Лекція

Тема: «Ряд Фур'є»

План

1. Періодичні функції та їх властивості.
2. Простір кусково-неперервних на відрізку функцій.
3. Ортогональні і ортонормовані системи функцій.
4. Система тригонометричних функцій.
5. Поняття ряду Фур'є.

1. Періодичні функції та їх властивості.

При вивченні різноманітних періодичних процесів (зустрічаються у радіотехніці, електроніці, теорії пружності, теорії та практики автоматичного регулювання) доцільніше розкладати періодичні функції, що описують ці процеси, не у степеневий ряд, а у так званий тригонометричний ряд.

Означення 1. Функція $y = f(x)$, яка визначена на множині D, називається *періодичною* на цій множині, якщо існує таке число $T > 0$, що при кожному $x \in D$ значення $(x+T) \in D$ і $f(x+T) = f(x)$. При цьому число T називають періодом функції.

Для побудови графіка періодичної функції періоду T досить побудувати його на будь-якому відрізку довжини T і періодично продовжити його на всю область визначення.

2. Простір кусково-неперервних на відрізку функцій.

Означення 2. Функція називається *кусково-неперервною* на відрізку $[a;b]$, якщо вона неперервна на цьому відрізку, за винятком скінченого числа точок, в яких вона має розрив лише першого роду.

Означення 3. Функція називається *кусково-диференційовною* (*кусково-гладкою*) на відрізку $[a;b]$, якщо вона і похідна від неї є кусково-неперервні на цьому відрізку.

Означення 4. *Скалярнім добутком* функцій $f(x)$ і $\varphi(x)$ на відрізку $[a;b]$ називається число

$$(f,\varphi) = \int_a^b f(x)\varphi(x)dx .$$

Означення. *Евклідовим простором (ЕП)* називають такий ЛВП над полем $\mathbb{R}$ разом з функцією $g : X \times X \to \mathbb{R}$, яка задовольняє аксіомам

1c. $g(x,y) = g(y,x) \quad \forall x,y \in X$,

2c. $g(\lambda x,y) = \lambda g(x,y) \quad \forall x,y \in X \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$,

3c. $g(x+y,z) = g(x,z) + g(y,z) \quad \forall x,y,z \in X$,

4c. $g(x,x) \geq 0 \quad \forall x \in X \quad \wedge \quad (g(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0)$.

Функцію $g(x,y)$ називають скалярним добутком.

Означення. Точку c розриву називають *регулярною*, якщо в ній виконується співвідношення

$$f(c)=\frac{f(c+0)+f(c-0)}{2},$$

тобто значення функції дорівнює півсумі границь справа і зліва.

Висновок: якщо на множині кусково-неперервних функції, усі точки розриву яких є регулярними, можна задати функцію

$$\left(f,g\right)=\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx,$$

то ця функція буде скалярним добутком, а цей простір – евклідовим. Цей ростір будемо позначати $R_0[a,b]$.■

<u>Деякі властивості евклідового простору.</u>

Властивість 1. Має місце *нерівність Коші-Буняковського*

$$\left(x,y\right)\le\sqrt{\left(x,x\right)}\cdot\sqrt{\left(y,y\right)}$$

Доведення. В силу 4с аксіоми $\left(x-\lambda y,x-\lambda y\right)\ge 0$, тоді за аксіомами 1с і 2с

$$\left(x,x\right)-\lambda\left(y,x\right)-\lambda\left(x,y\right)+\lambda^2\left(y,y\right)\ge 0,$$

а за аксіомою 3с –

$$\left(x,x\right)-2\lambda\left(y,x\right)+\lambda^2\left(y,y\right)\ge 0.$$

Знайдемо дискримінант квадратного тричлена. Щоб остання нерівність була вірною, потрібно, щоб завжди виконувалась умова:

$$\frac{D}{4}=\left(x,y\right)^2-\left(x,x\right)\cdot\left(y,y\right)\le 0,$$

тобто

$$\left(x,y\right)^2\le\left(x,x\right)\cdot\left(y,y\right).\ ■$$

🗁**Означення/** ЛВП над полем $\mathbb{R}$, на якому задана функція $P:X\to\mathbb{R}$, що задовольняє аксіомам:

1н. $P\left(x\right)\geq 0\ \forall x\in X\ \wedge\left(p\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=0\right),$

2н. $P(\lambda x)=\left|\lambda\right|\cdot P(x)\ \forall x\in X\ \ \forall\lambda\in\square\ ,$

3н. $P(x+y)=P(x)+P(y)\ \ \forall x,y\in X$ – нерівність трикутника,

називається *нормованим простором*, а функція $P(x)$ називається *нормою.* Частіше норму позначають так: $P(x)=\|x\|$, читається «норма ікс».

В такому позначенні аксіоми норми будуть записані наступним чином:

1н. $\|x\|\geq 0\ \forall\, x\in X\ \wedge\left(\|x=0\Leftrightarrow x=0\|\right),$

2н. $\|\lambda x\|=\left|\lambda\right|\cdot\|x\|\ \forall x\in X\ \ \forall\lambda\in\square\ ,$

3н. $\|x+y\|<\|x\|+\|y\|\ \ \forall x,y\in X$ – нерівність трикутника.

