Лекція
Тема: «Потрійні інтеграли»
План

1. Поняття потрійного інтеграла.
2. Властивості потрійних інтегралів.
3. Обчислення потрійних інтегралів у декартовій системі координат.

1. Поняття потрійного інтеграла.

Потрійні інтеграли є узагальненнями подвійних інтегралів з двовимірного простору R^2 на тривимірний простір R^3.

Розглянемо функцію $u = f(x, y, z)$, яка визначена в скінченній області $G \subset R^3$. З допомогою сітки поверхонь розіб'ємо область G на n менших (елементарних) областей G_i $(i = 1,2, \dots, n)$. Ці області не перетинаються і їх об'єднання складає область G $(\bigcup G_i = G)$. Нехай об'єм кожної елементарної області G_i буде ΔV_i. Позначимо через λ найбільший діаметр $d(G_i)$ областей $G_1, G_2, \dots, G_n$, тобто

$\lambda = \max_{1 \le i \le n} d(G_i)$.

За діаметр області G_i ми приймаємо відстань між двома найбільш віддаленими точками замкненої області G_i.

Виберемо в кожній елементарній області G_i довільну внутрішню точку $P_i(x_i, y_i, z_i)$ і складемо інтегральну суму функції $f(x, y, z)$по області G:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \cdot \Delta V_i \;. \qquad (18)$$

Означення. Якщо існує скінченна границя

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ (\lambda\to 0)}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \cdot \Delta V_i = I \,, \qquad (19)$$

що не залежить від способу розбиття області G на елементарні області G_i і не залежить від вибору точок $P_i(x_i, y_i, z_i) \in G_i$, то число I називають потрійним інтегралом функції *f(x,y,z)* по області $G \subset R^3$ і позначають:

$I = \iiint_G f(x, y, z) dxdydz.$

Тобто,

$$\iiint_G f(x, y, z) dxdydz = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\lambda\to 0)}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \cdot \Delta V_i. \qquad (20)$$

Якщо скінченна границя (19) існує, то підінтегральну функцію $f(x, y, z)$ називають *інтегровною* в області G, x, y, z – *змінні інтегрування*, $dV = dxdydz$ – *елемент об'єму.*

Теорема. Якщо функція $f(x, y, z)$ неперервна в скінченній області $G \subset R^3$, то вона інтегровна в цій області G.

1. При деяких додаткових умовах відносно функції $f(x,y,z)$ потрійний інтеграл (20) існує і для випадків, коли підінтегральна функція $f(x,y,z)$ має в скінченній області G розриви першого та другого родів;

2. Коли функція $f(x,y,z) \equiv \gamma(x,y,z)$ є об'ємною густиною матеріального тіла G, то $\gamma(x_i,y_i,z_i)\Delta V_i$ дає наближене значення маси його частини G_i ($P_i(x_i,y_i,z_i) \in G_i$), а після утворення інтегральної суми і переходу до границі при $n \to \infty$ ($\lambda \to 0$)одержимо масу m цього тіла:

$$m = \iiint_G \gamma(x,y,z)dxdydz; \tag{21}$$

3. Якщо в попередній формулі покласти $\gamma(x,y,z) \equiv 1$, то отримаємо числове значення об'єму цього тіла:

$$V_G = \iiint_G dxdydz\,. \tag{22}$$

2. Властивості потрійних інтегралів.

Із способу побудови інтегральних сум (18) і властивостей границі (19) випливають такі основні властивості потрійних інтегралів:

1. Лінійність:

$$\iiint_G (C_1 f_1(x,y,z) + C_2 f_2(x,y,z))dxdydz =$$
$$= C_1 \iiint_G f_1(x,y,z)dxdydz + C_2 \iiint_G f_2(x,y,z)dxdydz, \tag{23}$$

де C_1, C_2- дійсні постійні;

2. Адитивність по області інтегрування:

якщо $G = G_1 \cup G_2$, то

$$\iiint_G f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{G_1} f(x,y,z)dxdydz + \iiint_{G_2} f(x,y,z)dxdydz; \tag{24}$$

3. Теорема про середнє значення:

коли функція $f(x,y,z)$ неперервна в області інтегрування G, то існує точка $M_0(x_0,y_0,z_0) \in G$, для якої виконується умова:

$$\iiint_G f(x,y,z)dV = f(x_0,y_0,z_0) \cdot V_G.$$

Звідси,

$f(x_0,y_0,z_0) = \frac{1}{V_G}\iiint_G f(x,y,z)dV$ *−середнє значення інтеграла* в області G,

V_G – об'єм області G.

