

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«УЛЬЯНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

**П. А. Вельмисов, В. К. Манжосов**

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ  
МОДЕЛИРОВАНИЕ В ЗАДАЧАХ  
ДИНАМИКИ ВИБРОУДАРНЫХ  
И АЭРОУПРУГИХ СИСТЕМ**

Ульяновск  
УлГТУ  
2014

УДК 539.3  
ББК 22.251  
В 28

Рецензенты: доктор физ.-мат. наук, проф. А. С. Андреев  
доктор техн. наук А. Ш. Хусаинов

УДК 539.3

**Вельмисов, П. А.**

Математическое моделирование в задачах динамики виброударных и аэроупругих систем / П. А. Вельмисов, В. К. Манжосов. – Ульяновск : УлГТУ, 2014. – 204 с.

Монография обобщает цикл исследований, проводимых в Ульяновском государственном техническом университете по проблемам математического моделирования динамических процессов в виброударных и аэроупругих системах.

Рассмотрены задачи моделирования виброударной системы при действии периодической силы релейного типа и ударах о жесткую преграду, моделирования виброударной системы при действии периодической пульсирующей силы и движении между двумя преградами с соударениями об эти преграды, моделирования продольного удара о жесткую преграду упругого стержня как механической системы с конечным числом степеней свободы, моделирования волновых процессов при продольном ударе упругого стержня о жесткую преграду, моделирования волновых процессов в упругом стержне с неудерживающей связью, цепляющим твердое тело, моделирования процесса переноса энергии волны деформации постоянной интенсивности через упругий слой разнородных сопряженных стержней.

Анализируются проблемы математического моделирования динамических процессов в аэроупругих системах. Рассмотрены вопросы асимптотической теории трансзвуковых течений газа, динамической устойчивости трубопровода, статической неустойчивости пластины-полосы в сверхзвуковом потоке, математического моделирования динамики упругих элементов вибрационного устройства, математического моделирования систем контроля за изменением давления, построения математической модели крылового профиля в проточном канале.

Для научных сотрудников, студентов и аспирантов соответствующих специальностей.

© Вельмисов П. А., Манжосов В. К., 2014

© Оформление УлГТУ, 2014

ISBN 978-5-9795-1392-8

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>ВВЕДЕНИЕ</b> .....	5
<b>1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ ВИБРОУДАРНЫХ СИСТЕМ</b> .....	7
1.1. Модель виброударной системы при действии периодической силы релейного типа и ударах о жесткую преграду. Моделирование процесса движения .....	7
1.2. Модель виброударной системы при действии периодической силы и движении между двумя преградами. Моделирование процесса движения.....	32
1.3. Моделирование продольного удара о жесткую преграду упругого стержня как механической системы с конечным числом степеней свободы.....	50
1.4. Моделирование волновых процессов при продольном ударе упругого стержня о жесткую преграду.....	59
1.5. Волновые процессы в упругом стержне с неударживающей связью, цепляющим твердое тело. Моделирование процесса движения.....	84
1.6. Математическая модель процесса переноса энергии волны деформации постоянной интенсивности через упругий слой разнородных сопряженных стержней.....	104
<b>Библиографический список главы 1</b> .....	127
<b>2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ АЭРОУПРУГИХ СИСТЕМ</b> .....	132
2.1. К асимптотической теории трансзвуковых течений газа.....	132
2.2. К вопросу о динамической устойчивости трубопровода.....	139
2.3. О влиянии линейной упругой связи на изгибные формы пластины-полосы в сверхзвуковом потоке.....	152

2.4. Математическое моделирование динамики упругих элементов вибрационного устройства.....	157
2.5. Математическое моделирование систем контроля за изменением давления.....	167
2.6. Математическая модель крылового профиля в проточном канале.....	183
<b>Библиографический список главы 2.....</b>	<b>197</b>
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....</b>	<b>202</b>

## **ВВЕДЕНИЕ**

Монография обобщает цикл исследований, проводимых в Ульяновском государственном техническом университете по проблемам математического моделирования динамических процессов в виброударных и аэроупругих системах.

Среди многочисленных проблем, связанных с изучением ударных взаимодействий, следует особо выделить класс задач о систематических соударениях, реализуемых в виброударных системах. Разнообразие виброударных систем требует при разработке расчетных методов не только решения задач их анализа, но и развития вопросов синтеза динамической структуры с целью наилучшей реализации целесообразных форм движения. Отыскание решений точными методами является весьма трудоемкой процедурой, ограничивающей область их приложений. Особенно затруднительным становится их использование при необходимости учета дополнительных нелинейных факторов и усложнении характера возмущений от действия нерегулярных сил. Эта процедура становится практически трудно выполнимой, если необходимо проанализировать переходные процессы в системе и выявить предельные циклы движения динамической системы. Решение данной проблемы может быть достигнуто при разработке эффективных процедур моделирования данных динамических систем, основанных на использовании адекватных математических моделей, визуализации процесса, представления и качественной обработки результатов моделирования.

Воздействие потока может приводить к эффектам, являющимся причиной нарушения функциональных свойств элементов, вплоть до их разрушения (например, приводить к состоянию неустойчивости вследствие увеличения амплитуды или ускорения колебаний до критически допустимых значений). Такая проблема, когда неустойчивость является негативным явлением, возникает, например, при проектировании составных частей летательных и подводных аппаратов. В то же время для функционирования некоторых технических устройств явление возбуждения колебаний при аэрогидродинамическом воздействии, указанное выше в качестве негативного, является необходимым. Примерами подобных устройств, относящихся к вибрационной технике и используемых для интенсификации технологических процессов, являются устройства для приготовления однородных смесей и эмульсий. Другим примером, когда деформация упругих элементов при аэрогидродинамическом воздействии необходима для функционирования приборов и является основой их работы, являются датчики давления. Таким образом, при проектировании различных конструкций, устройств, приборов, аппаратов, систем и т. д., находящихся во взаимодействии с газожидкостной средой (обтекаемых потоком жидкости или газа),

необходимо решать задачи, связанные с исследованием динамики и устойчивости упругих элементов, требуемой для их качественного функционирования и надёжности эксплуатации.

Монография состоит из двух разделов. Первая глава посвящена проблемам математического моделирования динамических процессов в виброударных системах. В ней рассмотрены задачи моделирования виброударной системы при действии периодической силы релейного типа и ударах о жесткую преграду (В. К. Манжосов, Д. А. Новиков, подраздел 1.1), моделирования виброударной системы при действии периодической пульсирующей силы и движении между двумя преградами с соударениями об эти преграды (А. А. Дозоров, В. К. Манжосов, подраздел 1.2), моделирования продольного удара о жесткую преграду упругого стержня как механической системы с конечным числом степеней свободы (В. К. Манжосов, К. С. Листрова, подраздел 1.3), моделирования волновых процессов при продольном ударе упругого стержня о жесткую преграду (В. К. Манжосов, В. В. Слепухин, подраздел 1.4), моделирования волновых процессов в упругом стержне с неудерживающей связью, цепляющим твердое тело (В. К. Манжосов, С. А. Кашкиров, подраздел 1.5), моделирования процесса переноса энергии волны деформации постоянной интенсивности через упругий слой разнородных сопряженных стержней (В. К. Манжосов, И. А. Новикова, подраздел 1.6).

Вторая глава посвящена проблемам математического моделирования динамических процессов в аэроупругих системах. В ней рассмотрены вопросы асимптотической теории трансзвуковых течений газа (П. А. Вельмисов, Ю. А. Тамарова, Е. П. Семенова, подраздел 2.1), динамической устойчивости трубопровода (П. А. Вельмисов, А. В. Анкилов, А. В. Корнеев, подраздел 2.2), статической неустойчивости пластины-полосы в сверхзвуковом потоке (П. А. Вельмисов, С. В. Киреев, подраздел 2.3), математического моделирования динамики упругих элементов вибрационного устройства (П. А. Вельмисов, Ю. А. Решетников, подраздел 2.4), математического моделирования систем контроля за изменением давления (П. А. Вельмисов, Ю. В. Покладова, Е. С. Серебрянникова, подраздел 2.5), построения математической модели крылового профиля в проточном канале (П. А. Вельмисов, Ю. А. Решетников, А. В. Анкилов, подраздел 2.6).

Работа выполнена в рамках реализации государственного задания № 2014/ 232 Минобрнауки России, НИР «Разработка математических методов исследования динамики и устойчивости деформируемых элементов конструкций, установок, приборов, устройств при аэрогидродинамическом, тепловом и ударном воздействиях».

# 1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ ВИБРОУДАРНЫХ СИСТЕМ

## 1.1. Модель виброударной системы при действии периодической силы релейного типа и ударах о жесткую преграду. Моделирование процесса движения

### Постановка задачи

Использование удара широко применяется в технических системах, связанных с деформированием или разрушением технологической среды [1.1, 1.2]. Технологии с использованием удара перспективны, они позволяют воздействовать на обрабатываемый объект с огромными усилиями [1.3, 1.5, 1.10, 1.20, 1.63]. Реализация периодического удара осуществляется с использованием ударных машин [1.2, 1.4, 1.6, 1.7, 1.21, 1.26, 1.31, 1.67]. При их создании возникает необходимость построения рациональных законов движения ударной массы [1.6, 1.10, 1.11, 1.16 - 1.19, 1.34 - 1.36].

С целью формирования концепции рационального рабочего процесса исследователи [1.6] обращаются к наиболее общей динамической схеме изучаемых систем, представляя ее в виде поступательно движущегося тела массой  $m$ , на которое действует некоторое переменное во времени возмущение  $P(t)$ , а также ограничителя, моделирующего свойства технологической среды (рис. 1.1.1).

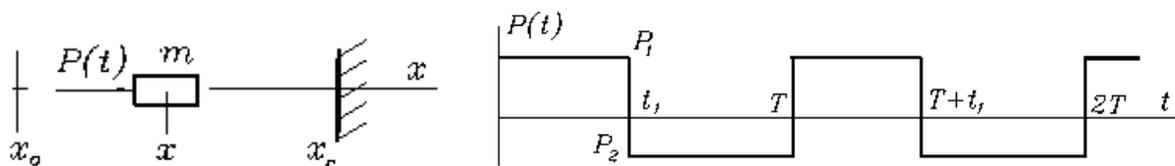


Рис. 1.1.1. Схема виброударной системы и диаграмма силы  $P(t)$

На режим движения ударной массы оказывает влияние множество факторов, к числу которых можно отнести силы, разгоняющие массу для нанесения удара и отводящие ее в исходное состояние, заданный период между ударами, время переключения сил, восстановление скорости ударника и другие. Определение параметров системы, обеспечивающих устойчивый режим движения ударника и периодические удары с заданной скоростью по правому ограничителю (технологической среде) при периодическом силовом воздействии, является актуальной задачей создания виброударных технологических систем.

Эффективный анализ влияния этих факторов и построение требуемого режима движения ударной системы могут быть достигнуты при моделировании движения виброударной системы.

**Математическая модель виброударной системы при действии периодической силы релейного типа и ударах о жесткую преграду.**

Рассмотрена виброударная система, схема которой приведена на рисунке 1.1.1. Масса  $m$  движется вдоль оси  $x$  под действием периодической силы  $P(t)$ , диаграмма которой представлена на рисунке 1.1.1. Движение рассматриваемой виброударной системы описывается уравнениями:

$$m \cdot \ddot{x} = P(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0, \quad (1.1.1)$$

$$P(t) = \begin{cases} P_1, & (n-1)T \leq t < (n-1)T + t_1, \\ P_2, & (n-1)T + t_1 \leq t < n \cdot T, \end{cases} \quad n=1, 2, 3, \dots \quad (1.1.2)$$

$$\text{при } x = x_c, \text{ если } \dot{x}^- > 0, \text{ то } \dot{x}^+ = -R \cdot \dot{x}^-, \quad (1.1.3)$$

где  $T$  – период силового воздействия;  $P_1, P_2$  – силы, действующие на массу  $m$  в течение периода;  $t_1$  – длительность действия силы  $P_1$ ;  $n$  – номер цикла силового воздействия;  $x_0$  – координата массы в начальный момент времени при  $t = t_0$ ;  $\dot{x}_0$  – скорость ударной массы в начальный момент времени;  $x_c$  – координата ограничителя;  $\dot{x}^-$  – скорость ударной массы перед столкновением с ограничителем;  $\dot{x}^+$  – скорость ударной массы после столкновения с ограничителем;  $R$  – коэффициент восстановления скорости при ударе.

**Удар на интервале  $t_0 \leq t < t_1$ .**

Время первого удара обозначим  $t_{c_1}$ , причем  $t_0 < t_{c_1} < t_1$ . Координата массы совпадает в этот момент с положением ограничителя  $x(t_{c_1}) = x_c$ . Используя теорему об изменении кинетической энергии материальной точки применительно к движению ударной массы, на интервале  $t_0 \leq t \leq t_{c_1}$  имеем

$$\frac{1}{2} m (\dot{x}^2(t) - \dot{x}_0^2) = P_1(x - x_0), \quad \dot{x}(t) = \pm \sqrt{\dot{x}_0^2 + 2A_1(x - x_0)}, \quad A_1 = \frac{P_1}{m}. \quad (1.1.4)$$

В момент первого удара  $t = t_{c_1}$ ,  $x = x_c$ . Так как предупредительная скорость массы по условию (1.1.3) является положительной величиной, то при  $t = t_{c_1}$  из (1.1.4) для  $(\dot{x}(t_{c_1}))^-$  оставляем знак «+»:

$$t = t_{c_1}, \quad (\dot{x}(t_{c_1}))^- = \sqrt{\dot{x}_0^2 + 2A_1(x_0 - x_c)}. \quad (1.1.5)$$

При интегрировании (1.1.1) до нанесения первого удара на интервале  $t_0 \leq t \leq t_{c_1}$  имеем  $\dot{x}(t) = \dot{x}_0 + A_1(t - t_0)$ . При  $t = t_{c_1}$  получим значение  $(\dot{x}(t_{c_1}))^-$ , равное

$$(\dot{x}(t_{c_1}))^- = \dot{x}_0 + A_1(t_{c_1} - t_0). \quad (1.1.6)$$

Время первого удара  $t_{c_1}$  определим, приравняв (1.1.5) и (1.1.6):

$$t_{c_1} = t_0 + \frac{-\dot{x}_0 + \sqrt{\dot{x}_0^2 - 2A_1(x_0 - x_c)}}{A_1}. \quad (1.1.7)$$

Начальная скорость  $\dot{x}_0$  может быть как положительной ( $\dot{x}_0 > 0$ ), так и отрицательной ( $\dot{x}_0 < 0$ ) величиной. При  $\dot{x}_0 < 0$  из (1.1.7) следует, что время первого удара наступит позднее, чем при  $\dot{x}_0 > 0$ .

Скорость массы после удара при  $t = t_{c_1}$  в соответствии с равенством (1.1.3) равна

$$t = t_{c_1}, \quad (\dot{x}(t_{c_1}))^+ = -R \cdot (\dot{x}(t_{c_1}))^-. \quad (1.1.8)$$

На первой фазе действия усилия на интервале  $t_{c_1} \leq t \leq t_1$  скорость ударной массы и ее координата определяются равенствами:

$$\dot{x} = (\dot{x}(t_{c_1}))^+ + A_1 \cdot (t - t_{c_1}), \quad x = x_c + (\dot{x}(t_{c_1}))^+ \cdot (t - t_{c_1}) + \frac{1}{2} A_1 \cdot (t - t_{c_1})^2. \quad (1.1.9)$$

Удар массы об ограничитель может многократно повторяться на интервале  $t_{c_1} < t < t_1$ . Если в первой фазе действия силы в момент времени  $t = t_{c_i}$ , происходит  $i$ -й удар, то на интервале  $t_{c_{i-1}} \leq t \leq t_{c_i}$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (\dot{x}(t_{c_{i-1}}))^+ + A_1(t - t_{c_{i-1}}), \\ x(t) &= x_c + (\dot{x}(t_{c_{i-1}}))^+ (t - t_{c_{i-1}}) + \frac{1}{2} A_1(t - t_{c_{i-1}})^2, \end{aligned} \quad (1.1.10)$$

где  $t_{c_{i-1}}$  – время нанесения  $(i-1)$ -го удара;  $(\dot{x}(t_{c_{i-1}}))^+ = -R \cdot (\dot{x}(t_{c_{i-1}}))^-$  – скорость массы после нанесения  $(i-1)$ -го удара, являющейся начальной скоростью движения массы на интервале  $t_{c_{i-1}} \leq t \leq t_{c_i}$ .

В момент нанесения  $i$ -го удара при  $t = t_{c_i}$  масса соприкасается с ограничителем и ее координата  $x(t_{c_i}) = x_c$ . Тогда из (1.1.10)

$$x_c = x_c + (\dot{x}(t_{c_{i-1}}))^+ (t_{c_i} - t_{c_{i-1}}) + \frac{1}{2} A_1 (t_{c_i} - t_{c_{i-1}})^2, \quad t_{c_i} - t_{c_{i-1}} = \frac{-2(\dot{x}(t_{c_{i-1}}))^+}{A_1}. \quad (1.1.11)$$

Время между двумя последовательными ударами пропорционально зависит от послеударной скорости предыдущего удара и оно уменьшается в геометрической прогрессии. Возникает явление «дребезга». Координата ударной массы интенсивно стремится к  $x_c$ .

Общее время таких соударений при числе соударений, стремящихся к бесконечности, конечно и определяется как [1.34]

$$t_{c_\infty} = t_{c_1} + \frac{2R}{A_1(1-R)} (\dot{x}(t_{c_1}))^-.$$

Если  $t_{c_\infty} < t_1$ , то многократный ударный режим движения ударной массы заканчивается еще в первой фазе действия силы  $P(t)$  и следует переходить к рассмотрению движения во второй фазе действия силы при следующих начальных условиях:  $x(t_1) = x_c$ ,  $\dot{x}(t_1) = 0$ .

Если неравенство  $t_{c_\infty} < t_1$  не выполняется, то возникает необходимость определения конечного числа ударов массы об ограничитель до начала второй фазы действия силы  $P(t)$ . Число ударов  $j$  определится как

$$j = \frac{\ln[1 - \frac{t_1 - t_{c_1}}{a_1}(R-1)]}{\ln R} + 1, \quad a_1 = \frac{2}{A_1} R \cdot (\dot{x}(t_{c_1}))^-.$$

При режиме многократных ударов скорость каждого последующего удара интенсивно уменьшается по закону геометрической прогрессии, причем

$$(\dot{x}(t_{c_i}))^- = R^{i-1} \cdot (\dot{x}(t_{c_1}))^-.$$

Так как  $R < 1$ , то  $R^{i-1}$  при увеличении  $i$  стремится к нулю. Если рассмотреть отношение  $\frac{(\dot{x}(t_{c_i}))^-}{(\dot{x}(t_{c_1}))^-} = R^{i-1}$ , то отношение скорости удара на

$i$ -м соударении к предупредной скорости первого удара при достаточно большом числе соударений становится малой величиной.

Если задаться величиной этой малости  $\varepsilon$  и учитывать

$$(\dot{x}(t_{c_i}))^- = \begin{cases} (\dot{x}(t_{c_i}))^-, & \text{если } R^{i-1} \geq \varepsilon, \\ 0, & \text{если } R^{i-1} < \varepsilon, \end{cases}$$

то можно определить то минимальное число ударов  $i_{\min}$ , после которого можно считать практически, что ударная масса находится в покое у ограничителя, пока  $t < t_1$ , т. е. не наступила вторая фаза действия усилия  $P(t)$ :  $i_{\min} = (\ln \varepsilon / \ln R) + 1$ .

Если  $i > i_{\min}$ , то можно считать, что  $(\dot{x}(t_{c_i}))^- = 0$ ,  $x(t_{c_i}) = x_c$ , т. е. становятся известными начальные условия для следующего этапа расчета.

**Удар на интервале  $t_1 \leq t \leq T$ .**

Если первый удар не произошел на интервале  $t_0 \leq t \leq t_1$ , то он может произойти на интервале  $t_1 \leq t \leq T$ , когда на массу начинает действовать сила  $P_2$ . Начальные условия для этого этапа движения таковы:  $x|_{t=t_1} = x(t_1) < x_c$ ,  $\dot{x}|_{t=t_1} = \dot{x}(t_1)$ . Время первого удара обозначим  $t_{c_1}$ , причем  $t_1 < t_{c_1} < T$ .

Используя теорему об изменении кинетической энергии материальной точки применительно к движению ударной массы, на интервале  $t_1 \leq t \leq t_{c_1}$  имеем

$$\frac{1}{2}m(\dot{x}^2(t) - \dot{x}^2(t_1)) = P_2(x - x(t_1)),$$

$$\dot{x}(t) = \pm \sqrt{\dot{x}^2(t_1) + 2A_2(x - x(t_1))}, \quad A_2 = \frac{P_2}{m}. \quad (1.1.12)$$

В момент первого удара  $t = t_{c_1}$ ,  $x = x_c$ . Тогда предударная скорость массы, будучи по условию (1.1.3) положительной величиной, из (1.1.12) равна

$$t = t_{c_1}, \quad (\dot{x}(t_{c_1}))^- = \sqrt{\dot{x}^2(t_1) + 2A_2(x_c - x(t_1))}. \quad (1.1.13)$$

При интегрировании (1.1.1) до нанесения первого удара на интервале  $t_1 \leq t \leq t_{c_1}$  имеем  $\dot{x}(t) = \dot{x}(t_1) + A_2(t - t_1)$ . При  $t = t_{c_1}$  получим значение  $(\dot{x}(t_{c_1}))^-$ , равное

$$(\dot{x}(t_{c_1}))^- = \dot{x}(t_1) + A_2(t_{c_1} - t_1). \quad (1.1.14)$$

Время первого удара  $t_{c_1}$  во второй фазе действия усилия определим, приравняв (1.1.13) и (1.1.14):

$$t_{c_1} = t_1 + \frac{-\dot{x}(t_1) + \sqrt{\dot{x}^2(t_1) + 2A_2(x_c - x(t_1))}}{A_2}, \quad A_2 = \frac{P_2}{m}. \quad (1.1.15)$$

Чтобы произошел удар во второй фазе действия силы  $t_1 \leq t \leq T$ , подкоренное выражение должно удовлетворять неравенству

$$\dot{x}^2(t_1) + 2A_2(x_c - x(t_1)) > 0. \quad (1.1.16)$$

Скорость массы после удара в соответствии с равенством (1.1.3) равна

$$t = t_{c_1}, \quad (\dot{x}(t_{c_1}))^+ = -R \cdot (\dot{x}(t_{c_1}))^-.$$

Рассмотрим возможность возникновения повторных ударов во второй фазе действия силы на интервале  $t_{c_1} \leq t \leq T$ . Аналогично, как и для (1.1.12), имеем

$$\dot{x}(t) = \pm \sqrt{\dot{x}^2(t_{c_1}) + 2A_2(x - x(t_{c_1}))}. \quad (1.1.17)$$

В момент повторного удара  $t = t_{c_2}$ ,  $x = x_c$ . Тогда предударная скорость массы, будучи по условию (1.1.3) положительной величиной, из (1.1.17) равна

$$t = t_{c_2}, \quad (\dot{x}(t_{c_2}))^- = \sqrt{(\dot{x}^2(t_{c_1}))^+ + 2A_2(x_c - x(t_{c_1}))}. \quad (1.1.18)$$

Так как  $x(t_{c_1}) = x_c$ , то  $(\dot{x}(t_{c_2}))^- = -(\dot{x}(t_{c_1}))^+ = R \cdot (\dot{x}(t_{c_1}))^-$ .

При интегрировании (1.1.1) на интервале  $t_{c_1} \leq t \leq t_{c_2}$  имеем

$$\dot{x}(t) = (\dot{x}(t_{c_1}))^+ + A_2(t - t_{c_1}).$$

Если  $A_2 < 0$ , повторный удар во второй фазе действия силы невозможен, так как  $(\dot{x}(t_{c_1}))^+ = -R \cdot (\dot{x}(t_{c_1}))^- < 0$ ,  $\dot{x}(t) < 0$  и ударная масса перемещается от ограничителя. В этом случае далее расчет производится по формулам ( $t_{c_1} < t < t_1$ ):

$$\dot{x} = (\dot{x}(t_{c_1}))^+ + A_2(t - t_{c_1}), \quad x = x_c + (\dot{x}(t_{c_1}))^+ (t - t_{c_1}) + \frac{1}{2} A_2 (t - t_{c_1})^2. \quad (1.1.19)$$

При  $t = T$  скорость ударной массы и ее координата примут значения

$$\dot{x}(T) = (\dot{x}(t_{c_1}))^+ + A_2(T - t_{c_1}), \quad x(T) = x_c + (\dot{x}(t_{c_1}))^+ (T - t_{c_1}) + \frac{1}{2} A_2 (T - t_{c_1})^2.$$

Если  $A_2 > 0$ , повторный удар во второй фазе действия силы возможен при условии, что время повторного удара  $t_{c_1} < t_{c_2} < T$ , причем

$$t_{c_2} > t_{c_1} + \frac{-(\dot{x}(t_{c_1}))^+}{A_2} = t_{c_1} + \frac{R \cdot (\dot{x}(t_{c_1}))^-}{A_2}.$$

Если во второй фазе действия силы возникают многократные удары, то для  $i$ -го удара (при условии, что  $t_{c_i} < T$ )

$$t_{c_i} > t_{c_{i-1}} + \frac{R \cdot (\dot{x}(t_{c_{i-1}}))^-}{A_2}.$$

Время между двумя последовательными ударами пропорционально зависит от послеударной скорости предыдущего удара и оно уменьшается в геометрической прогрессии. Возникает явление «дребезга» во второй фазе действия силы. Координата ударной массы интенсивно стремится к  $x_c$ , а предударная скорость уменьшается по закону  $(\dot{x}(t_{c_i}))^- = R^{i-1} \cdot (\dot{x}(t_{c_1}))^-$ .

Явление «дребезга» во второй фазе действия силы, возникающее при условии  $A_2 > 0$ , явно нежелательно, так как в следующем периоде на интервале  $T < t < T + t_1$  начинается новая фаза силового воздействия на ударную массу ( $A_1 > 0$ ) и процесс периодических ударов может прекратиться.

Если начинается второй период движения, координата ударной массы  $x(T)$  и ее скорость  $\dot{x}(T)$  принимаются за начальные для следующего цикла и процедура расчета повторяется.

### **Алгоритм моделирования виброударной системы**

При разработке процедуры моделирования виброударной системы с периодическим силовым воздействием изложенная выше математическая

модель используется для сопоставления результатов моделирования с точным решением.

Разработан программный продукт [1.37], обеспечивающий процесс моделирования процесса движения виброударной системы. Блок-схема программного комплекса представлена на рисунке 1.1.2.

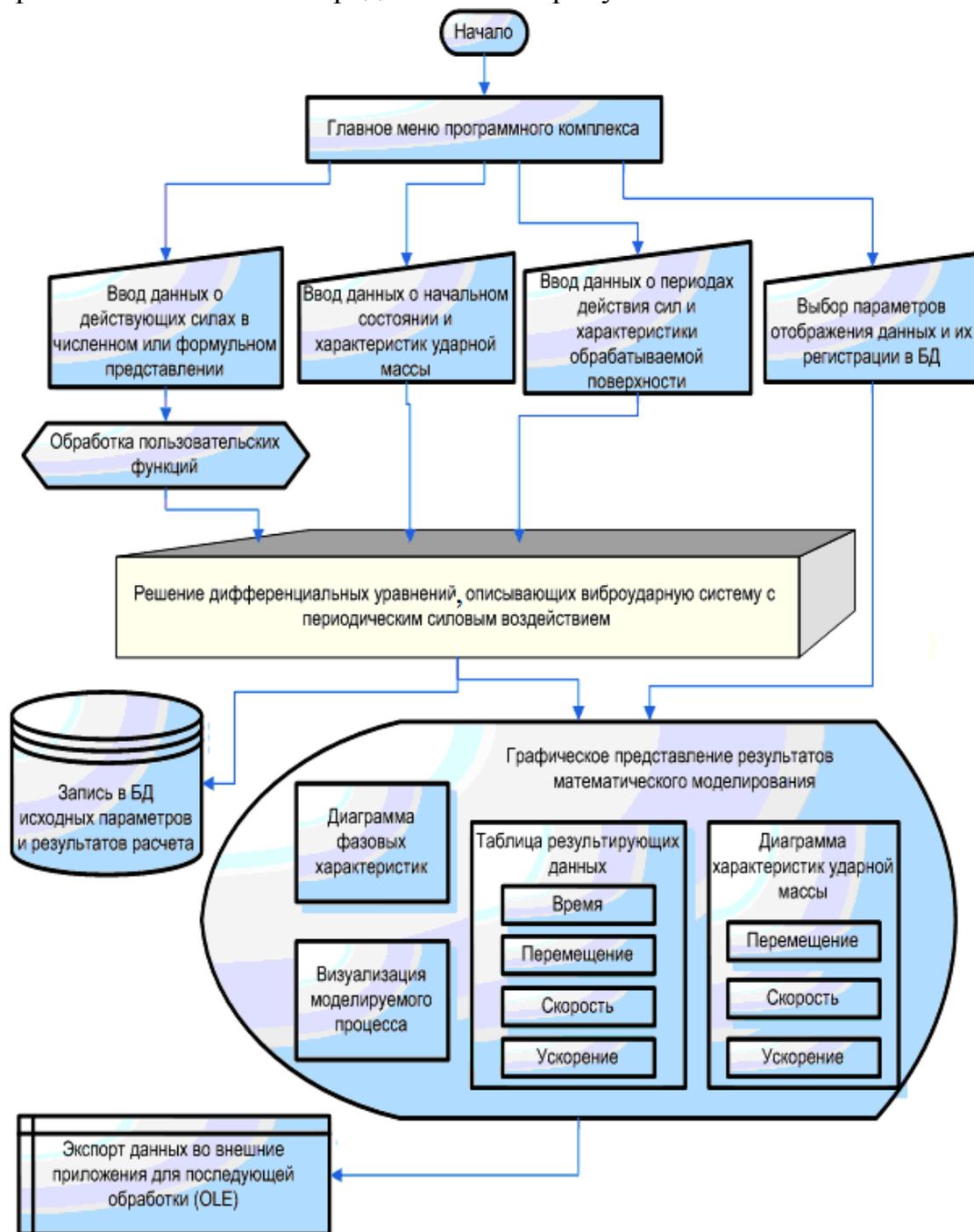


Рис. 1.1.2. Блок-схема программного комплекса

При моделировании формируются значительные по размерам числовые массивы, представляющие собой данные о положении, скорости, ускорении ударной массы.

Анализ результатов, представленных таким образом, достаточно трудоемок, так как требуется обработка большого количества числовых значений. Программный комплекс [1.38, 1.40, 1.53] предоставляет пользователю возможность моделировать условия работы виброударного механизма, варьируя исходные параметры, или воспользоваться готовыми экспериментами, сохраненными в базе данных системы.

Перед началом моделирования необходимо ввести исходные данные: начальное положение ударной массы  $x$ , начальную скорость  $v$ , коэффициент восстановления скорости  $R$ , массу ударника  $m$ , период действия силы  $T$ , время от начала периода до момента переключения знака силы  $t_1$ , значение сил  $P_1$  и  $P_2$  на участках периода  $T$ . Пользователь имеет возможность регулировать параметры отображения и необходимые к исследованию графические и табличные данные.

К исходным параметрам вычислительного эксперимента относятся начальное положение объекта; его начальная скорость; коэффициент восстановления послеударной скорости; масса объекта; период действия сил; момент переключения действующих сил; величины или аналитическое описание действующих сил.

#### Формализация силовых воздействий

Формализация действующих на объект сил позволяет исследовать и проводить эксперименты с моделями, максимально приближенными к реальным системам. Подсказка с основным описанием существующих компилируемых блоков формул представлена на рисунке 1.1.3.

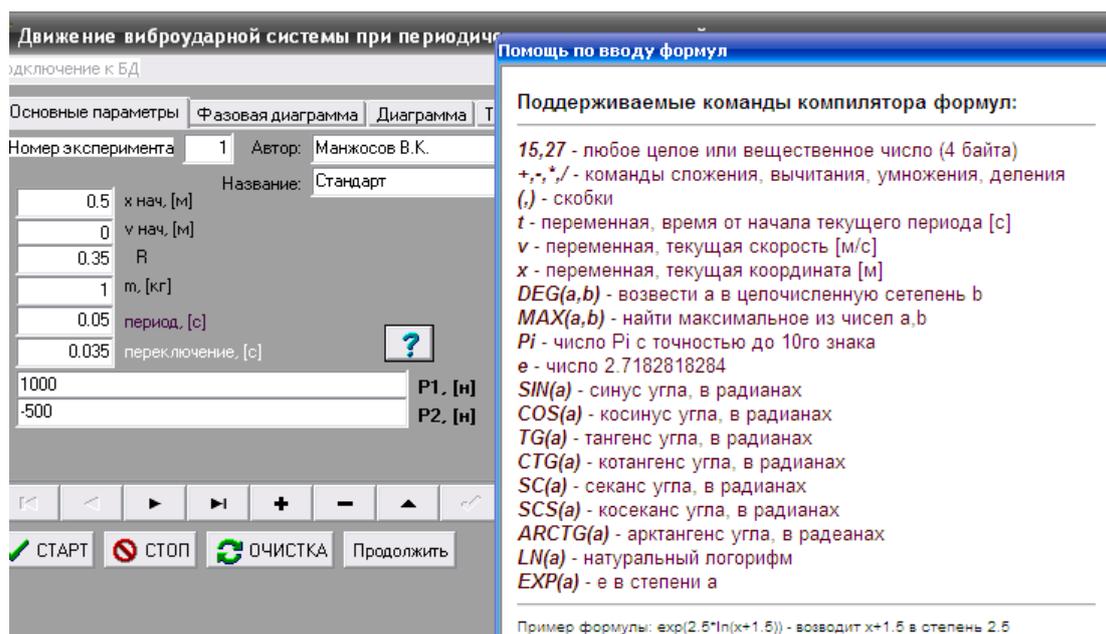


Рис. 1.1.3. Компилируемые блоки формул

### *Формализация сил по экспериментальным данным*

В программном продукте предусмотрен блок формализации сил по экспериментальным данным. Для хранения данных о значении сил на интервале времени, равным длительности силового воздействия, разработана отдельная подпрограмма, воспроизводящая связанную таблицу. По таблице осуществляется навигация, а набор и редактирование данных реализуются непосредственно в табличной части.

В результате такой формализации можно получить данные о значении сил и времени их переключения. В вычислительном блоке осуществляется линейная аппроксимация силовой функции по точкам.

### *Блок графического представления результатов математического моделирования*

Запуск процедуры моделирования эксперимента, его остановка, продолжение, пошаговое выполнение и очистка производятся с помощью панели управления моделированием.

После нажатия на кнопку «Старт» происходит запуск таймера процедуры численного расчета дифференциальных уравнений движения.

Задержка анимации позволяет регулировать скорость отображения процесса моделирования.

