Лекція
Тема: «Заміна змінних у подвійному інтегралі»
План

1. Формула заміни змінних у подвійному інтегралі.
2. Подвійний інтеграл у полярних координатах.
3. Застосування подвійного інтеграла.

1. Формула заміни змінних у подвійному інтегралі.

Нехай $f(x,y)$ − неперервна в області D функція. За таких умов існує подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$. Відобразимо область D за допомогою функцій $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$ в область $\tilde{D}$. При цьому будемо вважати, що таке відображення взаємно-однозначне, тобто виконуються наступні умови:

1) кожна точка області D відображається в єдину точку області $\tilde{D}$;
2) різні точки області D відображаються в різні точки області $\tilde{D}$;
3) кожній точці області $\tilde{D}$ відповідає точка області D, яка відображається в цю точку.

За таких умов з функцій $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$ однозначно можна виразити функції $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$.

Тоді кожній точці $M(x;y)\in D$ відповідає певна точка $\tilde{M}(u,v)\in\tilde{D}$.

Якщо функції $x(u,v)$ та $y(u,v)$ мають в області $\tilde{D}$ неперервні частинні похідні, то справедлива наступна *формула заміни змінних у подвійному інтегралі*:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_{\tilde{D}} f\big(x(u,v),y(u,v)\big)\big|J(u,v)\big|dudv, \tag{5.1}$$

де $J(u,v)=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}$, за умови, що $J(u,v)\neq 0$.

Визначник $J(u,v)$ називають *якобіаном (визначником Якобі-Остроградського)*. Його модуль є коефіцієнтом спотворення площі за такої заміни змінних, тобто: $dxdy=\big|J(u,v)\big|dudv$.

2. Подвійний інтеграл у полярних координатах.

Частинним випадком заміни змінних у подвійному інтегралі є перехід від прямокутних декартових до полярних координат (рис.19). Такий перехід здійснюють за наступними формулами:

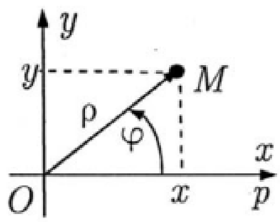


Рис. 19

$$\begin{cases} x=\rho cos\varphi \\ y=\rho sin\varphi \end{cases},\quad \rho>0,\ \ 0<\varphi\le 2\pi,$$

тобто, в даному випадку функції $x = x(\rho,\varphi)$, $y = y(\rho,\varphi)$ взаємно-однозначно перетворюють область $\tilde{D}$ в область *D*.

При цьому маємо:

$$J(\rho,\varphi) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho,$$

тобто $|J(\rho,\varphi)| = \rho$.

Таким чином, при переході від прямокутної декартової системи координат до полярної системи формула (5.1) набуває наступного вигляду:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{\tilde{D}} f\left(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi\right)\rho d\varphi d\rho. \qquad (5.2)$$

В області, яка обмежена променями $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ і кривими $\rho = \rho_1(\varphi)$, $\rho = \rho_2(\varphi)$, $\rho_1(\varphi) < \rho_2(\varphi)$, і яку називають радіальною (рис.20), для обчислення подвійного інтеграла справедлива формула:

$$\iint\limits_{\tilde{D}} f\left(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi\right)\rho d\varphi d\rho = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f\left(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi\right)\rho d\rho$$

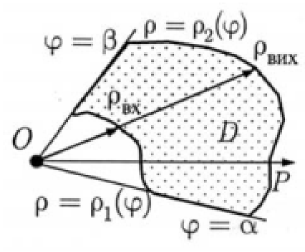


Рис. 20

Для *узагальненої полярної системи координат*:

$$\begin{cases} x = a\rho\cos\varphi \\ y = b\rho\sin\varphi \end{cases}, \qquad \rho > 0,\ \ 0 < \varphi \le 2\pi, \quad J(\rho,\varphi) = \begin{vmatrix} a\cos\varphi & -a\rho\sin\varphi \\ b\sin\varphi & b\rho\cos\varphi \end{vmatrix} = ab\rho,$$

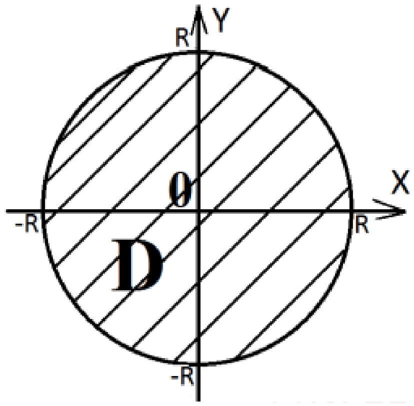
$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = ab\iint\limits_{\tilde{D}} f\left(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi\right)\rho d\varphi d\rho. \qquad (5.3)$$

Для *узагальненої полярної системи координат*:

$$\begin{cases} x = a\rho\cos\varphi \\ y = b\rho\sin\varphi \end{cases}, \qquad \rho > 0,\ \ 0 < \varphi \le 2\pi, \quad J(\rho,\varphi) = \begin{vmatrix} a\cos\varphi & -a\rho\sin\varphi \\ b\sin\varphi & b\rho\cos\varphi \end{vmatrix} = ab\rho,$$

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = ab\iint\limits_{\tilde{D}} f\left(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi\right)\rho d\varphi d\rho. \qquad (5.3)$$

Приклад Обчислити $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2 + a^2}dxdy$, якщо область D (Рис.11)задається умовою $x^2 + y^2 \le R^2$.



