Лекція

Тема: «Тригонометричний ряд Фур'є»

План

1. Тригонометричний ряд Фур'є.
2. Теорема про розвинення в ряд Фур'є кусково-диференційованих 2π-періодичних функцій з регулярними точками розриву.
3. Рівномірна збіжність тригонометричного ряду Фур'є.
4. Диференціювання та інтегрування тригонометричних рядів Фур'є.
5. Розвинення у ряд Фур'є функцій довільного періоду.
6. Розвинення функцій у ряд Фур'є на відрізку $[a;b]$.
7. Розвинення у ряд Фур'є парних і непарних функцій на відрізку $[0;l]$.
8. Розвинення у ряд Фур'є неперіодичних функцій.

1. Тригонометричний ряд Фур'є.

Розглянемо тригонометричний ряд. Спочатку припустимо, що він рівномірно збігається до функції $f(x)$:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\underset{[-\pi;\pi]}{\rightrightarrows} f(x). \tag{3.3}$$

Рівномірно збіжний ряд з неперервними членами можна почленно інтегрувати. Проінтегруємо почленно (3.3) на відрізку $[-\pi;\pi]$:

$$\frac{a_0}{2}\cdot 2\pi+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\left(\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nxdx\right)=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx \;\Rightarrow\quad \pi\cdot a_0=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx \quad\Rightarrow$$

$$\boxed{a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx}. \tag{3.4}$$

Помножимо обидві частини (3.3) на $\cos kx$:

$$\frac{a_0}{2}\cdot\cos kx+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx\cos kx+b_n\sin nx\cos kx)\underset{[-\pi;\pi]}{\rightrightarrows}?\; f(x)\cdot\cos kx\,. \tag{3.5}$$

Дослідимо останній ряд на рівномірну збіжність. Нехай $S_n(x)-$ часткова сума ряду (3.3). За умовою відомо, що $S_n(x)\underset{[-\pi;\pi]}{\rightrightarrows} f(x)$. Доведемо, що функціональна послідовність $\{S_n(x)\cdot\cos kx\}$ часткових сум ряду (3.5) рівномірно збігається:

$$0\le\lim_n\sup_{x\in[-\pi;\pi]}|S_n(x)\cdot\cos kx-f(x)\cdot\cos kx|=\lim_n\sup_{x\in[-\pi;\pi]}(|S_n(x)-f(x)|\cdot|\cos kx|)\le$$
$$\le\lim_n\sup_{x\in[-\pi;\pi]}|S_n(x)-f(x)|=0.$$

Отже, $S_n(x)\cdot\cos kx\underset{[-\pi;\pi]}{\rightrightarrows} f(x)\cdot\cos kx$.

Отриманий висновок про рівномірну збіжність ряду (3.5) дає змогу почленно його проінтегрувати:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\cos kxdx+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\left(\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos kxdx+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos kxdx\right)=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kxdx;$$

$$0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\pi\delta_n^k=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kxdx;$$

$$a_k\cdot\pi=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kxdx;$$

$$\boxed{a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kxdx\quad\forall k\in\mathbb{N}}.\tag{3.6}$$

Аналогічно,

$$\boxed{b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kxdx\quad\forall k\in\mathbb{N}}.\tag{3.7}$$

Означення. *Рядом Фур'є* функції $f(x)$ називають ряд вигляду

$$\boxed{f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)},\tag{3.8}$$

коефіцієнти якого визначаються формулами (3.4), (3.6), (3.7).

Символ «~» читається в записі (3.8) як «співставляється», тобто функції $f(x)$ співставляється ряд з коефіцієнтами (3.4), (3.6), (3.7), про який ми поки що не знаємо, збігається він до функції $f(x)$ чи ні. При виведенні формул (3.4), (3.6), (3.7) ми навіть припускали рівномірну збіжність, про це ми тим більше не можемо поки нічого сказати.

2. Теорема про розвинення в ряд Фур'є кусково-диференційованих 2π-періодичних функцій з регулярними точками розриву.

Означення. Функцію $f(x)$ називають *кусково-диференційовною на* відрізку $[a;b]$, якщо цей відрізок можна розбити на скінченну кількість таких відрізків $[\alpha;\beta]$, що функція $f(x)$ диференційована на інтервалі $(\alpha;\beta)$, а на його кінцях $\exists f'(\alpha+0)$, $\exists f(\alpha+0)$, $\exists f'(\beta-0)$, $\exists f(\beta-0)$.

