Тема 1. Стаціонарна теплопровідність

1.1 Основні поняття та визначення теорії тепломасообміну

Тепломасообмін - це наука про закономірності перенесення теплоти і речовини в просторі.

Теплообмін - це процес перенесення теплоти від більш нагрітих тіл до менш нагрітих. Велика кількість процесів перенесення теплоти супроводжуються перенесенням речовини – масообміном (наприклад, в техніці широко поширені процеси випаровування в пароповітряну середу і конденсації пари з суміші «пар - повітря»).

Спільний перебіг процесів теплообміну і масообміну називається *тепломасообміном*.

Розрізняють три елементарних, фізично різні способи перенесення теплоти:

1. *Теплопровідність* - передача теплоти всередині одного тіла або при безпосередньому зіткненні тіл, обумовлена тепловим рухом мікрочастинок (атомів, молекул).

2. *Конвекція* - передача теплоти за допомогою рухомого рідкотекучого середовища або газового потоку.

3. *Променистий теплообмін (випромінювання)* - передача теплоти за допомогою електромагнітних хвиль або променів. У природі з цих трьох способів в чистому вигляді зустрічається тільки теплопровідність в суцільних твердих тілах. Решта два елементарних способів теплообміну в чистому вигляді не зустрічаються, а разом з теплопровідністю входять до складу *складних способів теплообміну*, що представляють собою совокупність простих.

Аналітична теорія теплопровідності ігнорує молекулярну будову речовини; вона розглядає речовину не як сукупність окремих дискретних частинок, а як суцільне середовище - *континуум*.

1.2 Температурне поле

Як і кожне інше фізичне явище, процес теплопровідності відбувається у просторі та часі. Таким чином, можна записати в декартових координатах

$$t = f(x, y, z, \tau), \qquad (1.1)$$

де x,y,z– координати; τ - час.

Сукупність миттєвих значень температури в усіх точках простору,що вивчається, називається *температурним полем.* Відрізняють стаціонарні та нестаціонарні температурні поля. Стаціонарне поле з часом не змінюється, залежить тільки від координат:

$$t_{стац.} = f(x,y,z), \quad \frac{\partial t}{\partial \tau} = 0. \tag{1.2}$$

Нестаціонарне температурне поле залежить від часу

$$t_{нестац.} = f(x,y,z,\tau(; \quad \frac{\partial t}{\partial \tau} \neq 0. \tag{1.3}$$

Температурне поле може бути одно-, дво- та тривимірне

$$t_{од.} = f(x,\tau(x \quad \frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\partial t}{\partial z} = 0; \tag{1.4}$$

$$t_{дв.} = f\left(x,y,\tau\right), \quad \frac{\partial t}{\partial z} = 0; \tag{1.5}$$

$$t_{тр.} = f\left(x,y,z,\tau\right). \tag{1.6}$$

1.3 Градієнт температури

Важливим поняттям в теорії теплопровідності є градієнт температури.

Якщо всі точки тіла, що мають однакову температуру,з'єднати однією поверхнею, то отримаємо ізотермічну поверхню. Переріз ізотермічних поверхонь площиною дає сімейство ізотермічних ліній.

На рис. 1.1 зображені: t - температура ізотермічної лінії; n – вектор нормалі до цієї лінії з початком в точці O; Δn - відстань між ізотермами; Δt - приріст температури між ізотермами.

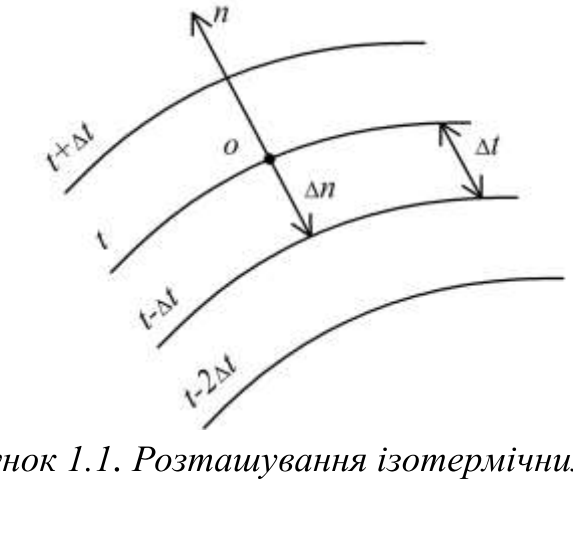

Рисунок 1.1. Розташування ізотермічних ліній

Границя відношення приросту температури Δt до відстані між ізотермами Δn, яка наближається до нуля, називається *градієнтом температури.*