Обеспечивается возможность изменения величины временного шага при вычислениях.

### *Фазовая диаграмма*

Отображение окна фазовой диаграммы происходит при выборе пункта «Отображать». Фазовая диаграмма графически изображает изменение скорости объекта в зависимости от координаты. Масштабы оси абсцисс и ординат настраиваются через вкладку «Фазовая диаграмма». Здесь можно также настроить размеры отображаемого окна.

Отдельное внимание уделено флагу очищения фазовой диаграммы после удара. Данный функционал позволяет очистить координатную плоскость от фазовых диаграмм предыдущих циклов и обеспечить возможность построения фазовой диаграммы предельного цикла.

### *Блок определения максимальной скорости удара*

Важным моментом анализа функционирования системы является определение максимальной скорости удара при столкновении объекта с препятствием.

Для анализа необходимо фиксировать первый удар на протяжении каждого периода действия сил. Данная опция реализуется в программном продукте. При этом осуществляется запись в соответствующую связанную таблицу базы данных, где фиксируется номер эксперимента, номер периода, предупредительная скорость, время нанесения удара. Эти данные используются другими блоками программного продукта для таких

функций, как очистка фазовой диаграммы, определение момента выхода на установившийся режим.

### *Диаграммы координаты, скорости и ускорения*

Блок отображения диаграмм координаты, скорости и ускорения объекта предусматривает возможность графического отображения параметров движения при вычислительном эксперименте.

Существует возможность выбора необходимых к отображению параметров и сетку их значений, а также цвета отображаемых диаграмм. Все данные параметры можно выбрать на вкладке «Диаграмма» основного окна панели управления (рис. 1.1.4). На этой вкладке можно изменить масштабы отображения графиков.

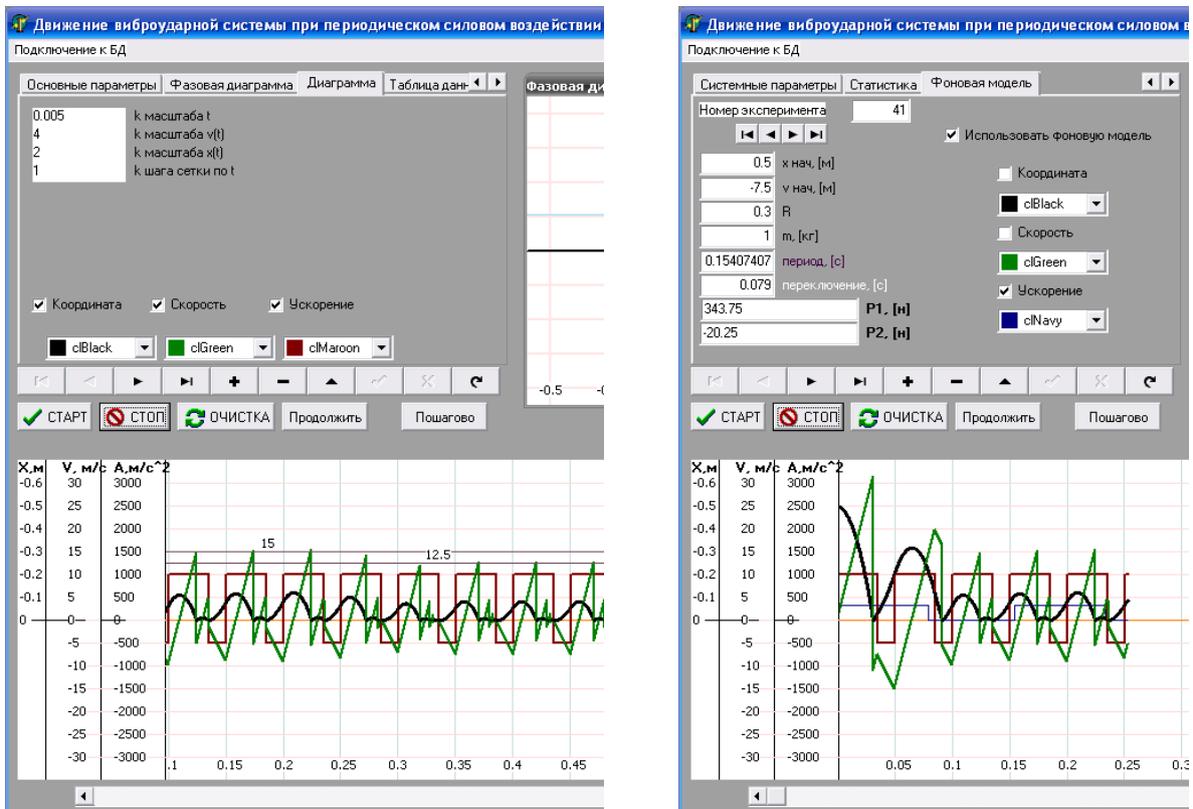


Рис. 1.1.4. Воспроизведение диаграмм координаты, скорости и ускорения объекта

При остановке процесса моделирования обеспечивается возможность активировать горизонтальную линию на отображаемых графиках скорости с целью визуальной оценки выхода ударной системы на установившийся режим движения.

### *Табличное отображение результатов моделирования*

Немаловажным при проведении эксперимента является запись численных значений параметров движения системы в процессе моделирования. С этой целью в программном комплексе реализован блок табличного отображения числовых значений параметров при моделировании. Настройки на вкладке «Таблица» основного экрана

программы, позволяют выбирать необходимые к записи параметры, а также отображать или нет форму «Таблица параметров»

На форме «Таблица параметров» присутствуют дополнительные настройки записи значений параметров в табличную часть формы. Настраиваемое поле «Пропуск записей» позволяет регулировать частоту снятия записей в режимах разгона и торможения объекта, а «Критическая координата» указывает, при достижении какого значения координаты объекта начнется запись параметров на каждом расчетном шаге.

#### *Блок генерации случайных отклонений*

При выполнении вычислительного эксперимента используется «Блок случайных изменений», находящийся на вкладке «Таблица» основной формы программного продукта. Данный блок позволяет вводить случайное малое отклонение входных параметров системы, таких как коэффициент восстановления послеударной скорости, период цикла, время переключения действующих сил.

Общий вид интерфейса программного комплекса для моделирования процесса движения механической системы при периодическом силовом воздействии и ударах о преграду представлен на рисунке 1.1.5 (процесс моделирования зафиксирован в момент нанесения удара по ограничителю).

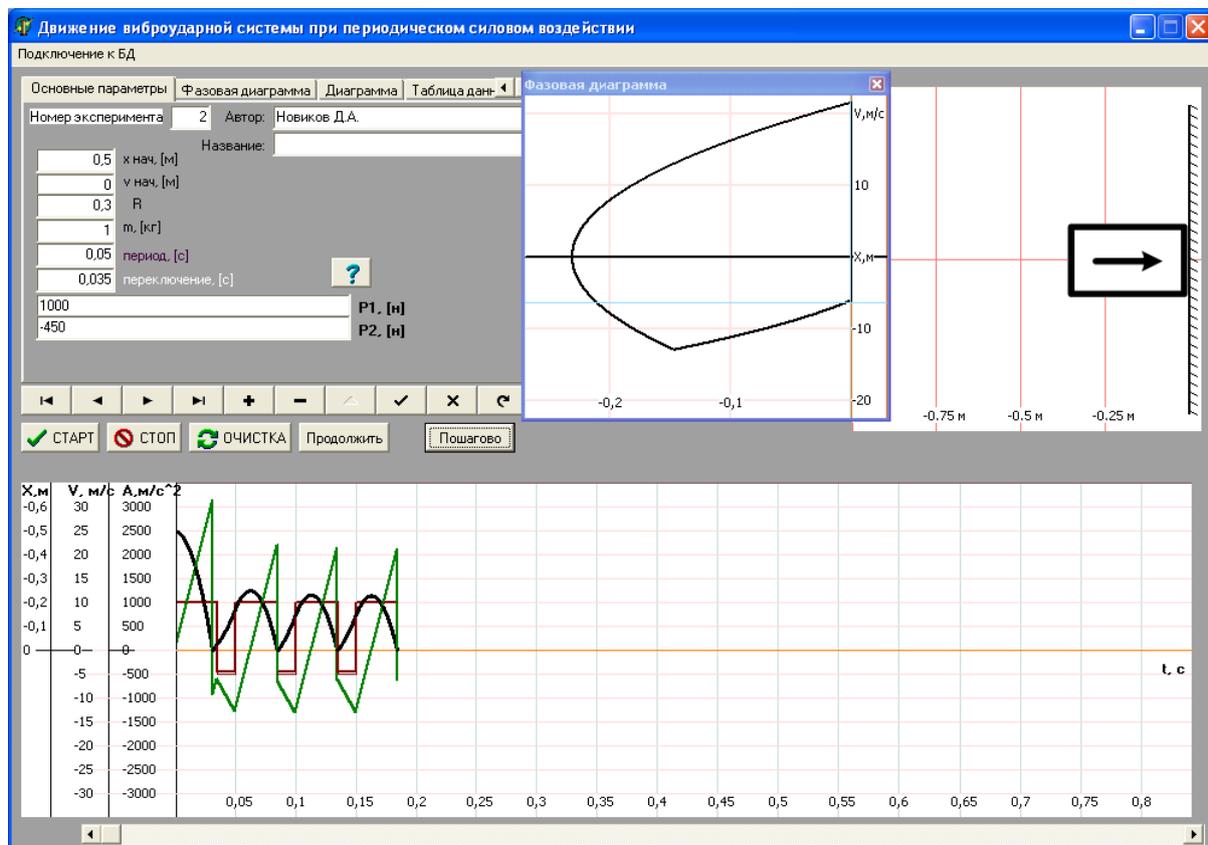


Рис. 1.1.5. Общий вид интерфейса (процесс зафиксирован в момент нанесения удара)

В левом верхнем углу окна расположена панель управления исходными данными и параметрами отображения, содержащая вкладки, отвечающие за конкретные параметры и настройки процесса моделирования.

Непосредственно под набором вкладок, регулирующих настройки процесса моделирования, находится панель управления базой данных экспериментов, позволяющая добавлять, удалять, сохранять изменения и производить навигацию по хранящейся базе проведенных экспериментов.

Внизу панели управления расположены кнопки «старт», «стоп», «очистка». Вывод курсора на эти кнопки позволяет начинать процесс моделирования (кнопка «старт»), останавливать процесс моделирования (кнопка «стоп»).

Обозначив курсором кнопку «старт», пользователь осуществляет запуск процесса моделирования. На экране монитора реализуется анимационный процесс движения ударной массы, воспроизводятся диаграммы положения  $x$ , скорости  $v$  и ускорения  $A$  (по желанию пользователя) ударной массы, а также фазовая диаграмма  $v = v(x)$  движения ударной массы.

Если возникает необходимость фиксации параметров движения, пользователь курсором на панели управления активирует кнопку «стоп». Движение системы прекращается, фиксируются диаграммы положения  $x$ , скорости  $v$  и ускорения ударной массы  $A$ , время  $t$ , фазовая диаграмма движения  $v = v(x)$ .

Проанализировав результаты, пользователь может продолжить процедуру моделирования, воспользовавшись вновь кнопкой «старт».

Возможна пошаговая реализация процесса моделирования при помощи кнопки «Пошагово».

В программном продукте существует табличная вкладка, отображаемая также по желанию пользователя.

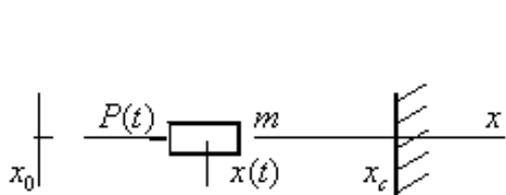
В данной таблице можно просмотреть числовой массив интересующих данных, копировать в буфер обмена и использовать в сторонние приложения для дальнейшей обработки результатов моделирования.

Отдельное внимание следует уделить вкладке «Статистика». Она используется для построения модели силового воздействия на ударник на основе экспериментальных данных, что позволяет оценивать достоверность полученной модели по реальным данным эксперимента.

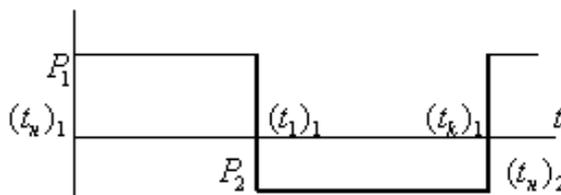
### **Результаты моделирования**

Программный комплекс [1.41, 1.53] позволяет при моделировании воспроизвести движение и скорость массы  $m$  (рис. 1.1.6, а) с соударениями об ограничитель ( $x_c$  – координата ограничителя) со скоростью  $v^-$  под

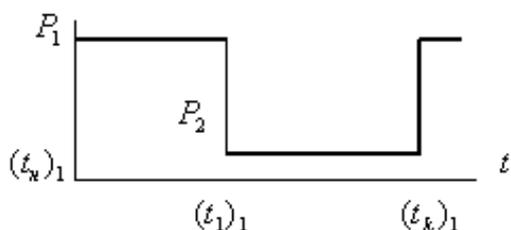
действием периодического силового воздействия  $P(t)$  с периодом  $T$  с одним переключением силы за период в моменты времени  $(t_1)_i$ .



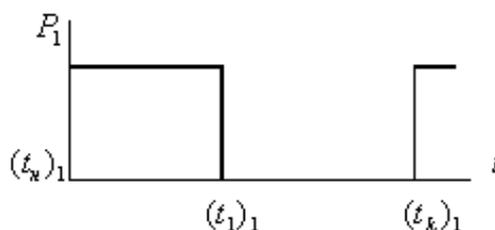
а) схема ударной системы



б) диаграмма изменения силы  $P(t)$  при знакопеременном цикле нагружения



в) диаграмма изменения силы  $P(t)$  при знакопостоянном цикле нагружения



г) диаграмма изменения силы  $P(t)$  при пульсирующем цикле нагружения

Рис. 1.1.6. Схема ударной системы и диаграммы изменения силы  $P(t)$

Перемещение и скорость ударной массы зависят от множества факторов, к числу которых можно отнести закон изменения силы  $P(t)$ , период действия силы  $T$ , время переключения силы за период  $(t_1)_i$ , начальное положение  $x_0$  и начальную скорость  $\dot{x}_0$  ударной массы, коэффициент восстановления  $R$  скорости ударника при ударе об ограничитель. Закон изменения силы  $P(t)$  определяет закон изменения ускорений ударника  $A_i = P_i(t) / m$ .

В качестве базовых приняты следующие параметры виброударной системы:  $x_0 = -0,5$  м;  $\dot{x}_0 = 0$ ,  $T = 0,05$  с;  $t_1 = 0,035$  с;  $R = 0,3$ ; ускорение ударника на фазе действия силы  $P_1$  равно  $A_1 = 1000$  м/с<sup>2</sup>, на фазе действия силы  $P_2$  равно  $A_2 = -500$  м/с<sup>2</sup>. Из множества факторов, влияющих на процесс движения, ниже представлены результаты моделирования при изменении силы  $P(t)$ . Силовое воздействие  $P(t)$  может быть знакопеременным (рис. 1.1.6, б), знакопостоянным (рис. 1.1.6, в), пульсирующим (рис. 1.1.6, г).

**Знакопеременный цикл силы  $P(t)$ .** Данный тип цикла силы характеризуется изменением знаков сил  $P_1$  и  $P_2$ , действующих на ударную массу. Ударная масса при действии этих сил имеет ускорения  $A_i = P_i / m$ . Диаграмма  $A_i = A_i(t)$  при  $A_1 = 1000$  м/с<sup>2</sup>,  $A_2 = -500$  м/с<sup>2</sup> приведена на рисунке 1.1.7.

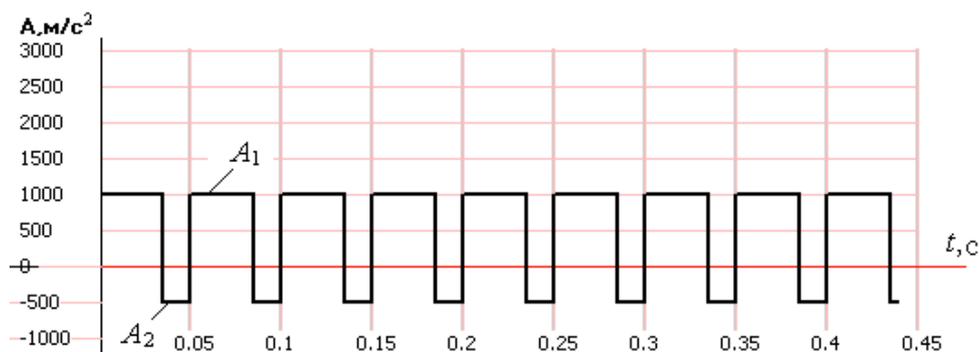


Рис. 1.1.7. Диаграмма изменения ускорений  $A_i$  при знакопеременном цикле силы  $P(t)$

На рисунке 1.1.8 представлены результаты моделирования (диаграммы перемещения  $x$ , скорости  $v$  и ускорения  $A$  ударной массы в зависимости от времени  $t$ ) при следующих параметрах ударной системы:  $x_0 = -0,5$  м;  $\dot{x}_0 = 0$ ; положение ограничителя  $x_c = 0$ ;  $T = 0,05$  с;  $t_1 = 0,035$  с;  $R = 0,3$ ;  $A_1 = 1000$  м/с<sup>2</sup>,  $A_2 = -500$  м/с<sup>2</sup>.

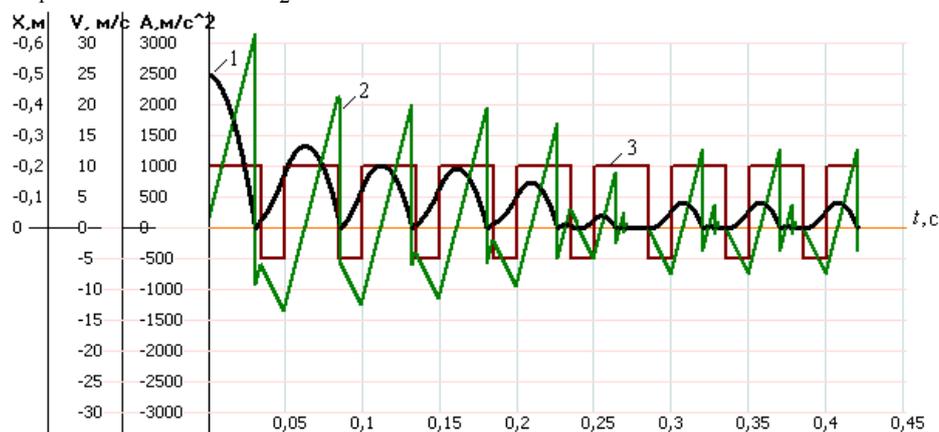


Рис. 1.1.8. Диаграммы перемещения  $x$  (диаграмма 1), скорости  $v$  (диаграмма 2) и ускорения  $A$  (диаграмма 3) ударной массы при  $x_0 = 0$ ,  $\dot{x}_0 = 0$ ,  $A_1 = 1000$  м/с<sup>2</sup>,  $A_2 = -500$  м/с<sup>2</sup>,  $T = 0,05$  с,  $t_1 = 0,035$  с,  $R = 0,3$

Перемещение ударника начинается с  $x_0 = -0,5$  м, и как только ударник достигает ограничителя  $x = x_c = 0$ , происходит удар массы об ограничитель (диаграмма 2 на рис. 1.1.8). В тот же момент ударник приобретает отрицательную скорость в соответствии с условием  $x^+ = -R \cdot x^-$ .

Так как в момент нанесения первого удара не произошло переключения силы (рис. 1.1.8), ускорение массы до момента переключения силы остается положительным ( $A_i = A_1$ ) и скорость ударника начинает замедляться при движении от ограничителя.

При  $t = t_1$  происходит переключение силы со значения  $P_1$  на значение  $P_2$ , ускорение массы становится отрицательным ( $A_i = A_2$ ) и скорость

ударника начинает увеличиваться при движении от ограничителя до момента времени  $t = T = 0,05$  с.

При  $t = T$  происходит переключение силы со значения  $P_2$  на значение  $P_1$ . Ускорение массы становится положительным ( $A_i = A_1$ ), скорость ударника замедляется до нуля при движении от ограничителя, а затем начинается движение в сторону ограничителя.

Второй удар происходит практически в тот момент, когда происходит переключение силы со значения  $P_1$  на значение  $P_2$ . В тот же момент ударник приобретает отрицательную скорость в соответствии с условием  $x^+ = -R \cdot x^-$  и далее движение ударника можно описывать по той же схеме, что при первом ударе.

Заметим далее, что третий, четвертый и пятый удары происходят с постепенным смещением момента удара относительно времени переключения силы со значения  $P_1$  на значение  $P_2$ . Когда это смещение значительно, возникает явление дребезга (многократные удары массы об ограничитель с малой предударной скоростью).

Однако явление дребезга для рассматриваемых параметров системы стабилизирует ее движение. Дальнейшее движение ударника приобретает установившийся характер. Следует обратить внимание на то, что в установившемся режиме движения предударная скорость ударника существенно ниже, чем на первых циклах движения.

Рассмотрим диаграмму перемещения ударной массы (диаграмма 1, рис. 1.1.8). Движение ударника начинается с положения  $x_0 = -0,5$  м в направлении ограничителя. При каждом ударе движение происходит от ограничителя и в этом движении ударник останавливается, когда скорость его становится равной нулю. Расстояние от ограничителя, которое в этот момент имеет ударник, на первых ударах все сокращается и стабилизируется только при установившемся процессе движения. Размах колебаний ( $x_{\max} - x_{\min}$ ) при установившемся движении существенно меньше начального расстояния между ударником и ограничителем.

Анализируя диаграммы движения ударника при установившемся режиме движения (рис. 1.1.8), обратим внимание на то, что каждый цикл движения начинается с определенного фазового состояния виброударной системы, при котором в моменты времени  $(n-1)T$  на ударную массу действует сила  $P_1$  (соответственно, возникает ускорение  $A_1$ ), а в моменты времени  $(n-1)T + t_1$  на ударную массу действует сила  $P_2$  (соответственно, возникает ускорение  $A_2$ ).

В результате можно прийти к следующему выводу. Если начальное состояние виброударной системы будет таково, что при  $t = 0$  начальные

координата  $x_0 = 0$  и скорость  $\dot{x}_0 = 0$ , то при  $A_1 = 1000 \text{ м/с}^2$ ,  $A_2 = -500 \text{ м/с}^2$ ,  $T = 0,05 \text{ с}$ ,  $t_1 = 0,035 \text{ с}$  и фазовом сдвиге  $t_\varphi$  силового воздействия вида

$$P(t) = \begin{cases} P_1, & (n-1)T - t_\varphi \leq t < (n-1)T - t_\varphi + t_1, \\ P_2, & (n-1)T - t_\varphi + t_1 \leq t < n \cdot T - t_\varphi, \end{cases} \quad n=1,2,3,\dots, \quad t \geq 0,$$

при  $t_\varphi = t_1$  можно выйти на установившийся режим движения ударной массы, максимально сократив переходной процесс.

Реализация этого вывода представлена на рис. 1.1.9.

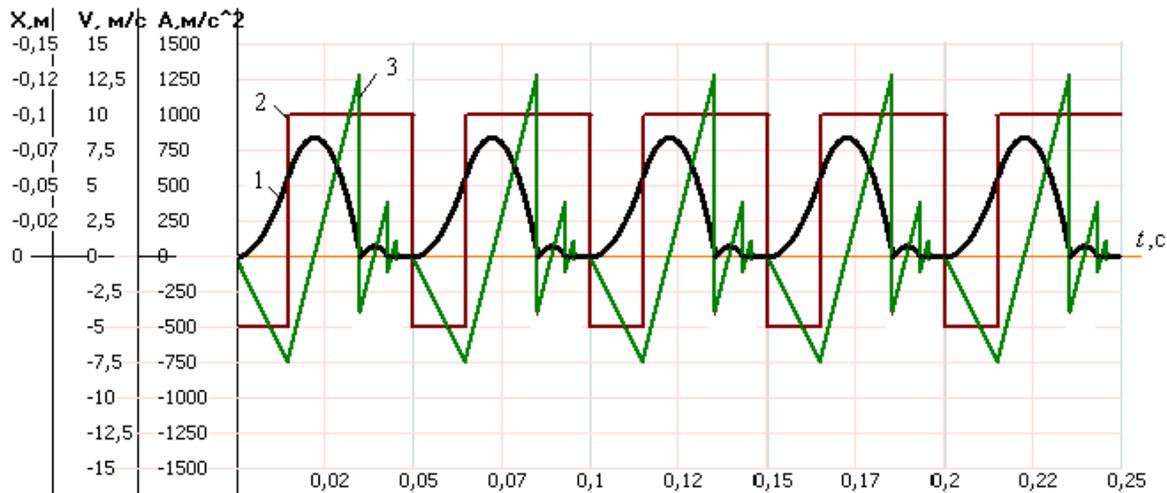


Рис. 1.1.9. Диаграммы перемещения  $x$  (диаграмма 1), скорости  $v$  (диаграмма 2) и ускорения  $A$  (диаграмма 3) ударной массы при  $x_0 = 0$ ,  $\dot{x}_0 = 0$ ,  $A_1 = 1000 \text{ м/с}^2$ ,  $A_2 = -500 \text{ м/с}^2$ ,  $T = 0,05 \text{ с}$ ;  $t_1 = 0,035 \text{ с}$ ;  $t_\varphi = t_1$ ,  $R = 0,3$

Движение ударника в начальный момент времени начинается при ускорении  $A_2$  и начальном состоянии  $x_0 = 0$ ,  $\dot{x}_0 = 0$ . Ударник движется от ограничителя, скорость его отрицательна. В моменты времени  $n \cdot T - t_\varphi$  происходит переключение силы на значение  $P_1$ , ударник движется с ускорением  $A_1$ , направление скорости меняется на противоположное.

Момент удара смещен относительно времени переключения силы со значения  $P_1$  на значение  $P_2$ . В результате возникает явление дребезга. Однако в моменты времени  $n \cdot T - t_\varphi + t_1$ , когда происходит это переключение, фазовое состояние системы возвращается в начальное ( $x_0 = 0$ ,  $\dot{x}_0 = 0$ ). В результате каждый последующий цикл движения начинается с прежнего начального фазового состояния.

**Знакопостоянный цикл силы  $P(t)$ .** Данный тип цикла силы характеризуется тем, что силы  $P_1$  и  $P_2$  одного знака. Ударная масса при действии этих сил имеет ускорения  $A_i = P_i / m$ , диаграмма которых воспроизводится при моделировании (рис. 1.1.10).

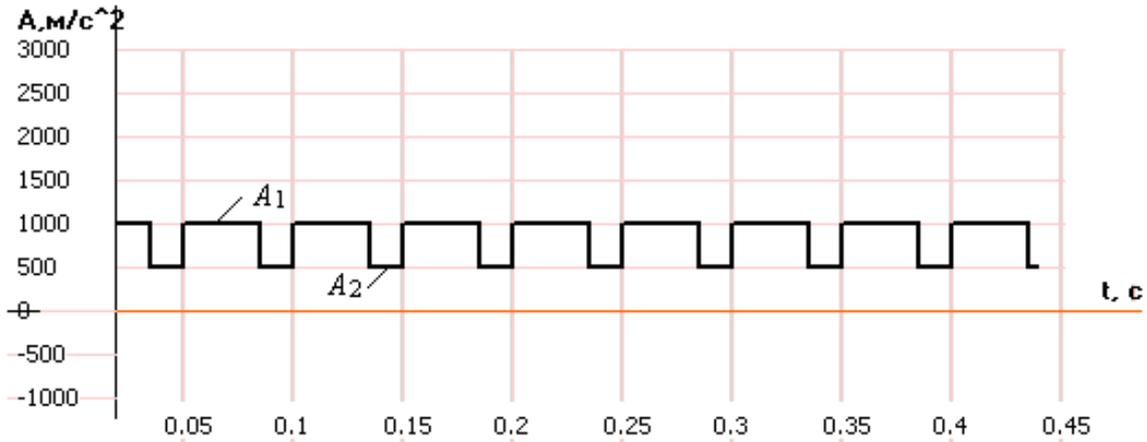


Рис. 1.1.10. Диаграмма изменения ускорений при знакопостоянном цикле силы  $P(t)$

На рисунке 1.1.11 представлены результаты моделирования (диаграммы положения  $x$  и скорости  $v$  ударной массы в зависимости от времени  $t$ ) при следующих параметрах ударной системы:  $x_0 = -0,5$  м;  $\dot{x}_0 = 0$ ,  $T = 0,05$  с;  $t_1 = 0,035$  с;  $R = 0,3$ ;  $A_1 = 1000$  м/с<sup>2</sup>,  $A_2 = 500$  м/с<sup>2</sup>.

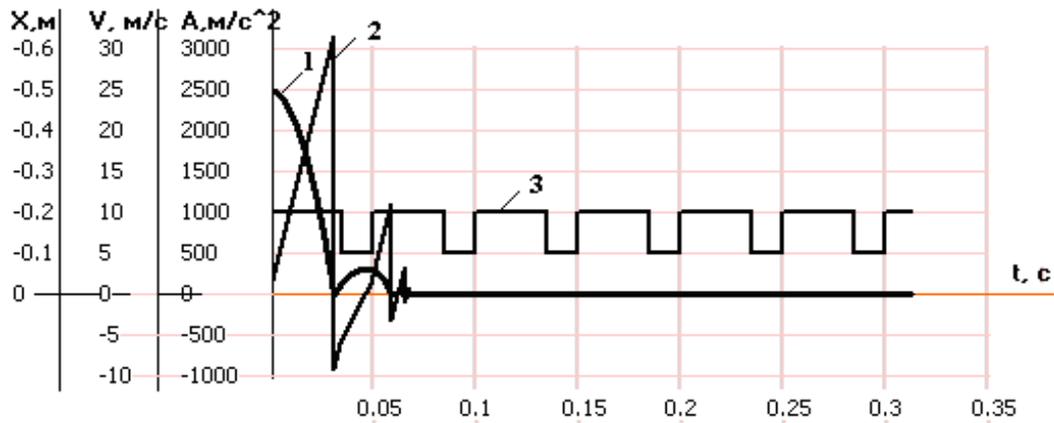


Рис. 1.1.11. Диаграммы перемещения  $x$  (диаграмма 1), скорости  $v$  (диаграмма 2) и ускорения (диаграмма 3) ударной массы при  $x_0 = -0,5$  м,  $\dot{x}_0 = 0$ ,  $A_1 = 1000$  м/с<sup>2</sup>,  $A_2 = 500$  м/с<sup>2</sup>,  $T = 0,05$  с;  $t_1 = 0,035$  с;  $R = 0,3$

Перемещение ударника начинается с  $x_0 = -0,5$  м, и как только ударник достигает ограничителя  $x = x_c = 0$ , происходит удар массы об ограничитель (диаграмма 2 на рис. 1.1.11). В тот же момент ударник приобретает отрицательную скорость в соответствии с условием  $x^+ = -R \cdot x^-$ .

Так как в момент нанесения первого удара не произошло переключения силы (рис. 1.1.11), ускорение массы до момента переключения силы остается положительным и скорость ударника начинает замедляться при движении от ограничителя.

При  $t = t_1$  происходит переключение силы со значения  $P_1$  на значение  $P_2$ , ускорение массы продолжает оставаться положительным и ударник в момент времени  $t = T = 0,05$  с практически останавливается.

При  $t = T = 0,05$  с происходит переключение силы со значения  $P_2$  на значение  $P_1$ . Ударник вновь разгоняется и наносит удар по ограничителю в момент времени  $0,05 < t_{c_2} < 0,05 + t_1$  со скоростью  $\dot{x}^-$  порядка 10 м/с. В тот же момент ударник приобретает отрицательную скорость  $x^+ = -R \cdot x^-$ .

Так как на ударник продолжает действовать сила  $P_1$ , ударник успевает вновь разогнаться и нанести удар по ограничителю. Возникает явление дребезга, когда скорость ударника стремительно падает до нуля. Ударник залипает у ограничителя. Движение ударника прекращается.

Может создаться впечатление, что знакопостоянный цикл изменения силы не обеспечивает периодического движения ударника.

Однако, изменив параметры системы (период силового воздействия  $T = 0,22$  с; время переключения силы  $t_1 = 0,05$  с;  $A_1 = 400$  м/с<sup>2</sup>,  $A_2 = 35$  м/с<sup>2</sup>), и при знакопостоянном цикле изменения силы можно добиться периодического цикла движения. Результаты реализации такого цикла движения представлены на рисунке 1.1.12.

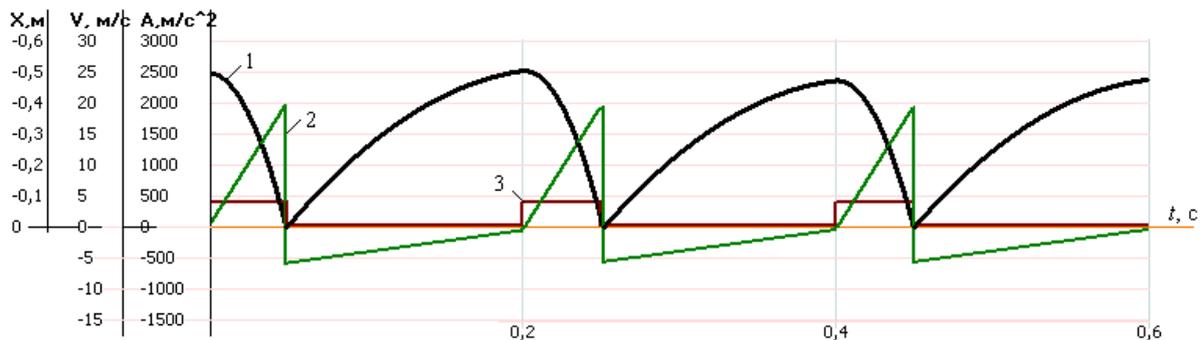


Рис. 1.1.12. Диаграммы перемещения  $x$  (диаграмма 1), скорости  $v$  (диаграмма 2) и ускорения  $A$  (диаграмма 3) ударной массы при  $x_0 = -0,5$  м,  $\dot{x}_0 = 0$ ,  $A_1 = 400$  м/с<sup>2</sup>,  $A_2 = 35$  м/с<sup>2</sup>,  $T = 0,2$  с,  $t_1 = 0,05$  с,  $R = 0,3$

**Пульсирующий цикл силы  $P(t)$ .** Данный тип цикла силы характеризуется тем, что на временных интервалах  $(n - 1)T + t_1$  на ударную массу действует сила  $P_1$  (соответственно возникает ускорение  $A_1$ ), а на интервалах  $nT - t_1$  сила  $P_2 = 0$  (соответственно ускорение  $A_2 = 0$ ). Диаграмма ускорений воспроизводится при моделировании. Для иллюстрации на рисунке 1.1.13 представлена диаграмма ускорений, когда  $A_1 = 1000$  м/с<sup>2</sup> и  $A_2 = 0$ .

