Лекція

Тема: «Степеневі ряди»

План

1. Поняття степеневого ряду.
2. Радіус збіжності степеневого ряду.
3. Властивості степеневого ряду.
4. Розвинення функцій в степеневі ряди.

1. Поняття степеневого ряду.

Означення 2.7 Функціональний ряд вигляду

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

називають *степеневим рядом*, а числа $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ – *коефіцієнтами степеневого ряду*.

Очевидно, що кожен степеневий ряд збігається в точці $x=0$. Тому область збіжності D степеневого ряду містить точку нуль, тобто $D \supseteq \{0\}$.

Приклад 2.11 Довести, що ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n = 1 + x + 2!\, x^2 + 3!\, x^3 + \ldots + n!\, x^n + \ldots$$

має область збіжності $D = \{0\}$.

*Розв'язання***.** Включення $D \supseteq \{0\}$ виконується для всіх степеневих рядів. Оскільки

$$\lim_{n\to\infty} n! x^n = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{(1/x)^n} = \infty, & |x| < 1, \quad x \neq 0; \\ \infty, & |x| \geq 1; \end{cases} = \infty \neq 0,$$

то необхідна умова не виконується $\forall x \neq 0$. *Висновок*: $D = \{0\}$. ■

Приклад 2.12 Знайти область збіжності ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

*Розв'язання***.** Цей ряд було розглянуто в параграфі «Поняття числового ряду», де було доведено той факт, що $\forall x \in \mathbb{R}$ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!} = e^x$. *Висновок*: $D = \mathbb{R}$. ■

Приклад 2.13 Знайти область збіжності ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$.

*Розв'язання***.** Дослідимо його на абсолютну збіжність. Застосуємо ознаку порівняння для ряду $\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{x^n}{n}\right|$:

$$\left|u_n(x)\right|=\left|\frac{x^n}{n}\right|, \qquad \left|u_{n+1}(x)\right|=\frac{|x|^{n+1}}{n+1},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|u_{n+1}(x)\right|}{\left|u_n(x)\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|n}{n+1}=|x|.$$

Висновок:

$|x|<1\Rightarrow$ ряд абсолютно збігається,

$|x|>1\Rightarrow$ необхідна умова не виконується (за доведенням ознаки Даламбера у випадку $|q|>1$),

$x=1\Rightarrow \left.\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n}\right|_{x=1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}$ – розбігається,

$x=-1\Rightarrow \left.\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n}\right|_{x=-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ – умовно збігається.

Відповідь: $D=[1,-1)$ – область збіжності ряду $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n}$. ■

Теорема 2.18 *(теорема Абеля)*. Якщо степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ збігається в точці x_1, тоді

$\forall x:\ |x|<|x_1|\ \sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n$ – збігається абсолютно в точці x.

2. Радіус збіжності степеневого ряду.

🗁**Означення 2.8** *Радіусом збіжності степеневого ряду* $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ називають значення величини

$$r=\sup\{|x|: x\in D\},$$

де D - область збіжності степеневого ряду.

Твердження 2.1 Якщо $|x|<r$, тоді ряд $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ в точці x абсолютно збігається. Якщо $|x|>r$, тоді ряд $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ в точці x розбігається.

Означення 2.9 Інтервал $\left(-r;r\right)$ називають *інтервалом збіжності* степеневого ряду, де r – радіус збіжності степеневого ряду.

На кінцях інтервалу збіжності, тобто в точках $\left(-r\right)$ і r, ряд може як збігатися, так і розбігатись. Збіжність у цих точках потрібно перевіряти окремо. Отже, можливі варіанти для області збіжності степеневого ряду:

$$D=\left\{0\right\},\ D=\mathbb{R},\ D=\left(-r;r\right),\ D=\left[-r;r\right),\ D=\left(-r;r\right].$$

Наслідок 2.3 Формула для обчислення радіуса збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$:

$$\boxed{r=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left|a_n\right|}}}.$$

Можна отримати іншу формулу за умови, що $a_n\neq 0\ \forall n\in\mathbb{N}$:

$$\boxed{r=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|}.$$

3. Властивості степеневого ряду.

Лема 2.1 Нехай r – радіус збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, тоді $\forall\rho\in(0,r)$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ рівномірно збігається на відрізку $\left[-\rho;\rho\right]$.

Теорема 2.20 *(теорема про неперервність суми степеневого ряду).* Сума степеневого ряду $S\left(x\right)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ є неперервною функцією на інтервалі збіжності $\left(-r;r\right)$, де r - радіус збіжності степеневого ряду.

Теорема 2.21 *(теорема про інтегрування степеневих рядів).* Степеневий ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ можна почленно інтегрувати на $\left[0;x\right]\subset\left(-r;r\right)$ (r – радіус збіжності), крім того, радіус збіжності отриманого почленним інтегруванням степеневого ряду буде той самий, що і у вихідного ряду, тобто r.

