# Лекція №36

**Тема:** «Функціональні послідовності і функціональні ряди»

**План**

1. Функціональні послідовності і функціональні ряди.
2. Поточкова та рівномірна збіжність функціональних послідовностей.
3. Рівномірна збіжність функціональних рядів.
4. Ознаки рівномірної збіжності функціональних рядів.
5. Властивості рівномірно збіжних функціональних рядів.

## 1. Функціональні послідовності і функціональні ряди.

**Означення.** Якщо у відповідність до кожного натурального $n$ ставиться деяка функція $f_n(x)$, визначена на множині $\{x\}$, то множину занумерованих функцій $f_1(x), f_2(x),.., f_n(x),...$ називають *функціональною послідовністю*.

Множину $\{x\}$ на якій визначена кожна із функції $f_n(x)$ називають *множиною визначення функціональної послідовності.*

**Означення.** Нехай функціональна послідовність $\{u_n(x)\}$ задана на $\{x\}$. Формально утворену суму вигляду $u_1(x)+u_2(x)+...+u_n(x)+...=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ називають *функціональним рядом,* а множину $\{x\}$ – *множиною визначення функціонального ряду*.

Також будемо називати:

- $u_n(x)$ – загальним членом функціонального ряду,
- $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}u_k(x)$ – $n$-ою частковою сумою функціонального ряду.

**Означення.** Функціональну послідовність (ряд) називають *збіжною* в точці $x_0 \in \{x\}$, якщо числова послідовність $\{f_n(x_0)\}$ (числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$) збігається. Множину точок $x_0 \in \{x\}$, в яких функціональна послідовність (ряд) збігається, називають *областю збіжності послідовності (ряду).*

Зрозуміло, що область збіжності $X$ є підмножиною множини визначення $\{x\}$ функціональної послідовності (ряду), тобто $X \subseteq \{x\}$.

## 2. Поточкова та рівномірна збіжність функціональних послідовностей.

**Означення.** Якщо $x_0 \in X$, де $X$ – область збіжності послідовності (ряду), то їй можна поставити у відповідність єдине значення границі послідовності $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0)$ (суми ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$). Таким чином утворюється функція, визначена на області збіжності $X$. Цю функцію називають *граничною функцією (сумою)* відповідної послідовності (ряду). А саме:

$$f(x) \overset{X}{=} \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad (S(x) \overset{X}{=} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)).$$

Щоб підкреслити збіжність функціональної послідовності (ряду) в кожній окремій точці із множини $X$, цю функцію називають *поточковою границею функціональної послідовності (поточковою сумою функціонального ряду).* Застосовують також інше позначення:

$$f_n(x) \xrightarrow[X]{} f(x) \quad (\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \overset{\text{поточк.}}{\underset{X}{=}} S(x)), \text{ де } \quad X \subseteq \{x\}.$$

На мові $\varepsilon - n_0$ означення *поточкової збіжності* на множині $A \subseteq X$ (тут $X$ – область її збіжності) можна записати так:

$$f_n(x) \xrightarrow[X]{} f(x) \quad \overset{def}{\Leftrightarrow} \quad \underline{\forall x \in A} \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 = n_0(\varepsilon, x) \in \mathbb{N} : \ \forall n \geq n_0 \quad \left| f_n(x) - f(x) \right| < \varepsilon. \ (2.1)$$

**Приклад.** Знайти область збіжності функціональної послідовності $\left\{ f_n(x) = x^n \right\}$. На цій множині знайти граничну функцію (поточкову границю).