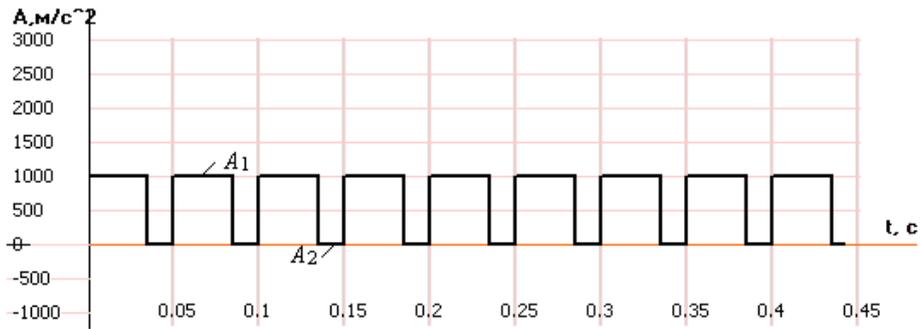


Рис. 1.1.13. Диаграмма изменения ускорения при пульсирующем цикле силы  $P(t)$

На рисунке 1.1.14 представлены результаты моделирования (диаграммы положения  $x$  и скорости  $v$  ударной массы в зависимости от времени  $t$ ) при следующих параметрах ударной системы:  $x_0 = -0,5$  м;  $\dot{x}_0 = 0$ ,  $T = 0,05$  с;  $t_1 = 0,035$  с;  $R = 0,3$ ;  $A_1 = 1000$  м/с<sup>2</sup>,  $A_2 = 0$ .

Перемещение ударника начинается с  $x_0 = -0,5$  м, и как только ударник достигает ограничителя  $x = x_c = 0$ , происходит удар массы об ограничитель (диаграмма 2 на рис. 1.1.14). В тот же момент ударник приобретает отрицательную скорость в соответствии с условием  $x^+ = -R \cdot x^-$ .

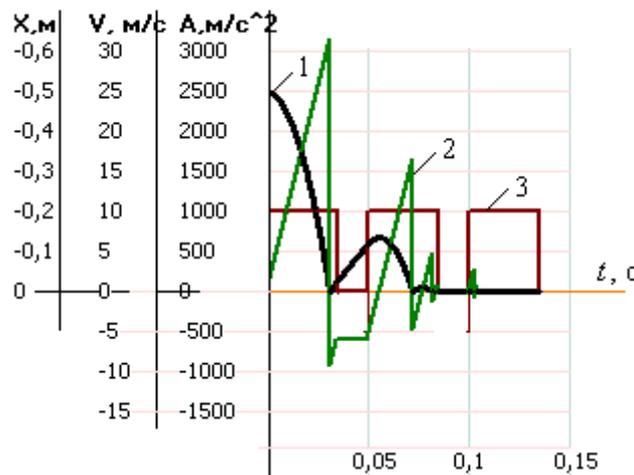


Рис. 1.1.14. Диаграммы перемещения  $x$  (диаграмма 1), скорости  $v$  (диаграмма 2) и ускорения  $A$  (диаграмма 3) ударной массы при  $x_0 = -0,5$  м;  $\dot{x}_0 = 0$ ,  $A_1 = 1000$  м/с<sup>2</sup>,  $A_2 = 0$  м/с<sup>2</sup>,  $T = 0,05$  с;  $t_1 = 0,035$  с;  $R = 0,3$

Так как в момент нанесения первого удара не произошло переключения силы (рис. 1.1.14), ускорение массы до момента переключения силы остается положительным и скорость ударника начинает замедляться при движении от ограничителя.

При  $t = t_1$  происходит переключение силы со значения  $P_1$  на значение  $P_2 = 0$ . Ускорение ударника становится равным нулю, скорость ударника,

будучи отрицательной, сохраняет постоянное значение до конца периода действия силы  $P(t)$ .

При  $t = T = 0,05$  с происходит переключение силы со значения  $P_2$  на значение  $P_1$ . Ударник вновь разгоняется и наносит удар по ограничителю в момент времени  $0,05 < t_{c_2} < 0,05 + t_1$  со скоростью  $\dot{x}^-$  порядка 17 м/с. В тот же момент ударник приобретает отрицательную скорость в соответствии с условием  $x^+ = -R \cdot x^-$ .

Так как на ударник продолжает действовать сила  $P_1$ , ударник успевает вновь разогнаться и нанести удар по ограничителю. К моменту переключения силы со значения  $P_1$  на значение  $P_2 = 0$  ударник еще не достиг ограничителя, скорость его близка к нулю и сохраняет ее до конца второго цикла ( $t = 2T$ ).

На ударник продолжает действовать сила  $P_1$ , ударник успевает вновь разогнаться и нанести удар по ограничителю. Возникает явление дребезга, когда скорость ударника стремительно падает до нуля. Ударник залипает у ограничителя. Движение ударника прекращается.

Пульсирующий цикл изменения силы при принятых параметрах виброударной системы не обеспечивает периодического движения ударника. Однако, изменив лишь время переключения силы  $t_1 = 0,02$  с, и при пульсирующем цикле изменения силы можно добиться периодического цикла движения. Результаты реализации такого цикла движения представлены на рисунке 1.1.15.

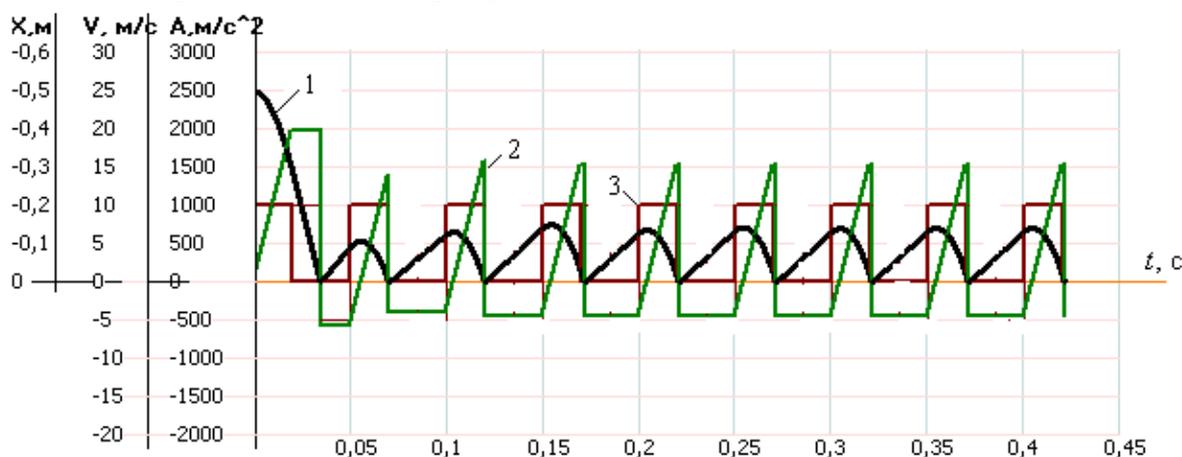


Рис. 1.1.15. Диаграммы перемещения  $x$  (диаграмма 1), скорости  $v$  (диаграмма 2) и ускорения  $A$  (диаграмма 3) ударной массы при  $x_0 = -0,5$  м,  $\dot{x}_0 = 0$ ,  $A_1 = 1000$  м/с<sup>2</sup>,  $A_2 = 0$  м/с<sup>2</sup>,  $T = 0,05$  с,  $t_1 = 0,02$  с,  $R = 0,3$

Заметим, что при данных параметрах системы обеспечивается не только периодический характер движения, но и довольно значительное сокращение длительности переходного процесса.

### Влияние на процесс движения уровня действующих сил

На рисунке 1.1.16 представлены результаты моделирования (диаграммы перемещения  $x$ , скорости  $v$  и ускорения  $A_i$  ударной массы в зависимости от времени  $t$ ) при следующих параметрах ударной системы, принятых за базовые:  $x_0 = -0,5$  м;  $\dot{x}_0 = 0$ ,  $T = 0,05$  с;  $t_1 = 0,035$  с;  $R = 0,35$ ;  $A_1 = 1000$  м/с<sup>2</sup>,  $A_2 = -500$  м/с<sup>2</sup>.

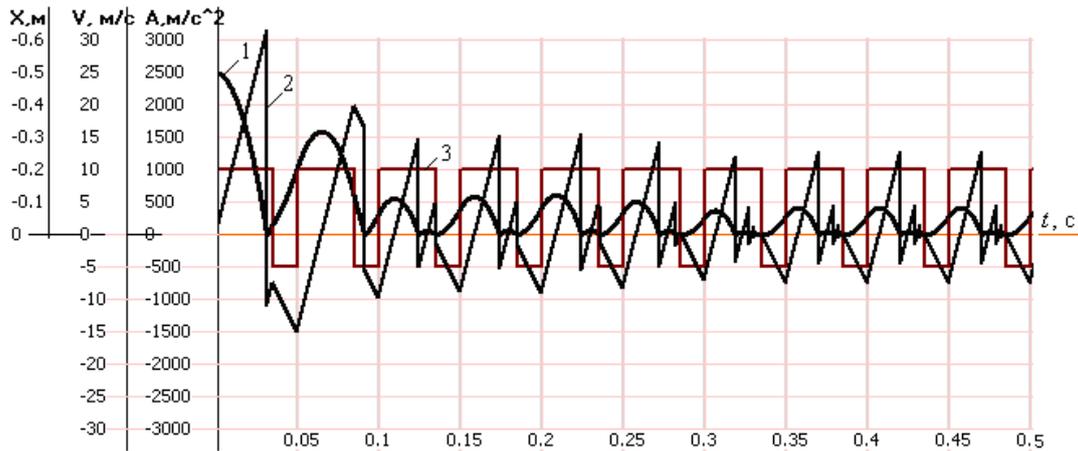


Рис. 1.1.16. Диаграммы перемещения  $x$  (диаграмма 1), скорости  $v$  (диаграмма 2) и ускорения  $A$  (диаграмма 3) ударной массы при  $x_0 = -0,5$  м;  $\dot{x}_0 = 0$ ,  $A_1 = 1000$  м/с<sup>2</sup>,  $A_2 = -500$  м/с<sup>2</sup>,  $T = 0,05$  с;  $t_1 = 0,035$  с;  $R = 0,35$

Следует отметить, что предударная скорость ударной массы после выхода на установившийся режим равна 12,75 м/с.

Рассмотрим чувствительность системы на увеличение сил, действующих на ударную массу, до величины  $\Delta P_i / P_{i0} \leq 0,1$ , соответственно и ускорений ударника  $\Delta A_i / A_{i0} \leq 0,1$ . Здесь  $\Delta A_i = A_i - A_{i0}$ ,  $A_{i0}$  – базовые значения ускорений. Рассмотрим диаграммы на рис. 1.1.17.

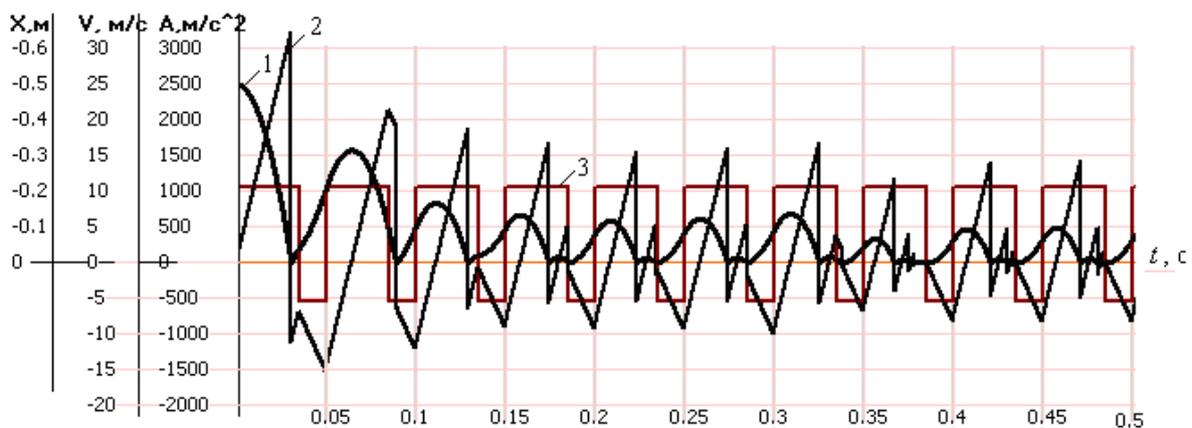


Рис. 1.1.17. Диаграммы перемещения  $x$  (диаграмма 1), скорости  $v$  (диаграмма 2) и ускорения  $A$  (диаграмма 3) ударной массы при  $x_0 = -0,5$  м;  $\dot{x}_0 = 0$ ,  $A_1 = 1050$  м/с<sup>2</sup>,  $A_2 = -550$  м/с<sup>2</sup>,  $T = 0,05$  с;  $t_1 = 0,035$  с;  $R = 0,35$

На рисунке 1.1.17 представлены результаты моделирования (диаграммы положения  $x$ , скорости  $v$  и ускорения ударной массы в зависимости от времени  $t$ ) при следующих параметрах ударной системы:  $x_0 = -0,5$  м;  $\dot{x}_0 = 0$ ,  $T = 0,05$  с;  $t_1 = 0,035$  с;  $R = 0,35$ ;  $A_1 = 1050$  м/с<sup>2</sup> ( $\Delta A_1 / A_1 = 0,05$ ),  $A_2 = -550$  м/с<sup>2</sup> ( $\Delta A_2 / A_2 = 0,1$ ).

В данном случае предударная скорость ударной массы после выхода на установившийся режим равна 14,5 м/с. Увеличение  $A_1$  на 5%, а  $A_2$  на 10 % по отношению к базовым значениям приводит к увеличению скорости удара на 13,72 %, а энергии удара на 29,33 %.

Рассмотрим ситуацию, когда увеличение по абсолютной величине силы  $P_2$ , действующей на ударную массу, выходит за рамки принятого ограничения  $\Delta P_i / P_i \leq 0,1$ .

На рисунке 1.1.18 представлены результаты моделирования (диаграммы перемещения  $x$ , скорости  $v$  и ускорения ударной массы  $A$  в зависимости от времени  $t$ ) при следующих параметрах ударной системы:  $x_0 = -0,5$  м;  $\dot{x}_0 = 0$ ,  $T = 0,05$  с;  $t_1 = 0,035$  с;  $R = 0,35$ ;  $A_1 = 1050$  м/с<sup>2</sup> ( $\Delta A_1 / A_1 = 0,05$ ),  $A_2 = -800$  м/с<sup>2</sup> ( $\Delta A_2 / A_2 = 0,6$ ).

В данном случае процесс аналогичен предыдущему только на первом цикле движения до момента переключения силы при  $t = t_1$ . Дальнейший процесс характерен своей нестабильностью. На каждом цикле изменения сил максимальные значения предударной скорости различны.

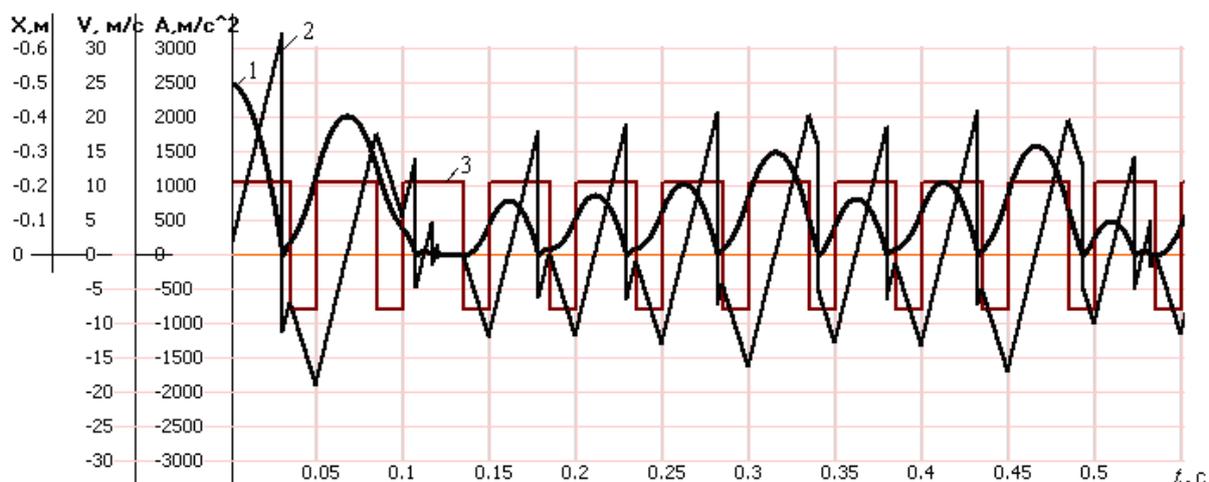


Рис. 1.1.18. Диаграммы перемещения  $x$  (диаграмма 1), скорости  $v$  (диаграмма 2) и ускорения  $A$  (диаграмма 3) ударной массы при  $x_0 = -0,5$  м,  $\dot{x}_0 = 0$ ,  $A_1 = 1050$  м/с<sup>2</sup>,  $A_2 = -800$  м/с<sup>2</sup>,  $T = 0,05$  с,  $t_1 = 0,035$  с,  $R = 0,35$

Фазовая диаграмма переходного процесса имеет вид, представленный на рисунке 1.1.19. Предельный цикл движения на фазовой диаграмме не зафиксирован.

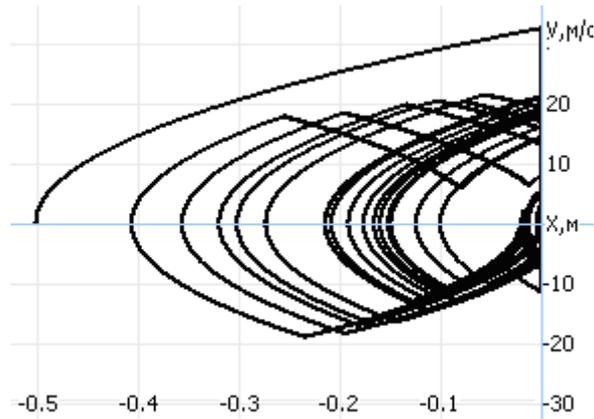


Рис. 1.1.19. Фазовая диаграмма движения виброударной системы при  $x_0 = -0,5$  м,  $\dot{x}_0 = 0$ ,  $A_1 = 1050$  м/с<sup>2</sup>,  $A_2 = -800$  м/с<sup>2</sup>,  $T = 0,05$  с;  $t_1 = 0,035$  с;  $R = 0,35$

Рассмотрим ситуацию, когда уменьшение по абсолютной величине силы  $P_1$ , действующей на ударную массу, выходит за рамки принятого ограничения  $\Delta P_i / P_i \leq 0,1$ .

На рисунке 1.1.20 представлены результаты моделирования (диаграммы перемещения  $x$ , скорости  $v$  и ускорения ударной массы  $A$  в зависимости от времени  $t$ ) при следующих параметрах ударной системы:  $x_0 = -0,5$  м;  $\dot{x}_0 = 0$ ,  $T = 0,05$  с;  $t_1 = 0,035$  с;  $R = 0,35$ ;  $A_1 = 500$  м/с<sup>2</sup> ( $\Delta A_1 / A_1 = -0,5$ ),  $A_2 = -500$  м/с<sup>2</sup>.

Процесс движения характерен своей нестабильностью. На каждом цикле изменения сил максимальные значения предударной скорости различны.

Для параметров виброударной системы, когда либо сила  $P_1$ , либо сила  $P_2$  значительно отличаются от базовых величин, характерно существенное различие в предударных скоростях на каждом из этапов движения системы. Фактически выхода на установившийся режим не происходит.

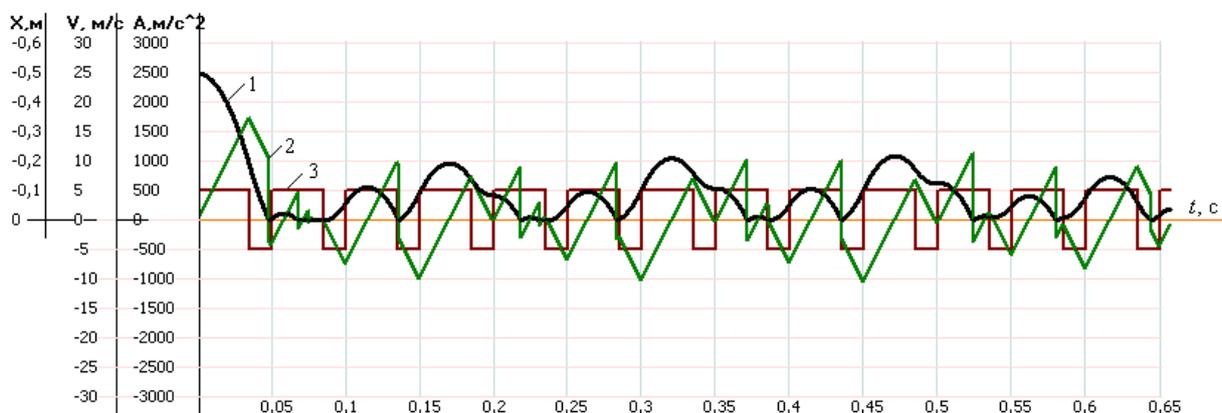


Рис. 1.1.20. Диаграммы перемещения  $x$  (диаграмма 1), скорости  $v$  (диаграмма 2) и ускорения  $A$  (диаграмма 3) ударной массы при  $x_0 = -0,5$  м;  $\dot{x}_0 = 0$ ,  $A_1 = 500$  м/с<sup>2</sup>,  $A_2 = -500$  м/с<sup>2</sup>,  $T = 0,05$  с;  $t_1 = 0,035$  с;  $R = 0,35$

Результаты моделирования показывают, что силы  $P_1$  и  $P_2$  должны находиться между собой в определенных соотношениях, чтобы обеспечить требуемый периодический режим движения виброударной системы.

На рисунке 1.1.21 представлены результаты моделирования (диаграммы положения  $x$  и скорости  $v$  в зависимости от времени  $t$ ) при следующих параметрах ударной системы:  $m = 1$  кг,  $x_0 = -0,5$  м;  $\dot{x}_0 = 0$  м/с,  $T = 0,05$  с;  $t_1 = 0,035$  с;  $R = 0,3$ ;  $P_1 = 1000$  Н,  $P_2 = -500$  Н.

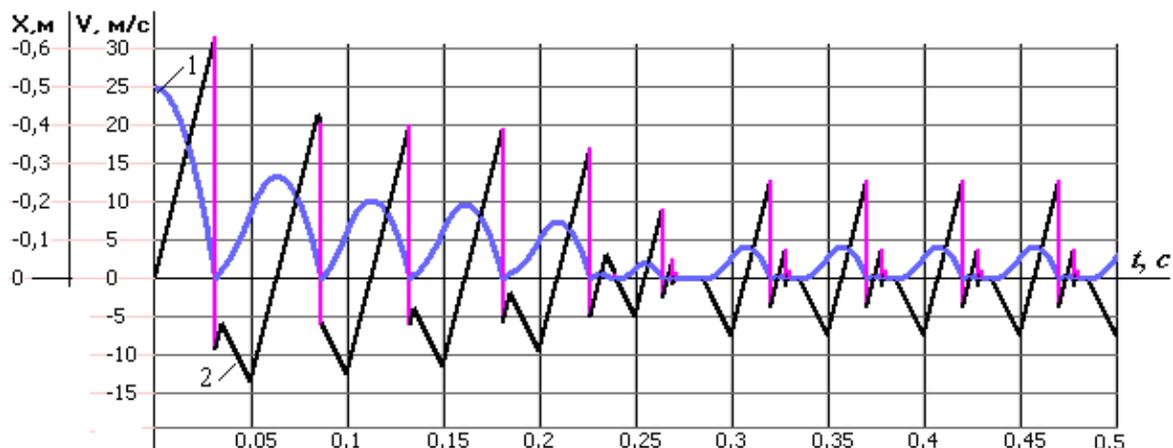


Рис. 1.1.21. Диаграммы положения  $x$  (диаграмма 1) и скорости  $v$  (диаграмма 2) ударной массы при выходе системы на установившийся режим движения

В установившемся режиме движения предударная скорость массы существенно ниже, чем на первых циклах движения. Кроме этого возникает явление «дребезга». Влияет на режим движения время переключения силы  $P(t)$  со значения  $P_1$  на значение  $P_2$ . На рисунках 1.1.22 и 1.1.23 представлены диаграммы  $x = x(t)$ ,  $v = v(t)$  движения ударной массы при значениях времени переключения  $t_1 = 0,025$  с (рис. 1.1.22) и  $t_1 = 0,03$  с (рис. 1.1.23).

Параметры ударной системы:  $m = 1$  кг,  $x_0 = -0,5$  м;  $v_0 = 0$  м/с, коэффициент  $R = 0,3$ ; период  $T = 0,05$  с;  $P_1 = 1000$  Н,  $P_2 = -500$  Н.

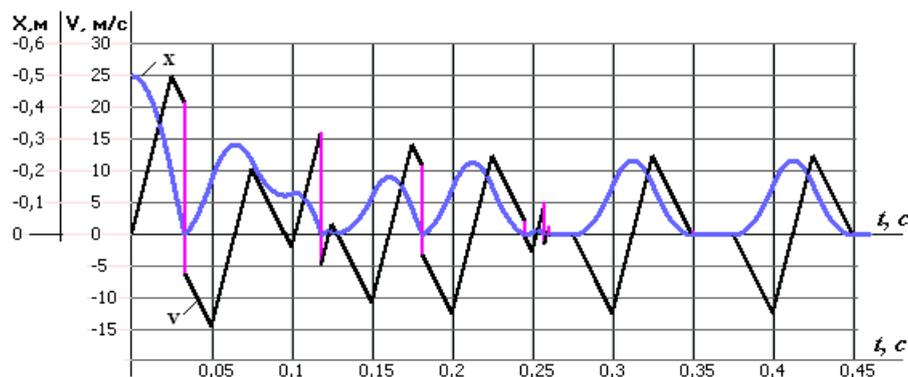


Рис. 1.1.22. Диаграммы движения ударной массы при  $t_1 = 0,025$  с

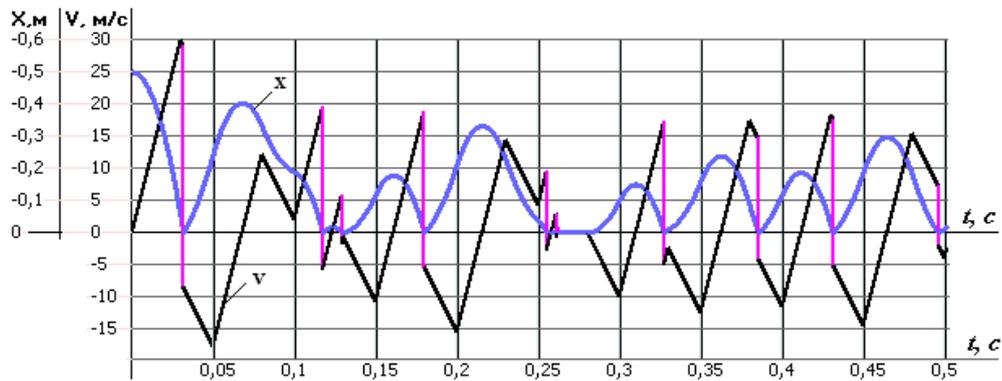
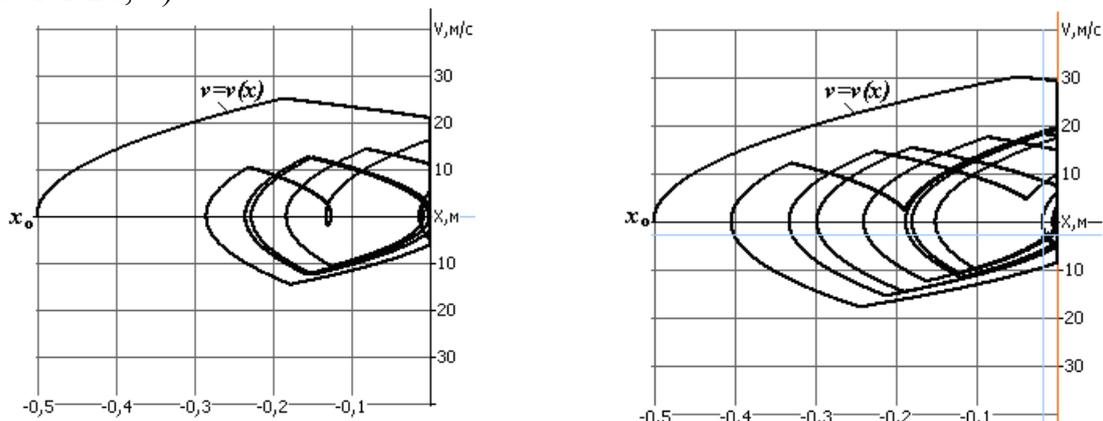


Рис. 1.1.23. Диаграммы движения ударной массы при  $t_1 = 0,03$  с

На рисунке 1.1.24 представлены фазовые диаграммы  $v = v(x)$  при значениях времени переключения  $t_1 = 0,025$  с (рис. 1.1.24,а) и  $t_1 = 0,03$  с (рис. 1.1.24, б).



а) Фазовая диаграмма движения ударной массы при  $t_1 = 0,025$  с

б) Фазовая диаграмма движения ударной массы при  $t_1 = 0,03$  с

Рис. 1.1.24. Фазовые диаграммы движения ударной массы

Как в том, так и в другом случаях режим движения существенно нестабильный. Возникают пропуски ударов, удар массы об ограничитель происходит с различной скоростью.

Таким образом, показано, что периодический характер движения виброударной системы может быть обеспечен при знакопеременном, знакопостоянном и пульсирующем циклах силового воздействия на ударную массу. Необходимо только обеспечить определенные соотношения между параметрами системы и параметрами силового воздействия. Поиск этих соотношений требует специальных исследований.

## 1.2. Модель виброударной системы при действии периодической силы и движении между двумя преградами. Моделирование процесса движения

Модель виброударной системы (рис. 1.2.1), представленной в виде движущегося вдоль оси  $x$  тела массой  $m$ , на которое действуют периодическая пульсирующая сила  $P(t)$ , рассмотрена в работах [1.16–1.19].

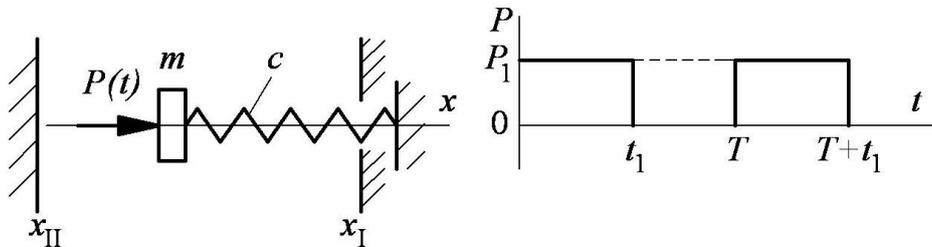


Рис. 1.2.1. Схема ударной системы с упругим элементом и ограничителями

Пружина жесткостью  $c$  обеспечивает возврат ударника в исходное состояние для нанесения последующих ударов.

Полагаем, что  $x$  – координата центра масс ударника,  $\dot{x}$  – скорость ударника,  $t$  – время,  $t_1$  – длительность действия силы  $P_1$ ,  $T$  – период. При движении тела массой  $m$  вдоль оси  $x$  происходит его столкновение с ограничителями (левым и правым), положение которых определяется координатами  $x_1$  и  $x_{II}$ .

В момент начала действия силы  $P_1$  ударник находится у левого ограничителя ( $x_0 = x_{II}$ ) и скорость ударника равна  $\dot{x}_0 = \dot{x}_2^+$ . Под действием силы  $P_1$  ударник, преодолевая силу упруго сжимаемой пружины, перемещается в направлении правого ограничителя. При  $t = t_1$  ударник достигает правого ограничителя ( $x = x_1$ ) и наносит удар со скоростью  $\dot{x}_1^-$ .

Полагаем, что удар мгновенный и скорость ударника после нанесения удара принимает значение  $\dot{x}_1^+ = -k_1 \dot{x}_1^-$  (где  $k_1$  – коэффициент восстановления скорости при ударе о правый ограничитель).

На интервале  $t_1 \leq t < T$  сила  $P_1 = 0$  и ударник перемещается к левому ограничителю под действием силы упруго сжатой пружины. В момент времени  $t = T$  ударник достигнет левого ограничителя ( $x = x_{II}$ ), имея перед столкновением с ним скорость  $\dot{x}_2^-$ .

При столкновении с левым ограничителем ( $t = T$ ) скорость ударника принимает значение  $\dot{x}_2^+ = -k_2 \dot{x}_2^-$  (где  $k_2$  – коэффициент восстановления скорости при ударе о левый ограничитель). В этот момент на ударник вновь начинает действовать сила  $P_1$ . Далее процесс движения повторяется.

## Математическая модель ударной системы

Движение ударной массы с учетом условий периодичности и условий соударения о жесткие ограничители описывается уравнениями:

$$m\ddot{x} = \begin{cases} P(t) - c(\Delta + x), & \text{если } (i-1)T \leq t < (i-1)T + t_1, \quad i = 1, 2, 3, \dots, \\ -c(\Delta + x), & \text{если } (i-1)T + t_1 \leq t < i \cdot T, \quad i = 1, 2, 3, \dots, \end{cases} \quad (1.2.1)$$

$$P(t) = P_1, \quad \Delta = \Delta_0 - x_{II},$$

$$\text{при } x = x_1, \quad \dot{x} = \dot{x}_1^-, \quad \text{если } \dot{x}_1 > 0,$$

$$\text{при } x = x_1, \quad \dot{x} = \dot{x}_1^+ = -k_1 \dot{x}_1^-,$$

$$\text{при } x = x_{II}, \quad \dot{x} = \dot{x}_2^-, \quad \text{если } \dot{x}_2 < 0,$$

$$\text{при } x = x_{II}, \quad \dot{x} = \dot{x}_2^+ = -k_2 \dot{x}_2^-, \quad \text{если } \dot{x}_2^- < 0,$$

где  $i$  – номер цикла;  $\Delta$  – максимальная осадка пружины;  $\Delta_0$  – осадка пружины при расположении ударной массы у левого ограничителя.

Приведем уравнение (1.2.1) к виду:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \begin{cases} P_1 / m - \omega^2 \Delta, & \text{если } (i-1)T \leq t < (i-1)T + t_1, \quad i = 1, 2, 3, \dots, \\ -\omega^2 \Delta, & \text{если } (i-1)T + t_1 \leq t < i \cdot T, \quad i = 1, 2, 3, \dots, \end{cases} \quad (1.2.2)$$

где  $\omega = \sqrt{c/m}$  – круговая частота.