Функцію $f(x)$ називають *кусково-диференційовною на* $\mathbb{R}$, якщо вона кусково-диференційовна на будь-якому відрізку із $\mathbb{R}$.

Теорема 3.1 (*основна теорема теорії рядів Фур'є*) Якщо функція $f(x)$

1) кусково-диференційовна на $\mathbb{R}$,
2) з регулярними точками розриву,
3) 2π-періодична,

тоді ряд Фур'є цієї функції поточково збігається до цієї функції, тобто в будь-якій точці $x_0\in\mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x_0) = f(x_0) = \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}.$$

Теорема. (*про розвинення у ряд Фур'є*). Нехай кусково-диференційовна на відрізку $[-l;l]$ функція $f(x)$ періодично з періодом $2l$ продовжена на всю нескінченну пряму. Тоді, тригонометричний ряд Фур'є функції $f(x)$ збігається в кожній точці $x \in (-\infty;\infty)$ до значення $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$.

3. Рівномірна збіжність тригонометричного ряду Фур'є.

Теорема. Нехай функція $f(x)$ задовольняє умовам:

1) функція $f(x)$ 2π-періодична на відрізку $[-\pi;\pi]$;

2) функція $f(x)$ є кусково-неперервною (неперервною) на відрізку $[-\pi;\pi]$;

3) функція $f(x)$ є кусково-диференційовною на відрізку $[-\pi;\pi]$.

Тоді ряд Фур'є $\dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \underset{[-\pi;\pi]}{\rightrightarrows} f(x)$.

Або іншими словами: ряд Фур'є 2π-періодичної неперервної і кусково-гладкої функції збігається рівномірно.

4. Диференціювання та інтегрування тригонометричних рядів Фур'є.

Теорема 3.3 (*про почленне інтегрування ряду Фур'є).*

Якщо $f(x)$ кусково-неперервна на $[-\pi;\pi]$, тоді її ряд Фур'є можна почленно інтегрувати.

Теорема 3.4 *(про рівномірну збіжність ряду Фур'є на* $[-\pi;\pi]$**).**

Якщо функція $f(x)$

1) неперервна на $[-\pi;\pi]$,

2) має кусково-неперервну похідну на $[-\pi;\pi]$;

3) $f(-\pi) = f(\pi)$,

тоді ряд Фур'є функції $f(x)$ рівномірно збігається на $[-\pi;\pi]$ до функції $f(x)$.

5. Розвинення у ряд Фур'є функцій довільного періоду.

Функція $f(x)$ – кусково-диференційовна на $(-l;l)$, з регулярними точками розриву. Сумою відповідного ряду Фур'є буде функція $f^*(x)$ $-2l$-періодична.

Заміна $x = \dfrac{ly}{\pi}, y = \dfrac{\pi x}{l}$ призведе до функції $f^*\left(\dfrac{ly}{\pi}\right) = g^*(y)$, а якщо $x \in (-l,l)$, то $y \in (-\pi;\pi)$. Тому задачу зведено до випадку 1:

$$g^*(y) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos ny + b_n \sin ny),$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g^*(y)\cos ny dy = \left\| x = \frac{ly}{\pi},\ dy = \frac{\pi}{l}dx \right\| = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx .$$

Висновок:

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx \qquad (n = 0,1,2,...), \qquad (3.18)$$

аналогічно

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \qquad (n \in \mathbb{N}), \qquad (3.19)$$

при цьому, враховуючи заміну $y = \frac{\pi x}{l}$, ряд Фур'є функції $f(x)$ матиме вигляд:

$$f^*(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l} \right). \qquad (3.20)$$

Зауваження. Аналогічні часткові випадки можна розглядати для функцій, що задані на $(0;l)$, розкладаючи її за косинусами або синусами кратних дуг. Також можна розглядати функції $f(x)$, які початково визначаються на довільних інтервалах (a,b), розглядаючи як півперіод $T = (b-a)/2 = l$.

6. Розвинення функцій у ряд Фур'є на відрізку $[a;b]$.

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{2\pi nx}{b-a} + b_n \sin\frac{2\pi nx}{b-a} \right)$$

$$a_0 = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)dx .$$

$$a_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\cos\frac{2\pi nx}{b-a}dx,\ n = 1,2,3,\ldots$$

$$b_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\sin\frac{2\pi nx}{b-a}dx,\ n = 1,2,3,\ldots$$

7. Розвинення у ряд Фур'є парних і непарних функцій на відрізку $[0;l]$.