*Розв'язання***.** Множина визначення цієї функціональної послідовності – $\{x\} = \mathbb{R}$. Дослідимо послідовність на збіжність в кожній точці множини визначення:

$$|x| < 1, \quad \text{то} \quad \left\{ x^n \right\} - \text{н.м..п.} \ \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0;$$

$$|x| > 1, \quad \text{то} \quad \left\{ x^n \right\} - \text{н.в..п.} \ \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \infty;$$

$$x = 1, \quad \text{то} \quad x^n = 1 \ \forall n \quad \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1;$$

$$x=-1, \text{ то } \quad x^n=(-1)^n \ \forall n \Rightarrow \nexists \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

*Висновок:* область збіжності функціональної послідовності $\{f_n(x)=x^n\}$ – півінтервал $(-1;1]$. Гранична функція (поточкова границя), визначена на цій множині, подається у вигляді:

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\begin{cases}0, & x\in(-1,1);\\ 1, & x=1.\end{cases} \ \blacksquare$$

**Означення.** Функціональну послідовність $\{f_n(x)\}$ називають *рівномірно збіжною до функції* $f(x)$ *на множині* $A\subseteq X$ (тут $X$ – область її збіжності) і позначають $f_n(x)\underset{A}{\rightrightarrows} f(x)$, якщо

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists n_0=n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N} \quad \forall n\ge n_0 \quad \underline{\forall x\in A} \quad |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon. \qquad (2.2)$$

Зверніть увагу на місце розташування виразу «$\underline{\forall x\in A}$» в (2.1) і (2.2)! Поставимо запитання: чи завжди для будь-якого $\varepsilon>0$ можна знайти один, спільний для всіх значень $x\in A$, номер $n_0$, що залежить лише від $\varepsilon$, починаючи з якого буде виконуватися нерівність $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$? У випадку рівномірної збіжності послідовності відповідь на це запитання позитивна.

**Приклад.** Дослідимо послідовність $f_n(x)=\dfrac{x}{1+n^2x^2}$ на рівномірну збіжність на відрізку $[0,1]$.

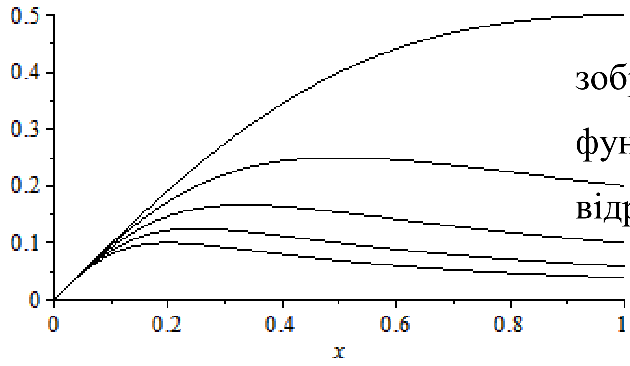


Рис. 2.2

*Розв'язання.* На рис. 2.2 зображено графіки декілька членів-функцій даної послідовності на відрізку $[0,1]$.

Знайдемо поточкову границю:

$$\lim_n f_n(x)=\lim_n \frac{x}{1+n^2x^2}=0 \quad \forall x\in[0,1]$$

. Доведемо, що $f_n(x)\underset{[0,1]}{\rightrightarrows} f(x))$, тобто

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists n_0=n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N} \quad \forall n\ge n_0$$

$$\forall x\in[0,1] \quad |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

Розглянемо нерівність $\left|f_n(x)-f(x)\right|<\varepsilon$. Для будь-якого $x\in[0,1]$ отримаємо:

$$\left|f_n(x)-f(x)\right|=\frac{x}{1+n^2x^2}=\frac{1}{2n}\cdot\frac{2nx}{1+n^2x^2}\le\left\|\begin{array}{l}(1-nx)^2\ge 0\Leftrightarrow\\ \Leftrightarrow 1+n^2x^2\ge 2nx\Leftrightarrow\\ \Leftrightarrow\dfrac{2nx}{1+n^2x^2}\le 1\end{array}\right\|\le\frac{1}{2n}\cdot 1<\varepsilon .$$

Остання нерівність виконується, починаючи з номера $n_0=\left[\dfrac{1}{2\varepsilon}\right]+1$. Знайдено номер $n_0$, що залежить лише від $\varepsilon$, однак від $x\in[0,1]$ не залежить. Тому дана послідовність рівномірно збігається на відрізку $[0,1]$. ■