На интервале  $0 \leq t < t_1$  решение уравнения  $\ddot{x} + \omega^2 x = P_1 / m - \omega^2 \Delta$ , с учетом условий  $x|_{t=0} = x_0 = x_{II}$ ,  $\dot{x}|_{t=0} = \dot{x}_0 = \dot{x}_2^+$ , имеет вид

$$x = (x_{II} - P_1 / \omega^2 m + \Delta) \cos \omega t + (\dot{x}_2^+ / \omega) \sin \omega t + P_1 / \omega^2 m - \Delta, \quad (1.2.3)$$

$$\dot{x} = -\omega(x_{II} - P_1 / \omega^2 m + \Delta) \sin \omega t + (\dot{x}_2^+ / \omega) \omega \cos \omega t. \quad (1.2.4)$$

При нанесении удара по правому ограничителю в момент времени  $t = t_1$  координата ударной массы совпадает с положением ограничителя

$$x|_{t=t_1} = x_1 = (x_{II} - P_1 / \omega^2 m + \Delta) \cos \omega t_1 + (\dot{x}_2^+ / \omega) \sin \omega t_1 + P_1 / \omega^2 m - \Delta. \quad (1.2.5)$$

Предударная скорость массы равна

$$\dot{x}|_{t=t_1} = \dot{x}_1^- = -\omega(x_{II} - P_1 / \omega^2 m + \Delta) \sin \omega t_1 + \dot{x}_2^+ \cos \omega t_1. \quad (1.2.6)$$

Скорость массы после удара будет равна  $\dot{x}_1^+ = -k_1 \dot{x}_1^-$ .

При нанесении удара по правому ограничителю в момент времени  $t_c < t_1$  координата ударной массы совпадает с положением ограничителя

$$x|_{t=t_c} = x_1 = (x_{II} - P_1 / \omega^2 m + \Delta) \cos \omega t_c + (\dot{x}_2^+ / \omega) \sin \omega t_c + P_1 / \omega^2 m - \Delta. \quad (1.2.7)$$

Предударная скорость массы равна

$$\dot{x}|_{t=t_c} = \dot{x}_1^- = -\omega(x_{II} + \Delta - P_1 / \omega^2 m) \sin \omega t_c + \dot{x}_2^+ \cos \omega t_c. \quad (1.2.8)$$

Скорость массы после удара будет равна  $\dot{x}_1^+ = -k_1 \cdot \dot{x}_1^-$ .

Удар массы об правый ограничитель под действием силы  $P_1$  может многократно повторяться на интервале  $t_c < t < t_1$ , возникает явление «дребезга». Время между двумя последовательными ударами пропорционально зависит от послеударной скорости предыдущего удара и уменьшается в геометрической прогрессии. Координата ударной массы стремится к  $x_1$ , предударная скорость ударника стремится к нулю.

При возникновении явления «дребезга» начальными условиями для рассмотрения режима движения ударника на интервале  $t_1 \leq t < T$  являются координата  $x(t_1)$  и скорость  $\dot{x}(t_1)$  массы в момент времени  $t = t_1$ .

При отсутствии удара по правому ограничителю на интервале времени  $0 \leq t < t_1$  начальными условиями для рассмотрения режима движения ударника на интервале  $t_1 \leq t < T$  являются координата  $x(t_1)$  и скорость  $\dot{x}(t_1)$  массы в момент времени  $t = t_1$ .

На интервале  $t_1 \leq t < T$  решение уравнения  $\ddot{x} + \omega^2 x = -\omega^2 \Delta$ , если в момент времени  $t = t_1$  наносится удар, имеет вид

$$x = (x_1 + \Delta) \cos \omega \tau + (\dot{x}_1^+ / \omega) \sin \omega \tau - \Delta, \text{ при } \tau = t - t_1, \quad 0 \leq \tau < T - t_1, \quad (1.2.9)$$

$$\dot{x} = -\omega(x_1 + \Delta) \sin \omega \tau + \omega(\dot{x}_1^+ / \omega) \cos \omega \tau, \text{ при } 0 \leq \tau < T - t_1. \quad (1.2.10)$$

При нанесении удара по правому ограничителю в момент времени  $t_c < t_1$  постоянные интегрирования определяются из начальных условий  $x|_{\tau=0} = x(t_1)$ ,  $\dot{x}|_{\tau=0} = \dot{x}(t_1)$ .

В дальнейшем задача может решаться методом припасовывания, но процедура решения может быть очень громоздкой, а выход системы на предельный цикл движения может быть очень длительным.

Для моделирования движения разработан программный продукт, обеспечивающий численное решение дифференциальных уравнений (1.2.1) с учетом условий соударения, графическое и числовое воспроизведение параметров движения в процессе моделирования.

### **Функциональные возможности программного продукта**

Общий вид интерфейса программного продукта для моделирования процесса движения ударной системы с двумя ограничителями при периодическом силовом воздействии представлен на рисунке 1.2.2.

К исходным параметрам относятся:  $x_0$  – начальное положение ударной массы, м;  $v_0$  – начальная скорость ударной массы, м/с;  $c$  – жесткость пружины, Н/м;  $\Delta$  – максимальная осадка пружины, м;  $m$  – величина ударной массы, кг;  $P_1$  – величина силы, Н;  $t_1$  – длительность действия силы  $P_1$ , с;  $T$  – период одного цикла, с;  $k_1$  и  $k_2$  – коэффициенты восстановления скорости массы при столкновении соответственно с правым и левым ограничителями;  $x_1$  и  $x_{II}$  – координаты правого и левого ограничителей, м.

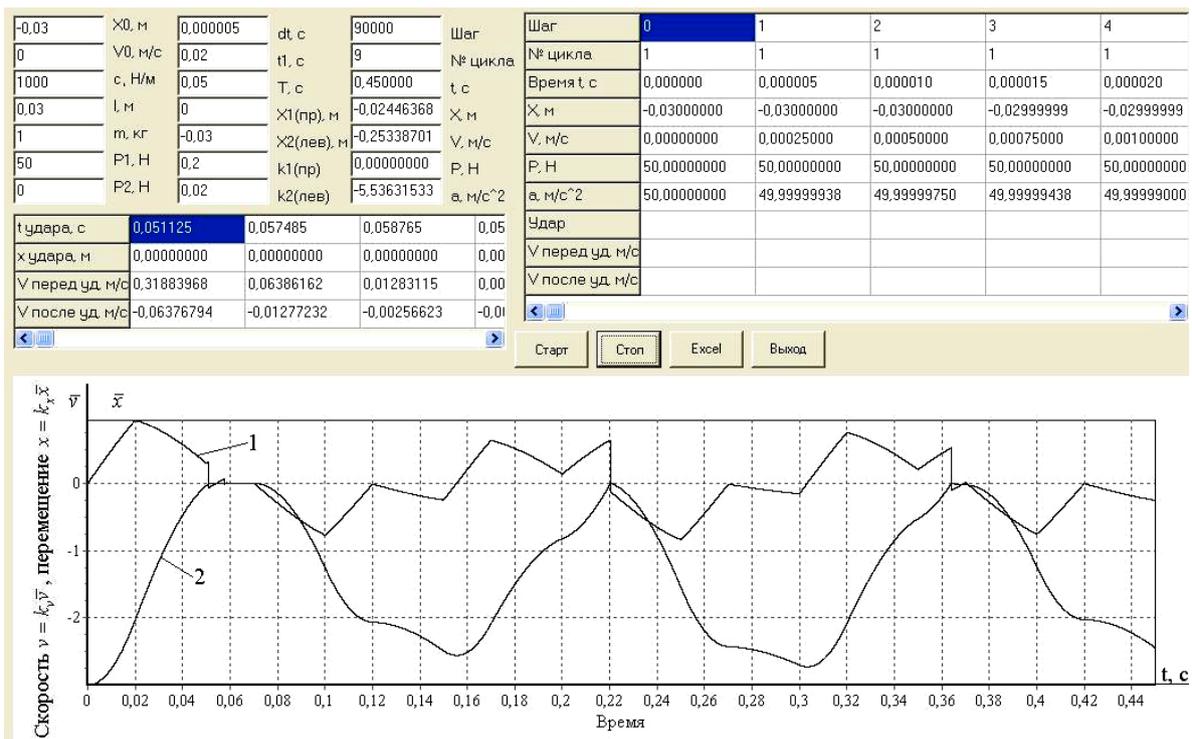


Рис. 1.2.2. Общий вид интерфейса: 1 – диаграмма скорости  $v$  ударной массы при  $k_v = 1$  м/с; 2 – диаграмма перемещения ударной массы  $x$  при  $k_x = 0,01$  м

Для проведения анализа результатов моделирования при запуске процедуры численного расчета результаты выводятся в виде двух таблиц.

В первой таблице отображаются результаты пошагового расчета: номер шага расчета; номер цикла; время  $t$ , с; координата объекта  $x$ , м; скорость объекта  $v$ , м/с; величина силового воздействия  $P$ , Н; ускорение объекта  $a$ , м/с<sup>2</sup>; сигнализация удара о левый или правый ограничители; предупредительная скорость объекта  $\dot{x}_1^-$  или  $\dot{x}_2^-$ , м/с; послеударная скорость объекта  $\dot{x}_1^+$  или  $\dot{x}_2^+$ , м/с.

Во второй таблице отображаются значения параметров удара объекта об ограничители: время нанесения удара  $t_{удара}$ , с; координата объекта в момент удара  $x_{удара}$ , м; предупредительная скорость объекта  $\dot{x}_1^-$  или  $\dot{x}_2^-$ , м/с; послеударная скорость объекта  $\dot{x}_1^+$  или  $\dot{x}_2^+$ , м/с.

Программно реализована возможность сохранения числовых значений параметров системы (номер шага расчета, время  $t$ , координата объекта  $x$ , скорость объекта  $v$ , ускорение объекта  $a$ ) в таблицу *Excel*.

В левом верхнем углу окна (рис. 1.2.2) расположены поля для ввода числовых значений исходных данных. Правее расположены поля отображения результатов текущего шага численного расчета параметров движения системы. Под полями исходных данных и результатов расчета расположена таблица параметров удара объекта об ограничители.

В правом верхнем углу окна расположена таблица результатов пошагового расчета числовых параметров движения системы. Внизу таблиц расположены горизонтальные движки прокрутки содержания таблицы, позволяющие просматривать последовательно результаты расчета в направлении увеличения или уменьшения шага расчета.

Под таблицей результатов пошагового расчета расположены кнопки «Старт», «Стоп», «Excel», «Выход». Нажатие курсором этих кнопок позволяет начинать процесс моделирования (кнопка «Старт»), останавливать процесс моделирования (кнопка «Стоп»), сохранять результаты расчета в Excel (кнопка «Excel») и обеспечивать выход из программного продукта (кнопка «Выход»).

Нижнюю часть интерфейса программного продукта занимает окно диаграммы перемещения и скорости объекта системы.

После загрузки программного продукта на экране открывается окно интерфейса. По умолчанию поля параметров исходных данных уже заполнены. Значение любого параметра можно изменить перед запуском процесса моделирования. Нажав курсором кнопку «Старт», пользователь запускает процесс моделирования. Результаты расчета отображаются в полях пошагового расчета и двух таблицах.

Остановка процедуры расчета осуществляется нажатием на кнопку «Стоп» или автоматически при достижении номера периода программно заданного значения.

После остановки процедуры расчета отображается диаграмма перемещения и скорости объекта. По оси абсцисс откладывается расчетное время  $t$ , с. Значение скорости объекта определяется как  $v = k_V \cdot \bar{v}$ , где  $k_V$  – коэффициент, определяющий масштаб диаграммы скорости ( $k_V = 1$  м/с);  $\bar{v}$  – числовое значение скорости на оси ординат. Значение перемещения объекта определяется как  $x = k_X \cdot \bar{x}$ , где  $k_X$  – коэффициент, определяющий масштаб диаграммы перемещения ( $k_X = 0,01$  м);  $\bar{x}$  – числовое значение перемещения на оси ординат. Шаг сетки по осям определяется автоматически после завершения расчета.

Для сохранения числовых значений параметров движения системы необходимо нажать курсором кнопку «Excel». Открывается окно «Excel» и все значения из таблицы результатов пошагового расчета заносятся в соответствующие поля таблицы. После этого полученные результаты можно сохранить отдельным файлом «Excel».

### **Моделирование**

Проведение вычислительных экспериментов было связано с анализом влияния исходных параметров на режимы работы системы. Предполагалось, что путем некоторого перебора могут быть найдены параметры, при которых режим движения системы будет близок к

периодическому, а удары объекта об правый ограничитель будут наноситься с одной и той же предударной скоростью.

При моделировании приняты следующие исходные параметры системы: начальное положение ударной массы  $x_0 = -0,03$  м; начальная скорость ударной массы  $v_0 = 0$  м/с; жесткость пружины  $c = 1000$  Н/м; максимальная величина осадки пружины  $\Delta = 0,03$  м; масса тела  $m = 1$  кг; длительность действия силы  $P_1$  в цикле  $t_1 = 0,02$  с; длительность одного цикла (период)  $T = 0,05$  с; коэффициент восстановления скорости тела при столкновении с левым ограничителем  $k_2 = 0,02$ ; коэффициент восстановления скорости тела при столкновении с правым ограничителем  $k_1 = 0,2$ ; координата положения левого ограничителя  $x_{II} = -0,03$  м; координата положения правого ограничителя  $x_I = 0$  м.

Анализ влияния исходных параметров на работу системы начат с проведения экспериментов с изменением величины силы  $P_1$ .

При силе  $P_1 = 50$  Н (рис. 1.2.2) наблюдаем редкие удары о правый ограничитель. Частота ударов не совпадает с периодичностью воздействия. Ударник не возвращается в исходное положение, нет ударов о левый ограничитель. Диаграмма скорости  $\bar{v}$  (диаграмма 1, рис. 1.2.2) показывает, что объект начинает движение при начальной скорости  $\bar{v}_0 = 0$ . Диаграмма перемещения  $\bar{x}$  (диаграмма 2, рис. 1.2.2) показывает, что объект начинает движение с начального положения  $\bar{x}_0 = -3$ .

С момента времени  $t = t_1 = 0,02$  с, когда сила  $P_1 = 0$ , скорость  $\bar{v}$  уменьшается, так как на этом интервале времени кинетическая энергия ударной массы затрачивается на дальнейшее сжатие пружины. И как только объект достигает правого ограничителя ( $\bar{x} = 0$ ), то, имея в этот момент времени скорость  $\bar{v} > 0$ , объект наносит удар по ограничителю.

Так как длительность одного цикла  $T = 0,05$  с, то следующий удар происходит при  $t = 0,22$  с (т. е. на 2-м, 3-м и 4-м циклах возникли пропуски ударов).

В то же время увеличение силы  $P_1$  до 110 Н приводит к движению объекта между ограничителями с повторяющимися ударами о правый ограничитель с заметно большей предударной скоростью (рис. 1.2.3). При этом первые три цикла связаны с переходным процессом, после чего можно констатировать возникновение некоторого почти периодического процесса с периодом, близким к периоду силы  $P_1$ .

Почти периодический процесс движения можно пояснить по диаграмме 2 (рис. 1.2.3). Здесь можно заметить, что размах колебаний объекта между ограничителями постоянно чередуется: движение с большим удалением от правого ограничителя переходит в следующем цикле на движение с меньшим удалением.

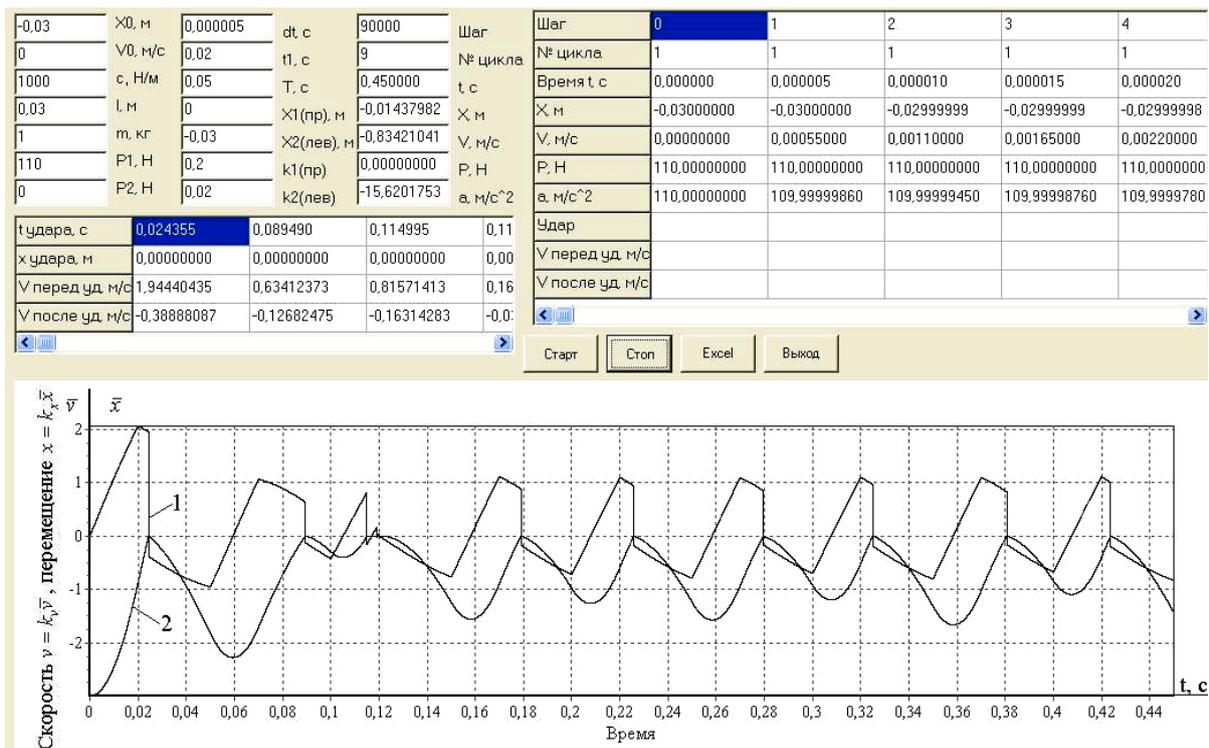


Рис. 1.2.3. Результаты моделирования при  $P_1 = 110$  Н: 1 – диаграмма скорости  $v$  при  $k_V = 1$  м/с; 2 – диаграмма перемещения ударной массы  $x$  при  $k_X = 0,01$  м

В конечном итоге можно при прочих неизменных параметрах подойти к такому значению силы  $P_1$ , при котором движение ударной массы является периодическим.

На рисунке 1.2.4 приведены результаты моделирования процесса движения ударной массы при силе  $P_1 = 190$  Н.

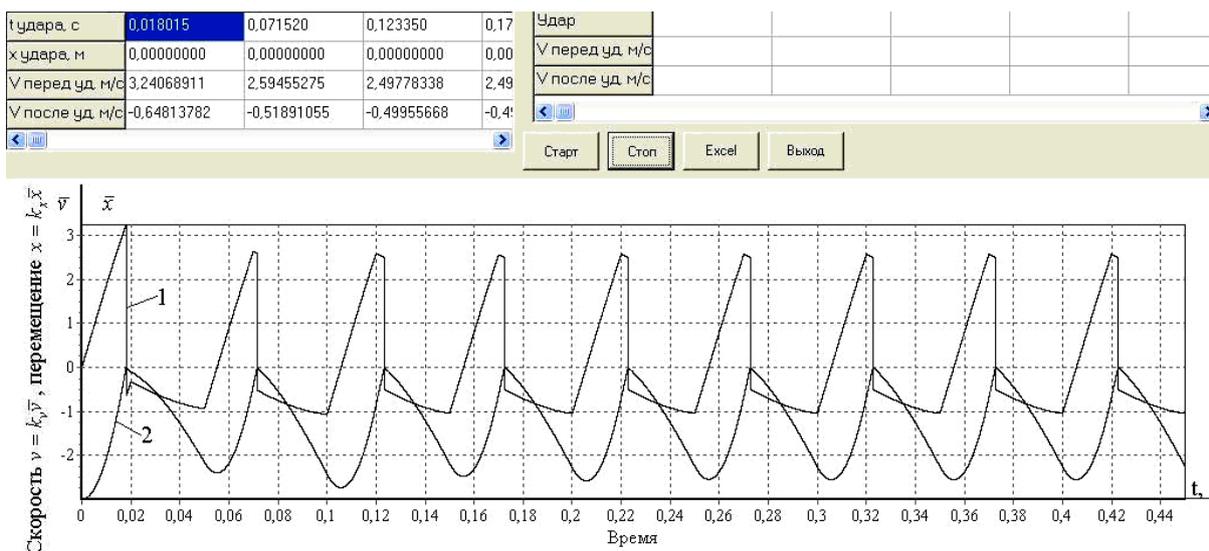


Рис. 1.2.4. Результаты моделирования при  $P_1 = 190$  Н: 1 – диаграмма скорости  $v$  при  $k_V = 1$  м/с; 2 – диаграмма перемещения ударной массы  $x$  при  $k_X = 0,01$  м

При этой силе возникает движение объекта между ограничителями с повторяющимися ударами о правый ограничитель с заметно большей предударной скоростью (рис. 1.2.4). При этом первые два цикла связаны с переходным процессом, после чего возникает периодический процесс с периодом, равным периоду силы  $P_1$ .

Скорость объекта при нанесении удара по правому ограничителю достигает величины порядка  $v = k_v \bar{v} = 1 \cdot 2,48 = 2,48$  м/с. При коэффициенте восстановления скорости  $k_2 = 0,2$  движение объекта после удара начинается со скоростью  $v = k_v \bar{v} = 1 \cdot (-0,496) = -0,496$  м/с. Потенциальная энергия сжатой пружины способствует перемещению объекта в направлении левого ограничителя. При этом скорость объекта достигает величины  $v = k_v \bar{v} = -1,04$  м/с.

В этот момент начинается новый цикл движения, когда сила  $P_1 = 190$  Н. Эта сила тормозит скорость объекта до нуля, а затем разгоняет его до скорости 2,5 м/с. Практически перед нанесением удара сила  $P_1$  становится равной нулю и объект, имея небольшое торможение до скорости 2,48 м/с, вновь наносит удар. И так повторяется от цикла к циклу.

При данном режиме движения объект после нанесения удара о правый ограничитель удаляется от него на расстояние 0,024 м ( $\bar{x} = -2,4$ ). Удара объекта о левый ограничитель не возникает.

Если основная задача ударной системы связана с нанесением периодических ударов о правый ограничитель с максимально возможной предударной скоростью при принятых параметрах, то отсутствие ударов о левый ограничитель не является целесообразным. Здесь целесообразно использовать пассивное тормозное устройство, роль которого может выполнить левый ограничитель.

На рис. 1.2.5 представлены результаты моделирования, когда существенно по сравнению с ранее рассмотренными изменены параметры системы:  $P_1 = 400$  Н;  $T = 0,038$  с;  $t_1 = 0,012$  с.

В этом случае реализуется периодический режим движения объекта, обеспечивающий его скорость перед нанесением удара о правый ограничитель  $v = k_v \bar{v} = 1 \cdot 5,05 = 5,05$  м/с. После удара объект перемещается в сторону левого ограничителя и наносит удар по нему со скоростью  $v = k_v \bar{v} = 1 \cdot (-1,3) = -1,3$  м/с. Левый ограничитель тормозит скорость объекта до нуля. Через малый промежуток времени включается сила  $P_1$ , перемещая объект к правому ограничителю.

Результаты моделирования показывают, что в зависимости от соотношения параметров системы реализуются самые разнообразные режимы движения. Важным представляется разработка процедуры выбора параметров, реализующий заданный режим.

1000	c, Н/м	0,038	T, с	0,342000	t <sub>c</sub>	Время t, с	0,000000	0,000005	0,000010	0,000015	0,000020
0,03	l, м	0	X1(пр), м	-0,02999523	X, м	X, м	-0,03000000	-0,02999999	-0,02999998	-0,02999995	-0,02999991
1	m, кг	-0,03	X2(лев), м	0,02578595	V, м/с	V, м/с	0,00000000	0,00220000	0,00440000	0,00660000	0,00880000
440	P1, Н	0,2	k1(пр)	0,00000000	P, Н	P, Н	440,00000000	440,00000000	440,00000000	440,00000000	440,00000000
0	P2, Н	0,02	k2(лев)	-0,00477046	a, м/с <sup>2</sup>	a, м/с <sup>2</sup>	440,00000000	439,99999450	439,99997800	439,99995050	439,9999120
t удара, с	0,011745	0,037450	0,049685	0,07	Удар						
x удара, м	0,00000000	-0,03000000	0,00000000	-0,0	V перед уд, м/с						
V перед уд, м/с	5,04980474	-1,30580196	5,04938128	-1,2	V после уд, м/с						
V после уд, м/с	-1,00996095	0,02611604	-1,00987626	0,02							

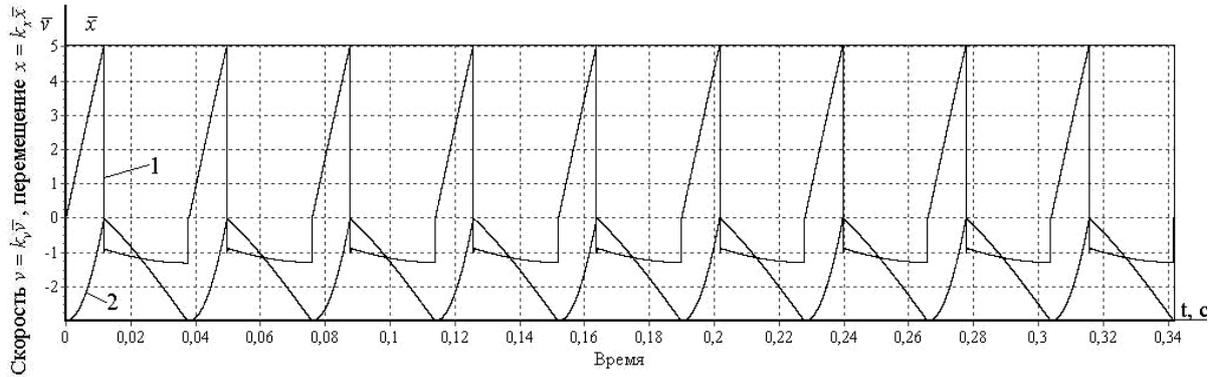


Рис. 1.2.5. Результаты моделирования при  $P_1 = 400$  Н;  $T = 0,038$  с;  $t_1 = 0,012$  с: 1 – диаграмма скорости  $v$  при  $k_V = 1$  м/с; 2 – диаграмма перемещения  $x$  при  $k_X = 0,01$  м

Параметры виброударной системы с реализацией режима движения, представленного на рис. 1.2.6, приняты такими, что они обеспечивают устойчивый периодический режим с соударениями об ограничители ( $x_0 = -0,03$  м;  $v_0 = 0$ ;  $c = 1000$  Н/м;  $\Delta = -0,03$  м;  $m = 1$  кг;  $P_1 = 400$  Н;  $t_1 = 0,0125$  с;  $T = 0,05$  с;  $k_1 = 0,2$ ;  $k_2 = 0,02$ ;  $x_I = 0$ ;  $x_{II} = -0,03$  м).

1000	c, Н/м	0,05	T, с	0,450000	t <sub>c</sub>	Время t, с	0,000000	0,000005	0,000010	0,000015	0,000020
0,03	l, м	0	X1(пр), м	-0,02972435	X, м	X, м	-0,03000000	-0,03000000	-0,02999998	-0,02999996	-0,02999992
1	m, кг	-0,03	X2(лев), м	0,02382812	V, м/с	V, м/с	0,00000000	0,00200000	0,00400000	0,00600000	0,00800000
400	P1, Н	0,2	k1(пр)	0,00000000	P, Н	P, Н	400,00000000	400,00000000	400,00000000	400,00000000	400,00000000
0	P2, Н	0,02	k2(лев)	-0,27564813	a, м/с <sup>2</sup>	a, м/с <sup>2</sup>	400,00000000	399,99999500	399,99998000	399,99995500	399,9999200
t удара, с	0,012330	0,038110	0,062210	0,08	Удар						
x удара, м	0,00000000	-0,03000000	0,00000000	-0,0	V перед уд, м/с						
V перед уд, м/с	4,80797875	-1,30313744	4,78240025	-1,2	V после уд, м/с						
V после уд, м/с	-0,96159575	0,02606275	-0,95648005	0,02							

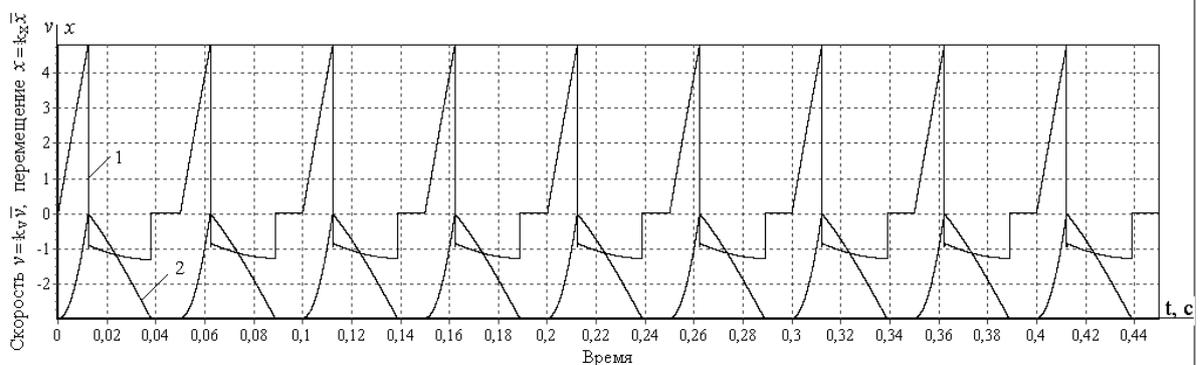
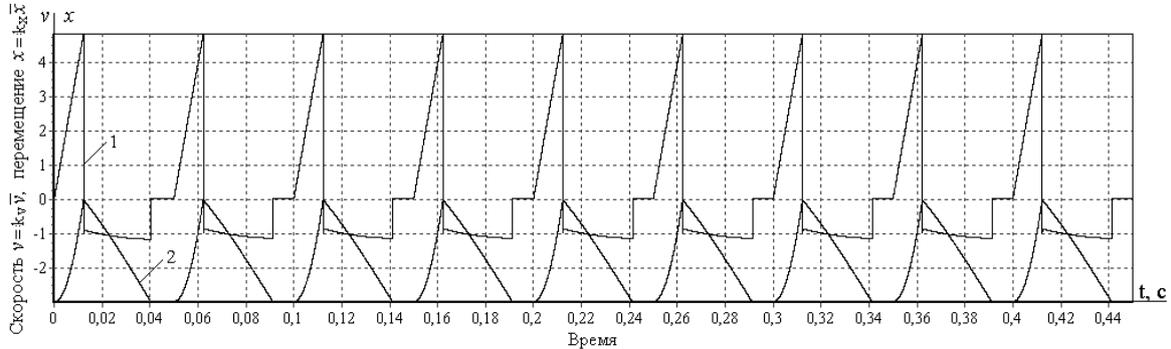
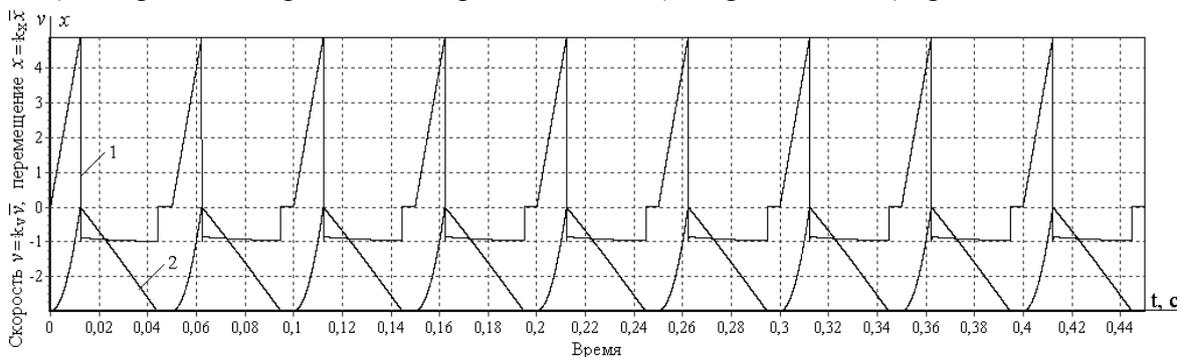


Рис. 1.2.6. Общий вид интерфейса программного продукта: 1 – диаграмма скорости  $v$  при  $k_V = 1$  м/с; 2 – диаграмма перемещения ударной массы  $x$  при  $k_X = 0,01$  м

В процессе моделирования обеспечивается возможность анализа влияния параметров системы на реализуемый режим движения. Так, например, как следует из диаграмм на рис. 1.2.7, снижение жесткости упругого элемента, для выбранного сочетания параметров, практически не влияет на режим движения ударника.



а) диаграммы скорости  $v$  и перемещения  $x$  (диаграммы 1 и 2) при  $c = 600$  Н/м



б) диаграммы скорости  $v$  и перемещения  $x$  (диаграммы 1 и 2) при  $c = 200$  Н/м

Рис. 1.2.7. Диаграммы скорости  $v$  (диаграмма 1 при  $k_v = 1$  м/с) и перемещения  $x$  (диаграмма 2) при  $k_x = 0,01$  м)  $P_1 = 400$  Н;  $m = 1$  кг;  $t_1 = 0,0125$  с;  $T = 0,05$  с

Переходной процесс заканчивается практически уже на втором цикле движения. К заметным отличиям от диаграмм, приведенных на рис. 1.2.6, можно отнести уменьшение зоны покоя ударника у левого ограничителя при снижении жесткости  $c$ , а также снижение скорости удара  $\dot{x}_2^-$  о левый ограничитель ( $\dot{x}_2^- = -1,12$  м/с при  $c = 200$  Н/м).

Появление зоны покоя ударника у левого ограничителя (зоны залипания) связано с тем, что происходит запаздывание включения силы  $P_1$ . Если период цикла  $T = 0,05$  с уменьшить до  $0,045$  с, то при принятых параметрах системы реализуется режим движения, представленный на рисунке 1.2.8.

Моделирование позволяет осуществлять корректировку вычислительного эксперимента для поиска более рациональных значений параметров.

Рассматриваемый класс виброударных систем имеет свойства инвариантности. Так если рассматривать системы с постоянным

соотношением таких параметров, как  $P_1/m = \text{const}$  и  $c/m = \text{const}$  при сохранении значений остальных параметров, то обнаруживаем, что они идентичны.