► Зважаючи на вигляд первісної

$$\int \sqrt{u^2 + A}du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 + A} + \frac{A}{2}\ln\left|u + \sqrt{u^2 + A}\right| + C$$

для внутрішнього повторного інтеграла (змінні x та y входять симетрично), зрозуміло, що обчислення заданого інтеграла в декартовій системі координ буде дуже громіздким. Перейдемо до полярної системи координат. Тоді:

$$\iint_D \sqrt{x^2 + y^2 + a^2}dxdy = \begin{vmatrix} x = \rho cos\varphi \\ y = \rho sin\varphi \\ J = \rho \end{vmatrix} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \sqrt{\rho^2 + a^2}\rho d\rho =$$

$$= \begin{vmatrix} \rho^2 + a^2 = t \\ 2\rho d\rho = dt \end{vmatrix} = \varphi \Big|_0^{2\pi} \cdot \frac{1}{2}\int_{a^2}^{R^2+a^2} t^{\frac{1}{2}}dt = \frac{2\pi}{3}\left(\sqrt{(R^2 + a^2)^3} - a^3\right).$$ ◄

3. Застосування подвійного інтеграла.

Об'єм циліндроїда (геометричний зміст подвійного інтеграла)

Об'єм криволінійного циліндра, обмеженого зверху поверхнею $z = f(x, y) \geq 0$, яка проектується на площину Oxy в область D, обчислюється за формулою:

$$V = \iint_D f(x, y)dxdy. \qquad (6.1)$$

Площа плоскої області D

$$S_D = \iint_D dxdy. \qquad (6.2)$$

Площа поверхні

Нехай функція $z = f(x, y)$ має неперервні частинні похідні $f'_x(x, y)$ і $f'_y(x, y)$ в області D. У тривимірному просторі рівняння $z = f(x, y)$ визначає деяку поверхню Ω, яка проектується на площину xOy в область D (рис.8). Площа S_Ω цієї поверхні обчислюється за формулою

$$S_\Omega = \iint_D \sqrt{1 + \left(f'_x\right)^2 + \left(f'_y\right)^2} dxdy. \qquad (6.3)$$

Маса пластинки D

Нехай в області D розподілена деяка маса (електричний заряд, теплота тощо).

Розіб'ємо пластинку D довільним чином на $n \cdot k$ ділянок D_{ij} з площею ΔS_{ij} і масою Δm_{ij}, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,k}$.

Середньою густиною розподілу маси на ділянці D_{ij} називають відношення $\dfrac{\Delta m_{ij}}{\Delta S_{ij}}$.

Нехай $M(x,y)$ − будь-яка точка в області D і D_{ij} − та ділянка розбиття, яка містить точку $M(x,y)$. Нехай тепер ділянка D_{ij} стягується в точку $M(x,y)$, що позначатимемо, як $D_{ij} \to M$, тоді і $\Delta S_{ij} \to 0$. Якщо існує границя

$$\lim_{D_{ij} \to M} \frac{\Delta m_{ij}}{\Delta S_{ij}},$$

то вона є деякою функцією від точки $M(x,y)$, і цю функцію називають поверхневою густиною

$$\mu(x,y) = \lim_{D_{ij} \to M} \frac{\Delta m_{ij}}{\Delta S_{ij}}.$$

Нехай, навпаки, в області D задано поверхневу густину розподілу маси як неперервну функцію $\mu(x,y)$, $(x,y) \in D$, і треба визначити масу m пластинки D. Знову розіб'ємо пластинку D довільним чином на $n \cdot k$ ділянок D_{ij} з площею ΔS_{ij} і масою Δm_{ij}, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,k}$, і виберемо в кожній ділянці D_{ij} довільну точку (x_i, y_j). Тоді

$$\Delta m_{ij} \approx \mu(x_i, y_j)\Delta S_{ij}, \quad m \approx \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} \mu(x_i, y_j)\Delta S_{ij},$$

$$m = \lim_{\substack{n\to\infty,\\ k\to\infty}} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} \mu(x_i, y_j)\Delta S_{ij} = \iint_D \mu(x,y)\,dxdy.$$

Отже, масу пластинки D з поверхневою густиною $\mu(x,y)$, $(x,y) \in D$ знаходять за формулою

$$m = \iint_D \mu(x,y)\,dxdy. \qquad (6.4)$$

Якщо пластинка однорідна, то $\mu(x,y) = \mu$ $-$ *const*.

Статичними моментами матеріальної точки масою m щодо осі Ox та осі Oy називають відповідно наступні величини:

$$M_x = my \text{ і } M_y = mx.$$

Нехай в області D задано поверхневу густину розподілу маси $\mu(x,y)$, як неперервну функцію, $(x,y) \in D$. Розіб'ємо фігуру D на $n \cdot k$ ділянок D_{ij} з площею ΔS_{ij}, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,k}$. Виберемо в кожній ділянці D_{ij} точку (x_i, y_j).

