

Тема 3. Конвективний теплообмін

3.1 Загальні відомості про конвективний теплообмін

Процес теплообміну, пов'язаний з переносом, тобто рухом, тепловіддаючого середовища, називається *конвективний*.

Конвекція можлива в таких об'єктах, як газ, рідина і сипучий матеріал.

Надалі будемо розглядати конвективний рух рідини або газу, причому їх поведінка підкоряється єдиним законам теплопереносу. Будемо називати їх *теплоносії*.

Відрізняють вільний та вимушений рух теплоносія. Вільний рух теплоносія може бути зумовлений різницею густини неоднаково нагрітих частин об'єкта або різних концентрацій його частин.

Вимушений рух носія визивається дією сторонніх сил, наприклад, роботою вентилятора, компресора, насоса та ін. Вимушений рух нерідко діє разом з вільним. Наприклад, при роботі димової труби викид димових газів у атмосферу може відбуватися за рахунок різниці густини газів або сумісно з впливом димососа.

Основний закон конвективного теплообміну – закон Ньютона, згідно з яким кількість теплоти, яка передається між теплоносієм та поверхнею становить

$$Q = \alpha F \tau (t_c - t_n), \text{ кДж}, \quad (3.1)$$

де $\alpha, \frac{\text{кДж}}{\text{м}^2 \text{сК}} = \frac{\text{кВт}}{\text{м}^2 \text{К}}$ - коефіцієнт тепловіддачі;

F - площа теплообмінної поверхні, м^2 ;

τ – час, с;

t_c - температура середовища (теплоносія), яке оточує поверхню;

t_n - температура поверхні.

Основне завдання при вивченні конвективного теплообміну полягає у визначенні коефіцієнта тепловіддачі, який представляє собою кількість теплоти, яка передається шляхом конвекції між поверхнею та теплоносієм через одиницю площі, за одиницю часу при різниці температури 1 градус між теплообмінними об'єктами (поверхнею та носієм). Ця різниця визначається як *температурний напір* і становить

$$\Delta t = t_c - t_n, \text{ К.} \quad (3.2)$$

Коефіцієнт тепловіддачі чисельно залежить від багатьох факторів, зокрема, таких як форма тіла та її розміри, температура та стан поверхні, температура носія та його фізичні властивості та ряд інших факторів.

Маючи на увазі те, що коефіцієнт тепловіддачі є функцією багатьох змінних, аналітичне вивчення проблеми конвективного теплообміну представляє собою у край складну задачу, яку можливо розв'язати тільки у найпростіших випадках. У зв'язку з цим, основний метод вивчення конвективного теплообміну є експериментальний. Надалі розглянемо обидва ці підходи.

3.2 Теоретичне визначення коефіцієнта тепловіддачі

Питання про α розв'язується теоретично найбільш просто, якщо режим руху середовища є ламінарним. У цьому випадку у напрямку, нормальному для ліній струму, тепло розповсюджується тільки теплопровідністю. У самої стінки, що обтікається, швидкість течії стає паралельній їй (ізотермічні поверхні також). Нормальний до поверхні стінки питомий потік теплоти визначається законом Фур'є (рис.3.1)

$$q = -\lambda \left(\frac{\partial t}{\partial y} \right)_{y=0}, \quad (3.3)$$

де q - питомий тепловий потік, $\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$;

λ - коефіцієнт теплопровідності рідкого середовища, $\frac{\text{Вт}}{\text{мК}}$;

t - функція температури середовища, $^{\circ}\text{C}$ (або K);

y - відстань від поверхні стінки по зовнішній нормалі.

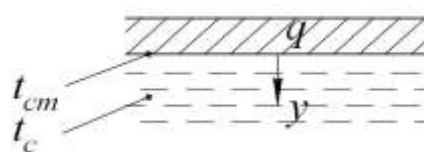


Рисунок 3.1 - Схема тепловіддачі між поверхнею та теплоносієм

В той же час, згідно з законом Ньютона, маємо

$$q = \alpha(t_{cm} - t_c), \quad (3.4)$$

звідки

$$\alpha = \frac{q}{t_{cm} - t_c} = -\frac{\lambda \left(\frac{\partial t}{\partial y} \right)_{y=0}}{t_{cm} - t_c}, \quad (3.5)$$

де t_{cm} - температура поверхні стінки;

t_c - температура середовища за межами теплового шару середовища. Під тепловим шаром у даному випадку треба розділити товщину шару, у якому відбувається зміна температури носія від t_{cm} до t_c .

Під середовищем у даному випадку будемо розглядати рідку або газоподібну субстанцію. Таким чином, питання зводиться до визначення градієнта температури $\left(\frac{\partial t}{\partial y} \right)_{y=0}$. Теоретично, це можливо шляхом розв'язання сумісної задачі теплопровідності для двох об'єктів: тверда стінка та середовище. При цьому маємо граничні умови контактної теплообміну між поверхнею та середовищем.

$$\left. \frac{\partial t_{cm}}{\partial y} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial t_c}{\partial y} \right|_{y=0}; \quad (3.6)$$

$$t_{cm}(y=0) = t_c(y=0), \quad (3.7)$$

де t_{cm} - температурна функція стінки;

t_c - температурна функція середовища.

Розв'язуючи систему двох диференціальних рівнянь теплопровідності, знаходимо необхідне значення градієнта температури $\left. \frac{\partial t}{\partial y} \right|_{y=0}$.