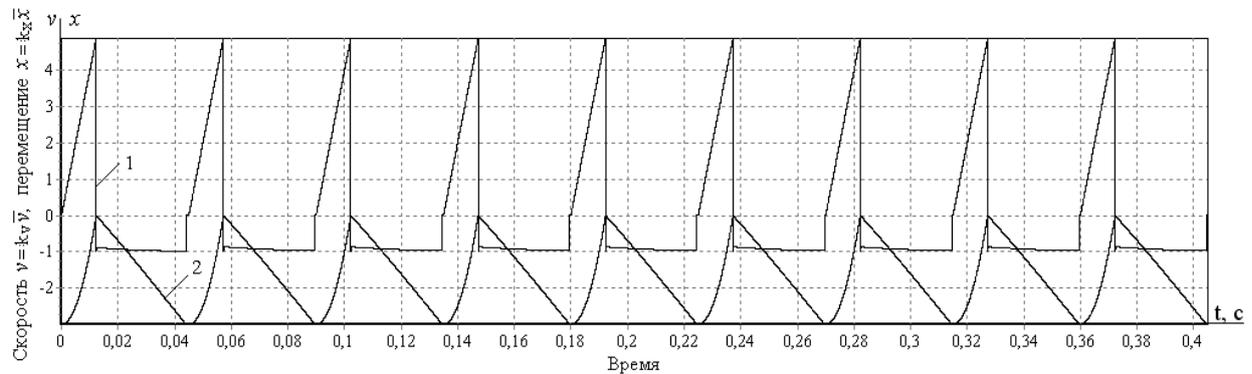


Рис. 1.2.8. Диаграммы скорости  $v$  (1 – при  $k_V = 1$  м/с) и перемещения  $x$  (2 – при  $k_x = 0,01$  м)  $c = 200$  Н/м;  $P_1 = 400$  Н;  $m = 1$  кг;  $t_1 = 0,0125$  с;  $T = 0,045$  с

На рисунке 1.2.9 представлена реализация процесса движения ударной системы, когда  $m = 5$  кг,  $P_1 = 2000$  Н,  $c = 1000$  Н/м; а на рисунке 1.2.10 – когда  $m = 10$  кг,  $P_1 = 4000$  Н,  $c = 2000$  Н/м. При этом как в первом случае, так и во втором соотношения  $P_1/m = 400$  м/с<sup>2</sup>,  $c/m = 200$  с<sup>-2</sup>.

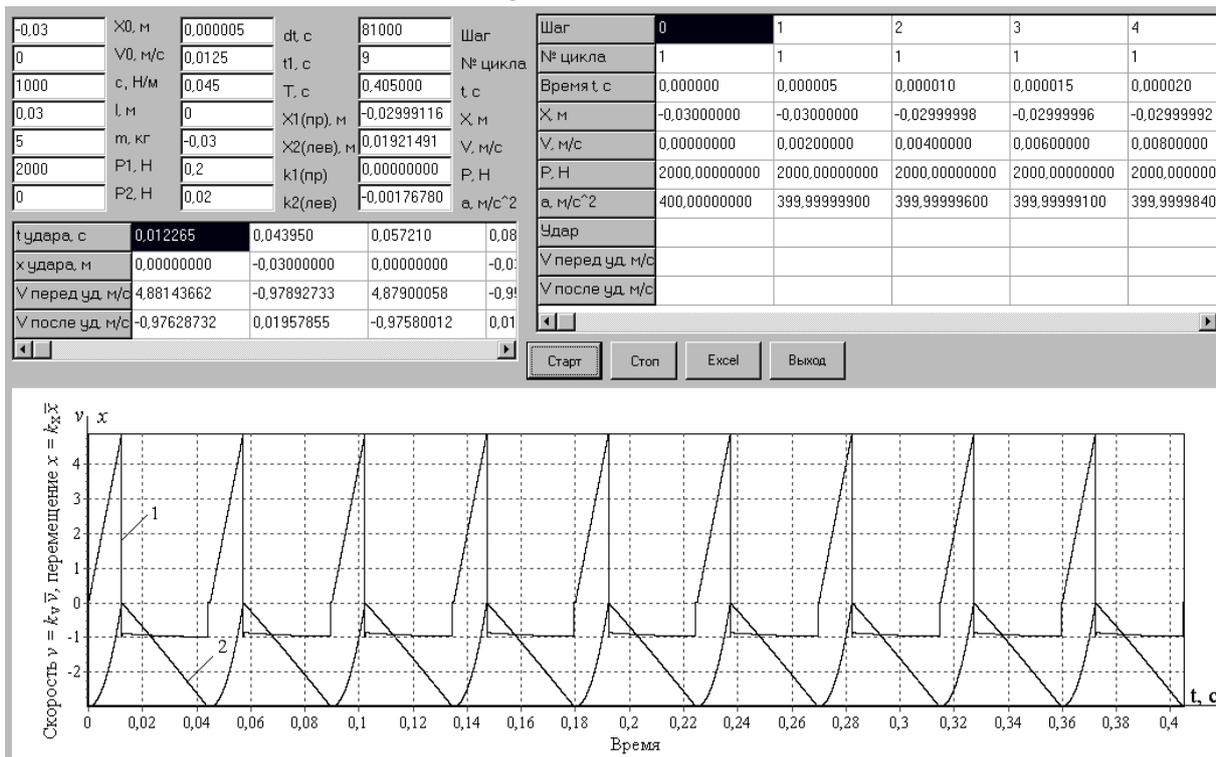


Рис. 1.2.9. Диаграммы скорости  $v$  (1 при  $k_V = 1$  м/с) и перемещения  $x$  (2 – при  $k_x = 0,01$  м)  $c = 1000$  Н/м;  $P_1 = 2000$  Н;  $m = 5$  кг;  $t_1 = 0,0125$  с;  $T = 0,045$  с

Сравнивая диаграммы движения на рис. 1.2.9 и 1.2.10, констатируем, что эти процессы совершенно идентичны. Это позволяет результаты моделирования, выполненные для заданного сочетания параметров,

распространять и на другие ударные системы при изменении  $P_1$ ,  $m$  и  $c$  таким образом, чтобы соотношения  $P_1/m$  и  $c/m$  сохранялись ПОСТОЯННЫМИ.

2000	с, Н/м	0,045	T, с	0,405000	t c	Время t c	0,000000	0,000005	0,000010	0,000015	0,000020
0,03	l, м	0	X1(пр), м	-0,02999116	X, м	X, м	-0,03000000	-0,03000000	-0,02999998	-0,02999996	-0,02999992
10	m, кг	-0,03	X2(лев), м	0,01921491	V, м/с	V, м/с	0,00000000	0,00200000	0,00400000	0,00600000	0,00800000
4000	P1, Н	0,2	k1(пр)	0,00000000	P, Н	P, Н	4000,00000000	4000,00000000	4000,00000000	4000,00000000	4000,00000000
0	P2, Н	0,02	k2(лев)	-0,00176780	a, м/с <sup>2</sup>	a, м/с <sup>2</sup>	400,00000000	399,99999900	399,99999600	399,99999100	399,99998640
t удара, с	0,012265	0,043950	0,057210	0,08	Удар	Удар					
x удара, м	0,00000000	-0,03000000	0,00000000	-0,0	V перед уд, м/с	V перед уд, м/с					
V перед уд, м/с	4,88143662	-0,97892733	4,87900058	-0,9	V после уд, м/с	V после уд, м/с					
V после уд, м/с	-0,97628732	0,01957855	-0,97580012	0,01							

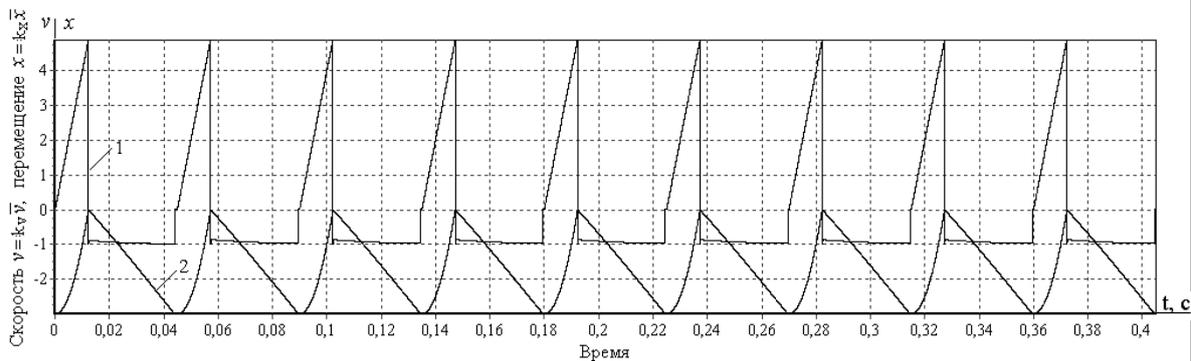


Рис. 1.2.10. Диаграммы скорости  $v$  (1 при  $k_v = 1$  м/с) и перемещения  $x$  (2 – при  $k_x = 0,01$  м)  $c = 2000$  Н/м;  $P_1 = 4000$  Н;  $m = 10$  кг;  $t_1 = 0,0125$  с;  $T = 0,045$  с

На рисунке 1.2.11 представлены результаты моделирования ударной системы, которая отличается от системы (рис. 1.2.8) периодом  $T$ .

200	с, Н/м	0,04	T, с	0,360000	t c	Время t c	0,000000	0,000005	0,000010	0,000015	0,000020
0,03	l, м	0	X1(пр), м	-0,02321163	X, м	X, м	-0,03000000	-0,03000000	-0,02999998	-0,02999996	-0,02999992
1	m, кг	-0,03	X2(лев), м	-0,91041120	V, м/с	V, м/с	0,00000000	0,00200000	0,00400000	0,00600000	0,00800000
400	P1, Н	0,2	k1(пр)	0,00000000	P, Н	P, Н	400,00000000	400,00000000	400,00000000	400,00000000	400,00000000
0	P2, Н	0,1	k2(лев)	-1,35767372	a, м/с <sup>2</sup>	a, м/с <sup>2</sup>	400,00000000	399,99999900	399,99999600	399,99999100	399,99998640
t удара, с	0,012265	0,054300	0,093030	0,13	Удар	Удар					
x удара, м	0,00000000	0,00000000	0,00000000	0,00	V перед уд, м/с	V перед уд, м/с					
V перед уд, м/с	4,88143662	3,99271017	4,06789698	4,05	V после уд, м/с	V после уд, м/с					
V после уд, м/с	-0,97628732	-0,79854203	-0,81357940	-0,8							

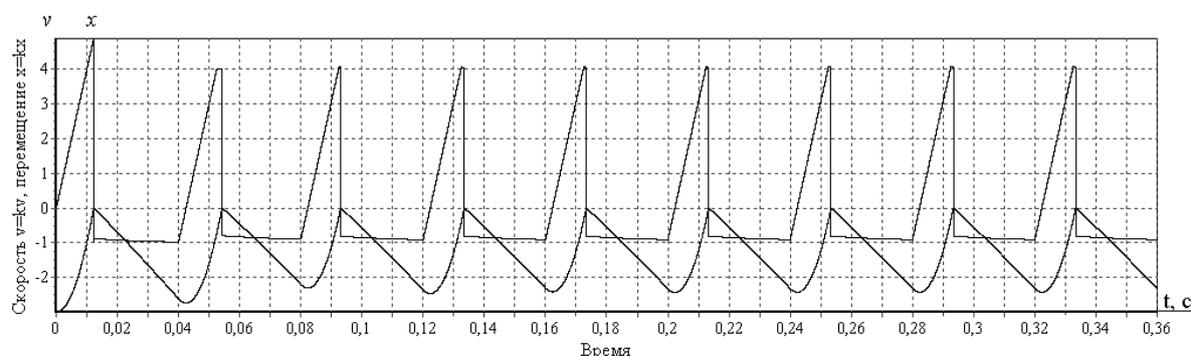


Рис. 1.2.11. Диаграммы скорости  $v$  (диаграмма 1 при  $k_v = 1$  м/с) и перемещения  $x$  (диаграмма 2 при  $k_x = 0,01$  м)  $c = 200$  Н/м;  $P_1 = 400$  Н;  $m = 1$  кг;  $t_1 = 0,0125$  с;  $T = 0,04$  с

Так сокращение периода  $T$  до значения  $T = 0,04$  с (вместо  $T = 0,045$  с) для параметров виброударной системы, представленных на рисунке 1.2.8, приводит к заметному снижению скорости удара  $\dot{x}_1^-$  о правый ограничитель, а также к торможению ударника силой  $P_1$ .

Заданная скорость удара о правый ограничитель (порядка 4,8 м/с) реализуется только на первом цикле движения. После удара объект перемещается к левому ограничителю. Но из-за малой жесткости пружины он не успевает достигнуть левой преграды к моменту окончания цикла. Включается сила  $P_1$ , которая начинает тормозить ударник. Возникает периодический режим движения без удара о левый ограничитель.

Данную ударную систему можно довести до рационального режима движения, если, сохраняя длительность периода  $T = 0,04$  с, увеличить жесткость пружины до значения  $c = 1000$  Н/м. Реализация такого режима движения представлена на рисунке 1.2.12.

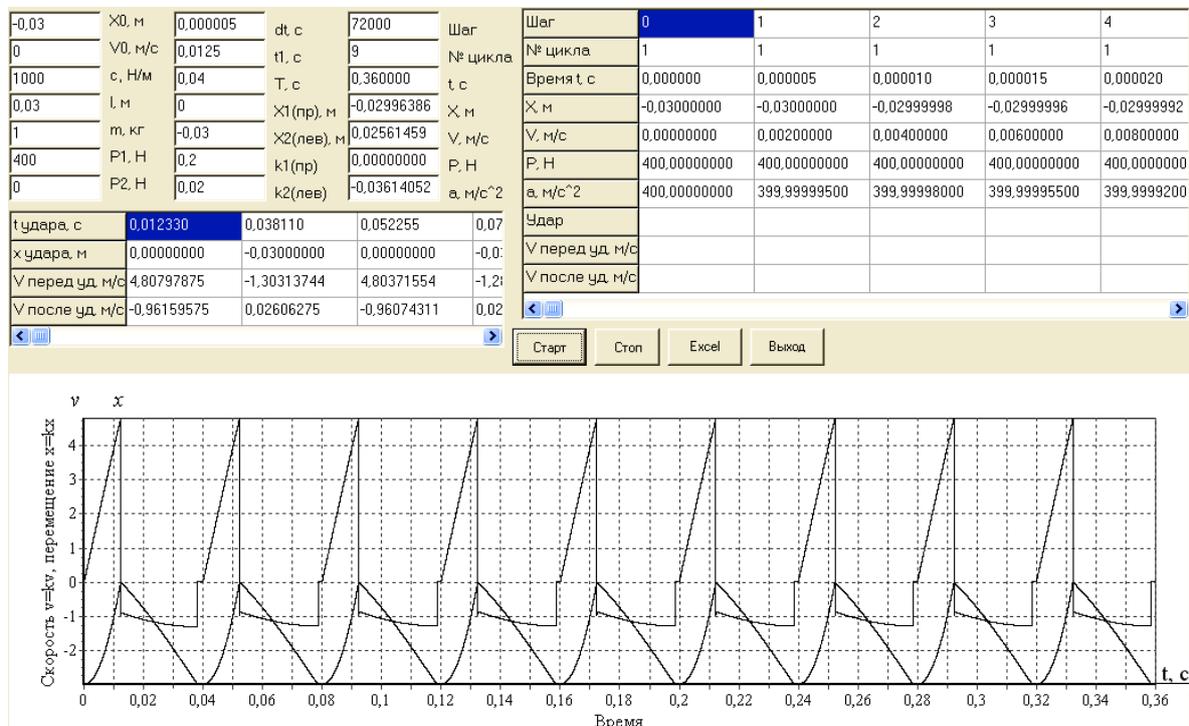


Рис. 1.2.12. Диаграммы скорости  $v$  (диаграмма 1 при  $k_V = 1$  м/с) и перемещения  $x$  (2 – при  $k_x = 0,01$  м)  $c = 1000$  Н/м;  $P_1 = 400$  Н;  $m = 1$  кг;  $t_1 = 0,0125$  с;  $T = 0,04$  с

Как видно из диаграмм обеспечивается периодический режим движения с ударами о левый ограничитель. При этом реализуется заданная скорость удара о правый ограничитель (порядка 4,8 м/с).

Разработанный программный продукт и представленная процедура моделирования процесса движения виброударной системы позволяют в процессе вычислительного эксперимента производить анализ и корректировку параметров по результатам отклика системы, обеспечивая поиск их рациональных значений.

## Параметры виброударной системы при нанесении удара по ограничителям в моменты переключения

Представим уравнение (1.2.2):

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \begin{cases} P_1 / m - \omega^2 \Delta, & \text{если } (i-1)T \leq t < (i-1)T + t_1, \quad i=1, 2, 3, \dots, \\ -\omega^2 \Delta, & \text{если } (i-1)T + t_1 \leq t < i \cdot T, \quad i=1, 2, 3, \dots, \end{cases}$$

где  $\omega = \sqrt{c/m}$  – круговая частота.

Так как движение ударной массы периодическое и повторяется на каждом цикле, достаточно рассмотреть это движение на первом цикле, когда  $i = 1$ .

Решение уравнения (1.2.2) на интервале  $0 \leq t \leq t_1$  имеет вид

$$x = (x_{II} + \Delta - P_1 / \omega^2 m) \cos \omega t + (\dot{x}_2^+ / \omega) \sin \omega t + P_1 / \omega^2 m - \Delta, \quad (1.2.11)$$

$$\dot{x} = -\omega(x_{II} + \Delta - P_1 / \omega^2 m) \sin \omega t + \dot{x}_2^+ \cos \omega t. \quad (1.2.12)$$

При  $t = t_1$  ударник достигнет правого ограничителя. При этом

$$x|_{t=t_1} = x_1, \quad x_1 = (x_{II} + \Delta - P_1 / \omega^2 m) \cos \omega t_1 + (\dot{x}_2^+ / \omega) \sin \omega t_1 + P_1 / \omega^2 m - \Delta, \quad (1.2.13)$$

$$\dot{x}|_{t=t_1} = \dot{x}_1^-, \quad \dot{x}_1^- = -\omega(x_{II} + \Delta - P_1 / \omega^2 m) \sin \omega t_1 + \dot{x}_2^+ \cos \omega t_1. \quad (1.2.14)$$

Из (1.2.14) следует, что

$$\sin \omega t_1 = -\dot{x}_1^- / \omega C_1 + C_2 \cos \omega t_1 / C_1, \quad C_1 = (x_{II} + \Delta - P_1 / \omega^2 m), \quad C_2 = \dot{x}_2^+ / \omega.$$

Учитывая данные равенства в (1.2.13), получим

$$x_1 - x_{II} + C_1 + C_2 \dot{x}_1^- / \omega C_1 = \cos \omega t_1 \cdot (C_1^2 + C_2^2) / C_1,$$

откуда

$$t_1 = \frac{1}{\omega} \arccos \frac{1 + (x_1 - x_{II}) / C_1 + C_2 \dot{x}_1^- / (C_1^2 \omega)}{1 + (C_2 / C_1)^2}. \quad (1.2.15)$$

Из теоремы об изменении кинетической энергии механической системы при движении ударной массы от левого ограничителя к правому ограничителю следует, что

$$\frac{1}{2} m [(\dot{x}_1^-)^2 - (\dot{x}_2^+)^2] = P_1 (x_1 - x_{II}) - c \Delta_0 (x_1 - x_{II}) - \frac{1}{2} c (x_1 - x_{II})^2,$$

откуда

$$\begin{aligned} (\dot{x}_1^-)^2 - (\dot{x}_2^+)^2 &= 2A_P (x_1 - x_{II}) - 2\omega^2 \Delta_0 (x_1 - x_{II}) - \omega^2 (x_1 - x_{II})^2, \quad A_P = P_1 / m, \\ \omega^2 &= \frac{2A_P (x_1 - x_{II}) + (\dot{x}_2^+)^2 - (\dot{x}_1^-)^2}{2\Delta_0 (x_1 - x_{II}) + (x_1 - x_{II})^2}. \end{aligned} \quad (1.2.16)$$

Рассматриваем режим движения, когда ударная масса под действием силы  $P_1$  разгоняется для нанесения удара по правому ограничителю, т. е.  $\dot{x}_1^- > \dot{x}_2^+$ . Так как левая часть равенства (1.2.16) положительна, то положительна и правая часть:

$$\frac{2A_p(x_I - x_{II}) + (\dot{x}_2^+)^2 - (\dot{x}_1^-)^2}{2\Delta_0(x_I - x_{II}) + (x_I - x_{II})^2} > 0. \quad (1.2.17)$$

Учитывая, что  $(x_I - x_{II}) > 0$ , находим, что знаменатель в (1.2.17)

$$2\Delta_0(x_I - x_{II}) + (x_I - x_{II})^2 > 0,$$

а, следовательно, и числитель должен удовлетворять неравенству

$$2A_p(x_I - x_{II}) + (\dot{x}_2^+)^2 - (\dot{x}_1^-)^2 > 0.$$

Рассмотрим теперь интервал движения  $t_1 \leq t \leq T$ , когда сила  $P_1 = 0$ .

Решение уравнения

$$\ddot{x} + \omega^2 x = -\omega^2 \cdot \Delta, \quad 0 \leq t - t_1 \leq T - t_1$$

имеет вид

$$x = D_1 \cos \omega \tau + D_2 \sin \omega \tau - \Delta, \quad \tau = t - t_1, \quad 0 \leq \tau \leq T - t_1, \quad (1.2.18)$$

$$\dot{x} = -\omega D_1 \sin \omega \tau + \omega D_2 \cos \omega \tau, \quad 0 \leq \tau \leq T - t_1, \quad (1.2.19)$$

где  $D_1$  и  $D_2$  – постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий:  $x|_{\tau=0} = x_I$ ,  $\dot{x}|_{\tau=0} = \dot{x}_1^+$ .

При  $\tau = 0$  из (1.2.18) и (1.2.19) следует:

$$x_I = D_1 - \Delta, \quad D_1 = x_I + \Delta, \quad \dot{x}_1^+ = \omega D_2, \quad D_2 = \dot{x}_1^+ / \omega.$$

При  $\tau = T - t_1 = t_2$  ударная масса достигнет левой преграды ( $x|_{\tau=t_2} = x_{II}$ ,  $\dot{x}|_{\tau=t_2} = \dot{x}_2^-$ ). Ее координата и скорость из (1.2.18) и (1.2.19) при этом будут равны

$$x_{II} = D_1 \cos \omega t_2 + D_2 \sin \omega t_2 - \Delta, \quad (1.2.20)$$

$$\dot{x}_2^- = -\omega D_1 \sin \omega t_2 + \omega D_2 \cos \omega t_2. \quad (1.2.21)$$

Из (1.2.21) следует, что  $\sin \omega t_2 = \frac{D_2}{D_1} \cos \omega t_2 - \frac{\dot{x}_2^-}{\omega D_1}$ . Учитываем данное

равенство в (1.2.20):

$$x_{II} + \Delta = D_1 \cos \omega t_2 + \frac{D_2^2}{D_1} \cos \omega t_2 - \frac{\dot{x}_2^- D_2}{\omega D_1},$$

откуда следует, что

$$t_2 = \frac{1}{\omega} \arccos \frac{(x_{II} + \Delta) / D_1 + D_2 \frac{\dot{x}_2^-}{\omega D_1^2}}{1 + D_2^2 / D_1^2}. \quad (1.2.22)$$

Из теоремы об изменении кинетической энергии механической системы при движении ударной массы от правого ограничителя к левому ограничителю следует, что

$$\frac{1}{2} m [(\dot{x}_2^-)^2 - (\dot{x}_1^+)^2] = c \Delta_0 (x_I - x_{II}) + \frac{1}{2} c (x_I - x_{II})^2,$$

откуда

$$\dot{x}_2^- = -\sqrt{2\omega^2\Delta_0(x_1 - x_{II}) + \omega^2(x_1 - x_{II})^2 + (\dot{x}_1^+)^2}. \quad (1.2.23)$$

К параметрам виброударной системы, определяющим ее движение, относятся следующие: сила  $P_1$ , разгоняющая ударную массу при движении ее от левого ограничителя к правому; масса ударника  $m$ ; жесткость пружины  $c$ ; круговая частота  $\omega$ ; скорость нанесения удара  $\dot{x}_1^-$  по правому ограничителю;  $k_1$  – коэффициент восстановления скорости при ударе о правый ограничитель; скорость ударной массы  $\dot{x}_1^+$  после нанесения удара по правому ограничителю; скорость нанесения удара  $\dot{x}_2^-$  по левому ограничителю (в конце цикла движения);  $k_2$  – коэффициент восстановления скорости при ударе о левый ограничитель; скорость ударной массы  $\dot{x}_2^+$  после нанесения удара по левому ограничителю (в начале цикла движения); координата левого ограничителя  $x_{II}$ ; координата правого ограничителя  $x_1$ ;  $\Delta$  – осадка пружины при перемещении ударной массы от левого ограничителя до правого ограничителя;  $\Delta_0$  – предварительная осадка пружины при расположении ударной массы у левого ограничителя; ускорение ударной массы  $A_p$  от действия силы  $P_1$ ; время  $t_1$ , определяющее длительность действия силы  $P_1$  и соответствующее времени перемещения ударника от левого ограничителя к правому ограничителю; время  $t_2$ , определяющее время перемещения ударника от правого ограничителя к левому ограничителю; период  $T$ .

Расчетные зависимости (1.2.11) ÷ (1.2.23) устанавливают такие соотношения между этими параметрами, которые обеспечивают заданный режим движения ударника. Так как число независимых выражений меньше числа параметров системы, определенная часть параметров системы должна быть задана.

*Пример.* Заданы жесткость пружины  $c$ , масса ударника  $m$ , скорость нанесения удара по правому ограничителю  $\dot{x}_1^-$ , коэффициент восстановления скорости при ударе о правый ограничитель  $k_1$ , коэффициент восстановления скорости при ударе о левый ограничитель  $k_2$ , координата правого ограничителя  $x_1$ , координата левого ограничителя  $x_{II}$ , предварительная осадка пружины  $\Delta_0$ . Пусть  $c = 1000$  Н/м,  $m = 1$  кг,  $\dot{x}_1^- = 4,8$  м/с,  $k_1 = 0,2$ ,  $k_2 = 0,02$ ,  $x_1 = 0$ ,  $x_{II} = -0,03$  м,  $\Delta_0 = 0$ .

*Определить:* круговую частоту  $\omega$ , силу  $P_1$ , осадку пружины при перемещении ударной массы от левого ограничителя до правого ограничителя  $\Delta$ , скорость нанесения удара по левому ограничителю  $\dot{x}_2^-$ , скорость ударной массы в начале цикла движения  $\dot{x}_2^+$ , время  $t_1$ , период цикла  $T$ .

Определим параметры виброударной системы:

- круговая частота  $\omega = \sqrt{c/m} = \sqrt{1000} = 31,62 \text{ с}^{-1}$ ;
- осадка пружины при перемещении ударной массы от левого ограничителя до правого ограничителя  $\Delta = \Delta_0 - x_{II} = 0 - (-0,03) = 0,03 \text{ м}$ ;
- скорость ударной массы после нанесения удара по правой преграде

$$\dot{x}_1^+ = -k_1 \dot{x}_1^- = -0,2 \cdot 4,8 = 0,96 \text{ м/с};$$

- скорость нанесения удара по левому ограничителю

$$\dot{x}_2^- = -\sqrt{2\omega^2 \Delta_0 (x_1 - x_{II}) + \omega^2 (x_1 - x_{II})^2 + (\dot{x}_1^+)^2} = -1,35 \text{ м/с};$$

- скорость ударной массы в начале цикла движения

$$\dot{x}_2^+ = -k_2 \dot{x}_2^- = -0,02 \cdot (-1,35) = 0,027 \text{ м/с};$$

- ускорение ударной массы  $A_p$  от действия силы  $P_1$

$$\begin{aligned} A_p &= \frac{\omega^2 [2\Delta_0 (x_1 - x_{II}) + (x_1 - x_{II})^2] - (\dot{x}_2^+)^2 + (\dot{x}_1^-)^2}{2(x_1 - x_{II})} = \\ &= \frac{1000 \cdot 0,03^2 - (0,027)^2 + (4,8)^2}{2 \cdot 0,03} = 400 \text{ м/с}^2; \end{aligned}$$

- сила  $P_1 = A_p \cdot m = 400 \cdot 1 = 400 \text{ Н}$ ;

- коэффициенты  $C_1 = x_{II} + \Delta - P_1 / \omega^2 m = -0,4 \text{ м}$ ;  $C_2 = \dot{x}_2^+ / \omega = 0,00085 \text{ м}$ ;

- длительность действия силы  $P_1$

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{1}{\omega} \arccos \frac{C_1(x_1 - x_{II}) + C_1^2 + C_2 \dot{x}_1^- / \omega}{(C_1^2 + C_2^2)} = \\ &= \frac{1}{31,62} \arccos \frac{-0,012 + 0,16 + 0,0001}{0,16} = 0,0123 \text{ с}; \end{aligned}$$

$$D_1 = x_1 + \Delta = 0,03 \text{ м}; \quad D_2 = \dot{x}_1^+ / \omega = -0,0303 \text{ м};$$

- длительность возврата ударника от правой преграды к левой преграде

$$\begin{aligned} t_2 &= \frac{1}{\omega} \arccos \frac{D_1(x_{II} + \Delta) + D_2 \frac{\dot{x}_2^-}{\omega}}{D_1^2 + D_2^2} = \\ &= \frac{1}{31,62} \arccos \frac{0,03(-0,03 + 0,03) + \frac{0,0303 \cdot 1,35}{31,62}}{(0,03^2 + 0,0303^2)} = 0,025 \text{ с}; \end{aligned}$$

- период цикла

$$T = t_1 + t_2 = 0,0123 + 0,025 \approx 0,0375 \text{ с}.$$

Общий вид интерфейса программного продукта для моделирования процесса движения виброударной системы с двумя ограничителями при периодической пульсирующей силе представлен на рис. 1.2.13.

При моделировании виброударной системы в качестве исходных приняты параметры системы, рассчитанные по изложенной выше методике ( $c = 1000$  Н/м;  $m = 1$  кг;  $P_1 = 400$  Н;  $k_1 = 0,2$ ;  $k_2 = 0,02$ ;  $x_1 = 0$ ;  $x_{II} = -0,03$  м;  $\Delta = 0,03$  м;  $t_1 = 0,0123$  с;  $T = 0,0375$  с).

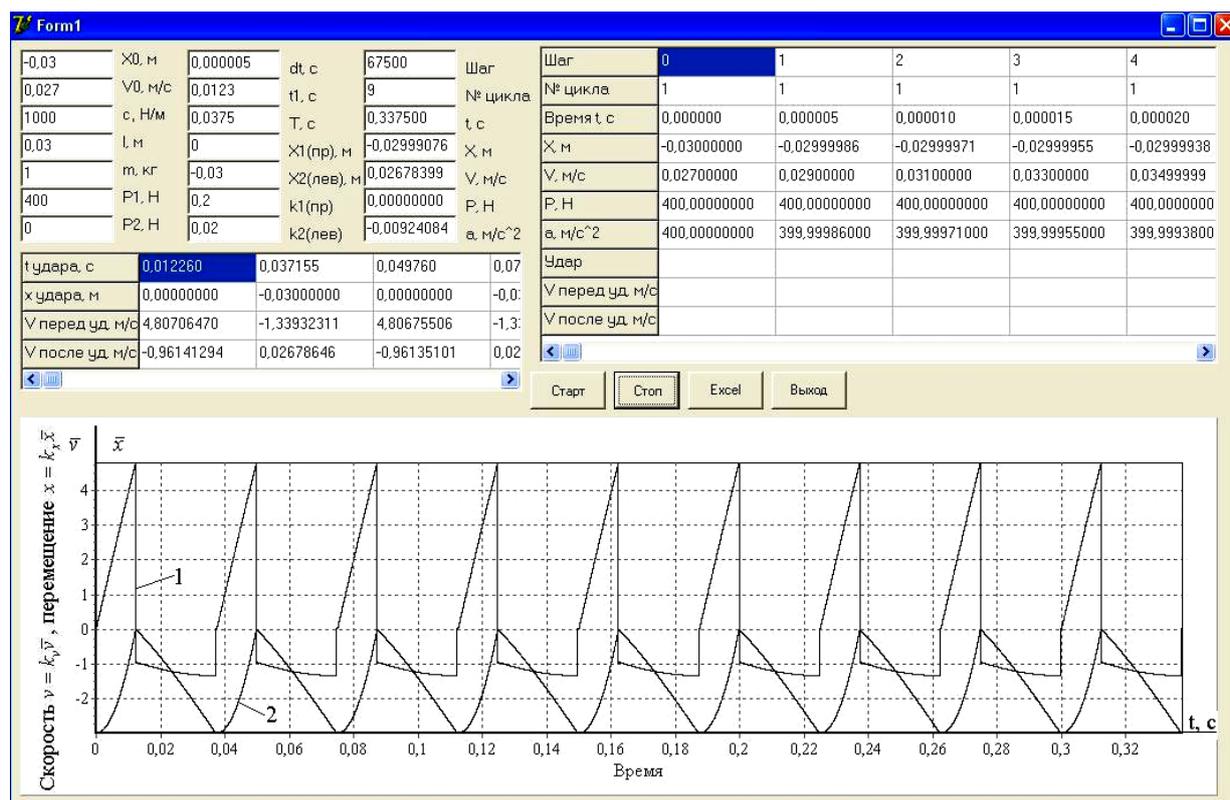


Рис. 1.2.13. Общий вид интерфейса программного продукта: 1 – диаграмма скорости  $v$  при  $k_v = 1$  м/с; 2 – диаграмма перемещения ударной массы  $x$  при  $k_x = 0,01$  м

Результаты моделирования показали, что реализация вычисленных характеристик цикла, обеспечивает периодический режим движения с заданной скоростью удара о правый ограничитель.

### 1.3. Моделирование продольного удара о жесткую преграду упругого стержня как механической системы с конечным числом степеней свободы

#### Постановка задачи

Удар – сложный динамический процесс, который имеет место в различных технических системах. Он может специально осуществляться для достижения того или иного технологического эффекта (ударные технологии, машины ударного действия [1.2, 1.5, 1.6, 1.16, 1.63]). Удар может также возникать как побочный эффект, и техническую систему в этом случае необходимо защищать от тех последствий, которые могут возникнуть при нанесении удара.

Удар, как правило, характеризуется малой длительностью процесса и значительным уровнем ударных сил. Это существенно динамический процесс, понимание которого позволяет производить грамотный расчет технической системы.

В ударной системе можно реализовать еще одно преимущество: тело, наносящее удар, и обрабатываемый объект могут быть расположены на различных участках технологического пространства. Передача механической энергии для совершения работы при воздействии на обрабатываемый объект осуществляется через систему сопряженных стержней. Естественно, что эффективность такой системы может быть достигнута, если располагать достаточными знаниями и представлениями о происходящих динамических процессах.

При решении задач проектирования важно понимать основные принципы построения расчетных моделей продольного удара [1.30, 1.32]. Эффективная по постановке задача о продольном ударе стержней с учетом их деформирования связана с применением дискретной модели [1.27].