Нехай функція $f(x)$ – парна (симетрична відносно осі OY).

$$f^{**}(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} \right), \text{ при } x \in (-\infty;+\infty);$$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} \right), \text{ при } x \in (0;l).$$

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx.$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx, \quad n = 1,2,3,\ldots$$

$$b_n = 0, \quad n = 1,2,3,\ldots$$

Нехай функція $f(x)$ – непарна (симетрична відносно початку координат).

$$f^{**}(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right), \text{ при } x \in (-\infty;+\infty);$$

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right), \text{ при } x \in (0;l).$$

$$a_0 = 0.$$

$$a_n = 0, \quad n = 1,2,3,\ldots$$

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, \; n = 1,2,3,\ldots$$

8. Розвинення у ряд Фур’є неперіодичних функцій.

Нехай функція $f(x)$ *задана на* $(-\pi;\pi)$, причому

- $f(x)$ кусково-диференційовна на $[-\pi;\pi]$,
- на інтервалі $(-\pi;\pi)$ має регулярні точки розриву (якщо це не так, то їх потрібно регуляризувати).

Ряд Фур’є такої функції $f(x)$ буде поточково збігатися до 2π-періодичної функції $f^*(x)$, яка є періодичним продовженням функції $f(x)$, тобто

1) $f^*(x)$ дорівнює функції $f(x)$ на $(-\pi;\pi)$ (окрім, можливо, точок розриву),

2) на ділянках $(-\pi+2\pi k;\pi+2\pi k)$, $\quad k \in \mathbb{Z}$ значення функції $f^*(x)$ збігаються з відповідними значеннями функції $f(x)$ на $(-\pi;\pi)$:

$$f^*(x) = f(x-2\pi k), \; x \in (-\pi+2\pi k;\pi+2\pi k), \quad k \in \mathbb{Z},$$

3) якщо функція-продовження в точках $\pi+2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, має розриви, її потрібно довизначити за регулярністю

$$f^*(\pi+2\pi k) = \frac{f^*(\pi+2\pi k+0)+f^*(\pi+2\pi k-0)}{2} = \frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}.$$

На рис. 3.1 – 3.2 схематично зображено графік даної функції $f(x)$ на інтервалі $(-\pi;\pi)$ і графік функції $f^*(x)$, яка є сумою ряду Фур’є функції $f(x)$.

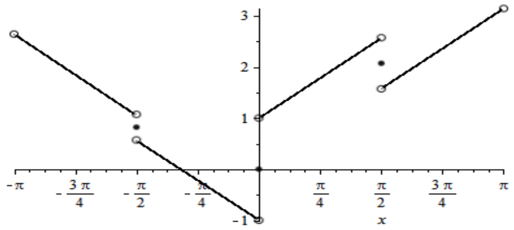


Рис. 3.1 Графік кусково-диференційовної на $[-\pi;\pi]$ функції $f(x)$ з регулярними точками розриву на $(-\pi;\pi)$

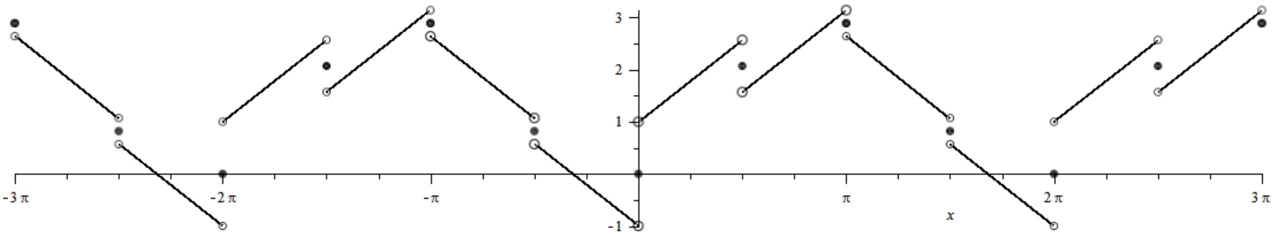


Рис. 3.2 Графік функції $f^*(x)$, що є періодичним продовженням функції $f(x)$ з регуляризованими точками $\pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

Задача. Побудувати розклад функції в ряд Фур'є функції $f(x)$, указати проміжки, в яких сума ряду дорівнює функції $f(x)$, побудувати графіки 6-ої часткової суми ряду, функції, що є сумою ряду Фур'є, і знайти суму ряду у вказаній точці x_0, якщо

а) $f(x) = \begin{cases} -3, & -\pi < x < 0; \\ 2, & 0 < x < \pi; \end{cases}$ $x_0 = 0$**;** **б)** $f(x) = \begin{cases} 2x, & -1 < x < 0; \\ -3x, & 0 < x < 1; \end{cases}$ $x_0 = 1.$

Для розв'язання цього прикладу корисними можуть бути розклади, наведені в Додатку В.