Складність визначення α при турбулентному режимі руху тепловіддаючого середовища полягає в тому, що у цьому випадку теплота передається на стінку (або відводиться від неї) як за рахунок молекулярної, так і за рахунок турбулентної теплопровідності.

Найчастіше вважають, що у безпосередній близькості від поверхні стінки турбулентний перенос теплоти затухає, так що в нормальному до стінки напрямку стає визначаючим молекулярний механізм теплопровідності (тобто, як для ламінарного режиму).

В той же час на значення коефіцієнта тепловіддачі α впливає характер руху середовища. Для встановлення цього впливу необхідно, перш за все, вивчити характер розподілу швидкості по потоку.

3.3 Диференціальне рівняння теплопровідності

В курсі «Тепломасообмін» раніше розглядалось диференціальне рівняння теплопровідності для твердих тіл, коли перенос теплоти у просторі відбувається шляхом молекулярної теплопровідності. У випадку рухомого середовища передача теплоти теплопровідністю відбувається як молекулярним так і конвективним шляхом. Розглянемо уважно цей процес.

Кількість теплоти, яка залишається в елементарному об'ємі, становить

$$dQ = \lambda \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) dx dy dz = \lambda \nabla^2 t dx dy dz, \text{ Bm} \quad , \quad (3.8)$$

де $t(x, y, z, \tau)$ - функція температури,

x, y, z - координати.

З іншого боку, за час $d\tau$ ця теплота змінює ентальпію таким чином

$$dQ = c\rho \frac{dt}{d\tau} d\tau dx dy dz, \quad (3.9)$$

де $\frac{dt}{d\tau}$ - швидкість зміни температури,

ρ - густина теплоносія, кг/м^3 .

На відміну від $\frac{\partial t}{\partial \tau}$, коли середовище нерухоме, шукана температура є складною функцією $t = f(x, y, z, \tau)$, а, в свою чергу, координати x, y, z відносно нерухомої системи координат є функціями часу, тобто

$$\begin{aligned} x &= \phi_1(\tau, x_o, y_o, z_o) \\ y &= \phi_2(\tau, x_o, y_o, z_o) \\ z &= \phi_3(\tau, x_o, y_o, z_o), \end{aligned} \quad (3.10)$$

де x_o, y_o, z_o - координати елементарного об'єма в момент $\tau = \tau_o$.

Таким чином,

$$t = f((x(\tau), y(\tau), z(\tau))). \quad (3.11)$$

З курсу математики відомо, що в такому випадку повна похідна дорівнює

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{\partial t}{\partial \tau} + \frac{\partial t}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial t}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \tau} + \frac{\partial t}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \tau}, \quad (3.12)$$

де $\frac{\partial x}{\partial \tau}, \frac{\partial y}{\partial \tau}, \frac{\partial z}{\partial \tau}$ - проекції вектора $\bar{w}$ швидкості переміщення рідкого елемента на координатні осі (рис.3.2).

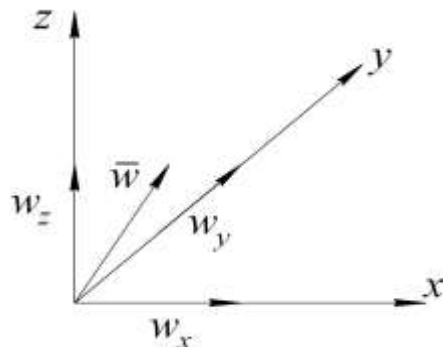


Рисунок 3.2. Координатна схема

Отже, можна записати

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{\partial t}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial t}{\partial x} + w_y \frac{\partial t}{\partial y} + w_z \frac{\partial t}{\partial z}. \quad (3.13)$$

Часткова похідна $\frac{\partial t}{\partial \tau}$ називається локальною(місцевою) похідною температури, а $w_x \frac{\partial t}{\partial x} + w_y \frac{\partial t}{\partial y} + w_z \frac{\partial t}{\partial z}$ - її конвективною похідною. Повну похідну температури по часу звичайно позначають $\frac{Dt}{d\tau}$ і називають індивідуальною (або субстанціальною) похідною.

Остаточно диференціальне рівняння теплопровідності для рухомого середовища запишеться

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) - \left(w_x \frac{\partial t}{\partial x} + w_y \frac{\partial t}{\partial y} + w_z \frac{\partial t}{\partial z} \right). \quad (3.14)$$

3.4 Рівняння руху

Виведення рівняння руху базується на другому законі Ньютона

$$F = m \cdot a, \quad (3.15)$$

де F – сила;

m – маса тіла;

a – прискорення руху тіла.

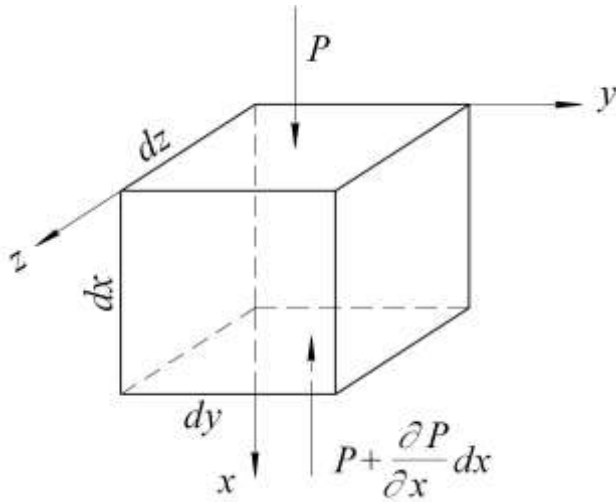


Рисунок 3.3. Елементарний об'єм у потоці

Виділимо у потоці елементарний об'єм dv з ребрами dx, dy, dz (рис.3.3). На цей об'єм діють три сили: сила тяжіння, сила тиску та сила тертя. Розглянемо послідовно дію цих сил.

