Лекція

Тема: «Подвійні інтеграли»

План

1. Поняття подвійного інтеграла.
2. Властивості подвійних інтегралів.
3. Обчислення подвійних інтегралів у декартовій системі координат.

1. Поняття подвійного інтеграла.

Розглянемо задачу обчислення об'єму *криволінійного циліндру*.

Нехай $z = f(x, y)$ – невід'ємна, неперервна в області D функція. У тривимірному просторі рівняння $z = f(x, y)$ визначає деяку поверхню Ω, яка проектується на площину xOy в область D. Тіло G, яке обмежено зверху поверхнею Ω, знизу областю D з межею L, з боків – циліндричною поверхнею з напрямною L і твірними, які паралельні осі Oz, називають *криволінійним циліндром* (рис.8).

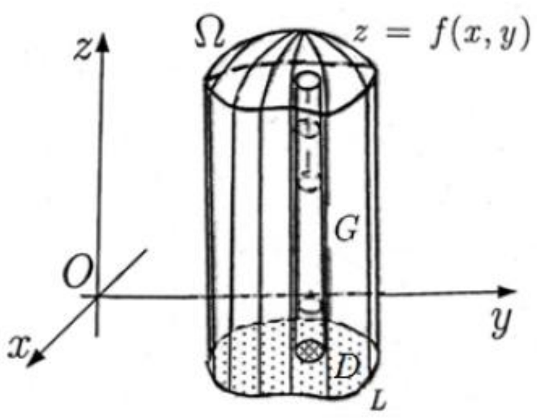

Рис. 8

Знайдемо об'єм криволінійного циліндра.

1. Розіб'ємо область D довільним чином на $n \cdot m$ ділянок D_{ij} з кусково-гладкими межами L_{ij}, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$. Таким чином, область D буде покрита сіткою, де D_{ij} – клітинка сітки. Позначимо діаметр кожної клітинки d_{ij}, а її площу – ΔS_{ij}. У кожній клітинці D_{ij} довільним чином виберемо точку $M\left(\xi_i, \eta_j\right)$. Через межі L_{ij} проведемо циліндричні поверхні G_{ij} із твірними, паралельними осі Oz, і з висотою, яка дорівнює $f\left(\xi_i, \eta_j\right)$ – стовпчики G_{ij}.

2. Кількість стовпчиків G_{ij} буде $n \cdot m$, об'єм кожного з яких

$$\Delta V_{ij} = f(\xi_i, \eta_j)\Delta S_{ij}, \quad i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,m} .$$

3. Тоді для знаходження об'єму V криволінійного циліндра G будемо мати приблизну рівність

$$V \approx \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f\left(\xi_i, \eta_j\right)\Delta S_{ij} .$$

Сума $\sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} f\left(\xi_i, \eta_j\right)\Delta S_{ij}$ називається інтегральною сумою.

4. Нехай d − найбільше з чисел d_{ij}. Очевидно, якщо $d \to 0$, то, зокрема, $n, m \to \infty$, і для значення об'єму тіла дістанемо

$$V = \lim_{\substack{d\to 0,\\ n,m\to\infty}} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f\left(\xi_i, \eta_j\right)\Delta S_{ij}.$$

Вираз праворуч називають подвійним інтегралом від функції $f(x, y)$ за областю D і позначають

$$\lim_{\substack{d\to 0,\\ n,m\to\infty}} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f\left(\xi_i, \eta_j\right)\Delta S_{ij} = \iint\limits_{D} f\left(x, y\right) dS.$$

Отже, для об'єму циліндра G маємо

$$V = \iint\limits_{D} f\left(x, y\right) dS.$$

В цьому полягає геометричний зміст подвійного інтеграла.

Узагальнюючи конструкцію, застосовану при обчисленні об'єму циліндра, приходимо до наступного означення подвійного інтеграла за умови, що $z = f(x, y)$ вже довільна функція, яка визначена в області D .

Означення. Якщо існує скінченна границя інтегральної суми $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} f\left(\xi_i, \eta_j\right)\Delta S_{ij}$, коли найбільший з діаметрів ділянок прямує до нуля, яка не залежить ані від способу розбиття області D на ділянки, ані від вибору точок у середині кожної ділянки, то її називають *подвійним інтегралом за областю* D від функції f і позначають

$$\iint\limits_{D} f\left(x, y\right) dS = \lim_{\substack{d\to 0,\\ n,m\to\infty}} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f\left(\xi_i, \eta_j\right)\Delta S_{ij}.$$

Якщо функція $f(x, y)$ ***неперервна в області D, то подвійний інтеграл*** $\iint\limits_{D} f\left(x, y\right) dS$ ***існує.***

2. Властивості подвійних інтегралів.

1. *(лінійність)*. Для будь-яких $\alpha, \beta \in R$:

$$\iint\limits_{D}\left(\alpha f\left(x, y\right) + \beta g\left(x, y\right)\right) dxdy = \alpha \iint\limits_{D} f\left(x, y\right) dxdy + \beta \iint\limits_{D} g\left(x, y\right) dxdy,$$

за умови, що обидва подвійні інтеграли праворуч існують.