Розв'язання. **а)** Обчислимо коефіцієнти ряду Фур'є за формулами (3.4), (3.6) і (3.7):

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(-3)\,dx + \int_{0}^{\pi} 2\,dx\right) = \frac{1}{\pi}\left(-3\pi + 2\pi\right) = -1\,;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(-3)\cos nx\,dx + \int_{0}^{\pi} 2\cos nx\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{3}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{2}{n}\sin nx\Big|_{0}^{\pi}\right) = 0;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(-3)\sin nx\,dx + \int_{0}^{\pi} 2\sin nx\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{3}{n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{0} - \frac{2}{n}\cos nx\Big|_{0}^{\pi}\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{5}{n} - \frac{5}{n}\cos\pi n\right) = \frac{5}{\pi n}\left(1 - (-1)^n\right) =$$

$$=\begin{cases}\dfrac{10}{\pi(2k-1)}, & n=2k-1;\\ 0, & n=2k;\end{cases}\quad n,k\in\mathbb{N}$$

Підставимо знайдені коефіцієнти до розкладу (3.8). Функцію, що є сумою ряду Фур'є, позначимо $f^*(x)$, отримаємо:

$$f^*(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx=$$

$$=-\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(0\cdot\cos nx+\frac{5}{\pi n}\left(1-(-1)^n\right)\cdot\sin nx\right)=-\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{10}{\pi(2k-1)}\cdot\sin(2k-1)x. \quad (3.23)$$

Згідно з основною теоремою теорії рядів Фур'є, функція $f^*(x)$ збігається з функцією $f(x)$ у точках її неперервності, тобто в точках $x\in(-\pi;0)\bigcup(0;\pi)$. Функція $f^*(x)$ є 2π-періодичним подовженням функції $f(x)$. Вона має регулярні точки розриву, тобто значення в точках розриву дорівнює

$$f^*(\pi n)=\frac{f^*(\pi n+0)+f^*(\pi n-0)}{2}=\frac{f^*(-\pi+0)+f^*(\pi-0)}{2}=\frac{2+(-3)}{2}=-\frac{1}{2},\quad n\in\mathbb{Z},$$

зокрема, в точці $x_0=0$ маємо $f^*(1)=-\dfrac{1}{2}$. Перевіримо справедливість рівності $f^*(0)=-\dfrac{1}{2}$, підставляючи значення $x_0=0$ в ряд Фур'є (3.23):

$$f^*(0)=-\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{10}{\pi(2k-1)}\cdot 0=-\frac{1}{2}.$$

Таким чином,

$$f^*(x)=\begin{cases}-3, & -\pi+2\pi m<x<2\pi m;\\ 2, & 2\pi m<x<\pi+2\pi m;\\ -\dfrac{1}{2}, & x=\pi m,\end{cases}\quad m\in\mathbb{Z}.$$

Графік 6-ої часткової суми одержаного ряду Фур'є

$$S_6(x)=-\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{6}\frac{10}{\pi(2k-1)}\cdot\sin(2k-1)x$$

побудовано на рис. 3.9. Графік функції $y=f^*(x)$ зображено на рис. 3.10.