Сила тяжіння. прикладена в центрі тяжіння елементу dv . Її проекція на ось x дорівнює

$$g_x \rho dv = g_x \rho dx dy dz, H, \quad (3.16)$$

де g – проекція на ось x прискорення сили тяжіння;

ρdv - маса елемента.

Сила тиску. На верхню грань елементу діє тиск p , а на нижню – тиск $(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx)$. На верхню грань діє загальна сила тиску $p dy dz$, а нижню відповідно $(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx) dy dz$. Для останньої складової мається знак мінус, бо ця сила направлена проти руху носія. Рівнодіюча сил буде становити

$$p dy dz - (p + \frac{\partial p}{\partial x} dx) dy dz = - \frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz, H \quad (3.17)$$

Сила тертя. Розглянемо це питання на прикладі одновимірного, ламінарного режиму руху у напрямку x (рис.3.4).

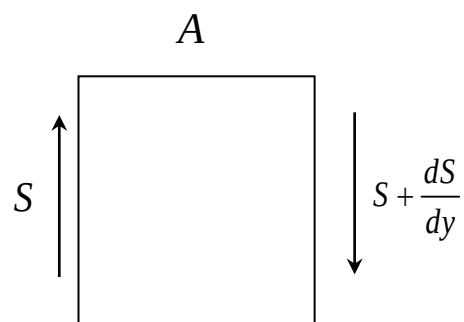
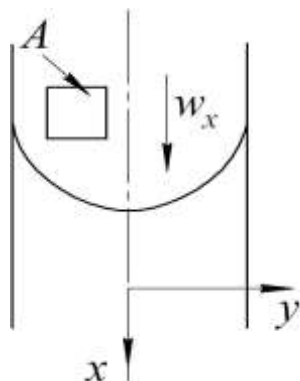


Рисунок 3.4. Схема ламінарного одновимірного режиму руху

Відомо, що біля стінок швидкість шарів потоку менша(завдяки силам тертя), ніж усередині. Значить, сила тертя на лівій грані s більша, ніж на правій і спрямована проти руху потоку. На правій грані сила тертя $s + \frac{ds}{dy} dy$ направлена вниз.

Рівнодіюча цих сил становить

$$\left(s + \frac{ds}{dy} dy \right) dx dz - s dx dz = \frac{ds}{dy} dx dy dz, H. \quad (3.18)$$

Сила тертя s визначається по закону Ньютона

$$s = \mu \frac{dw_x}{dy}, H, \quad (3.19)$$

де μ - динамічний коефіцієнт в'язкості, Па·с;

$\frac{dw_x}{dy}$ - градієнт проекції швидкості у напрямку x відносно координати y .

Отже, маємо для одновимірного випадку

$$\frac{ds}{dy} dx dy dz = \mu \frac{d^2 w_x}{dy^2} dv. \quad (3.20)$$

У випадку тривимірного руху w_x змінюється по всім трьом напрямкам. Тоді проекція сили тертя на вісь x буде

$$\mu \left(\frac{d^2 w_x}{dx^2} + \frac{d^2 w_x}{dy^2} + \frac{d^2 w_x}{dz^2} \right) dv = \mu \nabla^2 w_x dv. \quad (3.21)$$

Складаючи вирази для трьох визначених сил, отримаємо проекцію рівнодіючої всіх сил на вісь x :

$$\left(\rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \nabla^2 w_x \right) dv. \quad (3.22)$$

Згідно з другим законом Ньютона ця рівнодіюча дорівнює добутку маси елемента ρdv та його прискорення $\frac{Dw_x}{d\tau}$:

$$\rho \frac{Dw_x}{d\tau} dv = \rho \left(\frac{\partial w_x}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_x}{\partial z} \right) dv. \quad (3.23)$$

Прирівнюючи (2.21) і (2.26) та (2.28), маємо

$$\rho \left(\frac{\partial w_x}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_x}{\partial z} \right) = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \nabla^2 w_x. \quad (3.24)$$

По аналогії можна отримати вирази для проекцій сил на осі y та z

$$\rho \left(\frac{\partial w_y}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial w_y}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_y}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_y}{\partial z} \right) = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \nabla^2 w_y; \quad (3.25)$$

$$\rho \left(\frac{\partial w_z}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial w_z}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_z}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \nabla^2 w_z. \quad (3.26)$$

Система рівнянь (3.24) – (3.36) є диференціальним рівнянням Нав'є-Стокса. Воно справедливе як для ламінарного, так і для турбулентного режимів руху.

3.5 Рівняння суцільності потоку

Рівняння суцільності потоку виводиться на основі закону про збереження маси. Виділимо в потоці рухомої рідини елементарний об'єм dv (рис.3.5) зі сторонами dx, dy, dz .