$$\lim_{\Delta n \to 0}\left(\frac{\Delta t}{\Delta n}\right). \tag{1.7}$$

У загальному вигляді маємо

$$\frac{\partial t}{\partial n} = grad\,t\,, \qquad (1.8)$$

де n вектор, нормальний до ізотермічної поверхні. Градієнт також позначається символом ∇ (набла), тобто

$$\left.\frac{\partial t}{\partial n}\right|_{n\to 0} = grad\,t = \nabla t\,. \qquad (1.9)$$

Градієнт температури є вектором, позитивно спрямований у сторону підвищення температури. Взагалі теплота усередині речовини шляхом теплопровідності розповсюджується у напрямку зниження температури. Цей процес є довільним.

1.4 Закон Фур'є

Досвід показує, що передача теплоти теплопровідністю відбувається по нормалі до ізотермічної поверхні від осередків з вищою температурою до районів з пониженою температурою. Кількість теплоти, що проходить через одиницю ізотермічної поверхні за одиницю часу називається питомим тепловим потоком і позначається латинською буквою q $\left(\frac{Дж}{м^2 с}\right)$. Кількість теплоти, що проходить шляхом теплопровідності через всю ізотермічну поверхню F, називається тепловим потоком. Позначається латинською буквою Q, Вт. Як тепловий потік, так і питомий тепловий потік є векторами, позитивний напрямок яких спрямований у сторону зниження температури.

Таким чином, градієнт температури має позитивний напрямок в сторону підвищення температури, а тепловий потік – в сторону її зниження.

Основний закон теплопровідності (закон Фур 'є) говорить: кількість теплоти, що проходить через ізотермічну поверхню F, за час τ при градієнті температури grad t становить

$$Q = -\lambda F \tau\, grad\,t\,,\ Дж \qquad (1.10)$$

де λ - коефіцієнт теплопровідності;

F – площа, м^2;

τ - час,с;

grad t – градієнт температури, К/м.

Для встановлення фізичного смислу коефіцієнта теплопровідності λ розглянемо одномірне температурне поле

$$Q = -\lambda F \tau \frac{dt}{dx},\ Дж\,. \qquad (1.11)$$

Із цього виразу видно

$$\lambda = -\frac{Q}{F\tau}\frac{d\tau}{dt}, \frac{Дж \cdot м}{м^2 \cdot с \cdot К} = \frac{Вт}{м \cdot К} \ , \tag{1.12}$$

при отриманій розмірності має смисл кількості теплоти, яка проходить за час 1с через шар товщиною 1м при різниці температури в цьому шарі 1К.

Згідно із законом Фур'е питомий тепловий потік визначається як

$$q = -\lambda \frac{dt}{dx}, \frac{Вт}{м^2}, \tag{1.13}$$

Тобто питомий тепловий потік прямо пропорційний градієнту температури. Звідси також витікає, що коефіцієнт теплопровідності по абсолютній величині е питомий тепловий потік при одиничному температурному градієнті. Одиничний температурний градієнт фактично зазначає падіння температури на відстані 1м. Знак мінус у законі Фур'є ставиться у зв'язку з різнонаправленністю векторів градієнта температури та теплового потоку.

Коефіцієнт теплопровідності є скалярною величиною і є теплофізичною величиною для кожної речовини. Зокрема маємо такий розбіг цього коефіцієнта для різних матеріалів Вт/мК:

- газі λ = 0,006-0,58;
- рідини 0,093-0,70;
- будівельні та теплоізоляційні матеріали 0,023-2,91;
- метали 2,3-419.

Найбільше значення λ має для металів:

- срібло – 419;
- червона мідь – 395;
- золото – 302;
- алюміній – 209.

