Лекція

Тема: «Знакозмінні числові ряди»

План

1. Абсолютно та умовно збіжні числові ряди.
2. Властивості абсолютно та умовно збіжних знакозмінних рядів.
3. Ознаки збіжності знакозмінних рядів.

1. Абсолютно та умовно збіжні числові ряди.

До довільних рядів відносять ряди, які містять як додатні так і від'ємні члени. Якщо ряд містить скінчену кількість від'ємних елементів, то вони не впливають на збіжність ряду, і досліджувати цей ряд на збіжність можна як знакододатний. Якщо, навпаки, додатних членів скінченна кількість, то досліджувати ряд $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ на збіжність можна як знаковід'ємний, та робити висновок про збіжність ряду, досліджуючи ряд із його модулів $\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n| \left(a_n \le 0 \ \forall n \ge n_0\right)$. Такі ряди не відносять до довільних, а без обмеження загальності міркувань вважають знакосталими. До довільних рядів відносять ряди, що містять нескінчену кількість як додатних, так і від'ємних членів.

Означення. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називають *абсолютно збіжним*, якщо збігається ряд, утворений із його модулів, тобто

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \textit{абсолютно збігається} \overset{def}{\Leftrightarrow} \sum_{m=1}^{\infty} |a_n| - \text{збігається}.$$

Означення. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називають *умовно збіжним*, якщо він збігається, але не абсолютно. Тобто

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \textit{умовно збігається} \overset{def}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 1) \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \text{збігається}, \\ 2) \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \text{абсолютно розбігається.} \end{cases}$$

Теорема 1. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – абсолютно збігається $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – збігається.

Доведення. *I спосіб.* Застосовуємо критерій Коші збіжності ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \text{абсолютно збігається} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| - \text{збігається} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathrm{N} \ \ \forall n \ge n_0 \ \forall p \in \mathrm{N} \ \ \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \varepsilon.$$

За нерівністю трикутника $\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| \le \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k|$, тому

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathrm{N} \ \ \forall n \ge n_0 \ \ \forall p \in \mathrm{N} \ \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon.$$

Це означає, що за критерієм Коші ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається.

II спосіб. Позначимо

$$a^+ = \begin{cases} a, & \text{якщо } a > 0, \\ 0, & \text{якщо } a \le 0. \end{cases}, \quad a^- = a - a^+.$$

Для даного ряду маємо: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^+ + a_n^- \right)$. Дослідимо ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ і $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ на збіжність. Для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ маємо:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \text{абсолютно збігається} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| - \text{збігається};$$
$$\left. \begin{array}{l} a_n^+ \le |a_n| \\ \textit{зб.} \Leftarrow \textit{зб.} \end{array} \right\} \Rightarrow \exists \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = A^+.$$

Аналогічно ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ збігається, а його суму позначимо A^-. Тоді

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^+ + a_n^-\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = A^+ + A^- .$$

Це означає, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, а його сума дорівнює $A^+ + A^-$. ■

Отже. під довільним рядом розуміємо ряд, що містить нескінченну кількість додатних і від’ємних членів. Довільні ряді ще називають *знакозмінними*. Окремим випадком знакозмінного ряду є ряд *знакопочережний ряд,* тобто ряд, знаки елементів якого строго чергуються*:*

$$C_1 - C_2 + C_3 - C_4 + \ldots + (-1)^{n+1} C_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-1\right)^{n+1} C_n, \quad C_n \geq 0 \;\; \forall n \in \mathrm{N} .$$

Для дослідження на абсолютну збіжність довільних рядів до ряду $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ застосовуються ознаки збіжності знакододатних рядів: порівняння, радикальна ознака Коші, інтегральна ознака Маклорена-Коші, ознаки Д’Аламбера, Раабе, Гаусса, Бертрана.

2. Властивості абсолютно та умовно збіжних знакозмінних рядів.

Теорема 2. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, тоді ряд, що утворюється із даного за допомогою групування його членів,

$$(a_1 + \ldots + a_{n1}) + (a_{n_1+1} + \ldots + a_{n_2}) + (a_{n_2+1} + \ldots . + a_{n_3}) + \ldots + (a_{n_{p+1}} + \ldots + a_{n_p}) + \ldots \quad (\,*\,)$$

(тут $\{\, n_p \}$ – зростаюча послідовність номерів) збігається завжди і має таку саму суму, що і даний ряд.

Теорема 3. Якщо всі доданки в кожній із дужок ряду (*) мають один і той самий знак і ряд (*) збігається, тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається.

Теорема 4. Знакопостійний збіжний ряд при переставленні своїх членів залишається збіжним та не змінює свою суму.

Теорема 5 (*теорема Рімана*). Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається умовно, то можна так переставити його члени, що сума отриманого ряду буде дорівнювати довільному наперед заданому числу. Можна при перестановці отримати і розбіжний ряд.

Теорема 6. Абсолютно збіжний ряд при довільному переставленні своїх членів залишається абсолютно збіжним та не змінює свою суму.

Теорема 7 (*про добуток абсолютно збіжних рядів*). Якщо ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ збігаються абсолютно і мають суми S_a і S_b, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n$, де $c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots + a_n b_1 = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k+1}$, також абсолютно збігається і його сума $S = S_a \cdot S_b$ (абсолютно збіжні ряди можна перемножати почленно).

3. Ознаки збіжності знакозмінних рядів.