3. Обчислення потрійних інтегралів у декартовій системі координат.

Нехай область G має вигляд циліндричного тіла в напрямку осі OZ, яке зверху обмежене частиною поверхні $z = z_2(x,y)$, а знизу – частиною поверхні $z = z_1(x,y)$ і кожна з цих поверхонь однозначно проектується в область D_{xy} координатної площини XOY (рис. 16).

У цьому випадку після інтегрування по змінній z (x,y - постійні), потрійний інтеграл по області $G \subset R^3$, зводиться до подвійного інтеграла по області $D_{xy} \subset R^2$:

$$\iiint_G f(x,y,z)dxdydz = \iint_{D_{xy}} [\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz]dxdy =$$
$$= \iint_{D_{xy}} [\Phi_1(x,y,z)|_{z=z_1(x,y)}^{z=z_2(x,y)}]dxdy =$$
$$= \iint_{D_{xy}} [\Phi_1(x,y,z_2(x,y)) - \Phi_1(x,y,z_1(x,y))]dxdy. \quad (25)$$

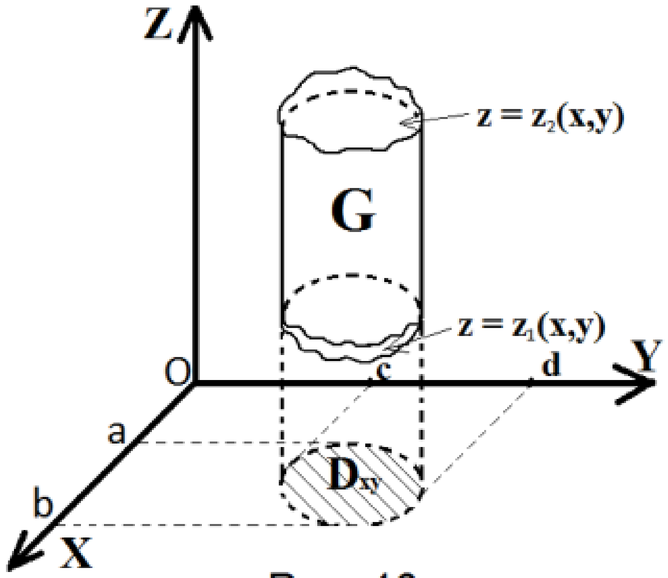

Рис. 16

Тут через $\Phi_1(x,y,z)$ позначено первісну $f(x,y,z)$ по змінній z, аргументи x, y при цьому вважаються постійними (параметрами).

Наступним кроком одержаний подвійний інтеграл зводиться до повторного з вибором послідовності інтегрування по змінних x та y в залежності від властивостей правильності відносно осей координат області D_{xy} (див. формули (8), (10)).

Обчислити $\iiint_G (y+z)dxdydz$, коли область G обмежена циліндричними поверхнями $y = e^x, \ y = x^e, \ x = 0$ та поверхнею $y = z^2$.

► Поверхні $y = e^x, \ y = x^e, \ x = 0$ паралельні осі OZ, область G зверху обмежується поверхнею $z = \sqrt{y}$, а знизу – поверхнею $z = -\sqrt{y}$ (вони містять вісь OX). Область D_{xy} (див. рис. 17) правильна і в напрямку осі OY, і в напрямку осі OX.