Значення коефіцієнта теплопровідності наводяться у довідковій літературі з теплофізики. Взагалі коефіцієнт λ у деяких речовин може бути анізотропним та залежати від температури.

1.5 Стаціонарна теплопровідність одномірної плоскої стінки

Мається плоска стінка з одномірним стаціонарним температурним полем

$$t = f(x); \quad \frac{dt}{d\tau} = 0. \tag{1.14}$$

Це означає, що у поверхню 1 входить питомий потік q, а через поверхню 2 виходить такий же потік q. Тобто температурне поле стінки не змінюється з часом, бо не відбувається ні акумуляції, ні відтоку теплоти у об 'єкті. На поверхнях 1 та 2 спостерігаються постійні температури t_1 та t_2. Позначимо змінні величини у цій формулі. Ізотермічні поверхні плоскі і розташовані паралельно зовнішнім поверхням стінки.

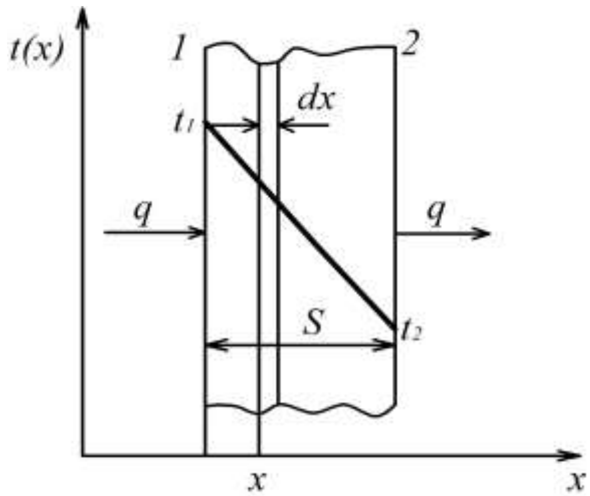

Рисунок 1.2. Схема розподілу температури по перерізу плоскої стінки

На відстані x від першої поверхні виділимо шар тощиною dx, обмежений двома ізотермічними поверхнями з різницею температури dt. Згідно з законом Фур'є

$$q = -\lambda \frac{dt}{dx}. \qquad (1.15)$$

Розділимо змінні величини у цій формулі

$$dt = -\frac{q}{\lambda} dx \qquad (1.16)$$

і після інтегрування маємо

$$t(x) = -\frac{q}{\lambda} x + C\,. \qquad (1.17)$$

Константу C знаходимо із початкової умови $t=t_1$ при $x=0$, звідки $C=t_1$.

Таким чином

$$t(x) = -\frac{q}{\lambda} x + t_1 = t_1 - \frac{q}{\lambda} x. \qquad (1.18)$$

При $x=S$ температура становить t_2, тобто,

$$t_2 = t_1 - \frac{q}{\lambda} S. \qquad (1.19)$$

Звідси

$$q = \frac{t_1 - t_2}{\frac{S}{\lambda}} \qquad (1.20)$$

Величина S/λ називається тепловим опором переходу теплоти шляхом теплопровідності. Оскільки теплообмін теплопровідністю відбувається усередині тіла, S/λ називають внутрішнім тепловим опором. Величина λ/S по суті є тепловою проводимістю (по аналогії з електротехнікою).

Розглядаючи вираз (1.18), становить ясно, що закон розподілу температури по перерізу плоскої стінки у стаціонарному температурному полі плоскої стінки має лінійний характер. Слід визначити, що ми вважали λ постійною величиною, а якщо коефіцієнт залежить від температури, то розподіл температури буде відрізнятися від лінійного.

1.6 Стаціонарна теплопровідність багатошарової плоскої стінки

Стінка складається із трьох різнорідних, але щільно прилягаючих один до іншого шарів. Відомі t_1 та t_4, а також $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Через стінку проходить постійний питомий тепловий потік q. Температурне поле знаходиться у стаціонарному стані.