Визначимо масу рідини, що протікає через нього за час $d\tau$. У напрямку осі x через грань $ABCD$ проходить маса в секунду

$$M'_x = \rho w_x dydz, \frac{\kappa z}{c}. \quad (3.27)$$

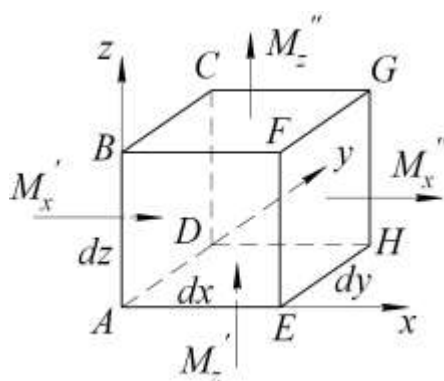


Рисунок 3.5. Схема дії мас на елементарний об'єм

Через грань $EFGH$ у напрямку x проходить маса

$$M''_x = \left(\rho w_x + \frac{\partial(\rho w_x)}{\partial x} dx \right) dydz, \frac{\kappa z}{c}, \quad (3.28)$$

де ρw_x – масова швидкість потоку, що проходить через 1 м^2 .

Віднімаючи (3.28) від (3.27), отримаємо лишок маси рідини, що витікає з об'єму в напрямку осі x

$$dM_x = M''_x - M'_x = \frac{\partial(\rho w_x)}{\partial x} dx dydz, \frac{\kappa z}{c}. \quad (3.29)$$

Аналогічно знаходимо для осей y та z

$$dM_y'' - dM_y' = \frac{\partial(\rho w_y)}{\partial y} dx dy dz, \quad (3.30)$$

$$dM_z'' - dM_z' = \frac{\partial(\rho w_z)}{\partial z} dx dy dz. \quad (3.31)$$

Повний лишок маси рідини, що витікає, становить

$$dM = dM_x + dM_y + dM_z = \left(\frac{\partial}{\partial x}(\rho w_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho w_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w_z) \right) dv d\tau. \quad (3.32)$$

Цей лишок зумовлений зменшенням густини рідини в об'ємі dv і дорівнює зміні маси даного об'єму з часом, тобто

$$dM = - \frac{\partial \rho}{\partial \tau} dv d\tau. \quad (3.33)$$

Знак «мінус» показує, що маса зменшується.

Згідно з законом збереження маси маємо

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}(\rho w_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho w_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w_z) \right) dv d\tau = - \frac{\partial \rho}{\partial \tau} dv d\tau. \quad (3.34)$$

Остаточно отримаємо

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{\partial(\rho w_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w_z)}{\partial z} = 0. \quad (3.35)$$

Цей вираз називається диференціальним рівнянням суцільності або нерозривності. Для нестисливої рідини ($\rho = \text{const}$) буде

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = 0. \quad (3.36)$$

3.6 Визначення подібності

Дослідження фізичних процесів та явищ, що відбуваються у діючих промислових об'єктах часто натикаються на подолання труднощів економічного та технічного характеру. Тому, часто удаються до вивчення зазначених явищ на об'єктах меншого розміру, так званих моделей. основні правила конструювання і використання моделей визначаються теорією подібності фізичних величин.

Подібність фізичних величин є узагальненням геометричної подібності. Сформулюємо визначення подібності величин. У геометрії трикутники будуть подібними, якщо їх відповідні сторони пропорційні, тобто (рис. 3.6)

$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c} = k_l, \quad (3.37)$$

де k_l - константа геометричної подібності (масштабний коефіцієнт).

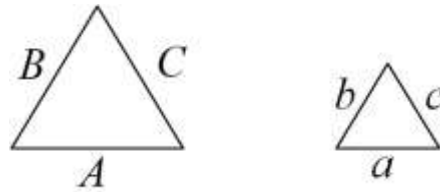


Рисунок 3.6. Подібні трикутники

Таким чином, сторони одного трикутника визначаються через сторони іншого простим помноженням на масштабний коефіцієнт.

Аналогічно, фізичні явища подібні, якщо подібні всі величини, що визначають ці явища, тобто кожна величина одного явища може бути отримана із такої ж величини іншого явища простим помноженням на масштабний коефіцієнт (подібно зміні розмірів розмірностей, наприклад 1 метр = 10 дециметрів):

$$\phi_1 = k_\phi \phi_2, \quad (3.38)$$

де ϕ_1 та ϕ_2 - деякі величини;

k_ϕ - масштабний коефіцієнт.

Необхідно мати на увазі:

- поняття *подібність* може бути застосоване тільки до явищ якісно однакових, котрі описуються одними і тими ж рівняннями;
- для подібностей фізичних явищ необхідна їх геометрична подібність.

Для теплової подібності двох потоків необхідно, щоб ці потоки були обмежені стінками геометрично подібної конфігурації і щоб по всьому об'єму системи були подібні всі фізичні величини: густина, в'язкість, температура, швидкість та ін., тобто

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = k_\rho; \quad \frac{\mu_1}{\mu_2} = k_\mu; \quad \frac{T_1}{T_2} = k_t; \quad \frac{w_1}{w_2} = k_w. \quad (3.39)$$

При цьому кожна фізична величина може мати свою константу подібності, відмінну від інших. Всі явища подібні, якщо критерії подібності, що складені із їх однорідних величин, однакові між собою. Наприклад, для гідромеханічної подібності маємо критерії Рейнольдса

$$Re_1 = \frac{w_1 d_1}{\nu_1}; \quad Re_2 = \frac{w_2 d_2}{\nu_2}; \quad Re_1 = Re_2; \quad (3.40)$$

$$\frac{w_1 d_1}{\nu_1} = \frac{w_2 d_2}{\nu_2}; \quad \frac{k_w k_d}{k_\nu} = 1,$$

де w - швидкість;

d – діаметр потоку;

ν - кінематичний коефіцієнт в'язкості.