#### Дискретная модель продольного удара стержня

Рассмотрим продольный удар со скоростью  $v$  стержня массой  $m_c$  о жесткую преграду (рис. 1.3.1, а). Представим стержень  $n$ -м количеством конечных элементов с массой  $m_1, m_2, \dots, m_{n-2}, m_{n-1}, m_n$  (рис. 1.3.1, б). Причем  $m_c = m_1 + m_2 + \dots + m_{n-2} + m_{n-1} + m_n$ .

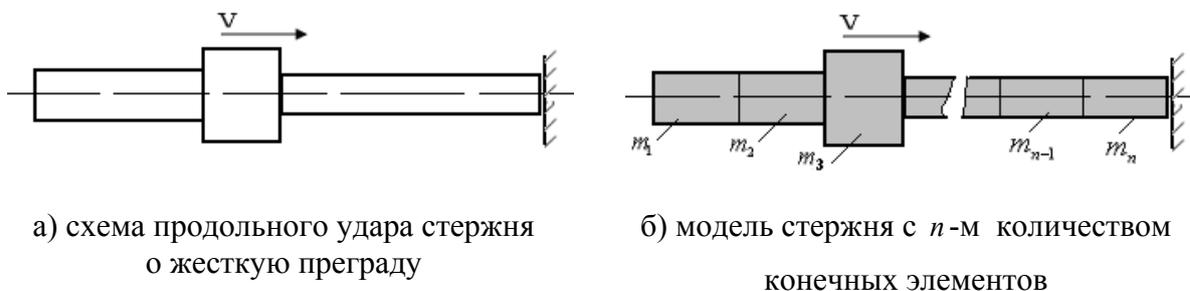


Рис. 1.3.1. Схема и модель продольного удара стержня о жесткую преграду

Продольная жесткость конечного элемента (рис. 1.3.2, а) моделируется упругим элементом жесткостью  $c_j$  (рис. 1.3.2, б). Жесткость  $c_j$  определяется как,  $c_j = E_j A_j / l_j$ , где  $A_j$  – площадь поперечного сечения  $j$ -го конечного элемента стержня,  $E_j$  – модуль упругости первого рода материала  $j$ -го конечного элемента стержня,  $l_j$  – длина  $j$ -го конечного элемента массой  $m_j$  ( $l_j = x_j - x_{j-1}$ ).

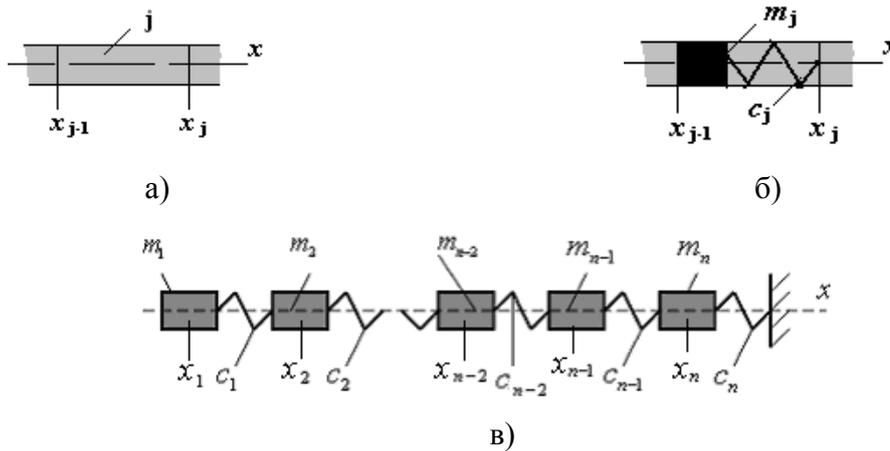


Рис. 1.3.2. Схема конечного элемента и элементная модель стержня

Если масса  $j$ -го конечного элемента сосредоточена в сечении  $x_{j-1}$  (рис. 1.3.2, б), то расчетная модель стержня, представляющая последовательно сопряженные элементы, примет вид, изображенный на рис. 1.3.2, в.

Данная схема эквивалентна исходной по соответствию кинетической энергии и количеству движения механической системы перед нанесением удара, а также по ее упругим свойствам в процессе удара.

Расчетную модель стержня представим совокупностью сосредоточенных масс  $m_1, m_1, \dots, m_{n-2}, m_{n-1}, m_n$  и упругих элементов (рис. 1.3.2, в). Причем

$$m_1 = \frac{l}{n} \rho \cdot A_1, \quad m_2 = \frac{l}{n} \rho \cdot A_2, \dots, \quad m_j = \frac{l}{n} \rho \cdot A_j, \quad c_j = \frac{E_j A_j}{l_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Движение  $j$ -й массы описывается дифференциальным уравнением вида

$$m_j \ddot{u}_j = c_{j-1}(u_{j-1} - u_j) - c_j(u_j - u_{j+1}), \quad j = 1, 2, \dots, n-1, n, \quad (1.3.1)$$

где  $u_j$  – перемещение  $j$ -й массы  $m_j$  относительно фиксированной координаты  $x_j$ , определяющей положение массы;  $\ddot{u}_j$  – ускорение  $j$ -й массы.

Систему дифференциальных уравнений (1.3.1) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \ddot{u}_1 &= -\frac{c_1}{m_1}(u_1 - u_2), \\ \ddot{u}_2 &= \frac{c_1}{m_2}(u_1 - u_2) - \frac{c_2}{m_2}(u_2 - u_3), \\ &\dots, \\ \ddot{u}_{n-1} &= \frac{c_{n-2}}{m_{n-1}}(u_{n-2} - u_{n-1}) - \frac{c_{n-1}}{m_{n-1}}(u_{n-1} - u_n), \\ \ddot{u}_n &= \frac{c_{n-1}}{m_n}(u_{n-1} - u_n) - \frac{c_n}{m_n}u_n, \end{aligned}$$

начальные условия  $u_j = u_{j,0}, \quad \dot{u}_j = \dot{u}_{j,0}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1, n.$

В дифференциальных уравнениях движения отношение жесткости упругого элемента  $c_j$  к соответствующей массе  $m_j$  (полагая, что материал конечных элементов один и тот же) можно представить следующими равенствами:

$$\begin{aligned} \frac{c_1}{m_1} &= \frac{\frac{EA_1}{l/n}}{\rho A_1 l/n} = \frac{n^2 E}{l^2 \rho}, \quad \frac{c_1}{m_2} = \frac{\frac{EA_1}{l/n}}{\rho A_2 l/n} = \frac{n^2 E}{l^2 \rho} \tilde{A}_1, \quad \tilde{A}_1 = \frac{A_1}{A_2}, \\ \frac{c_2}{m_2} &= \frac{\frac{EA_2}{l/n}}{\rho A_2 l/n} = \frac{n^2 E}{l^2 \rho}, \\ &\dots, \\ \frac{c_{j-1}}{m_j} &= \frac{\frac{EA_{j-1}}{l/n}}{\rho A_j l/n} = \frac{n^2 E}{l^2 \rho} \tilde{A}_{j-1}, \quad \tilde{A}_{j-1} = \frac{A_{j-1}}{A_j}, \quad \frac{c_j}{m_j} = \frac{\frac{EA_j}{l/n}}{\rho A_j l/n} = \frac{n^2 E}{l^2 \rho}. \end{aligned}$$

В волновой механике отношение  $E/\rho = a^2$ , где  $a$  – скорость звука в материале стержня. Тогда величина

$$\frac{n^2 E}{l^2 \rho} = \frac{n^2 a^2 \rho}{l^2 \rho} = \frac{n^2 a}{l \cdot l/a} = \frac{n^2 a}{l \cdot T_0}, \quad T_0 = \frac{l}{a},$$

где  $T_0$  – время распространения волны по стержню длиной  $l$ .

Учитывая в дифференциальных уравнениях равенство  $\frac{n^2 E}{l^2 \rho} = \frac{n^2 a}{l \cdot T_0}$ , получим

$$\ddot{u}_1 = -\frac{n^2 a}{l \cdot T_0}(u_1 - u_2),$$

$$\ddot{u}_2 = \frac{n^2 a \tilde{A}_1}{l \cdot T_0} (u_1 - u_2) - \frac{n^2 a}{l \cdot T_0} (u_2 - u_3), \quad \tilde{A}_1 = \frac{A_1}{A_2},$$

.....,

$$\ddot{u}_{n-1} = \frac{n^2 a \tilde{A}_{n-2}}{l \cdot T_0} (u_{n-2} - u_{n-1}) - \frac{n^2 a}{l \cdot T_0} (u_{n-1} - u_n), \quad \tilde{A}_{n-2} = \frac{A_{n-2}}{A_{n-1}},$$

$$\ddot{u}_{n-1} = \frac{n^2 a \tilde{A}_{n-1}}{l \cdot T_0} (u_{n-1} - u_n) - \frac{n^2 a}{l \cdot T_0} u_n, \quad \tilde{A}_{n-1} = \frac{A_{n-1}}{A_n}.$$

### Алгоритм расчета

Выделим дифференциальное уравнение движения  $j$ -й массы:

$$\ddot{u}_j = \frac{n^2 a \tilde{A}_{j-1}}{l T_0} (u_{j-1} - u_j) - \frac{n^2 a}{l T_0} (u_j - u_{j+1}), \quad \tilde{A}_{j-1} = \frac{A_{j-1}}{A_j}.$$

Скорость и перемещение  $j$ -й массы определяются как

$$\dot{u}_j = \dot{u}_{j,0} + \int_{t_0}^t \ddot{u}_j \cdot dt, \quad u_j = u_{j,0} + \int_{t_0}^t \dot{u}_j \cdot dt.$$

Первые приближения представим как

$$(\ddot{u}_j)_1 = \frac{n^2 a \tilde{A}_{j-1}}{l T_0} [(u_{j-1})_0 - (u_j)_0] - \frac{n^2 a}{l T_0} [(u_j)_0 - (u_{j+1})_0],$$

$$(\dot{u}_j)_1 = \dot{u}_{j,0} + \int_{t_0}^t (\ddot{u}_j)_1 \cdot dt, \quad (u_j)_1 = u_{j,0} + \int_{t_0}^t (\dot{u}_j)_1 dt.$$

Дальнейшие приближения строятся по формулам

$$(\ddot{u}_j)_i = \frac{n^2 a \tilde{A}_{j-1}}{l T_0} [(u_{j-1})_{i-1} - (u_j)_{i-1}] - \frac{n^2 a}{l T_0} [(u_j)_{i-1} - (u_{j+1})_{i-1}],$$

$$(\dot{u}_j)_i = \dot{u}_{j,0} + \int_{t_0}^t (\ddot{u}_j)_i \cdot dt, \quad (u_j)_i = u_{j,0} + \int_{t_0}^t (\dot{u}_j)_i dt, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

где  $i$  – число приближений.

Число приближений ограничиваем некоторым числом  $s$ , когда последующие приближения отличаются от предыдущих на малые величины  $\Delta \tilde{u}_j$  и  $\Delta \dot{\tilde{u}}_j$ . От интегральных выражений на малом интервале времени  $\Delta t$  можем перейти к алгебраическим:

$$(\ddot{u}_j)_i = \frac{n^2 a \tilde{A}_{j-1}}{l T_0} [(u_{j-1})_{i-1} - (u_j)_{i-1}] - \frac{n^2 a}{l T_0} [(u_j)_{i-1} - (u_{j+1})_{i-1}],$$

$$(\dot{u}_j)_i = \dot{u}_{j,0} + (\ddot{u}_j)_{i-1} \cdot \Delta t, \quad (u_j)_i = u_{j,0} + (\dot{u}_j)_{i-1} \cdot \Delta t, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

Представленные алгебраические равенства преобразуем к универсальному виду, когда в структуре этих выражений используются обобщенные безразмерные параметры скоростей и перемещений. Представим равенство  $(u_j)_i = u_{j,0} + (\dot{u}_j)_{i-1} \cdot \Delta t$  в виде

$$\frac{(u_j)_i}{l} = \frac{u_{j,0}}{l} + \frac{(\dot{u}_j)_{i-1}}{l} \cdot \Delta t \cdot \frac{v_0}{v_0}, \quad (\tilde{u}_j)_i = \tilde{u}_{j,0} + (\tilde{\dot{u}}_j)_{i-1} \cdot \frac{v_0 \cdot \Delta t}{l}, \quad i = 1, 2, 3, \dots,$$

где  $(\tilde{u}_j)_i = \frac{(u_j)_i}{l}$ ,  $\tilde{u}_{j,0} = \frac{u_{j,0}}{l}$ ,  $(\tilde{\dot{u}}_j)_{i-1} = \frac{(\dot{u}_j)_{i-1}}{v_0}$ ,  $v_0$  – предударная скорость.

Учитывая, что  $l = a \cdot T_0$ , получим выражение для расчета перемещения  $j$ -й массы в  $i$ -м приближении в безразмерных параметрах:

$$(\tilde{u}_j)_i = \tilde{u}_{j,0} + (\tilde{\dot{u}}_j)_{i-1} \cdot \frac{v_0 \cdot \Delta t}{a \cdot T_0} = \tilde{u}_{j,0} + (\tilde{\dot{u}}_j)_{i-1} \cdot \Delta \tilde{t} \cdot \frac{v_0}{a}, \quad \Delta \tilde{t} = \frac{\Delta t}{T_0}, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

Аналогично приведем к безразмерному виду выражение для расчета скорости  $j$ -й массы в  $i$ -м приближении:

$$(\tilde{\dot{u}}_j)_i = \tilde{\dot{u}}_{j,0} + \frac{a}{v_0} \left[ n^2 \tilde{A}_{j-1} \left( (\tilde{\dot{u}}_{j-1})_i - (\tilde{\dot{u}}_j)_i \right) \right] \cdot \Delta \tilde{t} - \frac{a}{v_0} \left[ n^2 \left( (\tilde{\dot{u}}_j)_i - (\tilde{\dot{u}}_{j+1})_i \right) \right] \cdot \Delta \tilde{t},$$

где  $(\tilde{\dot{u}}_j)_i = (\dot{u}_j)_i / v_0$ ,  $\tilde{\dot{u}}_{j,0} = \dot{u}_{j,0} / v_0$ ,  $\Delta \tilde{t} = \Delta t / T_0$ .

Сила  $P_{j,j+1}$  между  $j$ -й и  $(j+1)$ -й массами, возникающая при деформировании  $j$ -го упругого элемента, определяется как  $P_{j,j+1} = c_j(u_j - u_{j+1})$ . Учитывая, что  $c_j = EA_j n / l$ , получим

$$P_{j,j+1} = n \cdot EA_j (\tilde{u}_j - \tilde{u}_{j+1}), \quad \tilde{u}_j = \frac{u_j}{l}, \quad \tilde{u}_{j+1} = \frac{u_{j+1}}{l}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1, n.$$

Представим значения сил в безразмерном виде. Для этого разделим обе части последнего равенства на значение силы  $P_0 = EA_0 v_0 / a$  [1.27] (где  $v_0$  – скорость стержня перед нанесением удара), возникающей в ударном сечении однородного стержня такой же массы с площадью поперечного сечения  $A_0$  при столкновении с жесткой преградой.

Площадь поперечного сечения  $A_0$  однородного стержня определяется из условия равенства массе стержня неоднородной структуры, площадь поперечных сечений которого на участках равна соответственно

$$A_1, A_2, \dots, A_n: \rho \frac{l}{n} (A_1 + A_2 + \dots + A_n) = \rho l A_0, \text{ откуда } A_0 = \frac{A_1 + A_2 + \dots + A_n}{n}.$$

Представим значение силы  $\tilde{P}_{j,j+1}$  в безразмерном виде

$$\tilde{P}_{j,j+1} = \frac{P_{j,j+1}}{P_0} = \frac{n \cdot EA_j (\tilde{u}_j - \tilde{u}_{j+1})}{EA_0 \cdot v_0 / a} = n \cdot \tilde{A}_{j,0} (\tilde{u}_j - \tilde{u}_{j+1}) / \frac{v_0}{a}, \quad \tilde{A}_{j,0} = \frac{A_j}{A_0}.$$

Значение ударной силы  $\tilde{P}_n$  в безразмерном виде, учитывая, что перемещение жесткой преграды  $\tilde{u}_{n+1}$  в процессе удара равно нулю, определится как  $\tilde{P}_n = n \cdot \tilde{A}_{n,0} \cdot \tilde{u}_n / \frac{v_0}{a}$ ,  $\tilde{u}_n = \frac{u_n}{l}$ ,  $\tilde{A}_{n,0} = \frac{A_n}{A_0}$ .

Если стержень однородный, имеет постоянную площадь  $A$  поперечных сечений по длине, то

$$\tilde{A}_{j,0} = \frac{A_j}{A_0} = 1, \quad \tilde{A}_{n,0} = \frac{A_n}{A_0} = 1, \quad \tilde{P}_{j,j+1} = n \cdot (\tilde{u}_j - \tilde{u}_{j+1}) / \frac{v_0}{a}, \quad \tilde{P}_n = n \cdot \tilde{u}_n / \frac{v_0}{a}.$$

### Моделирование продольного удара стержня о жесткую преграду

Осуществлено моделирование процесса продольного удара однородного стержня о жесткую преграду [1.27]. В качестве тестового объекта рассматривался стержень с постоянной по длине площадью поперечных сечений с представлением его  $n$ -м количеством конечных элементов (рис. 1.3.3). Выбор тестового объекта определен тем, что для него известны точные решения о параметрах движения на основе волновой модели продольного удара [1.5, 1.32].

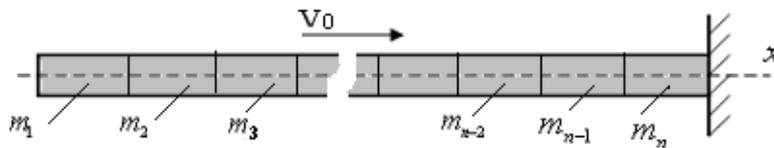


Рис. 1.3.3. Схема представления стержня  $n$ -м количеством конечных элементов

В частности, для схемы продольного удара стержня (рис. 1.3.4) в системе координатных осей « $x-t$ » определены [1.32] области волновых состояний. Область «0» – это область начального состояния, когда все поперечные сечения стержня движутся с одинаковой скоростью  $V_0$ , а деформации в поперечных сечениях отсутствуют.

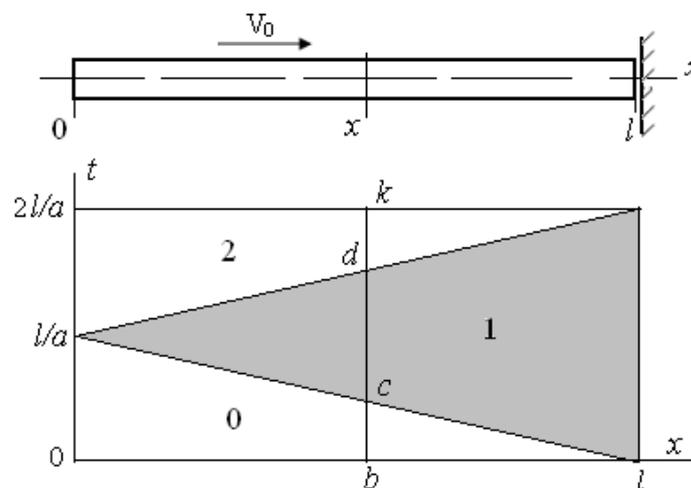


Рис. 1.3.4. Схема удара и диаграмма областей волновых состояний [1.32]

Область «1» – это область, когда скорость поперечных сечений равна нулю, а деформация в сечениях по абсолютной величине равна  $V_0 / a$ .

Область «2» – это область, когда скорость поперечных сечений равна  $(-V_0)$ , а деформации в поперечных сечениях равны нулю.

Если на диаграмме волновых состояний для произвольного сечения  $x$  провести параллельно оси  $t$  линию  $bk$ , то получим отрезки  $bc$ ,  $cd$  и  $dk$ . Отрезок  $bc = (l - x) / a$  на рис. 1.3.4 определяет промежуток времени, когда произвольное сечение  $x$  находится в области волнового состояния «0». Отрезок  $cd = 2x / a$  определяет промежуток времени, когда произвольное сечение  $x$  находится в области волнового состояния «1». Отрезок  $dk = (l - x) / a$  определяет промежуток времени, когда сечение  $x$  находится в области волнового состояния «2».

Для произвольного сечения  $x$  можно записать следующие расчетные формулы для определения относительной скорости  $\tilde{u}$  поперечного сечения и относительной продольной силы  $\tilde{N}$  в поперечных сечениях:

$$\tilde{u}(x,t) = \dot{u}(x,t) / V_0, \quad \tilde{u}(x,t) = 1, \quad 0 \leq t \leq (l - x) / a,$$

$$\tilde{u}(x,t) = 0, \quad (l - x) / a \leq t \leq (l + x) / a,$$

$$\tilde{u}(x,t) = -1, \quad t \geq (l + x) / a,$$

$$\tilde{N}(x,t) = N(x,t) / (EAV_0 / a), \quad \tilde{N}(x,t) = 0, \quad 0 \leq t \leq (l - x) / a, \quad (1.3.2)$$

$$\tilde{N}(x,t) = 1, \quad (l - x) / a \leq t \leq (l + x) / a, \quad (1.3.3)$$

$$\tilde{N}(x,t) = 0, \quad t \geq (l + x) / a. \quad (1.3.4)$$

Для ударного сечения  $x = l$  значение продольной силы  $\tilde{N}(l,t)$  – ударной силы  $\tilde{P}_n = \tilde{N}(l,t)$  определится из (1.3.2), (1.3.3) и (1.3.4) как

$$\tilde{P}_n = \tilde{N}(l,t), \quad \tilde{P}_n = 1, \quad 0 \leq t \leq 2l / a, \quad (1.3.5)$$

$$\tilde{P}_n = 0, \quad t \geq 2l / a. \quad (1.3.6)$$

Например, для сечения  $x = l / 2$  значение продольной силы  $\tilde{N}(l,t)$  определится из (1.3.2), (1.3.3) и (1.3.4) как

$$\tilde{N}(x,t)|_{x=l/2} = 0, \quad 0 \leq t \leq (l / 2) / a, \quad (1.3.7)$$

$$\tilde{N}(x,t)|_{x=l/2} = 1, \quad (l / 2) / a \leq t \leq (1,5l) / a, \quad (1.3.8)$$

$$\tilde{N}(x,t)|_{x=l/2} = 0, \quad t \geq (l + x) / a. \quad (1.3.9)$$

Реализован алгоритм расчета параметров движения сосредоточенных масс (ускорений, относительных перемещений и скоростей масс) в зависимости от времени при различном количестве конечных элементов, моделирующих упругие и инерционные свойства стержня ( $n = 1, 2, 5, 10, 20, 30$ ).

Приведены результаты расчета ударной силы в зависимости от количества конечных элементов, представляющих стержень (рис. 1.3.5).

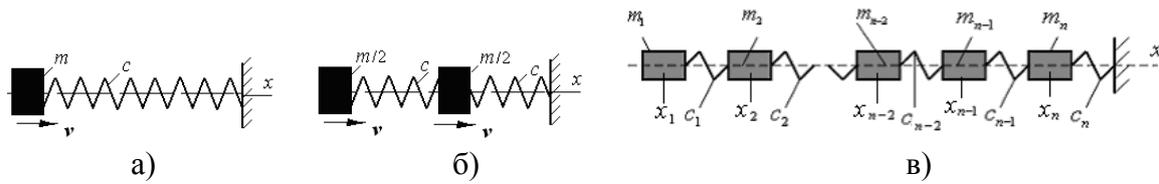
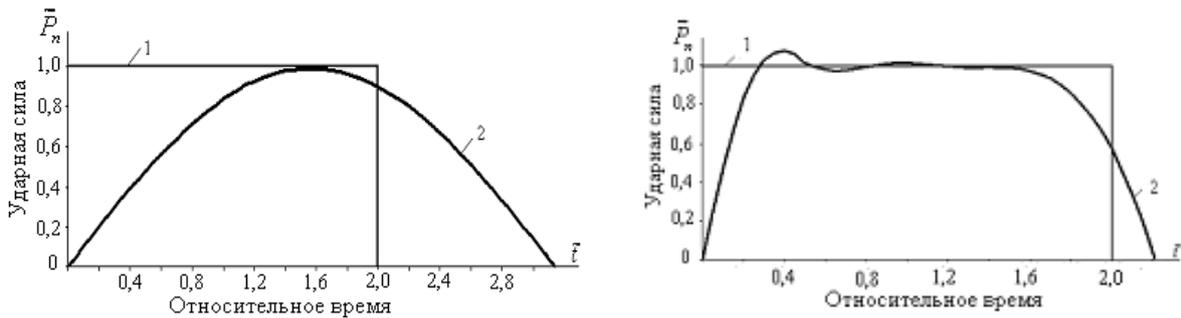
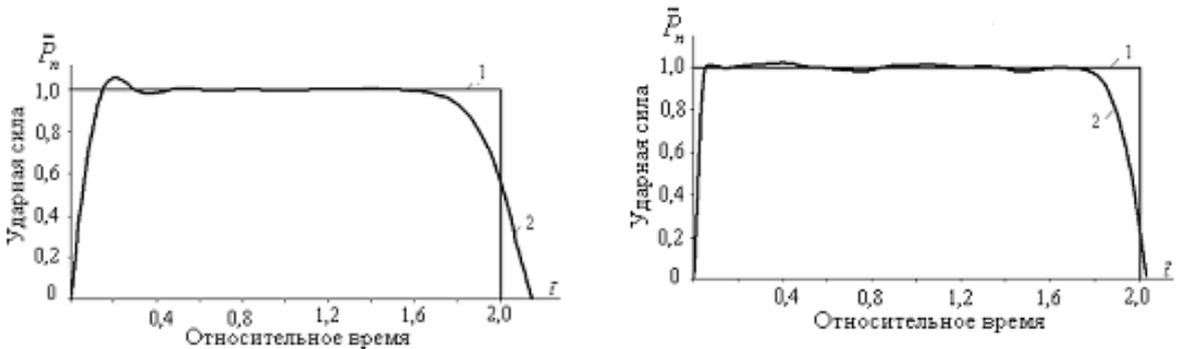


Рис. 1.3.5. Схемы удара, когда стержень представлен одним (рис. 1.3.5, а), двумя (рис. 1.3.5, б) и  $n$ -м (рис. 1.3.5, в) количеством конечных элементов

На рис. 1.3.6 приведены диаграммы, характеризующие изменение ударной силы во времени при различном количестве конечных элементов, представляющих стержень.



а) Диаграмма  $\tilde{P}_n$  при  $n=1$  (диаграмма 2)    б) Диаграмма  $\tilde{P}_n$  при  $n=5$  (диаграмма 2)



в) Диаграмма  $\tilde{P}_n$  при  $n=10$  (диаграмма 2)    г) Диаграмма  $\tilde{P}_n$  при  $n=30$  (диаграмма 2)

Рис. 1.3.6. Диаграммы относительного значения ударной силы  $\tilde{P}_n$ : диаграммы 1 – расчет по формулам (1.3.5), (1.3.6); диаграммы 2 – результаты моделирования

Чем больше число конечных элементов, на которые разбивается стержень, тем ближе результаты моделирования элементной модели к результатам расчета ударной силы при продольном ударе однородного стержня о жесткую преграду на основе волновой модели (диаграммы 1).

Практически, при  $n > 10$  результаты уже мало отличаются друг от друга. Длительность удара приближается к величине  $T \rightarrow 2l/a$ ,  $\tilde{t} \rightarrow 2$ . Относительное значение ударной силы  $\tilde{P}_n \rightarrow 1$ .

Результаты моделирования указывают и на волновой характер распространения деформаций. На рис. 1.3.7 представлены диаграммы изменения продольной силы (при  $n = 30$ ) в поперечном сечении стержня, расположенного на расстоянии  $0,5l$  от ударного сечения ( $\tilde{x} = x/l = 0,5$ ).

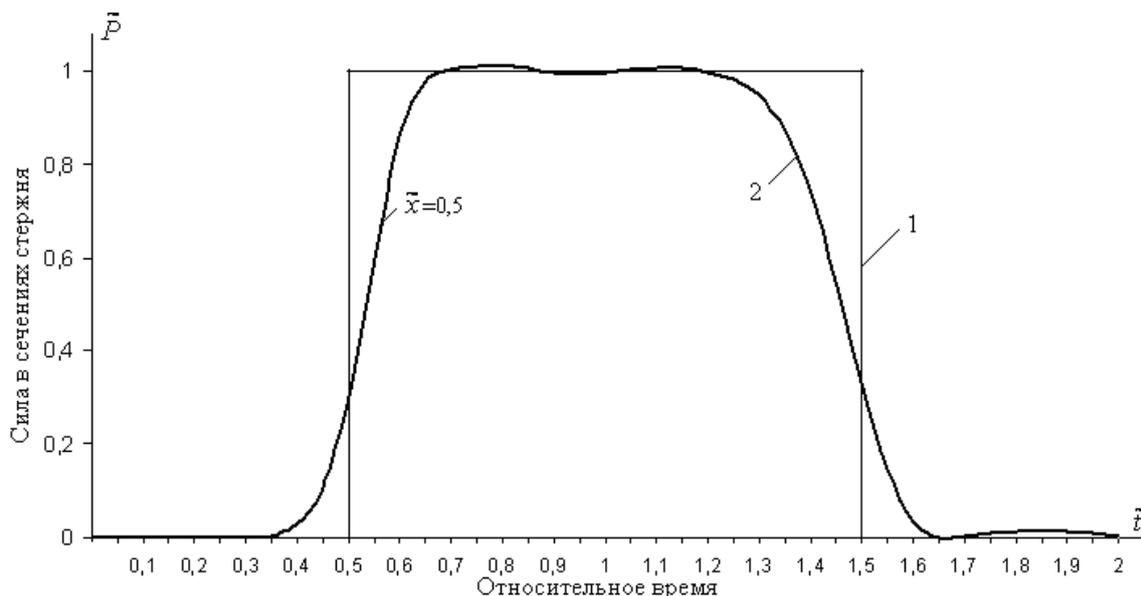


Рис. 1.3.7. Диаграммы изменения продольной силы в поперечном сечении стержня  $\tilde{x} = x/l = 0,5$ : диаграмма 1 – расчет по формулам (1.3.7), (1.3.8), (1.3.9) при  $x = 0,5l$ ; диаграмма 2 – результаты моделирования

Заметим, что в момент нанесения удара ( $\tilde{t} = 0$ ) деформации в сечении  $\tilde{x} = 0,5$  стержня отсутствуют. Для волновой модели (диаграмма 1) деформации в сечении  $\tilde{x} = 0,5$  возникнут после прихода ударной волны через промежуток времени  $0,5l/a$  с момента нанесения удара. Элементная модель практически улавливает процесс распространения волны деформации по стержню (с учетом переходных процессов нарастания и спада).

### Выводы

Предложенная процедура расчета может быть использована при моделировании задач продольного удара в стержневых системах.

Точность вычислений тем выше, чем большее количество элементов представляют стержень. В практических вычислениях можно ограничиться количеством элементов для стержня  $n \in (20, \dots, 30)$ .

Преобразование уравнений движения к виду, когда в структуре уравнений представлен параметр – скорость звука в материале стержня, позволяет естественным образом при необходимости сопоставлять результаты с волновой моделью продольного удара.

#### 1.4. Моделирование волновых процессов при продольном ударе упругого стержня о жесткую преграду

Задача продольного удара часто возникает при решении тех или иных вопросов проектирования ударных машин и технологий [1.2 - 1.5]. При ударе в ударном сечении стержня возбуждаются значительные по величине ударные силы. Между телом, наносящим удар, и технологической средой, как правило, расположено промежуточное звено (рабочий инструмент), представляющее стержень определенной длины и конфигурации.

Ударное воздействие на технологическую среду, естественно, повышает эффективность технологической операции. Однако ударное взаимодействие тел приводит к существенным динамическим нагрузкам, прогнозирование которых является важной задачей проектирования ударных машин и технологий.

При решении задач проектирования важно понимать основные принципы построения тех или иных расчетных моделей продольного удара. Исследования, посвященные проблеме продольного удара, показывают, что процесс удара тел сопровождается возбуждением в зоне контакта волн деформаций [1.1, 1.2 - 1.5, 1.12 - 1.15, 1.20, 1.22 - 1.24, 1.28 - 1.34, 1.50 - 1.52, 1.54 - 1.63, 1.65 - 1.66, 1.70 - 1.71, 1.74, 1.76 - 1.79]. Эти волны распространяются с определенной скоростью, осуществляя перенос энергии для воздействия на технологический объект. Их определение связано с изучением волновых процессов в соударяемых телах.

##### Волновая модель продольного удара стержня с изменяющейся продольной жесткостью поперечных сечений

Рассмотрим схему продольного удара стержня с изменяющейся продольной жесткостью поперечных сечений (рис. 1.4.1). Стержень 1 длиной  $l$ , перемещаясь вдоль оси  $x$  со скоростью  $V_0$ , наносит удар по абсолютно жесткой преграде 2. Изменение продольной жесткости поперечных сечений стержня возникает из-за изменения площади поперечных сечений по длине стержня  $A = A(x)$ .

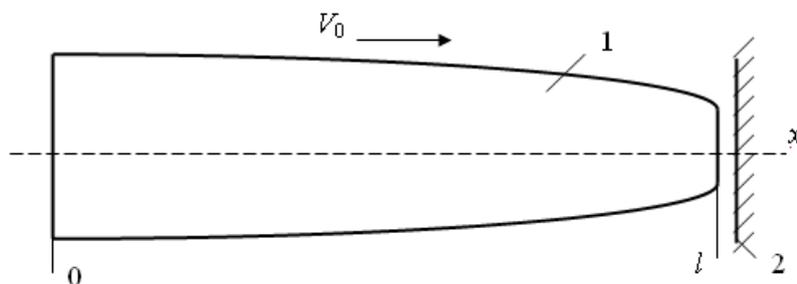


Рис. 1.4.1. Схема продольного удара стержня о жесткую преграду

Предполагаем возможность использования модели плоского удара. Движение поперечных сечений стержня описывается [1.30] уравнением

$$E \frac{\partial}{\partial x} \left[ A(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right] - \rho A(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0, \quad 0 \leq x \leq l,$$

или с учетом, что  $\rho / E = 1 / a^2$ ,

$$A(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial A(x)}{\partial x} \cdot \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - \frac{A(x)}{a^2} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (1.4.1)$$

где  $E$  – модуль упругости 1-го рода материала стержня;  $A(x)$  – площадь поперечного сечения в сечении  $x$ ;  $\rho$  – плотность материала;  $u(x,t)$  – продольное перемещение поперечного сечения;  $l$  – длина стержня;  $x$  – координата поперечного сечения;  $t$  – время;  $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$  – продольная

деформация в поперечном сечении;  $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$  – ускорение поперечного сечения.