Треба визначити тепловий потік q та t_2 і t_3. Окільки тепловий потік постійний, він для кожного шару однаковий:

$$q = \frac{\lambda_1}{S_1}\left(t_1 - t_2\right) = \frac{\lambda_1}{S_1}\Delta t_1 = \frac{\Delta t_1}{R_1}; \tag{1.21}$$

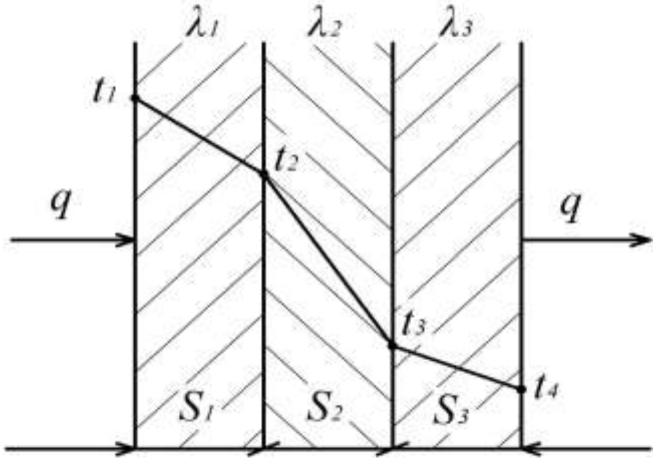

Рисунок 1.3. Схема розподілу температури по перерізу тришарової плоскої стінки

$$q = \frac{\lambda_2}{S_2}\left(t_2 - t_3\right) = \frac{\lambda_2}{S_2}\Delta t_1 = \frac{\Delta t_2}{R_2} \quad ; \tag{1.22}$$

$$q = \frac{\lambda_3}{S_3}\left(t_3 - t_4\right) = \frac{\lambda_3}{S_3}\Delta t_3 = \frac{\Delta t_3}{R_3}. \tag{1.23}$$

Визначимо Δt кожного шару

$$\Delta t_1 = t_1 - t_2 = q\frac{S_1}{\lambda_1}; \quad \Delta \mathrm{t}_1 = \mathrm{qR}_1 \ ; \tag{1.24}$$

$$\Delta t_2 = t_2 - t_3 = q\frac{S_2}{\lambda_2}; \quad \Delta \mathrm{t}_2 = \mathrm{qR}_2; \tag{1.25}$$

$$\Delta t_3 = t_3 - t_4 = q\frac{S_3}{\lambda_3}; \quad \Delta \mathrm{t}_3 = \mathrm{qR}_3. \tag{1.26}$$

Якщо скласти всі температурні перепади, отримаємо

$$t_1 - t_4 = q\left(\frac{S_1}{\lambda_1} + \frac{S_2}{\lambda_2} + \frac{S_3}{\lambda_3}\right) = q\left(R_1 + R_2 + R_3\right), \tag{1.27}$$

де $\Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3 = \Delta t$ - повний температурний напір. Знаючи q, можна визначити температури t_2 і t_3. Так, із формули (1.23) маємо

$$t_3 - t_4 = q\frac{S_3}{\lambda_3}, t_3 = t_4 + q\frac{S_3}{\lambda_3} = t_3 + qR_3. \tag{1.28}$$

Із формули (1.22) витікає

$$t_2 = t_3 + q\frac{S_2}{\lambda_2} = t_3 + qR_2. \tag{1.29}$$

Для випадку *n*-шарової стінки будуть вирази

$$q = \frac{t_1 - t_{n+1}}{\sum_{i=1}^{n} R_i}; \ \Delta t = \sum_{i=1}^{n} \Delta t_i \ . \tag{1.30}$$

Загальний термічний опір n-шарової стінки дорівнює сумі термічних опорів усіх стінок окремо. Усередині кожного шару температура розподіляється по прямій, якщо у кожному шарі коефіцієнт теплопровідності не залежить від температури. У цілому для багатошарової стінки у стаціонарному температурному полі температурна крива є ламана лінія.

1.7 Стаціонарна теплопровідність одношарової циліндричної стінки

Для спрощення розглядаємо циліндр довжиною 1м. Внутрішній радіус r_1, зовнішній радіус r_2 (рис. 1.4). Відомі коефіцієнт теплопровідності (що не залежить від температури) λ та температури на поверхнях стінки t_1 і t_2. При цьому $t_1 > t_2$.