Теорема 8. *(ознака Абеля).*

$$\left.\begin{array}{l} 1) \sum_{n=1}^{\infty} b_n - \text{збігається}, \\ 2) \{a_n\} - \text{монотонна (нестрого)}, \\ 3) \{a_n\} - \text{обмежена, тобто} \\ \qquad \exists K > 0 \ \ \forall n \in \mathrm{N} \ \ |a_n| \le K , \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n - \text{збігається}.$$

Доведення. Розглянемо відрізок ряду $\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k = \sum_{i=1}^{p} a_{n+i} b_{n+i}$. Застосуємо умову 1) і критерій Коші збіжності ряду:

$$\sum_{i=1}^{\infty} b_n - \text{збігається} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists n_0 \in \mathrm{N} \ \ \forall n \ge n_0 \ \ \forall p \in \mathrm{N} \ \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} b_k \right| = \left| \sum_{i=1}^{p} b_{n+i} \right| < \varepsilon.$$

Щоб застосувати лему 1.1, введемо позначення $\alpha_i = a_{n+i}$, $\beta_i = b_{n+i}$. Всі вимоги леми виконуються, причому $L = \varepsilon$, $m = p$, тому

$$\left| \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \beta_i \right| \le \varepsilon |\alpha_1| + 2\varepsilon |\alpha_p| .$$

Застосуємо умову 3) і зробимо зворотні позначення:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k \right| \le 3\varepsilon K \quad \forall n \ge n_0 \forall p \in \mathrm{N}.$$

Тому за критерієм Коші ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ збігається. ■

Теорема 9. *(ознака Діріхле).*

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \{a_n\} \text{ спадає (нестрого)}, \\ 2)\ \lim\limits_{n} a_n = 0 \\ 3)\ \left\{ B_n = \sum\limits_{i=1}^{n} b_i \right\} - \text{обмежена, тобто} \\ \qquad \exists M > 0\ \forall n \in \mathrm{N}\ |B_i| \le M, \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_b - \text{збігається.}$$

Доведення. Розглянемо відрізок ряду $\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k = \sum\limits_{i=1}^{p} a_{n+i} b_{n+i}$. Покладемо $\alpha_i = a_{n+i}$, $\beta_i = b_{n+i}$. Тоді за лемою (окремий випадок), в наслідок умови 3), потрібно обрати $L = M$, отримаємо

$$\left| \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \beta_i \right| \le M\alpha_1 .$$

Зауважимо, що із умов 1) і 2) випливає, що $a_n \ge 0\ \forall n$. Застосуємо умову 2): $\lim\limits_{n} a_n = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \ \exists n_0 \in \mathrm{N}\ \ \forall n \ge n_0\ \ \ |a_n| = a_n < \varepsilon$.

Зробимо зворотні позначення та отримаємо

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k \right| \le M a_{n+1} < \varepsilon M \quad \forall n \ge n_0\ \ \forall p \in \mathrm{N} .$$

Тому, за критерієм Коші, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ збігається. ■

Теорема 10. *(ознака Лейбніца).* Нехай $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} C_n$, $C_n \ge 0\ \forall n$ – знакопочережний ряд. Має місце твердження:

$$\left.\begin{array}{l} 1) \{C_n\} \text{ спадає (нестрого)}, \\ 2) \lim\limits_{n} C_n = 0, \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} C_n - \text{збігається.}$$

Доведення. В ознаці Діріхле покладемо $a_n = C_n$, $b_n = (-1)^{n+1}$. Тоді 1) $\{a_n\}$ спадає (нестрого), 2) $\lim\limits_n a_n = 0$,

$$\left.\begin{aligned} &B_1 = b_1 = 1 \\ &B_2 = b_1 + b_2 = 1 - 1 = 0 \\ &B_3 = b_1 + b_2 + b_3 = 1 - 1 + 1 = 1 \\ &\ldots \end{aligned}\right\} \Rightarrow \{B_n\} = \{1,0,1,0,1,0,\ldots\} \text{ – обмежена.}$$

Отже, вимоги ознаки Діріхле виконуються, тому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}C_n$ збігається. ■

Оцінка залишку $r_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{k+1}C_k$ ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}C_n$ лейбніцевого типу.

Розглянемо знакопочережний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}C_n$, $C_n \geq 0\ \forall n$, у якого 1) $\{C_n\}$ спадає (нестрого) 2) $\lim\limits_n C_n = 0$. Оцінимо його відрізок $r_{n,p} = \sum\limits_{k=n+1}^{n+p}(-1)^{k+1}C_k$ за окремим випадком леми 1.1 в тих же позначеннях, що й в доведенні ознаки Лейбніца:

$$|r_{n,p}| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p}(-1)^{k+1}C_k\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p}a_k b_k\right| \leq Ma_{n+1} = \|M = 1\| = a_{n+1} = C_{n+1} \Rightarrow |r_{n,p}| \leq C_{n+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |r_n| = \left|\lim_{p\to\infty} r_{n,p}\right| \leq C_{n+1} = |a_{n+1}|.$$

☝ *Висновок:* модуль залишку ряду лейбніцевого типа не перевищує модуля першого відкинутого члена.

Приклад. Дослідити ряд на збіжність

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-.\frac{1}{4}+..+\frac{(-1)^{n}}{n}+....$$

Розв'язання. За ознакою Лейбніца

1) $\left\{C_n=\frac{1}{n}\right\}$ спадає, оскільки $C_n=\frac{1}{n}\geq\frac{1}{n+1}=C_{n+1}\quad\forall n$,

2) $\lim\limits_{n\to\infty}C_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$,

тому даний ряд збігається. ■