2. *(адитивність)*. Якщо область D є об'єднання двох областей D_1 та D_2 (рис.10), які не мають спільних внутрішніх точок, то

$$\iint\limits_{D=D_1\bigcup D_2} f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\,dxdy .$$

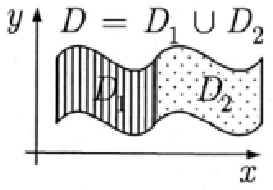

Рис. 10

3. *(нормованість)*. $\iint\limits_D 1dxdy = \text{площа}(D) = S_D$.

4. Якщо $f(x,y)\ge 0,\ \ (x,y)\in D$, і подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ існує, то $\iint\limits_D f(x,y)dxdy \ge 0$.

5. Якщо $f(x,y)\le g(x,y),\ \ (x,y)\in D$, то $\iint\limits_D f(x,y)dxdy \le \iint\limits_D g(x,y)dxdy$, за умови, що обидва подвійні інтеграли існують.

6. Якщо функція f неперервна в області D, то справедлива нерівність

$$mS_D \le \iint\limits_D f(x,y)dxdy \le MS_D ,$$

де $m = \min\limits_D f(x,y),\ \ M = \max\limits_D f(x,y),\ \ S_D$ – площа області D.

7. Якщо функція f неперервна в області D, то існує точка $M_0(x_0,y_0)\in D$ така, що

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = f(x_0,y_0)S_D .$$

У подальшому розглядаються неперервні в області D функції $f(x,y)$.

3. Обчислення подвійних інтегралів у декартовій системі координат.

Покажемо, що обчислення подвійного інтеграла зводиться до обчислення двох визначених інтегралів.

Область D називають правильною у напрямі осі Oy, якщо будь-яка вертикальна пряма, що проходить через внутрішню точку області перетинає межу області не більше як у двох точках (рис.11).

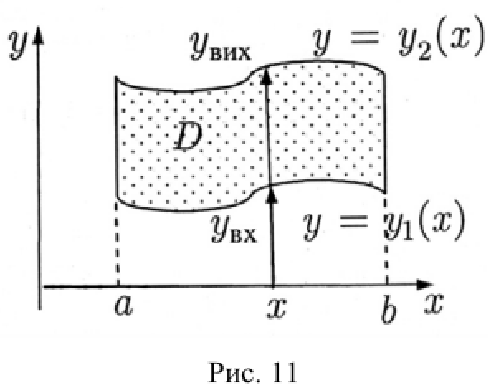

Рис. 11

Нехай неперервна функція $f(x,y)\ge 0$.

Тоді $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ виражає об'єм V циліндричного тіла.

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \right) dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy. \qquad (4.1)$$

Інтеграл $\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$ називають *внутрішнім*, а інтеграл $\int\limits_a^b \left(\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \right) dx$ – *зовнішнім.* Праву частину одержаної формули називають *повторним* інтегралом.

Для області D, *правильної у напрямі осі* Ox, тобто області, для якої будь-яка горизонтальна пряма, що проходить через внутрішню точку області, перетинає межу області не більше як у двох точках (рис.13), маємо формулу

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx \right) dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx.$$

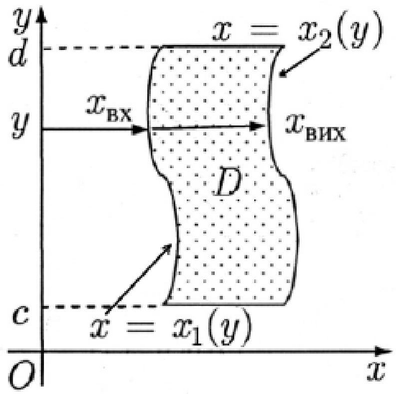

Рис. 13

Тут внутрішнім є інтеграл за змінною x.

Приклад 2. Обчислити повторний інтеграл $\int\limits_{-3}^{3} dy \int\limits_{y^2-4}^{5} (x+2y)dx$.

Розв'язок. Обчислимо спочатку внутрішній інтеграл. Інтегруючи по x, змінну y вважаємо сталою:

$$\int\limits_{y^2-4}^{5} (x+2y)dx = \int\limits_{y^2-4}^{5} x\,dx + 2y \cdot \int\limits_{y^2-4}^{5} dx = \frac{x^2}{2}\Bigg|_{y^2-4}^{5} + 2yx\Bigg|_{y^2-4}^{5} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(5^2 - \left(y^2-4\right)^2\right) + 2y\left(5-\left(y^2-4\right)\right) = \frac{9}{2} - \frac{y^4}{2} + 4y^2 + 18y - 2y^3.$$

Тепер обчислимо зовнішній інтеграл від функції, яку отримали при обчисленні внутрішнього інтеграла:

$$\int\limits_{-3}^{3} \left(\frac{9}{2} - \frac{y^4}{2} + 4y^2 + 18y - 2y^3 \right) dy = \left(\frac{9}{2}y - \frac{y^5}{10} + \frac{4y^3}{3} + 9y^2 - \frac{y^4}{2} \right)\Bigg|_{-3}^{3} =$$

$$= \frac{9}{2}\left(3-(-3)\right) - \frac{3^5-(-3)^5}{10} + \frac{4}{3}\left(3^3-(-3)^3\right) + 9\left(3^2-(-3)^2\right) - \frac{3^4-(-3)^4}{2} =$$

$$= 27 - \frac{3^5}{5} + 72 + 0 - 0 = 50{,}4$$

Відповідь: 50,4