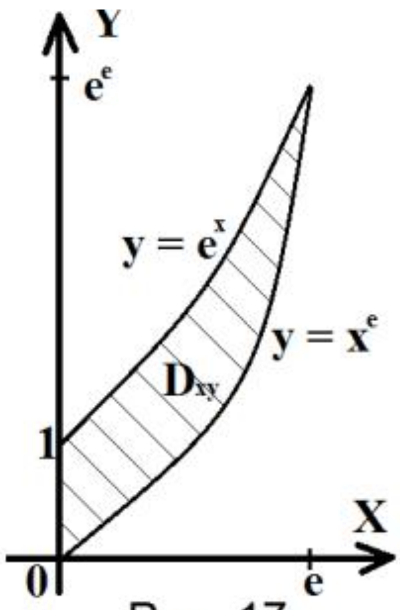

Рис. 17

Отже:

$$\iiint_G (y+z)dxdydz = \iint_{D_{xy}} [\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} (y+z)dz]dxdy =$$

$$= \int_0^e dx \int_{x^e}^{e^x} dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} (y+z)dz = \int_0^e dx \int_{x^e}^{e^x} [\left(yz + \frac{z^2}{2}\right)\Big|_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}]dy =$$

$$= \int_0^e dx \int_{x^e}^{e^x} 2y\sqrt{y}\,dy = 2\int_0^e \left(\frac{2y^{5/2}}{5}\Big|_{x^e}^{e^x}\right)dx = \frac{4}{5}\int_0^e (e^{\frac{5x}{2}} - x^{\frac{5e}{2}})dx =$$

$$= \frac{8(2\sqrt{e^{5e}} - 5e - 2)}{25(5e+2)}.$$

Приклад 2.

Обчислити $\iiint_G (xy+z)dxdydz$, якщо область G обмежена поверхнями: $z = 2y,\ y = 2\sqrt{z},\ z = 1,\ x = 0,\ x = y + z.$

► Поверхня $y = 2\sqrt{z}$ і площини $z = 2y,\ z = 1$ утворюють циліндричне тіло, бокова поверхня якого паралельна осі OX. Область G є частиною цього циліндра, обмеженого координатною площиною $x = 0$ (ZOY) і площиною $x = y + z$.

Спроектувавши циліндричну область G на координатну площину ZOY, одержимо область D_{yz} (рис. 18).

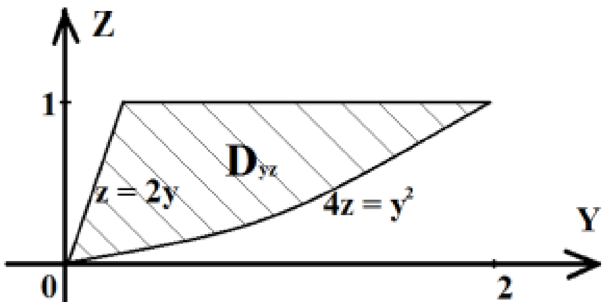

Рис. 18

Враховуючи паралельність осі OX бокової поверхні області G, будемо мати:

$$\iiint_G (xy+z)dxdydz = \iint_{D_{yz}}[\int_0^{y+z}(xy+z)dx]dzdy =$$

$$= \int_0^1 dz \int_{\frac{z}{2}}^{2\sqrt{z}} \left[\left(\frac{yx^2}{2}+zx\right)\Big|\begin{matrix} y+z \\ 0 \end{matrix}\right] dy =$$

$$= \int_0^1 dz \int_{\frac{z}{2}}^{2\sqrt{z}} \left(\frac{1}{2}y^3 + y^2z + \frac{1}{2}yz^2 + zy + z^2\right) dy =$$

$$= \int_0^1 [(\frac{y^4}{8} + \frac{y^3z}{3} + \frac{y^2z^2}{4} + \frac{y^2z}{2} + z^2y)\Big|\begin{matrix} 2\sqrt{z} \\ \frac{z}{2} \end{matrix}]dz =$$

$$= \int_0^1 \left(4z^2 + \frac{3}{8}z^3 + \frac{14}{3}z^{5/2} + \frac{43}{384}z^4\right) dz = \frac{5257}{1920}. \blacktriangleleft$$