Критерії подібності мають нульову розмірність, наприклад,

$$\frac{wd}{\nu} \in \frac{m}{c} \cdot m \cdot \frac{c}{m^2} = 1, \quad (3.41)$$

де знак $\in$ позначає, що дана величина має певну розмірність.

3.7 Умови гідромеханічної подібності

Гідромеханічна подібність визначає умови при яких в геоморфологічних подібних системах відбуваються подібні рухи.

Розглянемо дві подібні системи. Маємо для першої системи:

- рівняння суцільності

$$\frac{\partial w'_x}{\partial x'} + \frac{\partial w'_y}{\partial y'} + \frac{\partial w'_z}{\partial z'} = 0; \quad (3.42)$$

- рівняння руху

$$\begin{aligned} \rho' \frac{\partial w'_x}{\partial \tau'} + \rho' \left(w'_x \frac{\partial w'_x}{\partial x'} + w'_y \frac{\partial w'_y}{\partial y'} + w'_z \frac{\partial w'_z}{\partial z'} \right) = \\ = \rho' g'_x - \frac{\partial p'}{\partial x'} + \mu' \left(\frac{\partial^2 w'_x}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 w'_x}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 w'_x}{\partial z'^2} \right); \end{aligned} \quad (3.43)$$

- для другої системи
- рівняння суцільності:

$$\frac{\partial w''_x}{\partial x''} + \frac{\partial w''_y}{\partial y''} + \frac{\partial w''_z}{\partial z''} = 0; \quad (3.44)$$

- рівняння руху

$$\begin{aligned} \rho'' \frac{\partial w''_x}{\partial \tau''} + \rho'' \left(w''_x \frac{\partial w''_x}{\partial x''} + w''_y \frac{\partial w''_x}{\partial y''} + w''_z \frac{\partial w''_x}{\partial z''} \right) = \\ = \rho'' g''_x - \frac{\partial p''}{\partial x''} + \mu'' \left(\frac{\partial^2 w''_x}{\partial x''^2} + \frac{\partial^2 w''_x}{\partial y''^2} + \frac{\partial^2 w''_x}{\partial z''^2} \right). \end{aligned} \quad (3.45)$$

Із визначення подібності маємо:

$$\begin{aligned} \frac{x''}{x'} = \frac{y''}{y'} = \frac{z''}{z'} = k_l; \quad \frac{w''}{w'} = k_w; \quad \frac{\tau''}{\tau'} = k_\tau; \\ \frac{\rho''}{\rho'} = k_\rho; \quad \frac{\mu''}{\mu'} = k_\mu; \quad \frac{g''}{g'} = k_g; \quad \frac{p''}{p'} = k_p. \end{aligned}$$

Всі змінні другої системи можуть бути виражені через змінні першої системи:

$$x'' = k_l x'; \quad \tau'' = k_\tau \tau'; \quad \rho'' = k_\rho \rho' \text{ та ін.} \quad (3.46)$$

Підставляючи (3.46) в рівняння (3.44) і (3.45), маємо

$$\begin{aligned}
& \frac{k_w}{k_l} \left(\frac{\partial w'_x}{\partial x'} + \frac{\partial w'_y}{\partial y'} + \frac{\partial w'_z}{\partial z'} \right) = 0; \\
& \frac{k_\rho k_w}{k_\tau} \rho' \frac{\partial w'_x}{\partial \tau} + \frac{k_\rho k_w^2}{k_l} \rho' \left(w'_x \frac{\partial w'_x}{\partial x'} + w'_y \frac{\partial w'_x}{\partial y'} + w'_z \frac{\partial w'_x}{\partial z'} \right) = \\
& = k_\rho k_g \rho' g'_x - \frac{k_\rho}{k_l} \frac{\partial \rho'}{\partial x'} + \frac{k_\mu k_w}{k_l^2} \mu' \left(\frac{\partial^2 w'_x}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 w'_x}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 w'_x}{\partial z'^2} \right).
\end{aligned} \tag{3.47}$$

Тепер обидві системи, виражені через змінні першої системи. Прирівнюючи рівняння руху цих систем, отримаємо

$$\frac{k_\rho k_w}{k_\tau} = \frac{k_\rho k_w^2}{k_l} = k_\rho k_g = \frac{k_\rho}{k_l} = \frac{k_\mu k_w}{k_l^2} = 1.$$

Розглядаючи попарно ці співвідношення, знаходимо

$$\frac{k_\rho k_w}{k_\tau} = \frac{k_\rho k_w^2}{k_l} \quad \text{або} \quad \frac{k_w k_\tau}{k_l} = 1; \tag{3.48}$$

$$\frac{k_\rho k_w^2}{k_l} = k_\rho k_g \quad \text{або} \quad \frac{k_l k_g}{k_w^2} = 1; \tag{3.49}$$

$$\frac{k_\rho k_w^2}{k_l} = \frac{k_\rho}{k_l} \quad \text{або} \quad \frac{k_p}{k_\rho k_w^2} = 1; \tag{3.50}$$

$$\frac{k_\rho k_w^2}{k_l} = \frac{k_\mu k_w}{k_l^2} \quad \text{або} \quad \frac{k_w k_l k}{k_\mu} = 1. \tag{3.51}$$

Надалі можна отримати критерії гідромеханічної подібності. Для цього замість констант подібності необхідно підставити їх значення

$$\frac{w' \tau'}{l'} = \frac{w'' \tau''}{l''} = \frac{w \tau}{l} = Ho \quad ;$$

$$\frac{w^2}{gl} = Fr;$$

$$\frac{p}{\rho w^2} = Eu;$$

$$\frac{\rho w l}{\mu} = \frac{w l}{\nu} = Re,$$

де Ho – критерій гомохронності (безрозмірний час);

Fr – критерій Фруда;

Eu – критерій Ейлера;

Re – критерій Рейнольдса.

