Лекція

Тема: «Заміна змінних у потрійному інтегралі»

План

1. Заміна змінних у потрійному інтегралі.
2. Циліндрична система координат.
3. Сферична система координат.
4. Застосування потрійного інтеграла у механіці.

1. Заміна змінних у потрійному інтегралі.

Обчислення потрійних інтегралів у декартових координатах часто буває громіздким. В цьому випадку потрібно перейти до зручної системи координат. Сформулюємо загальну теорему про такі перетворення.

Теорема. Нехай функції

$$\begin{cases} x = x(u, v, w), \\ y = y(u, v, w), \\ z = z(u, v, w), \end{cases}$$

що задають заміну змінних, мають неперервні частинні похідні в області $G^*(u, v, w) \subset R^3$, взаємно однозначно відображають скінченну область $G^*(u, v, w)$ в скінченну область $G(x, y, z) \subset R^3$.

Якщо визначник Якобі (якобіан)

$$J(u, v, w) = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (27)$$

в області G^*, то справедлива заміна змінних в потрійному інтегралі:

$$\iiint_G f(x, y, z)dxdydz =$$

$$= \iiint_{G^*} f\big(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)\big) \cdot \big|J(u, v, w)\big|\, dudvdw\,. \qquad (28)$$

2. Циліндрична система координат.

Якщо в підінтегральній функції $f(x, y, z)$ або в рівнянні межі (границі) області G присутні вирази $x^2 + y^2$, то при обчисленні потрійного інтеграла зручно застосувати циліндричну систему координат, яка з декартовими координатами (x, y, z) зв'язана співвідношеннями (див. рис. 19):

$$\begin{cases} x = \rho cos\varphi, \\ y = \rho sin\varphi, \\ \quad z = z, \end{cases} \qquad (29)$$

де $0 \leq \rho < \infty,\ 0 \leq \varphi < 2\pi,\ z \in (-\infty; +\infty)$.

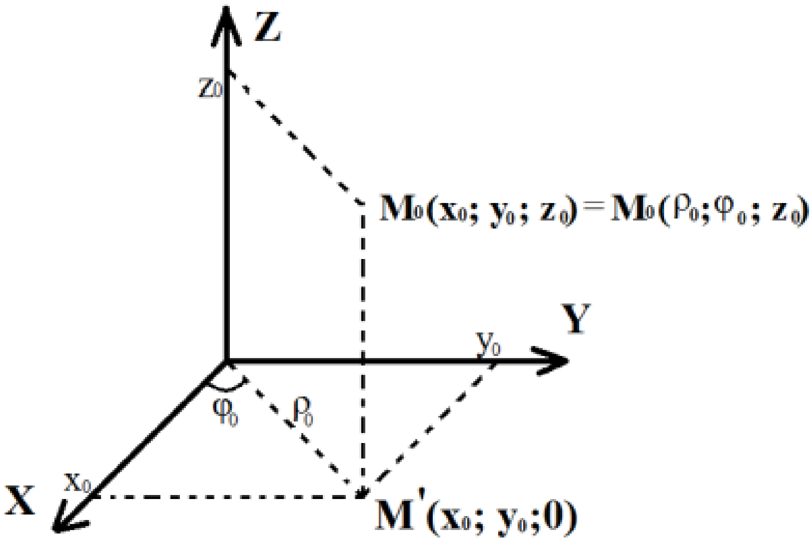

Рис. 19

В цьому випадку

$$J(\rho,\varphi,z) = \begin{vmatrix} cos\varphi & -\rho sin\varphi & 0 \\ sin\varphi & \rho cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho \qquad (30)$$

та

$$\iiint_G f(x,y,z)dxdydz = \iiint_G f(\rho cos\varphi, \rho sin\varphi, z)\rho d\rho d\varphi dz\ . \qquad (31)$$

Перехід від декартових до узагальнених циліндричних координат здійснюють за формулами:

$$\begin{cases} x = a\rho\cos\varphi, \\ y = b\rho\sin\varphi, \quad \rho \ge 0,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ -\infty < z < +\infty,\ |J(\rho,\varphi,z)| = abc\rho\ . \\ z = cz, \end{cases}$$

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = abc\iiint_{\tilde{\Omega}} f(a\rho\cos\varphi, b\rho\sin\varphi, cz)\rho d\rho d\varphi dz\ .$$

3. Сферична система координат.

Сферичну систему координат в потрійних інтегралах зручно застосовувати у випадках, коли в підінтегральній функції або в рівнянні межі області G присутні вирази $x^2 + y^2 + z^2$, або до них подібні. Перехід від декартових координат до сферичних здійснюється згідно формул (див. рис. 23):

$$\begin{cases} x = \rho cos\varphi sin\theta, \\ y = \rho sin\varphi sin\theta, \\ z = \rho cos\theta, \end{cases} \qquad (32)$$

$\rho \ge 0,\ 0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi\ .$

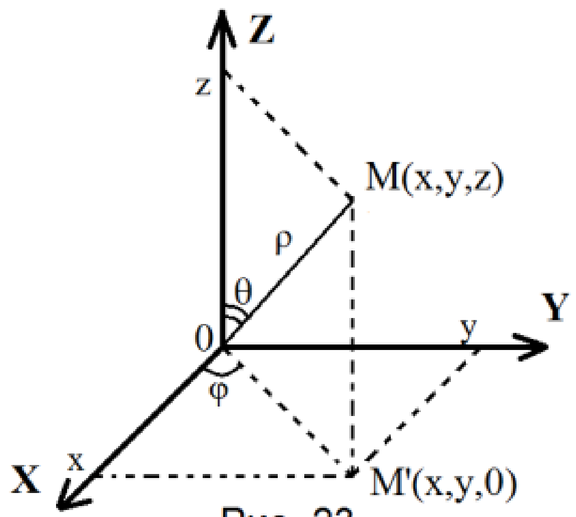

Рис. 23

У цьому варіанті сферичних координат кут θ відкладається від додатного напрямку осі OZ до радіус-вектора змінної точки $M(x, y, z)$, ρ – довжина цього радіус-вектора $\overrightarrow{OM}$, кут φ – кут між додатнім напрямком осі OX і проекцією вектора $\overrightarrow{OM}$ на координатну площину XOY.