Наближено можна вважати, що маса ділянки D_{ij} зосереджена в точці (x_i, y_j) і дорівнює $\mu(x_i, y_j)\Delta S_{ij}$. Тоді статичні моменти цієї ділянки відносно осей *Ox* та *Oy* дорівнюють відповідно $y_j\mu(x_i, y_j)\Delta S_{ij}$ та $x_i\mu(x_i, y_j)\Delta S_{ij}$. Якщо підсумувати статичні моменти усіх ділянок, то отримуємо наближенні значення для статичних моментів пластинки

$$M_x \approx \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} y_j\mu(x_i, y_j)\Delta S_{ij},$$

$$M_y \approx \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} x_i\mu(x_i, y_j)\Delta S_{ij}.$$

Переходячи в останніх рівностях до границь при $n, k \to \infty$, отримаємо формули для обчислення статичних моментів пластинки D відносно осей *Ox* та *Oy* відповідно:

$$M_x = \iint_D y\mu(x, y)\,dxdy, \tag{6.5.1}$$

$$M_y = \iint_D x\mu(x, y)\,dxdy. \tag{6.5.2}$$

Моментом інерції матеріальної точки масою m відносно координатних осей *Ox* і *Oy* називається добуток маси на квадрат відстані точки до відповідної осі, тобто $I_x = my^2$ і $I_y = mx^2$.

По аналогії з попереднім, дістаємо формули для обчислення моментів інерції пластинки D масою m з поверхневою густиною розподілу маси $\mu(x, y)$ відносно координатних осей *Ox* і *Oy* відповідно:

$$I_x = \iint_D y^2\mu(x, y)\,dxdy, \tag{6.6.1}$$

$$I_y = \iint_D x^2\mu(x, y)\,dxdy. \tag{6.6.2}$$

Момент інерції I_O пластинки D масою m відносно початку координат $O(0,0)$, називають величину, яка дорівнює сумі моментів інерції відносно осей

$$I_O = I_x + I_y = \iint_D \left(y^2 + x^2\right)\mu(x, y)\,dxdy. \tag{6.6.3}$$

Нехай точка $C(\overline{x}, \overline{y})$ − центр мас (центр ваги) пластинки D масою m з поверхневою густиною розподілу маси $\mu(x, y)$. Координати цієї точки знаходяться за формулами:

$$\overline{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{\iint_D x\mu(x, y)\,dxdy}{\iint_D \mu(x, y)\,dxdy}, \tag{6.7.1}$$

$$\overline{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{\iint_D y\mu(x, y)\,dxdy}{\iint_D \mu(x, y)\,dxdy}. \tag{6.7.2}$$

Приклад Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = x^2 + 1$, $y = \frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$.

Розв'язок. Обчислимо площу області D за формулою $S_D = \iint\limits_D dxdy$. Побудуємо область D, обмежену заданими лініями. Рівняння $y = \frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$ задає пряму, а графіком функції $y = x^2 + 1$ є парабола (рис.21).

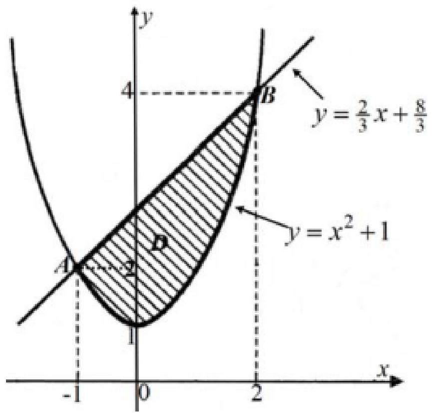


Рис.21

Знайдемо координати точок перетину цих ліній:

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x + 5 \\ y = \frac{2}{3}x + \frac{8}{3} \end{cases} \Rightarrow A(-1;2),\ B(2;4).$$

Визначимось з порядком і межами інтегрування у повторному інтегралі: змінна y змінюється від параболи $y = x^2 + 1$ до прямої $y = \frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$, коли змінна x змінюється від -1 до 2, тобто зовнішній інтеграл візьмемо за змінною x, а внутрішній − за змінною y. Отже, переходячи до повторного інтеграла, матимемо:

$$S_D = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_{-1}^{2} dx \int\limits_{x^2+1}^{\frac{2}{3}x+\frac{8}{3}} dy = \int\limits_{-1}^{2} \left(y \Big|_{x^2+1}^{\frac{2}{3}x+\frac{8}{3}} \right) dx = \int\limits_{-1}^{2} \left(\frac{2}{3}x + \frac{8}{3} - \left(x^2 + 1\right) \right) dx =$$

$$= \int\limits_{-1}^{2} \left(\frac{2}{3}x - x^2 + \frac{5}{3} \right) dx = \left(\frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{3} + \frac{5x}{3} \right) \Bigg|_{-1}^{2} = \frac{1}{3}(3 - 9 + 15) = 3$$

Відповідь: 3 кв. од.