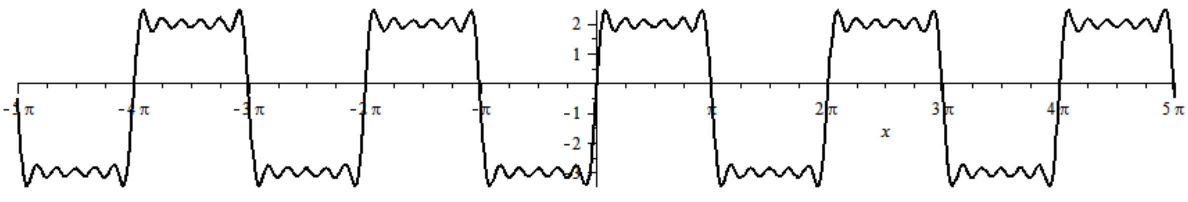
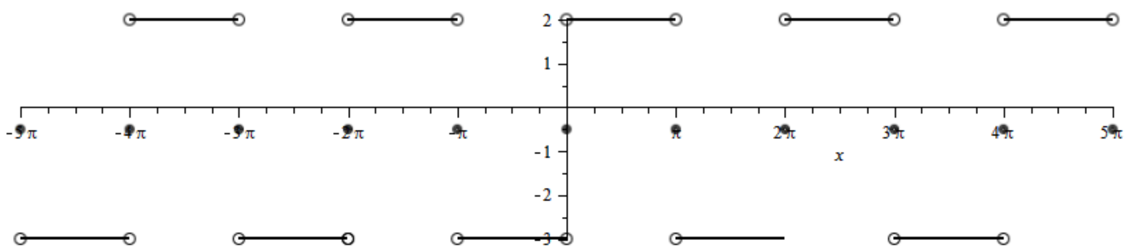


Рис. 3.9



■

Рис. 3.10

б) Обчислимо коефіцієнти ряду Фур’є функції $f(x)=\begin{cases}2x, & -1<x<0;\\ -3x, & 0<x<1;\end{cases}$ $x_0=0$ за формулами (3.18) і (3.19), поклавши $l=1$ із застосуванням формули інтегрування частинами:

$$a_0=\frac{1}{1}\left(\int_{-1}^{0}2x\,dx+\int_{0}^{1}(-3x)\,dx\right)=-\frac{5}{2};$$

$$a_n=\frac{1}{1}\left(\int_{-1}^{0}2x\cos\frac{\pi nx}{1}\,dx+\int_{0}^{1}(-3x)\cos\frac{\pi nx}{1}\,dx\right)=\left\|\begin{matrix}u=x, & du=dx,\\ dv=\cos\pi nx\,dx, & v=\dfrac{1}{\pi n}\sin\pi nx,\end{matrix}\right\|=$$

$$=2\left(\frac{x}{\pi n}\sin\pi nx\Big|_{-1}^{0}-\frac{1}{\pi n}\int_{-1}^{0}\sin\pi nx\,dx\right)-3\left(\frac{x}{\pi n}\sin\pi nx\Big|_{0}^{1}-\frac{1}{\pi n}\int_{0}^{1}\sin\pi nx\,dx\right)=$$

$$=-\frac{5}{\pi^2n^2}\left(\cos\pi n+\pi n\sin\pi n-1\right)=-\frac{5\left((-1)^n-1\right)}{\pi^2n^2}=\begin{cases}\dfrac{10}{\pi^2(2k-1)^2}, & n=2k-1;\\ 0, & n=2k;\end{cases}$$

$$b_n=\frac{1}{1}\left(\int_{-1}^{0}2x\sin\frac{\pi nx}{1}\,dx+\int_{0}^{1}(-3x)\sin\frac{\pi nx}{1}\,dx\right)=\frac{1}{\pi^2n^2}\left(-\sin\pi n+\pi n\cos\pi n\right)=\frac{(-1)^n}{\pi n};$$

$$n,k\in\mathbb{N}.$$

Підставимо знайдені коефіцієнти до розкладу (3.20), отримаємо:

$$f^*(x)=-\frac{5}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{5\left((-1)^n-1\right)}{\pi^2n^2}\cdot\cos\pi nx+\frac{(-1)^n}{\pi n}\cdot\sin\pi nx\right)=$$

$$=-\frac{5}{4}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{10}{\pi^2(2k-1)^2}\cdot\cos\pi(2k-1)x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\pi n}\cdot\sin\pi nx. \qquad (3.24)$$

Згідно з основною теоремою теорії рядів Фур’є, функція $f^*(x)$ збігається з функцією $f(x)$ у точках її неперервності, тобто в точках $x\in(-1;0)\cup(0;1)$. Функція $f^*(x)$ є 2-періодичним подовженням функції $f(x)$. Вона має регулярні точки розриву, тобто значення в точках розриву дорівнює

$$f^*(1+2n)=\frac{f^*(1+2n+0)+f^*(1+2n-0)}{2}=\frac{f^*(-1+0)+f^*(1-0)}{2}=$$

$$=\frac{2\cdot(-1)+(-3)\cdot 1}{2}=-\frac{5}{2};$$

$$f^*(2n)=\frac{f^*(2n+0)+f^*(2n-0)}{2}=\frac{f^*(+0)+f^*(-0)}{2}=\frac{(-3)\cdot 0+2\cdot 0}{2}=0;\ n\in\mathbb{Z}\ ,$$