Характерною особливістю передачі теплоти через циліндричну стінку шляхом теплопровідності є та обставина, що величина поверхні, через яку входить тепловий потік, відрізняється від величини поверхні, через яку тепловий потік виходить. При цьому загальний тепловий потік лишається у стаціонарному температурному полі однаковим, а питомий потік (тобто віднесений до одиниці площі) змінюється. Величина кожної ізотермічної поверхні відрізняється від іншої. Дійсно, внутрішня поверхня стінки становить величину $F_1 = 2\pi r_1$, а зовнішньої $2\pi r_2$. Оскільки $r_2 > r_1$, то і $F_2 > F_1$.

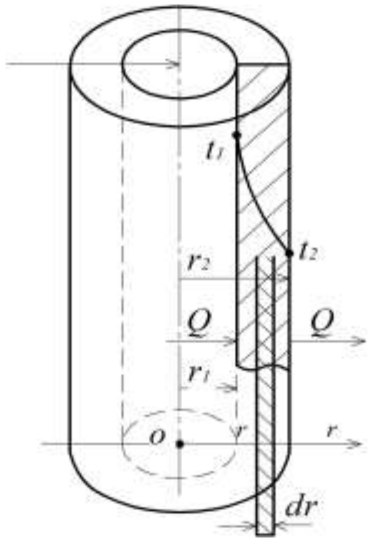

Рисунок 1.4. Розподіл температури у циліндричній стінці

Розглянемо нескінченно тонкий шар товщиною dr, який знаходиться на відстані r від початку горизонтальної осі при температурі t (R). Згідно із законом Фур'є маємо для теплого потоку

$$Q = -\lambda F \frac{dt}{dr} = -\lambda 2\pi r \frac{dt}{dr}. \tag{1.31}$$

Розділимо змінні

$$dt = -\frac{Q}{2\pi\lambda}\frac{dr}{r}. \tag{1.32}$$

Після інтегрування змінних у межах $t_1 \to t_2$ та $r_1 \to r_2$ маємо

$$\int_{t_1}^{t_2} dt = -\frac{Q}{2\pi\lambda}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r};$$

$$t_2 - t_1 = -\frac{Q}{2\pi\lambda}\ln\frac{r_2}{r_1}; \quad Q = \frac{(t_1 - t_2)2\pi\lambda}{\ln\frac{r_2}{r_1}}. \tag{1.33}$$

або

$$Q = \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{2\pi\lambda}\ln\frac{r_2}{r_1}} = \frac{t_1 - t_2}{R}. \tag{1.34}$$

У даному випадку тепловим опором є вираз

$$R = \frac{1}{2\pi\lambda}\ln\frac{r_2}{r_1}. \tag{1.35}$$

Якщо циліндрична стінка багатошарова, то маємо

$$Q = \frac{t_1 - t_{i+1}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2\pi\lambda} \ln \frac{r_{i+1}}{r_i}}.$$

1.8 Диференційне рівняння теплопровідності

Розглянуті раніше питання пов’язані зі стаціонарним температурним полем. Але на практиці інженеру доводиться займатись розв’язанням проблем, де в об’єктах відбуваються процеси переносу теплоти, коли температурне поле залежить як від координат, так і часу, тобто має місце нестаціонарне температурне поле. У цьому випадку необхідне розв’язання диференційного рівняння теплопровідності. Якраз це рівняння дає залежність між температурою, часом та координатами.

Виконаємо виведення диференційного рівняння теплопровідності. Виділимо в однорідному середовищі елементарний об’єм у формі паралелепіпеда з ребрами dx, dy, dz. Через ліву грань об’єму проходить питомий тепловий потік q_x, а через праву – q_{x+dx}. Припустимо, що $q_x > q_{x+dx}$. Це означає, що відбувається нагрів об’єкта. Вважаємо, що градієнт питомого теплового потоку дорівнює $\frac{\partial q_x}{\partial x}$.

Повний приріст питомого теплового потоку на відстані dx становить $\frac{\partial q_x}{\partial x}$ dx.

