline{V}$ (принцип контрапозиції). ■

Теорема 1.4 *(ознака порівняння в граничній формі).* Нехай $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ – ряди з додатними членами, тобто такі, що $a_n > 0,\ b_n > 0 \ \forall n \in \mathrm{N}$ і $\exists \lim_n \frac{a_n}{b_n} = K$ $(0 \le K \le +\infty)$, тоді

I) $\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n - \text{збігається} \wedge K \ne +\infty \right) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \text{збігається}$;

II) $\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n - \text{розбігається} \wedge K \ne 0 \right) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \text{розбігається}.$

Зокрема, якщо $0 < K < +\infty$, то ряди збігаються або розбігаються одночасно.

Теорема 1.6 *(ознака Д'Аламбера).*

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \ a_n > 0 \ \ \forall n \in \mathrm{N}, \\ \exists \lim_n \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q \ \text{(скінченна або} \\ \qquad \text{нескінченна),} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 1) \ q < 1 \Rightarrow \sum_n a_n \ \text{збігається,} \\ 2) \ q > 1 \Rightarrow \sum_n a_n \ \text{розбігається,} \\ 3) \ q = 1 \Rightarrow \text{сумнівний випадок.} \end{array}\right.$$

Теорема 1.7 *(радикальна ознака Коші (гранична форма)).*

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \ a_n \ge 0 \ \forall n, \\ \exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q \ \text{(скінченна або} \\ \qquad \text{нескінченна),} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 1) \ q < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \text{збігається,} \\ 2) \ q > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \text{розбігається,} \\ 3) \ q = 1 - \text{сумнівний випадок.} \end{array}\right. .$$

Теорема 1.8 *(інтегральна ознака Маклорена-Коші).*

$$\left.\begin{array}{l} \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n > 0 \;\; \forall n \in \mathrm{N}, \\ 1)\, f(n) = a_n, \\ 2)\, f(x) \text{ не зростає} \\ \qquad \text{на } [n_0, \infty) \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{l} \int\limits_{n_0}^{\infty} f(x)dx - \text{збігається (розбігається)} \Rightarrow \\ \qquad\qquad \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n - \text{збігається (розбігається)} \end{array} \right)$$

Теорема 1.12 (*ознака Раабе).*

$$\left.\begin{array}{l} \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, \;\; a_n > 0 \;\; \forall n \in \mathrm{N}, \\ \exists \lim\limits_{n} n \cdot \left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = r \text{ (скінченна або} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{нескінченна),} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1)\; r < 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n - \text{розбігається,} \\ 2)\; r > 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n - \text{збігається,} \\ 3)\; r = 1 \Rightarrow \text{сумнівний випадок.} \end{array} \right.$$