зокрема, в точці $x_0=1$ маємо $f^*(1)=-\frac{5}{2}$. Перевіримо справедливість останньої рівності, підставляючи значення $x_0=1$ в ряд Фур'є (3.24):

$$f^*(1)=-\frac{5}{4}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{10}{\pi^2(2k-1)^2}\cdot\underbrace{\cos\pi(2k-1)}_{=-1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\pi n}\cdot\underbrace{\sin\pi n}_{=0}=-\frac{5}{4}-\frac{10}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}.$$

Потрібне значення суми числового ряду можна знайти в доданку В, а саме: $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$. Звідки одержимо:

$$f^*(1)=-\frac{5}{4}-\frac{10}{\pi^2}\cdot\frac{\pi^2}{8}=-\frac{5}{2}.$$

Таким чином,

$$f^*(x)=\begin{cases}2(x-2m), & -1+2m<x\le 2m;\\ -3(x-2m), & 2m<x<1+2m;\\ -\frac{5}{2}, & x=1+2m;\end{cases}\quad m\in\mathbb{Z}.$$

Графік 6-ої часткової суми одержаного ряду Фур'є (3.24)

$$S_6(x)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{6}\frac{(-1)^n}{\pi n}\cdot\sin\pi nx+\sum_{k=1}^{3}\frac{10}{\pi^2(2k-1)^2}\cdot\cos\pi(2k-1)x$$

побудовано на рис. 3.11. Графік функції $y=f^*(x)$ зображено на рис. 3.12.

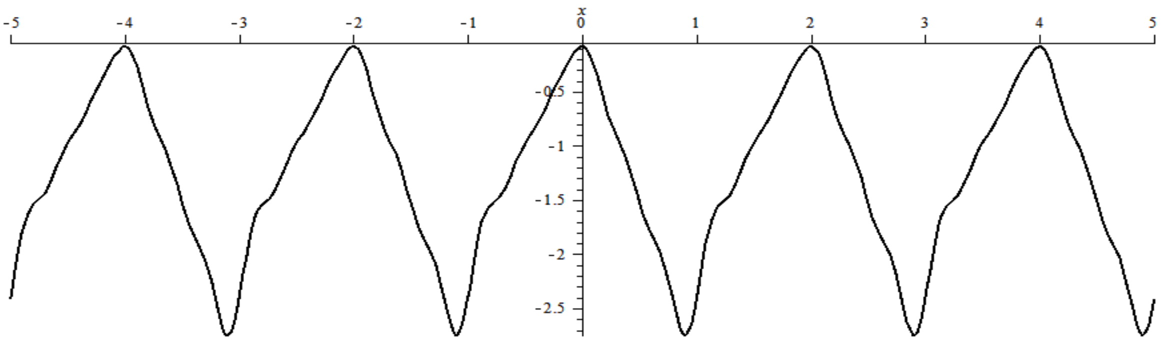
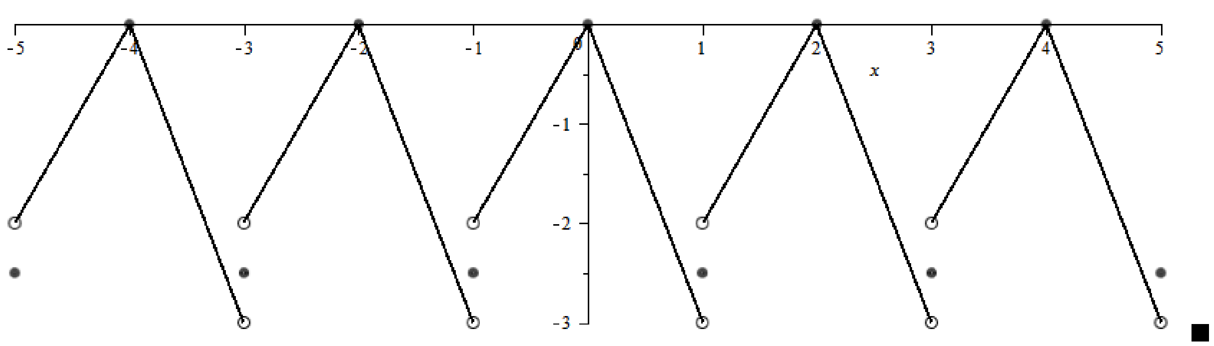


Рис. 3.11



■

Рис. 3.12