Як згадувалось раніше, при гідромеханічній подібності двох потоків мають однакове значення критерії Ho , Eu , Fr , Re .

3.8 Умови теплової подібності

Теплова подібність передбачає подібність теплових потоків температурних полів. При цьому мають бути також геометрична та гідромеханічна подібність.

Припускаємо дві подібні системи. Маємо для першої системи рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial t'}{\partial \tau'} + w_x \frac{\partial t'}{\partial x'} + w_y \frac{\partial t'}{\partial y'} + w_z \frac{\partial t'}{\partial z'} = a' \left(\frac{\partial^2 t'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 t'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 t'}{\partial z'^2} \right); \quad (3.52)$$

рівняння теплообміну

$$\alpha' \Delta t' = -\lambda \frac{\partial t'}{\partial x'}; \quad (3.53)$$

для другої системи рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial t''}{\partial \tau''} + w_x'' \frac{\partial t''}{\partial x''} + w_y'' \frac{\partial t''}{\partial y''} + w_z'' \frac{\partial t''}{\partial z''} = a'' \left(\frac{\partial^2 t''}{\partial x''^2} + \frac{\partial^2 t''}{\partial y''^2} + \frac{\partial^2 t''}{\partial z''^2} \right); \quad (3.54)$$

рівняння теплообміну

$$\alpha'' \Delta t'' = -\lambda'' \frac{\partial t''}{\partial x''}. \quad (3.55)$$

Маємо коефіцієнт подібності

$$\frac{x''}{x'} = \frac{y''}{y'} = \frac{z''}{z'} = k_l; \quad \frac{\tau''}{\tau'} = k_\tau \quad \text{і далі} \quad k_w, k_t, k_a, k_\lambda, k_\alpha.$$

Використовуючи ці коефіцієнти, запишемо рівняння другої системи

$$\begin{aligned} \frac{k_t}{k_\tau} \frac{\partial t'}{\partial \tau'} + \frac{k_w k_t}{k_l^2} \left(w_x \frac{\partial t'}{\partial x'} + w_y \frac{\partial t'}{\partial y'} + w_z \frac{\partial t'}{\partial z'} \right) = \\ = \frac{k_a k_t}{k_l^2} \left(\frac{\partial^2 t'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 t'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 t'}{\partial z'^2} \right); \end{aligned} \quad (3.56)$$

$$k_a k_t \alpha' \Delta t' = \frac{-k_\lambda k_t \lambda'}{k_l} \frac{\partial t'}{\partial x'}. \quad (3.57)$$

Із умови тотожності рівнянь (3.52) і (3.53) з рівняннями (3.56) і (3.57) маємо

$$\begin{aligned} \frac{k_t}{k_\tau} = \frac{k_w k_t}{k_l} = \frac{k_a k_t}{k_l^2} = \text{const}; \\ k_a k_t = \frac{k_\lambda k_t}{k_l}. \end{aligned}$$

Після попарного порівняння маємо

$$\frac{k_t}{k_\tau} = \frac{k_a k_t}{k_l}; \quad \frac{k_a k_\tau}{k_l^2} = 1;$$

$$\frac{k_w k_\tau}{k_l} = \frac{k_a k_\tau}{k_l^2}; \quad \frac{k_a k_w}{k_l} = 1;$$

$$k_a k_t = \frac{k_\lambda k_t}{k_l}; \quad \frac{k_a k_l}{k_\lambda} = 1.$$

Підставляючи замість констант їх значення, маємо

$$\frac{a'\tau'}{l'^2} = \frac{a''\tau''}{l''^2} = \frac{a\tau}{l^2} = Fo - \text{критерій Фур'є};$$

$$\frac{a'w'}{l^1} = \frac{a''w''}{l''} = \frac{aw}{l} = Pe - \text{критерій Пекле};$$

$$\frac{\alpha'l'}{\lambda'} = \frac{\alpha''l''}{\lambda''} = \frac{\alpha l}{\lambda} = Nu - \text{критерій Нуссельта}.$$

Якщо в останньому виразі під l розуміється характерний розмір потоку, то використовують критерії Нуссельта. Якщо мається на увазі твердий об'єкт, то цей вираз вважають за критерій Біо (Bi).

Таким чином, при тепловій відповідно подібності двох чи більше потоків критерії подібності Fo , Пекле та Nu повинні бути однакові.

Критерій Пекле може бути перетворений таким способом:

$$Pe = \frac{wl}{a} = \frac{wl}{v} \frac{v}{a} = RePr,$$

де $Pr = \frac{\nu}{a}$ - критерії Прандтля.