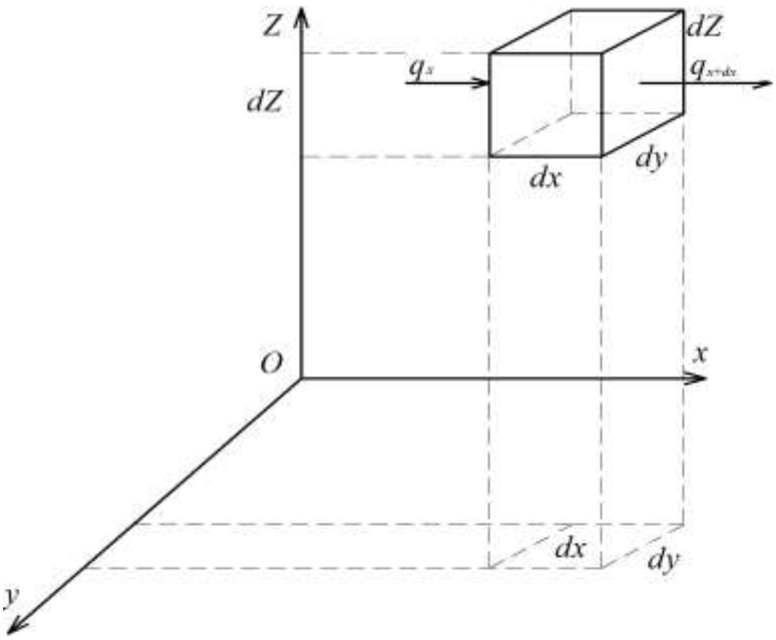

Рисунок 1.5. До виведення рівняння теплопровідності

Відповідно по осям x,y,z через протилежні грані будуть виходити такі питомі теплові потоки:

$$
\left.
\begin{aligned}
q_{x+dx} &= q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \\
q_{y+dy} &= q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy \\
q_{z+dz} &= q_z + \frac{\partial q_z}{\partial z} dz
\end{aligned}
\right\} \qquad (1.36)
$$

Маємо по осям x, y,z грані паралелепіпеда з такими площами: dydz, dxdz, dxdy. Тоді кількість теплоти, що проходить через ліву грань по осі x за час $d\tau$ становить $q_x dydzd\tau$, а через праву – $q_{x+dx}dydzd\tau$. Оскільки відбувається нагрів елемента, то різниця між кількостями теплоти, що входить в об’єкт і виходить із нього представляє собою теплоту, акумульовану елементарним об’ємом.

$$
q_x dydzd\tau - q_{x+dx}dydzd\tau = q_x dydzd\tau - q_x dydzd\tau - \frac{\partial q_x}{\partial x} dxdydzd\tau, \qquad (1.37)
$$

тобто

$$
-\frac{\partial q_x}{\partial x} dxdydzd\tau.
$$

По всім осям отримуємо загальний приріст теплоти

$$
-\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) dxdydzd\tau. \qquad (1.38)
$$

Ця величина представляє собою всю теплоту, акумульовану за час $d\tau$ елементарним об’ємом dxdydz. Вона може бути представлена як добуток маса Х питома теплоємкість Х приріст температури. Приріст температури за одиницю часу дорівнює $\frac{\partial t}{\partial \tau}$, а за час $d\tau$ становить $\frac{\partial t}{\partial \tau} d\tau$. Тоді будемо мати

$$
-\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial_z}{\partial z} \right) dxdydzd\tau = c\rho dxdydzd\tau,
$$

де ρ - густина, $\frac{кг}{м^3}$;

ρdxdydz - маса елементарного об’єму;

c – питома теплоємкість, $\frac{Дж}{кг \cdot К}$.

Після скорочення отримаємо

$$
-\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) = c\rho \frac{\partial t}{\partial \tau}. \qquad (1.39)
$$

Застосовуючи закон Фур’є для теплопровідності

$$
q_x = -\lambda \frac{\partial t}{\partial x}; \quad q_y = -\lambda \frac{\partial t}{\partial y}; \quad q_z = -\lambda \frac{\partial t}{\partial z},
$$

знаходимо

$$\lambda\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial t}{\partial z}\right)\right)=c\rho\frac{\partial t}{\partial \tau} \quad . \qquad (1.40)$$

Вираз $\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right)$ називається оператором Лапласа і позначається ∇^2. Тоді диференційне рівняння теплопровідності має такий вигляд

$$\frac{\lambda}{c\rho}\nabla t=\frac{\partial t}{\partial \tau}. \qquad (1.41)$$

Якщо фізичні величини λ, c, ρ не залежать від температури, то комплекс $\frac{\lambda}{c\rho}$ позначається латинською буквою, *a* і називається коефіцієнтом температуропровідності. Цей коефіцієнт характеризує теплоінерційні властивості речовини. Чим більше значення має цей коефіцієнт, тим швидше розповсюджується теплота усередині об’єкта.