**3. Рівномірна збіжність функціональних рядів.**

**Означення.** Функціональний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ називають *рівномірно збіжним* до $S(x)$ на множині $A$, якщо функціональна послідовність його часткових сум $\left\{S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k(x)\right\}$ рівномірно збігається на $A$, тобто якщо

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\underset{A}{\rightrightarrows}S(x)\ \overset{def}{\Leftrightarrow}\ S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}u_k(x)\underset{X}{\rightrightarrows}S(x).$$

**Приклад.** Довести, що ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$ на [-*a*,*a*] є рівномірно збіжним до $S(x)=e^x$.

*Розв'язання*. Розглянемо часткову суму даного ряду $S_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{x^k}{k!}$. Згідно з формулою Маклорена,

$$S(x)=S_n(x)+R_n(x),$$

де $R_n(x)$ – залишковий член в формулі Маклорена у . Оскільки

$$\left|S_n(x)-S(x)\right|=\left|R_n(x)\right|,$$

$$\left|R_n(x)\right| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}\right| = \left|\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}\right|,$$

то

$$0 \le \sup_{[-a,a]}\left|S_n(x) - S(x)\right| = e^a \cdot \frac{|a|^{n+1}}{(n+1)!} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty}\sup_{[-a,a]}\left|S_n(x) - S(x)\right| = 0 .$$

Отже,

$$S_n(x) \underset{[-a,a]}{\rightrightarrows} S(x) \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \underset{[-a,a]}{\rightrightarrows} e^x . \blacksquare$$

**Теорема** (*критерій Коші рівномірної збіжності функціонального ряду*). Для того щоб $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} S(x)$ в області $X$ необхідно і достатньо, щоб

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in N:\ \forall n \ge n_0\ \forall p \in N\quad \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| < \varepsilon .$$

**Наслідок.** Функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ збігається рівномірно на множині $A$ (тобто $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \underset{A}{\rightrightarrows}$) тоді і тільки тоді, коли послідовність його залишків $\left\{r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)\right\}$ рівномірно збігається до нульової функції $\theta(x) \equiv 0$ на цій множині, тобто $r_n(x) \underset{A}{\rightrightarrows} \theta(x)$.

**4. Ознаки рівномірної збіжності функціональних рядів.**

**Теорема** *(ознака Вейєрштрасса).* Розглянемо функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, заданий на множині $A$. Якщо існує числовий збіжний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ з невід'ємними членами, що мажорує функціональний ряд на множині $A$, тоді функціональний ряд рівномірно збігається на $A$. Тобто

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \text{, заданий на множині } A; \\ 2)\ \exists \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{ збігається, } c_n \ge 0\ \ \forall n \in \mathbb{N}; \\ 3)\ |u_n(x)| \le c_n\ \ \forall x \in A; \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \underset{A}{\rightrightarrows}$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ називають *мажорантним рядом.*

**Доведення.** Оскільки числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ збігається, то за критерієм Коші

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \ \forall n \ge n_0\ \ \forall p \in \mathbb{N}\ \ \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k < \varepsilon .$$

В наслідок нерівності трикутника і нерівностей 2) і 3), отримаємо

$$\forall n \ge n_0\ \ \forall p \in \mathbb{N}\ \ \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| \le \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k(x)| \le \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k < \varepsilon\ \ \forall x \in X\ \ \Rightarrow\ \ \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \underset{A}{\rightrightarrows}. \ \blacksquare$$

**Приклад.** Дослідити функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ на рівномірну збіжність на множині $[0;\pi]$.

$\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$ на множині $[0;\pi]$ $\forall n \in N$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ – збіжний. Тоді, функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ рівномірно збігається за ознакою Вейєрштрасса.