Начальные условия при  $t = 0$ :

$$u(x,0) = 0, \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \begin{cases} V_0, & 0 \leq x < l, \\ 0, & x = l. \end{cases}$$

Граничные условия для схемы, представленной на рис. 1.4.1, следующие:

$$\begin{aligned} \text{при } x = 0 \quad \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0, \quad \text{при } x = l \quad \frac{\partial u(l,t)}{\partial t} = 0, \text{ если } \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} < 0, \\ \text{при } x = l \quad \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = 0, \text{ если } \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} \geq 0. \end{aligned}$$

Если стержень однородный и  $A(x) = \text{const}$ , то в уравнении (1.4.1) производная  $\frac{\partial A(x)}{\partial x} = 0$  и уравнение (1.4.1) преобразуется к виду

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (1.4.2)$$

Для решения волнового уравнения (1.4.2) используем метод бегущих волн, в основе которого лежит представление о структуре решения волнового уравнения (1.4.2) в виде суммы двух функций

$$u(x,t) = f(at - x) + \varphi(at + x). \quad (1.4.3)$$

Функции  $f(at - x)$  и  $\varphi(at + x)$  являются неизвестными и требуют определения в каждом конкретном случае, в зависимости от заданных начальных и граничных условий рассматриваемой задачи.

Начальные условия показывают, в каком состоянии находится стержень в начальный момент времени. Начальное значение продольных деформаций и начальные скорости поперечных сечений задаются условиями:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{t=0} = p(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = F(x),$$

где  $p(x)$  и  $F(x)$  – заданные функции.

Краевые условия показывают состояние краевых поперечных сечений и определяются конкретной схемой продольного удара.

Важно отметить следующее свойство функций  $f(at - x)$  и  $\varphi(at + x)$ . Предположим, что  $t$  и  $x$  получили приращение  $\Delta t$  и  $\Delta x$ . Тогда, если  $\Delta x = a \cdot \Delta t$ , то будут иметь место равенства

$$f[a(t + \Delta t) - (x + \Delta x)] = f(at - x), \quad \Delta t = \Delta x/a,$$

$$\varphi[a(t + \Delta t) + (x - \Delta x)] = \varphi(at + x), \quad \Delta x = a \cdot \Delta t,$$

т. е. параметры функций  $f(at - x)$  и  $\varphi(at + x)$ , распространяющихся по однородному участку стержня, не изменяются.

Это свойство удобно использовать при расчете волновых состояний, так как, определив значение функции  $f(at - x)$  в сечении  $x$  для времени  $t$ , можно использовать это значение для сечения  $x + \Delta x$  в момент времени  $t + \Delta t$ . Определив значение функции  $\varphi(at + x)$  в сечении  $x$  для времени  $t$ , можно использовать его для сечения  $x - \Delta x$  в момент времени  $t + \Delta t$ .

Таким образом, из сказанного следует, что функция  $f(at - x)$  описывает перемещения сечений, обусловленные волной, движущейся по стержню в положительном направлении оси  $x$ , а функция  $\varphi(at + x)$  – перемещения сечений, вызванные волной, движущейся в отрицательном направлении оси  $x$ . Назовем  $f(at - x)$  прямой волной, а  $\varphi(at + x)$  обратной волной.

Так как

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = f''(at - x) + \varphi''(at + x),$$

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = a^2 \cdot [f''(at - x) + \varphi''(at + x)],$$

где штрихи означают дифференцирование функций  $f(at - x)$  и  $\varphi(at + x)$  по аргументам  $(at - x)$  и  $(at + x)$ , то можно легко установить, что (1.4.2) удовлетворяется тождественно.

Итак, параметры волн, сформированных на границах стержня, не меняются до тех пор, пока прямая волна  $f(at - x)$  не достигнет соседней

справа границы стержня, а обратная волна деформации  $\varphi(at+x)$  – соседней слева границы.

### Поле волновых состояний в стержне и его моделирование

При решении задач продольного удара стержневой системы (например, ступенчатого стержня) процедуру решения для большей информативности результатов целесообразно дополнять построением поля волновых состояний. Такие построения упрощают процедуру решения, делают анализ процесса распространения волн более наглядным.

Рассмотрим более подробно процедуру построения поля волновых состояний на примере столкновения однородного стержня с жесткой преградой.

Схема соударения показана на рисунке 1.4.2. Все сечения стержня движутся с одинаковой начальной скоростью  $V_0$ . Стержень не деформирован.

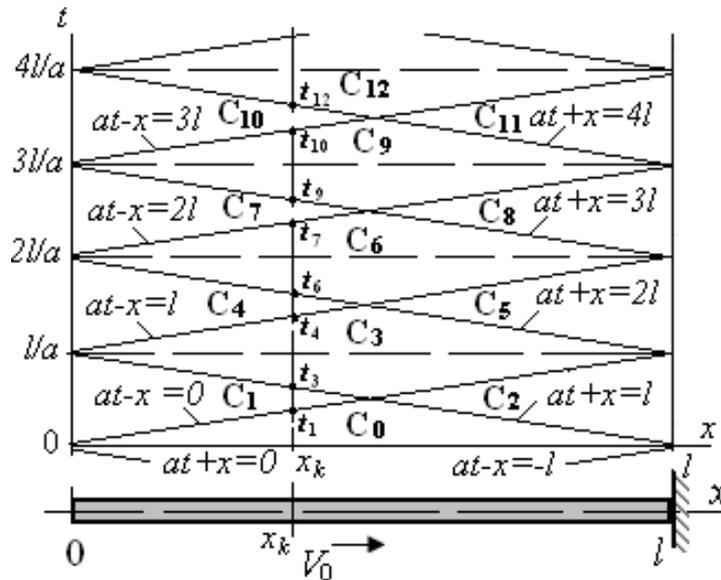


Рис. 1.4.2. Схема удара стержня о жесткую преграду и поле волновых состояний

Движение сечений стержня описывается волновым уравнением

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0, \quad 0 \leq x \leq l.$$

Начальные условия при  $t = 0$ :

$$u(x,0) = 0, \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \begin{cases} V_0, & 0 \leq x < l, \\ 0, & x = l. \end{cases} \quad (1.4.4)$$

Граничные условия для схемы, представленной на рис. 1.4.2, следующие:

$$\text{при } x = 0 \quad \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0, \quad (1.4.5)$$

$$\text{при } x = l \quad \frac{\partial u(l,t)}{\partial t} = 0, \text{ если } \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} < 0, \quad (1.4.6)$$

$$\text{при } x = l \quad \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = 0, \text{ если } \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} \geq 0. \quad (1.4.7)$$

Формирование прямой волны происходит в сечении  $x=0$ . Схема формирования прямой волны представлена на рисунке 1.4.3. По схеме на торец стержня ( $x=0$ ) падает обратная волна  $\varphi(at+0)$ , а формируется прямая волна  $f(at-0)$ .

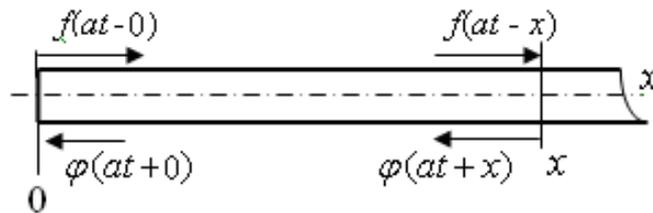


Рис. 1.4.3. Схема формирования прямой волны на торце стержня в сечении  $x=0$

Для рассматриваемого случая граничное условие соответствует отсутствию деформаций на свободном торце:  $\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0$ . Так как при

$x=0 \quad \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = -f'(at-0) + \varphi'(at+0)$ , то для схемы (рис. 1.4.3) с учетом (1.4.5) соответственно имеем

$$f'(at-0) = \varphi'(at+0), \quad (1.4.8)$$

т. е. формируемая в сечении  $x=0$  прямая волна по знаку и по характеру изменения соответствует падающей обратной волне.

Формирование обратной волны происходит в сечении  $x=l$ . Схема формирования обратной волны представлена на рисунке 1.4.4.

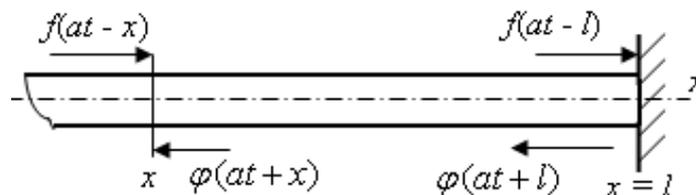


Рис. 1.4.4. Схема формирования обратной волны в сечении  $x=l$

По схеме на торец стержня ( $x=l$ ) падает прямая волна  $f(at-l)$ , а формируется обратная волна  $\varphi(at+l)$ .

Для рассматриваемого случая граничное условие соответствует отсутствию смещений в сечении  $x=l$ :  $\frac{\partial u(l,t)}{\partial t} = 0$ , если сечение испытывает продольные деформации сжатия (если  $\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} < 0$ ).

Так как при  $x=l$   $\frac{\partial u(l,t)}{\partial t} = af'(at-l) + a\varphi'(at+l)$ , то для схемы (рис. 1.4.4) с учетом (1.4.6) соответственно имеем

$$\varphi'(at+l) = -f'(at-l), \quad (1.4.9)$$

т. е. формируемая в сечении  $x=l$  обратная волна по знаку противоположна падающей прямой волне.

Прямые волны формируются в сечении  $x=0$  и распространяются по стержню по характеристикам  $at-x=0$ ,  $at-x=l$ ,  $at-x=2l$ ,  $at-x=3l$  и так далее. Характеристики представляют собой аргументы функций прямых волн и в системе координат  $t-x$  графически (рис. 1.4.2) могут быть изображены прямыми с угловым коэффициентом  $k_f = m_t / m_x$ , где  $m_t$  – масштаб изображения времени на координатной оси  $t$ ;  $m_x$  – масштаб изображения длины на координатной оси  $x$ .

Обратные волны формируются в сечении  $x=l$  и распространяются по стержню по характеристикам  $at+x=l$ ,  $at+x=2l$ ,  $at+x=3l$ ,  $at+x=4l$  и так далее. Характеристики представляют собой аргументы функций обратных волн и в системе координат  $t-x$  графически могут быть изображены прямыми с угловым коэффициентом  $k_\varphi = -m_t / m_x$  (рис. 1.4.2).

Характеристики прямых и обратных волн разбивают координатную плоскость  $t-x$  на области волновых состояний  $C_0, C_1, C_2, \dots, C_{11}, C_{12}$ . Область  $C_0$  охвачена начальными прямой и обратной волнами с характеристиками  $at-x=-l$  и  $at+x=0$ . Область  $C_1$  охвачена прямой и обратной волнами с характеристиками  $at-x=0$  и  $at+x=l$ . Область  $C_2$  охвачена прямой и обратной волнами с характеристиками  $at-x=-l$  и  $at+x=l$ . Область  $C_3$  охвачена прямой и обратной волнами с характеристиками  $at-x=0$  и  $at+x=l$ . Область  $C_4$  охвачена прямой и обратной волнами с характеристиками  $at-x=l$  и  $at+x=l$ , и так далее.

Если в стержне выделить некоторое произвольное сечение  $x_k$  (рис. 1.4.2), то на поле волновых состояний можно определить временные интервалы, для которых данное сечение испытывает воздействие прямых и обратных волн с теми или иными характеристиками.

Так  $t_1$  – время, когда для сечения  $x_k$  заканчивается волновое состояние  $C_0$  и начинается волновое состояние  $C_1$ . Из характеристики  $at-x=0$  (рис. 1.4.2) при  $x=x_k$  следует, что  $t_1 = x_k / a$ .

Аналогично,  $t_3$  – время, когда для сечения  $x_k$  заканчивается волновое состояние  $C_1$  и начинается волновое состояние  $C_3$ . Из характеристики  $at + x = l$  (рис. 1.4.2) при  $x = x_k$  следует, что  $t_3 = (l - x_k) / a$ . Длительность волнового состояния  $C_1$  для сечения  $x_k$  определится как  $\Delta t_1 = t_3 - t_1 = (l - 2x_k) / a$ .

Время, когда для сечения  $x_k$  заканчивается волновое состояние  $C_3$  и начинается волновое состояние  $C_4$ , равно  $t_4$ . Из характеристики  $at - x = l$  (рис. 1.4.2) при  $x = x_k$  следует, что  $t_4 = (l + x_k) / a$ . Длительность волнового состояния  $C_3$  для сечения  $x_k$  определится как  $\Delta t_3 = t_4 - t_3 = 2x_k / a$ .

Время, когда для сечения  $x_k$  заканчивается волновое состояние  $C_4$  и начинается волновое состояние  $C_6$ , равно  $t_6$ . Из характеристики  $at + x = 2l$  (рис. 1.4.2) при  $x = x_k$  следует, что  $t_6 = (2l - x_k) / a$ . Длительность волнового состояния  $C_4$  для сечения  $x_k$  определится как  $\Delta t_4 = t_6 - t_4 = (l - 2x_k) / a$ .

Время, когда для сечения  $x_k$  заканчивается волновое состояние  $C_6$  и начинается волновое состояние  $C_7$ , равно  $t_7$ . Из характеристики  $at - x = 2l$  (рис. 1.4.2) при  $x = x_k$  следует, что  $t_7 = (2l + x_k) / a$ . Длительность волнового состояния  $C_6$  для сечения  $x_k$  определится как  $\Delta t_6 = t_7 - t_6 = 2x_k / a$ .

Время, когда для сечения  $x_k$  заканчивается волновое состояние  $C_7$  и начинается волновое состояние  $C_9$ , равно  $t_9$ . Из характеристики  $at + x = 3l$  (рис. 1.4.2) при  $x = x_k$  следует, что  $t_9 = (3l - x_k) / a$ . Длительность волнового состояния  $C_7$  для сечения  $x_k$  определится как  $\Delta t_7 = t_9 - t_7 = (l - 2x_k) / a$ .

Время, когда для сечения  $x_k$  заканчивается волновое состояние  $C_9$  и начинается волновое состояние  $C_{10}$ , равно  $t_{10}$ . Из характеристики  $at - x = 3l$  (рис. 1.4.2) при  $x = x_k$  следует, что  $t_{10} = (3l + x_k) / a$ . Длительность волнового состояния  $C_9$  для сечения  $x_k$  определится как  $\Delta t_9 = t_{10} - t_9 = 2x_k / a$ .

Время, когда для сечения  $x_k$  заканчивается волновое состояние  $C_{10}$  и начинается волновое состояние  $C_{12}$ , равно  $t_{12}$ . Из характеристики  $at + x = 4l$  (рис. 1.4.2) при  $x = x_k$  следует, что  $t_{12} = (4l - x_k) / a$ . Длительность волнового состояния  $C_{10}$  для сечения  $x_k$  определится как  $\Delta t_{10} = t_{12} - t_{10} = (l - 2x_k) / a$ .

Если построено поле волновых состояний, то для любого момента времени можно определить протяженность участков стержня, которые

охвачены тем или иным волновым состоянием. Например, для поля волновых состояний, представленного на рис. 1.4.5, в момент времени  $t_4$  волновым состоянием  $C_4$  охвачен участок стержня  $0 \leq x \leq x_k$ ; волновым состоянием  $C_3$  охвачен участок стержня  $x_k \leq x \leq x_n$ ; волновым состоянием  $C_5$  охвачен участок стержня  $x_n \leq x \leq l$ .

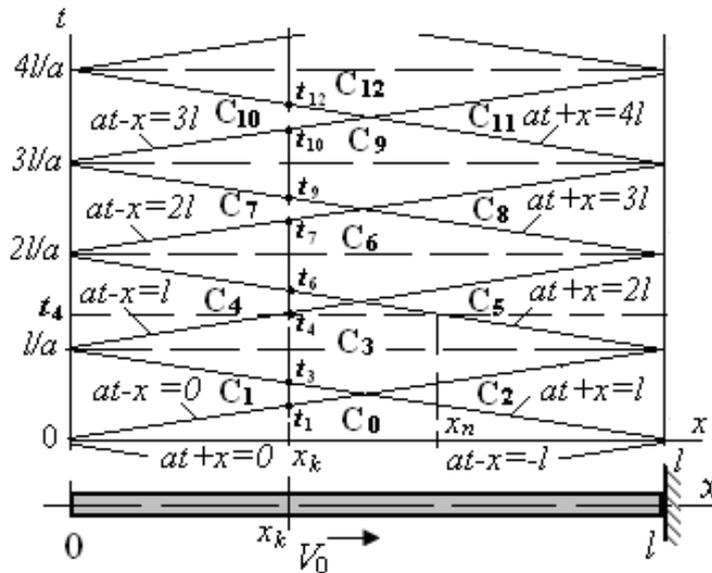


Рис. 1.4.5. Поле волновых состояний

Рассмотрим процедуру построения поля волновых состояний при ударе ступенчатого стержня о жесткую преграду. Схема соударения показана на рис. 1.4.6. Все сечения стержня движутся с одинаковой начальной скоростью  $V_0$ . Стержень не деформирован.

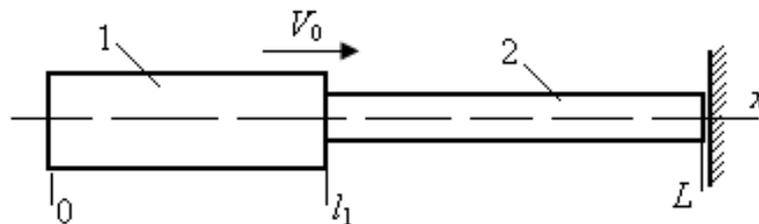


Рис. 1.4.6. Схема продольного удара ступенчатого стержня о преграду

Движение стержня описывается волновыми уравнениями

$$\frac{\partial^2 u_j(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a_j^2} \frac{\partial^2 u_j(x,t)}{\partial t^2} = 0, \quad x_{j-1} \leq x \leq x_j, \quad j=1,2, \quad (1.4.10)$$

при соответствующих начальных

$$\frac{\partial u_j(x,0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u_j(x,0)}{\partial t} = V_0, \quad j=1,2 \quad (1.4.11)$$

и граничных условиях

$$u_1(l_1, t) = u_2(l_1, t), \quad \frac{\partial u_1(0, t)}{\partial x} = 0, \quad (1.4.12)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_2(L, t)}{\partial t} = 0, \quad \text{если} \quad \frac{\partial u_2(L, t)}{\partial x} < 0, \\ \frac{\partial u_2(L, t)}{\partial x} = 0, \quad \text{если} \quad \frac{\partial u_2(L, t)}{\partial x} \geq 0, \end{aligned} \right\} \quad (1.4.13)$$

$$-E_1 \cdot A_1 \cdot \frac{\partial u_1(l_1, t)}{\partial x} + E_2 \cdot A_2 \cdot \frac{\partial u_2(l_1, t)}{\partial x} = 0, \quad (1.4.14)$$

где  $u_j(x, t)$  – перемещение поперечного сечения  $j$ -го участка стержня, положение которого определяется координатой  $x$ ;  $a_j$  – скорость распространения звука в материале  $j$ -го участка стержня;  $E_j$  – модуль упругости 1-го рода материала  $j$ -го участка стержня;  $A_j$  – площадь поперечного сечения  $j$ -го участка стержня.

Формирование прямых волн происходит в поперечных сечениях  $x = 0$  и  $x = l_1$ . Схема формирования волн представлена на рисунке 1.4.7.

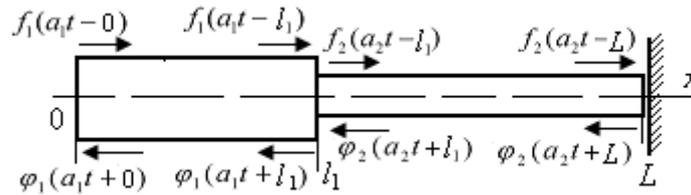


Рис. 1.4.7. Схема формирования волн в граничных сечениях стержня

В сечении  $x = 0$  формируется прямая волна  $f_1(a_1t - 0)$ , а падающей на это сечение является обратная волна  $\varphi_1(a_1t + 0)$ . В сечении  $x = l_1$  со стороны первого участка формируется обратная волна  $\varphi_1(a_1t + l_1)$ , а падающей на это сечение является прямая волна  $f_1(a_1t - l_1)$  первого участка и обратная волна  $\varphi_2(a_2t + l_1)$  второго участка.

В сечении  $x = l_1$  со стороны второго участка формируется прямая волна  $f_2(a_2t - l_1)$ , а падающей на это сечение является прямая волна  $f_1(a_1t - l_1)$  первого участка и обратная волна  $\varphi_2(a_2t + l_1)$  второго участка.

В сечении  $x = L$  формируется обратная волна  $\varphi_2(a_2t + L)$ , а падающей на это сечение является прямая волна  $f_2(a_2t - L)$ .

Формирование прямой волны  $f_1(a_1t - 0)$  в сечении  $x = 0$  и обратной волны  $\varphi_2(a_2t + L)$  в сечении  $x = L$  соответствует схемам на рисунках 1.4.3 и 1.4.4. Значения этих волн при известных параметрах падающих волн могут быть определены по формулам (1.4.8) и (1.4.9):

$$f_1'(a_1t - 0) = \varphi_1'(a_1t + 0), \quad \varphi_2'(a_2t + L) = -f_2'(a_2t - L). \quad (1.4.15)$$

Формирование прямой волны  $f_2(a_2t - l_1)$  на втором участке в сечении  $x = l_1$  и обратной волны  $\varphi_1(a_1t + l_1)$  на первом участке в сечении  $x = l_1$  может быть определено, если рассмотреть граничные условия (1.4.12) и (1.4.14):

$$u_1(l_1, t) = u_2(l_1, t), \quad -E_1 A_1 \frac{\partial u_1(l_1, t)}{\partial x} + E_2 A_2 \frac{\partial u_2(l_1, t)}{\partial x} = 0, \quad (1.4.16)$$

где  $u_1(l_1, t)$ ,  $u_2(l_1, t)$  – смещения сопряженных сечений 1-го и 2-го участков стержня;  $E_1$ ,  $E_2$  – модули упругости 1-го рода материала участков стержней;  $A_1$ ,  $A_2$  – площади поперечных сечений 1-го и 2-го участков.

Так как

$$\begin{aligned} u_1(l_1, t) &= f_1(a_1t - l_1) + \varphi_1(a_1t + l_1), & u_2(l_1, t) &= f_2(a_2t - l_1) + \varphi_2(a_2t + l_1), \\ \frac{\partial u_1(l_1, t)}{\partial x} &= -f_1'(a_1t - l_1) + \varphi_1'(a_1t + l_1), & \frac{\partial u_2(l_1, t)}{\partial x} &= -f_2'(a_2t - l_1) + \varphi_2'(a_2t + l_1), \end{aligned}$$

то из (1.4.16) следует

$$f_1(a_1t - l_1) + \varphi_1(a_1t + l_1) = f_2(a_2t - l_1) + \varphi_2(a_2t + l_1), \quad (1.4.17)$$

$$\left[ -f_1'(a_1t - l_1) + \varphi_1'(a_1t + l_1) \right] - \frac{E_2 A_2}{E_1 A_1} \left[ -f_2'(a_2t - l_1) + \varphi_2'(a_2t + l_1) \right] = 0. \quad (1.4.18)$$

После дифференцирования (1.4.17) по  $t$ , получим

$$a_1 f_1'(a_1t - l_1) + a_1 \varphi_1'(a_1t + l_1) = a_2 f_2'(a_2t - l_1) + a_2 \varphi_2'(a_2t + l_1),$$

а с учетом (1.4.18) находим

$$\varphi_1'(a_1t + l_1) = \frac{r_{12} - 1}{r_{12} + 1} \cdot f_1'(a_1t - l_1) + \frac{2a_2 / a_1}{r_{12} + 1} \varphi_2'(a_2t + l_1), \quad (1.4.19)$$

где  $r_{12} = \frac{E_1 A_1}{E_2 A_2} \cdot \frac{a_2}{a_1}$  – отношение волновых сопротивлений сопряженных участков 1 и 2.

Формируемая при этом в сечении  $x = l_1$  на втором участке прямая волна

$$f_2'(a_2t - l_1) = -\frac{E_1 A_1}{E_2 A_2} \left[ -f_1'(a_1t - l_1) + \varphi_1'(a_1t + l_1) \right] + \varphi_2'(a_2t + l_1). \quad (1.4.20)$$

При моделировании целесообразно перейти к относительным величинам, характеризующим прямые и обратные волны

$$\tilde{f}_j'(a_j t - x) = \frac{f_j'(a_j t - x)}{V_0 / a_j}, \quad \tilde{\varphi}_j'(a_j t + x) = \frac{\varphi_j'(a_j t + x)}{V_0 / a_j}, \quad j = 1, 2,$$

деформацию в сечении  $\tilde{\varepsilon}_j(x, t) = -\tilde{f}_j'(a_j t - x) + \tilde{\varphi}_j'(a_j t + x)$ ,  $j = 1, 2$ ,

и скорость сечения  $\tilde{V}_j(x, t) = \tilde{f}_j'(a_j t - x) + \tilde{\varphi}_j'(a_j t + x)$ ,  $j = 1, 2$ .

Через относительные единицы будем представлять время  $\tilde{t} = \frac{t}{L/a_j}$  и относительную длину  $\tilde{l}_j$   $j$ -го участка стержня  $\tilde{l}_j = l_j/L$ , где  $L$  – общая длина стержня.

С учетом изложенного, обратная  $\tilde{\varphi}'_1(a_1t + l_1)$  и прямая  $\tilde{f}'_2(a_2t - l_1)$  волны определяются из (1.4.19) и (1.4.20):

$$\tilde{\varphi}'_1(a_1t + l_1) = \frac{r_{1,2} - 1}{r_{1,2} + 1} \tilde{f}'_1(a_1t - l_1) + \frac{2}{r_{1,2} + 1} \tilde{\varphi}'_2(a_2t + l_1), \quad (1.4.21)$$

$$\tilde{f}'_2(a_2t - l_1) = \frac{2r_{1,2}}{r_{1,2} + 1} \tilde{f}'_1(a_1t - l_1) + \frac{1 - r_{1,2}}{1 + r_{1,2}} \tilde{\varphi}'_2(a_2t + l_1),$$

где

$$\tilde{\varphi}'_1(a_1t + l_1) = \frac{\varphi'_1(a_1t + l_1)}{V_0/a_1}, \quad \tilde{\varphi}'_2(a_2t + l_1) = \frac{\varphi'_2(a_2t + l_1)}{V_0/a_2},$$

$$\tilde{f}'_1(a_1t - l_1) = \frac{f'_1(a_1t - l_1)}{a_1}, \quad \tilde{f}'_2(a_2t - l_1) = \frac{f'_2(a_2t - l_1)}{a_2}.$$

Поле волновых состояний при продольном ударе ступенчатого стержня о жесткую преграду представлено на рисунке 1.4.8.

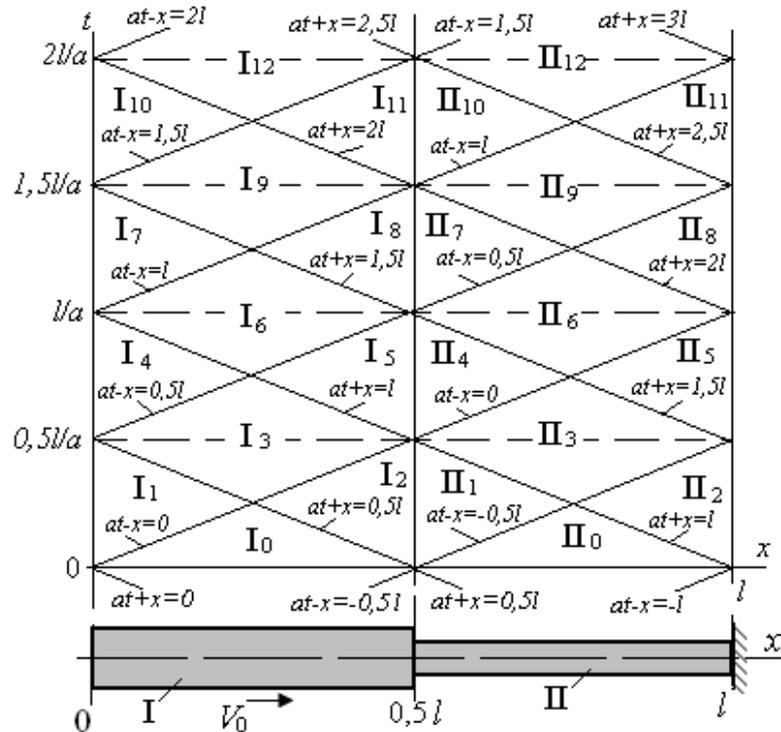


Рис. 1.4.8. Поле волновых состояний при продольном ударе ступенчатого стержня

Волновые состояния первого участка стержня обозначены как  $I_0, I_1, I_2, \dots, I_{11}, I_{12}$ . Волновые состояния второго участка стержня обозначены как  $II_0, II_1, II_2, \dots, II_{11}, II_{12}$ .

Для первого участка стержня область  $\mathbf{I}_0$  охвачена начальными прямой и обратной волнами с характеристиками  $at - x = -0,5l$  и  $at + x = 0$ . Область  $\mathbf{I}_1$  охвачена прямой и обратной волнами с характеристиками  $at - x = 0$  и  $at + x = 0$ . Область  $\mathbf{I}_2$  охвачена прямой и обратной волнами с характеристиками  $at - x = -0,5l$  и  $at + x = 0,5l$ . Область  $\mathbf{I}_3$  охвачена прямой и обратной волнами с характеристиками  $at - x = 0$  и  $at + x = 0,5l$ . Область  $\mathbf{I}_4$  охвачена прямой и обратной волнами с характеристиками  $at - x = 0,5l$  и  $at + x = 0,5l$ , и так далее.

Для второго участка стержня область  $\mathbf{II}_0$  охвачена начальными прямой и обратной волнами с характеристиками  $at - x = -l$  и  $at + x = 0,5l$ . Область  $\mathbf{II}_1$  охвачена прямой и обратной волнами с характеристиками  $at - x = -0,5l$  и  $at + x = 0,5l$ . Область  $\mathbf{II}_2$  охвачена прямой и обратной волнами с характеристиками  $at - x = -l$  и  $at + x = l$ . Область  $\mathbf{II}_3$  охвачена прямой и обратной волнами с характеристиками  $at - x = -0,5l$  и  $at + x = l$ . Область  $\mathbf{II}_4$  охвачена прямой и обратной волнами с характеристиками  $at - x = 0$  и  $at + x = l$ , и так далее.

Обозначим прямые волны первого участка с характеристиками  $at - x = -0,5l$ ,  $at - x = 0$ ,  $at - x = 0,5l$ ,  $at - x = l$ ,  $at - x = 1,5l$ ,  $at - x = 2l$  соответственно как  $f_1(-0,5l)$ ,  $f_1(0)$ ,  $f_1(0,5l)$ ,  $f_1(l)$ ,  $f_1(1,5l)$  и  $f_1(2l)$ .

Обозначим обратные волны первого участка с характеристиками  $at + x = 0$ ,  $at + x = 0,5l$ ,  $at + x = l$ ,  $at + x = 1,5l$ ,  $at + x = 2l$ ,  $at + x = 2,5l$  соответственно как  $\varphi_1(0)$ ,  $\varphi_1(0,5l)$ ,  $\varphi_1(l)$ ,  $\varphi_1(1,5l)$ ,  $\varphi_1(2l)$  и  $\varphi_1(2,5l)$ .

Обозначим прямые волны второго участка с характеристиками  $at - x = -l$ ,  $at - x = -0,5l$ ,  $at - x = 0$ ,  $at - x = 0,5l$ ,  $at - x = l$ ,  $at - x = 1,5l$  соответственно как  $f_2(-l)$ ,  $f_2(-0,5l)$ ,  $f_2(0)$ ,  $f_2(0,5l)$ ,  $f_2(l)$  и  $f_2(1,5l)$ .

Обозначим обратные волны второго участка с характеристиками  $at + x = 0,5l$ ,  $at + x = l$ ,  $at + x = 1,5l$ ,  $at + x = 2l$ ,  $at + x = 2,5l$ ,  $at + x = 3l$  соответственно как  $\varphi_2(0,5l)$ ,  $\varphi_2(l)$ ,  $\varphi_2(1,5l)$ ,  $\varphi_2(2l)$ ,  $\varphi_2(2,5l)$  и  $\varphi_2(3l)$ .

Тогда для первого участка стержня область  $\mathbf{I}_0$  охвачена начальными прямой  $f_1(-0,5l)$  и обратной  $\varphi_1(0)$  волнами. Область  $\mathbf{I}_1$  охвачена прямой  $f_1(0)$  и обратной  $\varphi_1(0)$  волнами. Область  $\mathbf{I}_2$  охвачена прямой  $f_1(-0,5l)$  и обратной  $\varphi_1(0,5l)$  волнами. Область  $\mathbf{I}_3$  охвачена прямой  $f_1(0)$  и обратной  $\varphi_1(0,5l)$  волнами. Область  $\mathbf{I}_4$  охвачена прямой  $f_1(0,5l)$  и обратной  $\varphi_1(0,5l)$  волнами, и так далее.

Аналогично для второго участка стержня область  $\mathbf{II}_0$  охвачена начальными прямой  $f_2(-l)$  и обратной  $\varphi_2(0,5l)$  волнами. Область  $\mathbf{II}_1$  охвачена прямой  $f_2(-0,5l)$  и обратной  $\varphi_2(0,5l)$  волнами. Область  $\mathbf{II}_2$  охвачена прямой  $f_2(-l)$  и обратной  $\varphi_2(l)$  волнами. Область  $\mathbf{II}_3$  охвачена

прямой  $f_2(-0,5l)$  и обратной  $\varphi_2(l)$  волнами. Область  $\Pi_4$  охвачена прямой  $f_2(0)$  и обратной  $\varphi_2(l)$  волнами, и так далее.

Определяя значения прямых и обратных волн на участках стержня с соответствующими аргументами, можно производит расчет напряженно-деформированного состояния поперечных сечений для соответствующих областей поля волновых состояний, скорости поперечных сечений.

Скорость сечений и деформация определяется из зависимостей

$$V(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = af'(at-x) + a\varphi'(at+x), \quad (1.4.22)$$

$$\varepsilon(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = -f'(at-x) + \varphi'(at+x). \quad (1.4.23)$$

Из уравнений (1.4.22), (1.4.23) и начальных условий (1.4.11) можно определить начальные значения функций  $f'_j(a_j t_0 - x)$  и  $\varphi'_j(a_j t_0 + x)$ .

Дальнейшие значения прямых и обратных волн определяются из условий преобразования этих волн на границах стержневой системы.

Для сложных стержневых систем с большим количеством разнородных участков построение поля состояний вручную достаточно трудоемко и требует больших затрат времени. В этой связи было осуществлено компьютерное моделирование поля волновых состояний.

Преимущество модели заключается в возможности оперативно получать информацию о любой точке поля состояний. Кроме того, модель позволяет определять длительность пребывания какого-либо сечения стержня в данном состоянии. Также можно определить участки стержня, испытывающие данное волновое состояние.

На рисунке 1.4.9 показано изображение построенного поля состояний на мониторе. Поле состояний построено для случая столкновения о жесткую преграду ступенчатого стержня.

Параметры стержня: соотношение площадей ступеней  $A_1/A_2 = 2$ , соотношение модулей упругости  $E_1/E_2 = 1$ , соотношение скоростей распространения волн в материале  $a_1/a_2 = 1$ , соотношение длин ступеней  $l_1/l_2 = 1$ .