Обчислимо по формулі (27) визначник Якобі у сферичній системі координат:

$$J(\rho, \varphi, \theta) = \begin{vmatrix} cos\varphi sin\theta & -\rho sin\varphi sin\theta & \rho cos\varphi cos\theta \\ sin\varphi sin\theta & \rho cos\varphi sin\theta & \rho sin\varphi cos\theta \\ cos\theta & 0 & -\rho sin\theta \end{vmatrix} = -\rho^2 sin\theta. \qquad (33)$$

Отже,

$$|J(\rho, \varphi, \theta)| = \rho^2 sin\theta\ . \qquad (34)$$

Як наслідок, перехід від декартової системи координат до сферичної в потрійних інтегралах має вигляд:

$$\iiint_G f(x, y, z) dxdydz =$$
$$= \iiint_G f(\rho cos\varphi sin\theta, \rho sin\varphi sin\theta, \rho cos\theta)\rho^2 sin\theta d\rho d\varphi d\theta. \qquad (34)$$

Перехід від декартових до узагальнених сферичних координат здійснюють за формулами:

$$\begin{cases} x = a\rho\sin\theta\cos\varphi, \\ y = b\rho\sin\theta\sin\varphi, \quad \rho \ge 0,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \theta \le \pi,\ |J(\rho, \varphi, z)| = abc\rho^2\sin\theta. \\ z = c\rho\cos\theta, \end{cases}$$

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z) dxdydz = abc \iiint\limits_{\tilde{\Omega}} f(a\rho\sin\theta\cos\varphi, b\rho\sin\theta\sin\varphi, c\rho\cos\theta)\rho^2 \sin\theta d\rho d\theta d\varphi.$$

4. Застосування потрійного інтеграла у механіці.

1. *Об'єм області* $G \in R^3$. Як уже вказувалося раніше, об'єм області G обчислюється за формулою (22):

$V_G = \iiint_G dxdydz.$

2. *Маса матеріального тіла.* В зауваженні 2 (стор. 18) обґрунтовано, використовуючи означення потрійного інтеграла, формулу (21) для обчислення маси матеріального тіла G з об'ємною густиною $\gamma(x, y, z)$:

$m = \iiint_G \gamma(x, y, z) dxdydz$

3. *Статичні моменти матеріального тіла* G відносно координатних площин (див. відповідні означення в теоретичній механіці) задаються формулами:

$M_{xy} = \iiint_G z\gamma(x, y, z) dxdydz$ (відносно площини XOY) ,

$M_{xz} = \iiint_G y\gamma(x, y, z) dxdydz$ (відносно площини XOZ) ,

$M_{yz} = \iiint_G x\gamma(x, y, z) dxdydz$ (відносно площини YOZ);

через $\gamma(x, y, z)$, як і раніше, позначаємо об'ємну густину тіла.

4. *Координати центра мас матеріального тіла* G, використовуючи попередні позначення:

$x_ц = \frac{M_{yz}}{m}, \quad y_ц = \frac{M_{xz}}{m}, \quad z_ц = \frac{M_{xy}}{m}.$

5. *Моменти інерції матеріального тіла* G відносно координатних площин:

$I_{xy} = \iiint_G z^2\gamma(x, y, z) dxdydz$ (відносно площини XOY),

$I_{xz} = \iiint_G y^2\gamma(x, y, z) dxdydz$ (відносно площини XOZ),

$I_{yz} = \iiint_G x^2\gamma(x, y, z) dxdydz$ (відносно площини YOZ).

Приклад 1.Знайти об'єм V кулі радіуса R.

► Запишемо рівняння сфери в декартовій системі координат у вигляді $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ (див. рис. 25).

Скористаємось відомою формулою об'єму:

$V_G = \iiint_G dxdydz,$

перейшовши в ній до сферичних координат за формулою (34). Як зазначалося вище, рівняння сфери в ній має вигляд $\rho = R$, а рівняння кулі : $0 \leq \rho \leq R$.

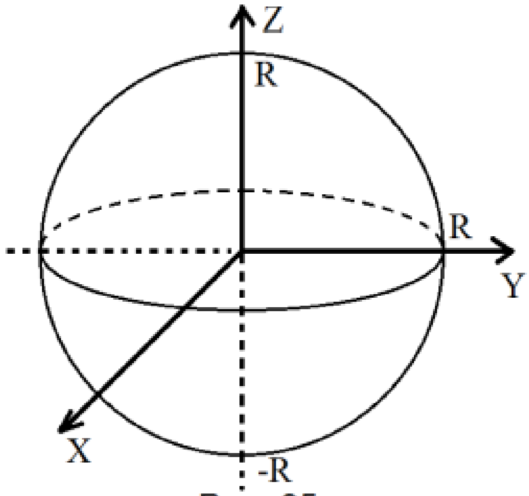

Рис. 25

Отже:

$V = \iiint_G dxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R d\rho \int_0^\pi \rho^2 sin\theta d\theta =$

$= (\varphi)\Big|_0^{2\pi} \cdot \frac{\rho^3}{3}\Big|_0^R \cdot (-cos\theta)\Big|_0^\pi = 2\pi \cdot \frac{R^3}{3}(1+1) = \frac{4}{3}\pi R^3$.◄