Диференціальне рівняння (1.41) описує явище теплопровідності в найзагальнішому вигляді, тобто описує цілий клас явищ. Для того щоб з цього класу виділити конкретний процес і дати його повний математичний опис, до диференціальних рівнянь необхідно приєднати математичний опис часних особливостей процесу. Ці часні особливості називаються *умовами однозначності*, або *крайовими умовами.*

Умови однозначності включають:

1. *Геометричні умови* - задають форму і лінійні розміри тіла, в якому протікає процес.

2. *Фізичні умови* - задають фізичні параметри тіла (λ, с, ρ і ін.), також може бути заданий закон поширення внутрішніх джерел теплоти.

3. *Початкові умови* (для нестаціонарних процесів) - задають закон розподилу температури всередині тіла в початковий момент часу:

$$t_{\tau=\tau 0}=f(x,y,z,\tau), \qquad (1.42)$$

При рівномірному розподілі температури *τ = 0*, тому початкові умови спрощуються $t = t_o = const$.

4. *Граничні умови* - задають розподіл фізичних параметрів на поверхні тіла для кожного моменту часу.

Граничні умови бувають I, II, III та IVроду. *Граничні умови I роду* за-дають розподіл температури на поверхні тіла для кожного моменту часу:

$$t_n=f(x,y,z,\tau), \qquad (1.43)$$

де *tn* - температура поверхні тіла.

Граничні умови II роду задають значення теплового потоку для кожної точки поверхні тіла і будь-якого моменту часу:

$$q_n = f(x, y, z, \tau), \tag{1.44}$$

де *qn* - щільність теплового потоку на поверхні тіла. У найпростішому випадку щільність теплового потоку по поверхні і в часі залишається постійною *q = qo = const*, такий випадок теплообміну має місце при нагріванні металевих виробів в високотемпературних печах.

Граничні умови III роду задають температуру навколишнього середовища *tp* і закон теплообміну між поверхнею тіла і навколишнім середовищем.

Граничні умови III роду можна записати у вигляді

$$\left(\frac{\partial t}{\partial n}\right)_c = -\frac{\alpha}{\lambda}(t_c - t_p) \ , \tag{1.45}$$

де $\left(\frac{\partial t}{\partial n}\right)_c$ - температурний градієнт на поверхні тіла, м / °С;

t_c - температура поверхні тіла, ° С;

α - коефіцієнт тепловіддачі, Вт / (м^2·°С).

Таким чином, рішення диференціального рівняння теплопровідності при заданих умовах однозначності дозволяє визначити температурне поле у всьому обсязі тіла для будь-якого моменту часу, т. е. знайти функцію $t = f(x, y, z, \tau)$.

Контрольні питання до теми 1:

1. Що вивчає наука «Тепломасообмін»?
2. Які елементарні способи перенесення теплоти існують?
3. Яка фізична сутність передачі теплоти при теплопровідності?
4. Що таке температурне поле?
5. Як записується рівняння Фур'є?
6. Що таке тепловий потік і щільність теплового потоку?
7. Що таке коефіцієнт теплопровідності, в яких одиницях він вимірюється?
8. Що таке умови однозначності, як вони підрозділяються? Що таке початкові умови, для яких процесів вони потрібні?
9. Що таке граничні умови, які вони бувають і що характерізуют?
10. Від яких величин залежить тепловий потік, який передається теплопроводністю через одношарову плоску стінку?
11. Поясніть поняття «термічний опір стінки».
12. Який закон зміни температури в одношаровій циліндричній стінці?
13. За яким законом змінюється температура всередині кульової стінки?