**Теорема 6** (*ознака Діріхле*). Якщо члени функціонального ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ на множині $X$ можна представити у вигляді $u_n(x) = \alpha_n(x)\beta_n(x)$ за умов: 1) послідовність $\{\alpha_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ – монотонно спадна і рівномірно збіжна до нуля: $\alpha_n(x) \ge \alpha_{n+1}(x)\ \forall n \in N$, $\alpha_n(x) > 0$ і $\lim_{n\to\infty} \alpha_n(x) = 0$; 2) $B_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \beta_n(x)$, $|B_n(x)| \le k$, $\forall x \in X$. Тоді $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(x)\beta_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} S(x)$ на множині $X$.

**Теорема 7** (*ознака Абеля*). Якщо члени функціонального ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ на множині $X$ можна представити у вигляді $u_n(x)=\alpha_n(x)\beta_n(x)$ за умов: 1) послідовність $\{\alpha_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ – незростаюча і рівномірно обмежена на множині $X$: $\exists c>0: \forall n\in N\ \forall x\in X\ |\alpha_n(x)|\le c$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n(x)\underset{X}{\rightrightarrows} B(x)$, $\forall x\in X$. Тоді $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n(x)\beta_n(x)\underset{X}{\rightrightarrows} S(x)$ на множині $X$.

**5. Властивості рівномірно збіжних функціональних рядів.**

**Теорема 8** (*теорема Коші про неперервність суми функціонального ряду*). Якщо члени $u_n(x)$ функціонального ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ є неперервні функції на проміжку $[a;b]$ і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\underset{[a;b]}{\rightrightarrows} S(x)$ на проміжку $[a;b]$, то сума ряду $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ неперервна на проміжку $[a;b]$.

**Теорема 9** (*терема Діні*). Нехай 1) члени $u_n(x)$ функціонального ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ неперервні функції на проміжку $[a;b]$ і $u_n(x)\ge 0\ \ \forall x\in[a;b], \forall n\in N$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)=S(x)$ на проміжку $[a;b]$ (послідовність $u_n(x)$ поточково збігається до неперервної функції $S(x)$) і $S(x)$ – неперервна функція на проміжку $[a;b]$. Тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\underset{[a;b]}{\rightrightarrows} S(x)$ на проміжку $[a;b]$.

**Теорема 10** (*про почленне інтегрування функціональних рядів*). Якщо члени $u_n(x)$ функціонального ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ є неперервні функції на проміжку $[a;b]$ і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\underset{[a;b]}{\rightrightarrows} S(x)$ на проміжку $[a;b]$, то $\forall[a;x]\subset[a;b]$ даний ряд можна почленно інтегрувати, причому інтеграл від суми ряду дорівнює сумі інтегралів, тобто:

$$\int_a^x\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\right)dt=\int_a^x f(t)dt=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^x u_n(t)dt.$$

***Зауваження.*** Це тільки достатня умова, з якої в випливає, що рівномірно збіжний ряд неперервних функцій можна почленно інтегрувати.

**Теорема 11** (*про почленне диференціювання функціональних рядів*). Якщо 1) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x)$ на проміжку $[a;b]$ (поточково); 2) $\forall n \in N \;\; u_n(x)$ неперервно диференційовані на $[a;b]$; 3) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) \underset{[a;b]}{\rightrightarrows} g(x)$. Тоді даний ряд можна почленно диференціювати, тобто:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) = S'(x) = \left( \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right)' .$$

**Теорема 12** (*про почленний граничний перехід під знаком суми функціонального ряду*). Якщо 1) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} S(x)$ на множині $X$; 2) $a$ – гранична точка множини $X$; 3) $\lim_{x \to a} u_n(x) = c_n$. Тоді 1) $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = c$; 2) $\lim_{x \to a} S(x) = c$.

***Зауваження.*** Теорему про почленний граничний перехід під знаком суми функціонального ряду можна переписати у такий спосіб:

$$\lim_{x \to a} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to a} u_n(x),$$

що і означає почленний граничний перехід.