3.9 Критеріальні рівняння конвективного теплообміну

При експериментальному вивченні конвективного теплообміну шуканою величиною являється коефіцієнт теплообміну α . Знайдена для різних випадків величина α разом з іншими фізичними характеристиками обробляється у вигляді деяких безрозмірних комплексів (критеріїв). Таким чином, формується функціональна залежність для деякої теплової системи, наприклад

$$Nu = f(Fo, Pe) = f(Fo, Re, Pr). \quad (3.58)$$

Як було сказано раніше, тепла подібність передбачає подібність гідромеханічну. Відомо, що потік може бути вільний і вимушений. Характер вимушеного потоку визначається критерієм Рейнольдса, тобто ламінарний ($Re \leq 2320$) або турбулентний ($Re > 2320$) рух. Для описання вільного переміщення розглянемо додаткові критерії

$$\frac{Re^2}{Fr} = \frac{gl}{w^2} \cdot \frac{w^2 l^2}{\nu^2} = \frac{gl^3}{\nu^2} - \text{критерій Галілея.} \quad (3.59)$$

Швидкість вільного потоку не є визначеною величиною. Критерій Галілея не включає в розгляд цю величину і розглядає тільки вязкість та об'єм системи. Але цей критерій нічого не говорить про рух вільного потоку. Цей рух може бути зумовлений підйомною силою потоку. В свою чергу ця сила може бути спричинена різницею густини рідини чи газу в різних точках простору ρ_1 та ρ_2 , наприклад, за рахунок різних концентрацій чи температур. У зв'язку з цим маємо додаткові критерії

$$Ga \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_2} = \frac{gl^3}{\nu^2} \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_2} = Ar - \text{критерій Архімеда;} \quad (3.60)$$

$$Ga \cdot \beta \Delta t = \frac{gl^3}{\nu^2} \beta \Delta t = Gr - \text{критерій Грасгофа,} \quad (3.61)$$

де β - коефіцієнт об'ємного розширення.

У загальному випадку може відбуватися разом вимушений і вільний рух. Тоді розглянемо два випадки.

3.10 Критеріальні рівняння гідромеханіки потоку

Нестаціонарний вимушено- вільний потік

$$Eu = f(Ho, Re, Gr). \quad (3.62)$$

Нестаціонарний вимушений потік

$$Eu = f(Ho, Re). \quad (3.63)$$

Нестаціонарний вільний потік

$$Eu = f(Ho, Gr). \quad (3.64)$$

Стаціонарний вимушений потік

$$Eu = f(Re). \quad (3.65)$$

Стаціонарний вільний потік

$$Eu = f(Gr). \quad (3.66)$$

3.11 Критеріальні рівняння теплової подібності потоку

Нестаціонарний вимушено-вільний потік

$$Nu = f(Fo, Re, Pr, Gr) \quad (3.67)$$

або

$$Nu = f(Fo, Re, Pe, Gr). \quad (3.68)$$

Нестационарний вимушений рух

$$Nu = f(Fo, Re, Pr) \quad (3.69)$$

або

$$Nu = f(Fo, Re, Pe). \quad (3.70)$$

Нестационарний вільний рух

$$Nu = f(Fo, Pr, Gr) \quad (3.71)$$

або

$$Nu = f(Fo, Pr, Ga). \quad (3.72)$$

Стационарний вимушено-вільний рух

$$Nu = f(Re, Pr, Gr). \quad (3.73)$$

Стационарний вимушений рух

$$Nu = f(Re, Pr). \quad (3.74)$$

Стационарний вільний рух

$$Nu = f(Gr, Pr). \quad (3.75)$$

3.12 Тепловіддача від шарів, вертикальних труб і плит при вільному русі

Тепловіддача від шарів, вертикальних труб і плит при вільному русі визначається за наступним рівнянням:

$$Nu_m = C(Gr Pr)_m^n, \quad (3.76)$$

де характерний розмір для шарів і труб – діаметр, для плит – висота;

$t_m = \frac{1}{2}(t_{cm} - t_p)$ - визначальна температура;

t_{cm} - температура стінки,

t_p - температура рідини за межами теплового шару;

m - знак осереднення величини.

Таблиця 3.2 - Розрахункові величини

№	$(Gr, Pr)_m$	C	n
1	$1 \cdot 10^{-3} \div 5 \cdot 10^2$	1,18	1/8
2	$5 \cdot 10^2 \div 2 \cdot 10^7$	0,54	1/4
3	$2 \cdot 10^2 \div 1 \cdot 10^{13}$	0,135	1/3

Формула (2.90) може бути використана для аналізу теплообміну з горизонтальними плитами. У цьому випадку за визначальний розмір приймають меншу сторону (ширину) плити. Якщо тепловіддавальна поверхня звернена вгору, то отримане значення α треба збільшити на 30%, якщо вниз - зменшити на 30%.

Для вільної тепловіддачі від горизонтальних труб

$$Nu_m = 0,51(Gr Pr)_p^{1/4} (Pr_p / Pr_{cm})^{1/4}, \quad (3.77)$$

де індекс p позначає, що параметр визначено по температурі носія за межами теплового шару;

Pr_{cm} – відповідає температурі поверхні стінки.

3.13 Вільна тепловіддача в обмеженому просторі

Частіше всього цей вид теплообміну має місце у вікнах з подвійним застібанням.