Теорема 2.22 *(теорема про диференціювання степеневих рядів)*. Степеневий ряд можна почленно диференціювати всередині інтервалу збіжності, при цьому, отриманий почленним диференціюванням ряд має той самий радіус збіжності, що й вихідний ряд.

Наслідок 2.4 Степеневий ряд можна почленно диференціювати скільки завгодно разів. Всі ряди, отримані n-кратними диференціюваннями, будуть мати той самий радіус збіжності, що й вихідний ряд.

4. Розвинення функцій в степеневі ряди.

🗁**Означення 2.10** Кажуть, що *функція* $f(x)$ на $(-r;r)$ (на множині $\{x\}$) *може бути розвиненою в степеневий ряд*, якщо існує степеневий ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, який поточково збігається до $f(x)$ на $(-r;r)$, тобто

$$\exists \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n : \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x) \quad \forall x \in (-r;r) \quad (x \in \{x\}).$$

В більш загальному випадку

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = f(x) \quad \forall x \in (-r + x_0; r + x_0).$$

Твердження 2.2 *(необхідна умова розвинення функції в степеневий ряд)*. Для того, щоб функцію $f(x)$ можна було розвинути в степеневий ряд на $(-r;r)$ (на множині $\{x\}$) *необхідно*, щоб функція $f(x)$ мала на цьому інтервалі неперервні похідні будь-якого порядку.

Зауваження 2.7 Ця теорема дає лише необхідні умови можливості розвинення функції в степеневий ряд. Ці умови не є достатніми.

Твердження 1. Функція $f(x)$ може бути розвинена у степеневий ряд єдиним чином.

Доведення. Якщо функція $f(x)$ може бути розвинена у степеневий ряд на інтервалі $(-r;r)$, то

$$\exists \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x) \text{ на } (-r;r).$$

Тоді $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_nx^n+\ldots$ Продиференціюємо останню рівність декілька разів та знайдемо значення похідних у точці нуль:

$f'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots+na_nx^{n-1}+\ldots$ $\qquad f'(0)=1!a_1$;

$f''(x)=2a_2+3\cdot 2a_3x+4\cdot 3a_4x^2+\ldots+n(n-1)a_nx^{n-2}+\ldots$ $\qquad f''(0)=2!a_2$;

$f'''(x)=3\cdot 2a_3+4\cdot 3\cdot 2a_4x+\ldots+n(n-1)(n-2)a_nx^{n-3}+\ldots$ $\qquad f'''(0)=3!a_3$;

…

$f^{(n)}(x)=n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1\cdot a_n+\ldots$ $\qquad f^{(n)}(0)=n!a_n$.

Звідки

$$a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!} \quad \forall n\in N\bigcup\{0\}.$$

Отримано формулу для обчислення коефіцієнтів степеневого ряду, за якою вони можуть бути обчисленими однозначно, отже, і степеневий ряд визначається однозначно.

🗀**Означення 2.11** Степеневий ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, коефіцієнти якого обчислюються за формулою (2.17), називають *рядом Тейлора*.

Теорема 2.23 *(необхідна і достатня умови можливості розвинення функції в степеневий ряд)*. Для того, щоб функцію $f(x)$ можна було розвинути в степеневий ряд на $(-r;r)$, *необхідно і достатньо*, щоб залишковий член у формулі Тейлора, що відповідає цій функції, збігався до функції $\Theta(x)\equiv 0$ на $(-r;r)$ поточково.

Розглянемо основні розклади елементарних функцій:

1) $e^x=1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\ldots+\dfrac{x^n}{n!}+\ldots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$, $\forall -\infty<x<\infty$.

2) $\sin x==\dfrac{x}{1!}-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\dfrac{x^7}{7!}+\ldots+\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}+\ldots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$,

$\forall -\infty<x<\infty$.

3) $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\dfrac{x^6}{6!}+\ldots+\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}+\ldots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$, $\forall -\infty<x<\infty$.

4) $\ln(1+x)=\dfrac{x}{1}-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+\ldots+\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+\ldots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}$, $\forall -1<x\le 1$.

5) $(1+x)^{\alpha} = 1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\ldots+$

$+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$, $\forall|x|<1$.

6) $\operatorname{tg} x = x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\ldots$, $\forall|x|<\frac{\pi}{2}$.

7) $\arcsin x = x+\frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{40}+\ldots+\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2(2n+1)}x^{2n+1}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2(2n+1)}x^{2n+1}$,

$\forall|x|<1$.

8) $\operatorname{arctg} x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots+\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$, $\forall|x|<1$.

9) $\operatorname{sh} x = \frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\forall -\infty<x<\infty$.

10) $\operatorname{ch} x = 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\ldots+\frac{1}{(2n)!}x^{2n}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}x^{2n}$, $\forall -\infty<x<\infty$.