Властивість 2. Має місце імплікація:

$$\boxed{\text{ЕП – Евклідовий простір}\Rightarrow\text{НП – нормований простір.}}$$

Означення. Функціональну послідовність $\left\{f_n(x)\right\}\subset R_0[a,b]$ називають *збіжною в середньому*, якщо $\lim\limits_{n}\|f_n-f\|=0$. Тобто

$\left\{f_n(x)\right\}\subset R_0[a,b]$ *збігається в середньому*

$$\overset{def}{\Leftrightarrow}\ \exists\ f(x)\in R_0[a,b]:\lim_{n\to\infty}\int_a^b[f_n(x)-f(x)]^2dx=0.$$

3. Ортогональні і ортонормовані системи функцій.

Означення. Два елементи x і y в ЕП X називають *ортогональними*, якщо $\left(x,y\right)=0$.

Система $\left\{\varphi_n\right\}\subset X$ – *ортогональна,* $\quad\overset{def}{\Leftrightarrow}\quad\left(\varphi_n,\varphi_m\right)=0\quad\forall n\neq m.$

Система $\left\{\varphi_n\right\}\subset X$ – *ортонормована,* $\quad\overset{def}{\Leftrightarrow}\quad$ 1) ортогональна,

2) $\|\psi_n\|=1\quad\forall n\in N.$

Останнє означення можна записати інакше:

система $\left\{\varphi_n\right\}\subset X$ – *ортонормована,* $\quad\overset{def}{\Leftrightarrow}\quad\left(\varphi_n,\varphi_m\right)=\delta_n^m\ \forall n,m,$

де $\delta_n^m = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ 1, & n = m \end{cases}$ – символ Кронекера.

Твердження 3.1 Якщо система $\{\varphi_n\} \subset X$ в ЕП X є ортогональною, то система $\left\{ \psi_n = \dfrac{\varphi_n}{\|\varphi_n\|} \right\}$ є ортонормованою.

Доведення. $$(\psi_n, \psi_m) = \left(\frac{\varphi_n}{\|\varphi_n\|}, \frac{\varphi_m}{\|\varphi_m\|} \right) = \begin{cases} 0, & m \neq n; \\ \dfrac{(\varphi_n, \varphi_n)}{\|\varphi_n\|^2} = 1, & n = m. \end{cases} \blacksquare$$

4. Система тригонометричних функцій.

Ортогональною системою в евклідовому просторі $E_0[-\pi;\pi]$ є система тригонометричних функцій:

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cos 3x, \sin 3x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots$$

1) Дослідимо її на ортогональність:

$$(1, \cos nx) = \int_{-\pi}^{\pi} (1 \cdot \cos nx) dx = \frac{1}{n} \sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 \quad \forall n \neq 0,$$

$$(\cos nx, \cos mx) = \int_{-\pi}^{\pi} (\cos nx \cdot \cos mx) dx =$$
$$= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos (n+m)x + \cos (n-m)x] dx = 0 \quad \forall n \neq m$$

аналогічно $(\sin nx, \sin mx) = 0 \quad \forall n \neq m$,

$$(\sin nx, \cos mx) = .\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \cos mx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin (n+m)x - \sin (n-m)x) \, dx =$$
$$= 0 - 0 = 0 \quad \forall n \neq m,$$

$$(1, \sin nx) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = -\frac{1}{n} \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} = -\frac{1}{n} (\cos n\pi - \cos(-n\pi)) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ортогональність доведено.

2) Побудуємо тепер ортонормовану систему в цьому просторі. Для цього обчислимо норми елементів тригонометричної системи (3.1):

$$\|1\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot 1 \cdot d\varphi} = \sqrt{1 \cdot 2\pi} = \sqrt{2\pi},$$

$$\|\cos nx\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\, dx = \frac{1}{2} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2nx)\, dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2n} \cdot \sin 2nx \right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = \pi,$$

$$\|\cos nx\| = \sqrt{\pi},$$

аналогічно

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\pi}.$$

Застосуємо твердження 3.1 до системи (3.1). Таким чином, ортонормована система тригонометричних функцій в $E_0[-\pi;\pi]$ має вигляд:

$$\boxed{\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} \right\}_{n=1}^{\infty}}. \tag{3.2}$$

Означення 11. Систему

$$1, \cos\frac{\pi x}{l}, \sin\frac{\pi x}{l}, \cos\frac{2\pi x}{l}, \sin\frac{2\pi x}{l}, \cos\frac{3\pi x}{l}x, \sin\frac{3\pi x}{l}, \ldots, \cos\frac{n\pi x}{l}, \sin\frac{n\pi x}{l}, \ldots$$

будемо називати *основною тригонометричною системою функцій*.

Теорема 1. Основна тригонометрична система функцій є ортогональною на будь-якому відрізку довжиною $2l$, наприклад на відрізку $[-l;l]$, причому норма першого члена дорівнює $\sqrt{2l}$, а будь-якого іншого $\sqrt{l}$.

5. Поняття ряду Фур'є.

Розглянемо кусково-неперервну на відрізку $[a;b]$ функцію $f(x)$ та ортонормовану систему $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty} = \varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$ на відрізку $[a;b]$, де $\varphi_n(x)$ – кусково-неперервні на відрізку $[a;b]$ функції.

Утворимо ряд:

$$d_1\varphi_1(x) + d_2\varphi_2(x) + \ldots + d_n\varphi_n(x) + \ldots$$

маємо:

$$d_k = \int_a^b f(x)\varphi_k(x)dx.$$

Означення 12. Коефіцієнти d_k вигляду $\int_a^b f(x)\varphi_k(x)dx$ називають *коефіцієнтами Фур'є*, а ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n \varphi_n(x) \sim f(x)$$

– *рядом Фур'є.* $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} d_k \varphi_k(x)$ – n*-на частинна сума* ряду.