Будемо вважати, що теплообмін відбувається у обмеженому просторі між двома поверхнями через деякий теплоносій (рідкий або газоподібний). Має місце складне явище конвективного теплообміну, визване різними температурами стінок. З метою спрощення інженерних розрахунків введемо поняття *еквівалентний коефіцієнт теплопровідності* $\lambda_{ек}$. Будемо вважати, що процес теплообміну між поверхнями стінок відбувається по закону Фур'є для теплопровідності при віртуальному коефіцієнті $\lambda_{ек}$. Тоді маємо питомий тепловий потік:

$$q = \frac{\lambda_{ек}}{\delta} (t_1 - t_2), \quad (3.78)$$

де t_1 та t_2 – температури відповідних поверхонь;

δ - товщина прошарка.

Еквівалентний коефіцієнт теплопровідності визначається таким чином

$$\lambda_{ек} = \xi \lambda, \quad (3.79)$$

де ξ - безрозмірний коефіцієнт конвекції;

λ - реальний коефіцієнт теплопровідності теплоносія.

Коефіцієнт конвекції визначається згідно з критеріальним рівнянням

$$\xi = f(Gr Pr)_m. \quad (3.80)$$

Таким чином, циркуляція теплоносія залежить від його фізичних властивостей та різниці температур між частинками.

За визначальний розмір прийнята товщина прошарку, а за визначальну температуру – його середня температура

$$t_m = 0,5(t_1 + t_2). \quad (3.81)$$

Для розрахунків маємо таку залежність [1]

$$\xi_k = C(Gr Pr)_m^n \quad (3.82)$$

Для величин C та n маємо наступну таблицю.

Таблиця 2.3 - Значення коефіцієнтів C та n

№	$(Gr Pr)_m$	C	n
1	$<10^3$	1,00	0,0
2	$10^3 \div 10^6$	0,105	0,30
3	$10^6 \div 10^{10}$	0,400	0,20

3.14 Тепловіддача при вимушеному русі в трубах

Турбулентний режим:

$$Nu_m = 0,021 Re_m^{0,80} Pr_m^{0,43} \left(\frac{Pr_m}{Pr_{cm}} \right)^{0,25}, \quad (3.83)$$

де m - індекс m відноситься до середньої температури внутрішньої поверхні стінки;

d – внутрішній діаметр труби.

Ламінарний режим:

$$Nu_m = 0,17 Re_m^{0,33} Pr_m^{0,43} Gr^{0,10} \left(\frac{Pr_m}{Pr_{cm}} \right)^{0,25}. \quad (3.84)$$

Формули (3.83) і (3.84) справедливі для довгих труб, коли відношення довжини до внутрішнього діаметра труби $l/d > 50$. Для коротких труб вводиться коефіцієнт ξ_l . Тоді коефіцієнт тепловіддачі α_k буде становить

$$\alpha_k = \xi_l \alpha_\partial, \quad (3.85)$$

де α_∂ визначається для довгої труби.

Коефіцієнт ξ_l визначається згідно з таблицями 2.4 та 2.5.

Таблиця 2.4 - Поправковий коефіцієнт ξ_R для турбулентного режиму

$Re_m/l/d$	1	2	5	10	15	20	30	40	50
$1 \cdot 10^4$	1,65	1,50	1,34	1,23	1,17	1,13	1,07	1,03	1
$2 \cdot 10^4$	1,51	1,40	1,27	1,18	1,13	1,10	1,05	1,02	1
$5 \cdot 10^4$	1,34	1,27	1,18	1,13	1,10	1,08	1,04	1,02	1
$1 \cdot 10^5$	1,28	1,22	1,15	1,10	1,08	1,06	1,03	1,02	1

$1 \cdot 10^6$	1,14	1,11	1,08	1,05	1,04	1,03	1,02	1,01	1
----------------	------	------	------	------	------	------	------	------	---

Таблиця 2.5 - Значення коефіцієнта ξ_l для ламінарного режиму

l/d	1	2	5	10	15	20	30	40	50
ξ_l	1,90	1,70	1,44	1,28	1,18	1,15	1,05	1,02	1,0

Для зігнутих труб вводиться поправковий коефіцієнт ξ_R для турбулентного режиму

$$\xi_R = 1 + 1,77 \frac{d}{R}, \quad (3.86)$$

де R – радіус закруглення труби.

Контрольні питання до теми 3:

1. Як впливає вільна конвекція на тепловіддачу при ламінарному русі рідини, за допомогою якого критерію подібності вона враховується в рівнянні?
2. Які рівняння подібності рекомендуються при ламінарному русі рідини?
3. Як враховується напрямок теплового потоку в критеріальному рівнянні?
4. Які рівняння подібності рекомендуються при турбулентному русі рідини?
5. Чим відрізняється тепловіддача в вигнутих трубах-змійовиках?
6. Які рівняння подібності рекомендуються при русі рідини уздовж пластини?
7. Описати три характерних випадка омивання одиночної труби при поперечному русі рідини.
8. Чим відрізняється процес тепловіддачі для одиночної труби при поперечному русі рідини?
9. Які рівняння подібності рекомендуються для одиночної труби при поперечному русі рідини?
10. Як визначити коефіцієнт тепловіддачі, якщо потік рідини, що омиває одиночну трубу, перпендикулярний до осі труби?
11. Які пучки труб застосовуються в техніці, якими параметрами вони характеризуються?
12. Описати докладно характер омивання пучків труб при поперечному русі рідини.
13. Які рівняння подібності рекомендуються для пучків труб при поперечному русі рідини?
14. Як визначається середній коефіцієнт тепловіддачі для пучка труб?
15. Описати механізм виникнення вільного потоку рідини.