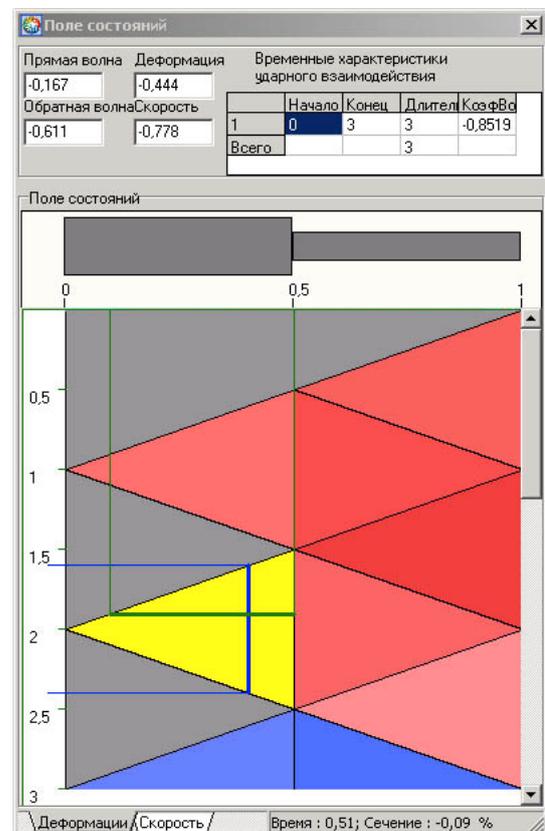


Рис. 1.4.9. Модель поля состояний

Поле состояний разбивается на области, точкам внутри которых соответствуют одинаковые деформации сечений. Различной величине деформации соответствует цвет области. Чем больше величина деформации, тем насыщеннее цвет.

Используя манипулятор «мышь» и щелкнув на выбранной области, можно ее активировать. Область примет другой цвет. В выбранной области горизонтальной линией обозначен отрезок, соответствующий участку стержня, сечения которого, находятся в данном состоянии. Вертикальной линией обозначен интервал времени, в течение которого выбранное сечение находится в данном состоянии. На экране появляется информационное окно, в котором отображаются численные значения прямых и обратных волн, деформации и скорости сечений в течение ударного взаимодействия, координата выбранного сечения и данный момент времени.

### Моделирование волновых процессов при продольном ударе однородного стержня о жесткую преграду

Рассмотрим продольный упругий удар однородного стержня о жесткую преграду (рис. 1.4.10).

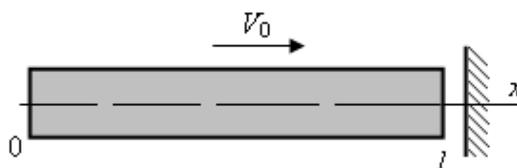


Рис. 1.4.10. Схема продольного удара стержня

Движение сечений стержня описывается волновым уравнением

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0,$$

с начальными и граничными условиями:

$$\frac{\partial u(x,t_0)}{\partial t} = V_0, \quad \frac{\partial u(x,t_0)}{\partial x} = 0, \quad (1.4.24)$$

где  $\frac{\partial u(x,t_0)}{\partial t}$  и  $\frac{\partial u(x,t_0)}{\partial x}$  – скорость поперечных сечений и продольная

деформация в поперечных сечениях стержня в начальный момент времени;  $V_0$  – предупредная скорость стержня;  $x$  – координата сечения,  $a$  – скорость звука в материале стержня;  $t$  – время.

Начальные значения функций прямой и обратной волн определяются из начальных условий (1.4.24):

$$\begin{aligned} af'(at-x) + a\varphi'(at+x) &= V_0, & 0 \leq x \leq l, \\ -f'(at-x) + \varphi'(at+x) &= 0, & 0 \leq x \leq l, \end{aligned} \quad (1.4.25)$$

откуда следует, что

$$f'(at - x) = 0,5 \frac{V_0}{a}, \quad \varphi'(at + x) = 0,5 \frac{V_0}{a}. \quad (1.4.26)$$

Введем относительные величины, характеризующие производные функций прямых и обратных волн:

$$\tilde{f}'(at - x) = f'(at - x) / \frac{V_0}{a}; \quad \tilde{\varphi}'(at + x) = \varphi'(at + x) / \frac{V_0}{a}.$$

Относительная продольная деформация в сечении и скорость этого сечения соответственно равны:

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}(x, t) &= -\tilde{f}'(at - x) + \tilde{\varphi}'(at + x), \\ \tilde{v}(x, t) &= \tilde{f}'(at - x) + \tilde{\varphi}'(at + x). \end{aligned}$$

### Результаты моделирования

Перед нанесением удара начальные значения  $\tilde{f}'(at_0 - x) = 0,5$ ;  $\tilde{\varphi}'(at_0 + x) = 0,5$  (рис. 1.4.11). Относительная продольная деформация в сечениях стержня при  $t_0 = 0$  равна  $\tilde{\varepsilon}(x, t_0) = 0$ , а относительная скорость всех сечений равна  $\tilde{v}(x, t_0) = 1$ .

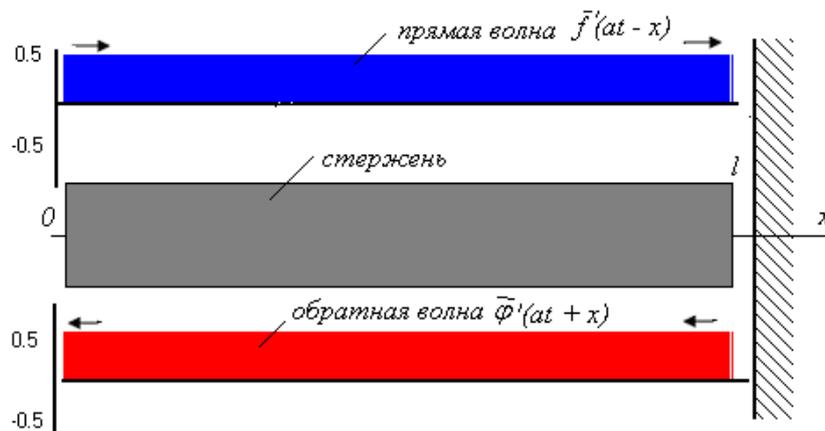


Рис. 1.4.11. Схема стержня и диаграммы волн в момент нанесения удара по преграде

На интервале времени  $0 \leq t \leq l/a$  на сечение  $\tilde{x} = l$  ( $x = l$ ) действует прямая волна  $\tilde{f}'(at - l) = 0,5$  и формируется в этом сечении обратная волна  $\tilde{\varphi}'(at + l) = -0,5$ .

В этот период продольная деформация в сечении  $\tilde{x} = l$  продольная деформация  $\frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = -\frac{V_0}{a}$ , а ее относительное значение  $\tilde{\varepsilon}(l, t) = -1$ .

На рисунках 1.4.12 и 1.4.13 представлены диаграммы прямой и обратной волн на интервале времени  $0 < t < l/a$ .

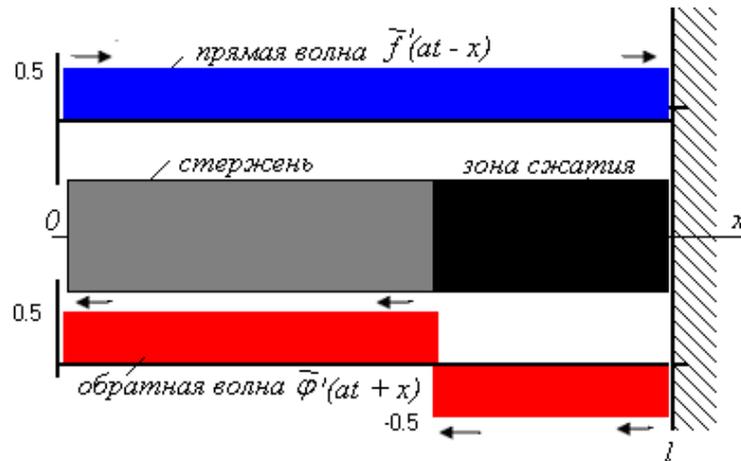


Рис. 1.4.12. Схема стержня, диаграммы прямой и обратной волн на интервале времени  $0 < t < l/a$  при  $t = 0,4l/a$

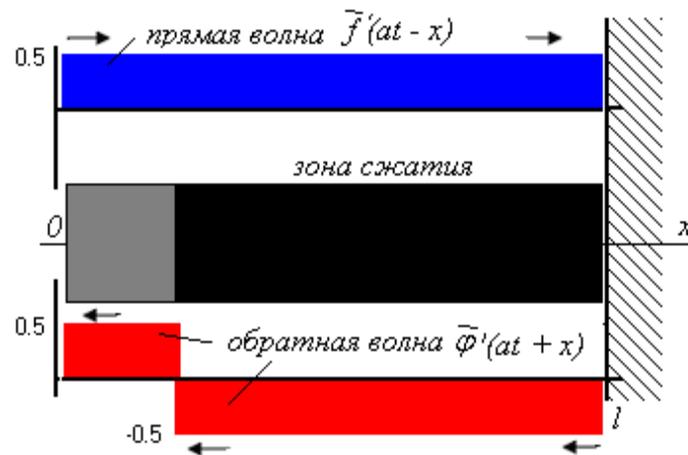


Рис. 1.4.13. Схема стержня, диаграммы прямой и обратной волн на интервале времени  $0 < t < l/a$  при  $t = 0,8l/a$

Диаграммы прямых и обратных волн автоматически строятся и воспроизводятся на мониторе компьютера в процессе моделирования. Реализуется анимационный режим формирования и распространения прямых и обратных волн.

Затемненный участок стержня охвачен прямой волной  $\tilde{f}'(at-x) = 0,5$  и обратной волной  $\tilde{\varphi}'(at+x) = -0,5$ . Скорость сечений в этой зоне равна  $\tilde{v}(x,t) = 0$ , а относительная продольная деформация в этой зоне равна  $\tilde{\varepsilon}(x,t) = -1$  (зона сжатия).

На интервале времени  $0 \leq t \leq l/a$  на сечение  $x = 0$  действует обратная волна  $\tilde{\varphi}'(at+0) = 0,5$  и формируется в этом сечении прямая волна  $\tilde{f}'(at-0) = 0,5$  (рис. 1.4.12 и 1.4.13).

На интервале времени  $l/a \leq t \leq 2l/a$  на сечение  $x = 0$  действует обратная волна  $\tilde{\varphi}'(at+0) = -0,5$  и формируется в этом сечении прямая

волна  $\tilde{f}'(at - 0) = -0,5$ . На рисунке 1.4.14 представлена начальная фаза формирования прямой волны  $\tilde{f}'(at - 0) = -0,5$  в сечении  $x = 0$ .

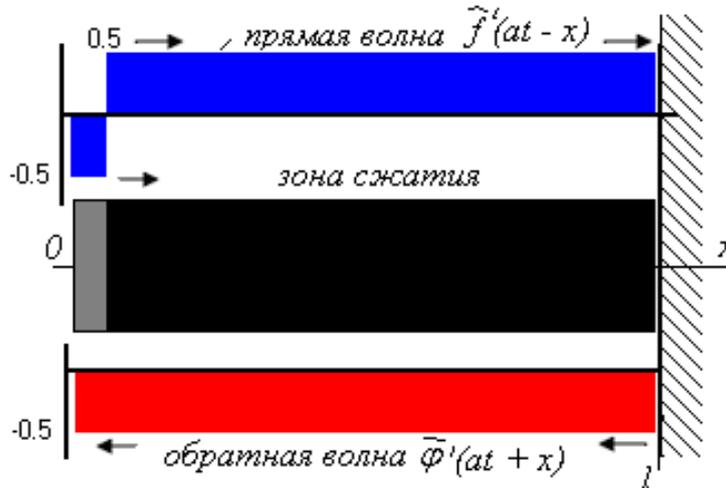


Рис. 1.4.14. Схема стержня, диаграммы прямой и обратной волн на интервале времени  $l/a \leq t \leq 2l/a$  при  $t = 1,1l/a$

В этот момент на участке стержня (более светлый участок стержня на рис. 1.4.14), где  $\tilde{f}'(at - x) = -0,5$  и  $\bar{\varphi}'(at + x) = -0,5$ , поперечные сечения приобретают скорость  $\tilde{v}(x, t) = -1$ .

Относительная продольная деформация в поперечных сечениях на этом участке  $\tilde{\varepsilon}(x, t) = 0$  (более светлый участок стержня на рис. 1.4.14).

По мере того как волна  $\tilde{f}'(at - x) = -0,5$  приближается к жесткой преграде (рис. 1.4.15), состоянием  $\tilde{v}(x, t) = -1$  и  $\tilde{\varepsilon}(x, t) = 0$  будет охвачен уже значительный участок стержня.

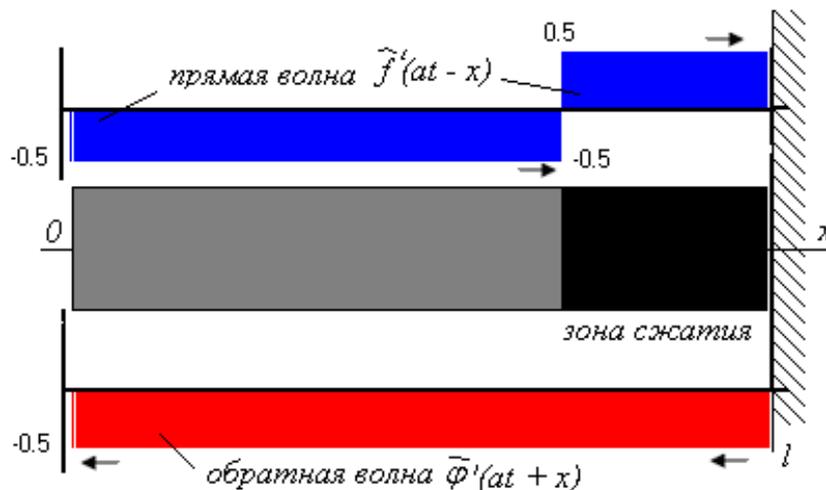


Рис. 1.4.15. Схема стержня, диаграммы прямой и обратной волн на интервале времени  $l/a \leq t \leq 2l/a$  при  $t = 1,7l/a$

В момент времени  $t = 2l / a$  прямая волна и обратная волна имеют во всех сечениях следующие значения (рис. 1.4.16):

$$\tilde{f}'(at - x) = -0,5; \quad \tilde{\varphi}'(at + x) = -0,5; \quad \tilde{v}(x, t) = -1 \text{ и } \tilde{\varepsilon}(x, t) = 0.$$

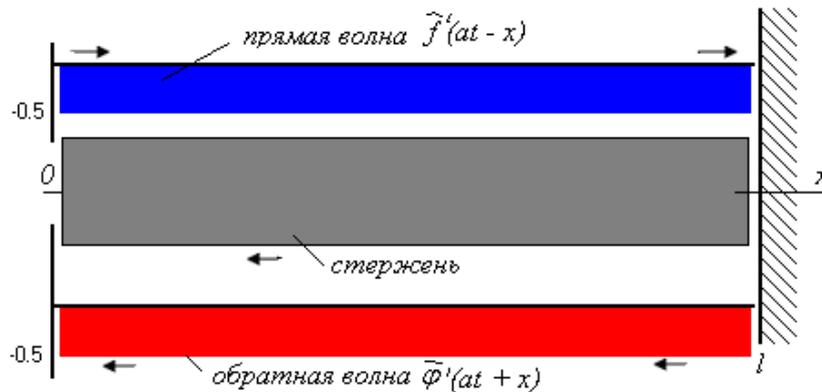


Рис. 1.4.16. Схема стержня, диаграммы прямой и обратной волн при  $t = 2l / a$

Скорость всех сечений стержня, определяемая как

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a[f'(at - x) + \tilde{\varphi}'(at + x)],$$

становится равной  $\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = -V_0$  и при неудерживающей связи в сечении  $\tilde{x} = l$  стержень отрывается от жесткой преграды (процесс удара завершен).

### Моделирование волновых процессов при продольном ударе ступенчатого стержня о жесткую преграду

Рассмотрена модель удара ступенчатого стержня, движущегося со скоростью  $V_0$ , о жесткую преграду (рис. 1.4.17).

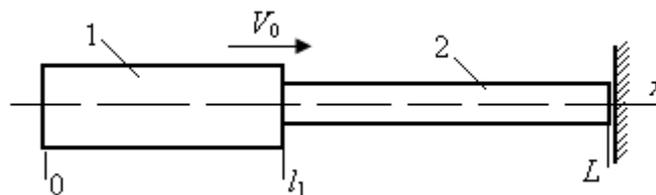


Рис. 1.4.17. Схема продольного удара ступенчатого стержня о преграду

Движение стержня описывается волновыми уравнениями

$$\frac{\partial^2 u_j(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a_j^2} \frac{\partial^2 u_j(x, t)}{\partial t^2} = 0, \quad x_{j-1} \leq x \leq x_j, \quad j = 1, 2,$$

при соответствующих начальных  $\frac{\partial u_j(x, 0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u_j(x, 0)}{\partial t} = V_0, \quad j = 1, 2$

и граничных условиях  $u_1(l_1, t) = u_2(l_1, t), \quad \frac{\partial u_1(x_0, t)}{\partial x} = 0,$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_2(L,t)}{\partial t} = 0, \text{ если } \frac{\partial u_2(L,t)}{\partial x} < 0, \\ \frac{\partial u_2(L,t)}{\partial x} = 0, \text{ если } \frac{\partial u_2(L,t)}{\partial x} \geq 0, \end{aligned} \right\}$$

$$-E_1 \cdot A_1 \cdot \frac{\partial u_1(l_1,t)}{\partial x} + E_2 \cdot A_2 \cdot \frac{\partial u_2(l_1,t)}{\partial x} = 0,$$

где  $u_j(x,t)$  – перемещение поперечного сечения  $j$ -го участка стержня, положение которого определяется координатой  $x$ ;  $a_j$  – скорость распространения звука в материале  $j$ -го участка стержня;  $E_j$  – модуль упругости 1-го рода материала  $j$ -го участка стержня;  $A_j$  – площадь поперечного сечения  $j$ -го участка стержня.

Величина относительной продольной деформации в произвольном сечении  $j$ -го участка стержня равна

$$\frac{\partial u_j(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} [f_j(a_j t - x) + \varphi_j(a_j t + x)] = -f_j'(a_j t - x) + \varphi_j'(a_j t + x).$$

Скорости сечений могут быть определены как

$$\frac{\partial u_j(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} [f_j(a_j t - x) + \varphi_j(a_j t + x)] = a_j [f_j'(a_j t - x) + \varphi_j'(a_j t + x)].$$

Начальные значения функций определяются из начальных условий:

$$\begin{aligned} a_j f_j'(a_j t_0 - x) + a_j \varphi_j'(a_j t_0 + x) &= V_0, \\ -f_j'(a_j t - x) + \varphi_j'(a_j t + x) &= 0, \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$f_j'(a_j t - x) = 0,5 \frac{V_0}{a_j}, \quad \varphi_j'(a_j t + x) = 0,5 \frac{V_0}{a_j}.$$

Рассмотрим результаты моделирования продольного удара стержня, состоящего из двух однородных участков ( $E_1 = E_2$ ,  $l_1 = l_2$ ,  $a_1 = a_2 = a$ ).

Соотношение площадей  $A_1/A_2 = 2$ , соотношение модулей упругости  $E_1/E_2 = 1$ , соотношение скоростей распространения волн в материале  $a_1/a_2 = 1$ , соотношение длин ступеней  $l_1/l_2 = 1$ .

Двухступенчатый стержень до момента времени  $t = 0$  (рис. 1.4.18) движется в сторону преграды со скоростью  $V_0$ . При этом, как было показано ранее, прямые волны и обратные волны во всем стержне равны 0,5 (в относительных единицах). Продольная деформация в поперечных сечениях стержня  $\tilde{\varepsilon}_j(x,t) = -\tilde{f}_j'(a_j t - x) + \tilde{\varphi}_j'(a_j t + x) = 0$ .

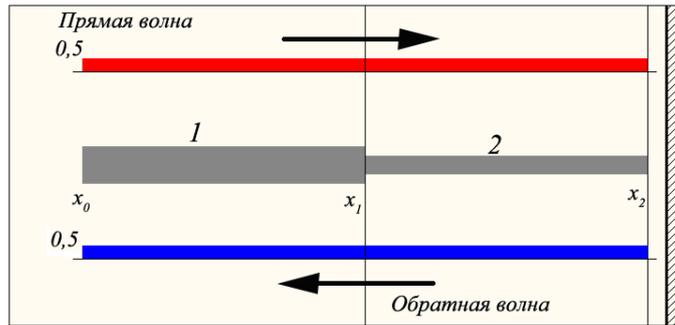


Рис. 1.4.18. Диаграммы прямых и обратных волн в стержне при  $t < 0$

Диаграммы прямых волн показаны в верхней части рисунка, над стержнем, диаграммы обратных волн – в нижней части рисунка, под стержнем. Стрелками показано распространение прямых и обратных волн.

В момент времени  $t_0 = 0$  правый торец стержня достигает преграды, в результате чего меняются граничные условия и в сечении  $x_2 = L$  формируется обратная волна  $\tilde{\varphi}'_2(at_0 + L) = -0,5$ , которая распространяется со скоростью  $a$  от сечения  $x_2 = L$  к сечению  $x_1 = l_1$ .

На рисунке 1.4.19 показано состояние стержня для момента времени  $\tilde{t} = 0,8$  ( $0 < t < l/2a$ ). Сечения 2-го участка стержня, охваченные обратной волной  $\varphi'_2(at + x) = -0,5$ , испытывают деформации сжатия  $\tilde{\varepsilon}_2 = -1$  (на рис. 1.4.19 – затемненная часть стержня).

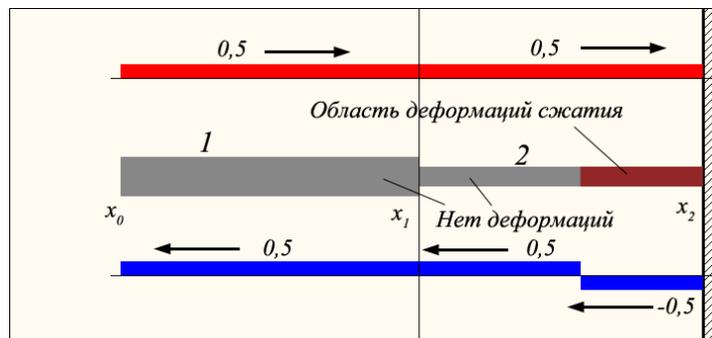


Рис. 1.4.19. Диаграммы прямых и обратных волн в стержне на интервале  $0 < t < L/2a$ ,  $\tilde{t} = 0,2$

К моменту времени  $t = L/2a$  обратная волна, сформированная в сечении  $x_2$ , достигнет границы сопряжения 1-го и 2-го участков стержня. При этом весь участок 2 стержня будет испытывать деформации сжатия  $\tilde{\varepsilon}_2 = -1$ . Также в этот момент в сечении  $x_1$ , будут формироваться прямая  $\tilde{f}'_2(at - x_1) = 0,83$  и обратная  $\tilde{\varphi}'_1(at + x_1) = -0,167$  волны, которые будут распространяться по 2-му и 1-му участкам соответственно.

Диаграммы прямых и обратных волн в стержне показаны на рисунке 1.4.20. Стержень изображен в момент времени  $L/2a < t < L/a$ . Сечения участка 1 стержня, охваченные обратной волной  $\tilde{\varphi}'_1(at + x) = -0,167$ ,

испытывают деформации сжатия  $\tilde{\varepsilon}_1 = -0,667$ . Сечения участка 2 стержня, охваченные прямой волной  $\tilde{f}'_2(at - x) = 0,83$ , также испытывают деформации сжатия  $\tilde{\varepsilon}_2 = -1,33$ .

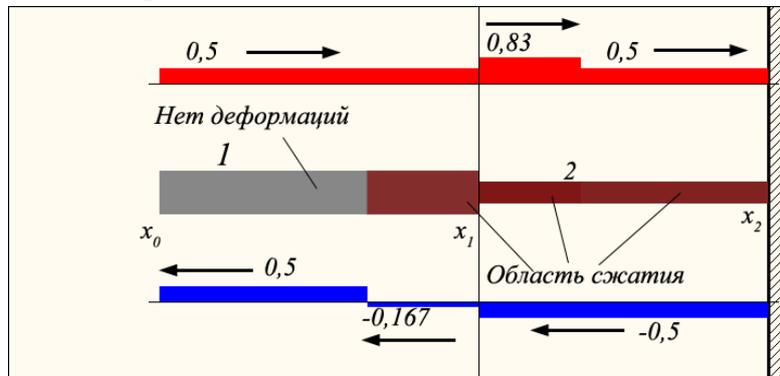


Рис. 1.4.20. Диаграммы прямых и обратных волн в стержне на интервале  $L/2a < t < L/a$ ,  $\tilde{t} = 0,7$

При достижении волнами границ стержня  $x_0 = 0$  и  $x_2 = L$  к моменту времени  $t = L/a$  все участки стержня будут испытывать деформации сжатия  $\tilde{\varepsilon}_1 = -0,667$  и  $\tilde{\varepsilon}_2 = -1,33$  соответственно для 1-го и 2-го участков стержня. На первом участке в сечении  $x_0$  формируется прямая волна  $\tilde{f}'_1(at - 0) = -0,167$ , распространяющаяся к сечению  $x_1$ . На втором участке в сечении  $x_2$  формируется обратная волна  $\tilde{\varphi}'_2(at + x_2) = -0,833$ , распространяющаяся к сечению  $x_1$ .

На рисунке 1.4.21 показано состояние стержня в момент времени  $\frac{L}{a} < t < \frac{3L}{2a}$ . Сечения участка 1, охваченные прямой волной  $\tilde{f}'_1(at - x) = -0,167$ , не испытывают деформаций. Сечения участка 2, охваченные обратной волной  $\tilde{\varphi}'_2(at + x_2) = -0,833$ , испытывают деформации сжатия  $\tilde{\varepsilon}_2 = -1,67$ .

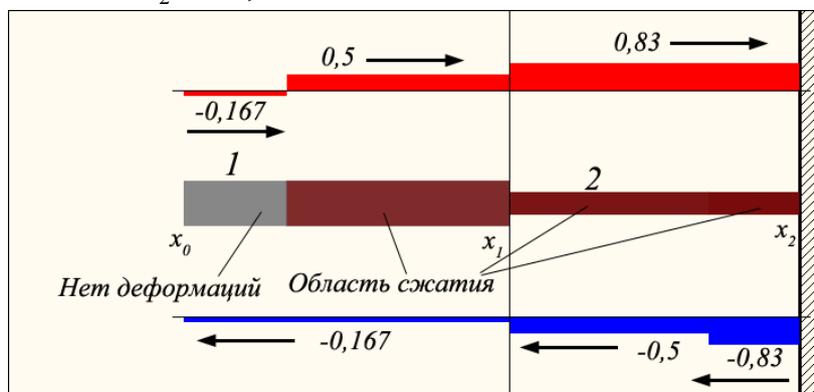


Рис. 1.4.21. Диаграммы прямых и обратных волн в стержне на интервале  $0 < t < 3L/2a$ ,  $\tilde{t} = 1,2$

К моменту времени  $t = 3L/2a$  обратная волна, сформированная в сечении  $x_2$ , достигнет границы сопряжения 1-го и 2-го участков стержня, также этой границы достигнет прямая волна, сформированная в сечении  $x_0$ . При этом весь участок 2 стержня будет испытывать деформации сжатия  $\tilde{\varepsilon}_2 = -1,67$ . В сечении  $x_1$ , будут формироваться прямая  $\tilde{f}'_2(at - x_1) = 0,055$  и обратная  $\tilde{\varphi}'_1(at + x_1) = -0,611$  волны, которые будут распространяться по 2-му и 1-му участкам соответственно.

Процесс распространения волн при  $3L/2a < t < 2L/a$  показан на рисунке 1.4.22. Сечения участка 1 стержня, охваченные обратной волной  $\tilde{\varphi}'_1(at - x) = -0,611$ , испытывают деформации сжатия  $\tilde{\varepsilon}_1 = -0,444$ . Сечения участка 2 стержня, охваченные прямой волной  $\tilde{f}'_2(at - x) = 0,055$ , также испытывают деформации сжатия  $\tilde{\varepsilon}_2 = -0,889$ .

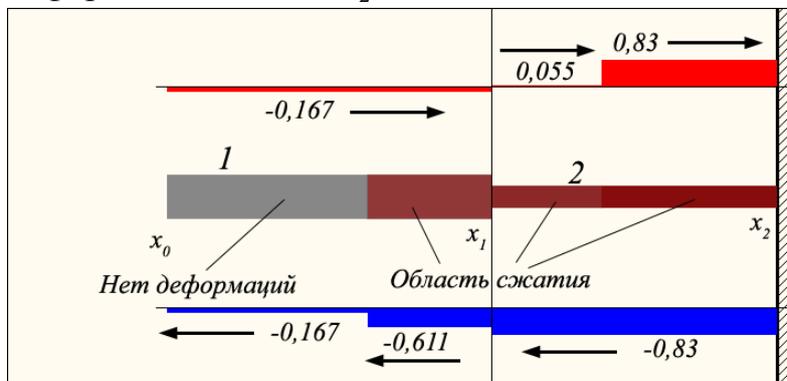


Рис. 1.4.22. Диаграммы прямых и обратных волн в стержне на интервале  $3L/2a < t < 2L/a$ ,  $\tilde{t} = 1,7$

После того как в момент времени  $t = 2L/a$  в сечении  $x_0$  сформируется прямая волна  $\tilde{f}'_1(at - x_0) = -0,611$ , а в сечении  $x_2$  сформируется обратная волна  $\tilde{\varphi}'_2(at + x_2) = -0,055$ , деформации в сечениях, охваченных этими волнами, будут соответственно  $\tilde{\varepsilon}_1 = 0$  и  $\tilde{\varepsilon}_2 = -0,11$ . Это состояние стержня показано на рис. 1.4.23.

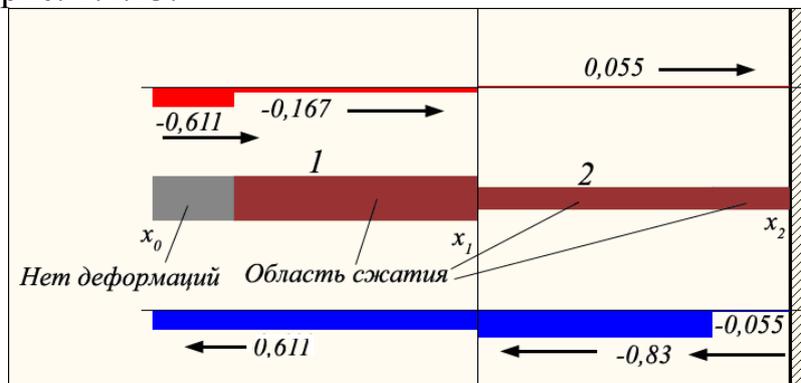


Рис. 1.4.23. Диаграммы прямых и обратных волн в стержне на интервале  $2L/a < t < 5L/2a$ ,  $\tilde{t} = 2,15$

В момент времени  $t = 2,5L / a$  в граничном сечении  $x_1$  сформируются прямая  $\tilde{f}'_2(at - x_1) = -0,796$  и обратная  $\tilde{\varphi}'_1(at + x_1) = -0,241$  волны. Состояние стержня при  $5L / 2a < t < 3L / a$  изображено на рисунке 1.4.24.

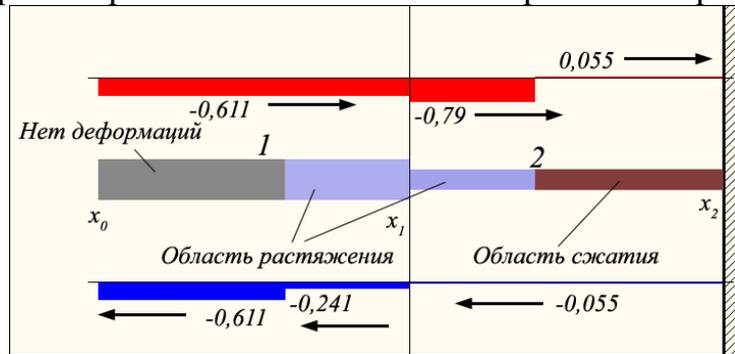


Рис. 1.4.24. Диаграммы прямых и обратных волн в стержне на интервале  $5L / 2a < t < 3L / a$ ,  $\tilde{t} = 2,7$

Сечения участка 1 стержня, охваченные обратной волной  $\tilde{\varphi}'_1(at + x) = -0,241$ , испытывают деформации растяжения  $\tilde{\varepsilon}_1 = 0,37$ . Сечения участка 2 стержня, охваченные прямой волной  $\tilde{f}'_2(at - x) = -0,796$ , также испытывают деформации растяжения  $\tilde{\varepsilon}_2 = 0,741$ .

Таким образом, к ударному сечению  $x_2$  распространяется волна деформации растяжения. В момент времени  $t = 3L / a$ , когда  $\tilde{f}'_2(at - x_2) = -0,796$ ,  $\tilde{\varphi}'_2(at + x_2) = -0,055$ , а деформация соответственно  $\tilde{\varepsilon}_2 = 0,741$ , происходит отрыв стержня от преграды, и удар заканчивается.

Диаграммы прямых и обратных волн в стержне при  $t = 3L / a$  приведены на рисунке 1.4.25.

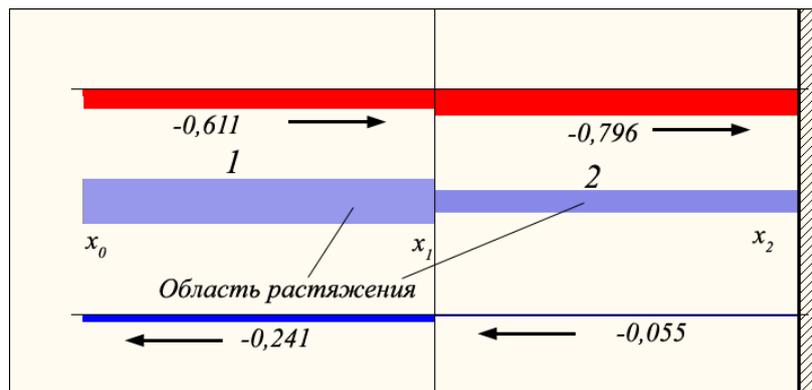


Рис. 1.4.25. Диаграммы прямых и обратных волн в стержне при  $t = 3L / a$

Программно построено поле состояний сечений стержня в системе координат  $\tilde{t} - x$ , изображенное на рис. 1.4.26. Относительной единицей времени считаем величину  $L / a$ , где  $L$  – длина всего стержня,  $a$  – скорость распространения волн в материале стержня.

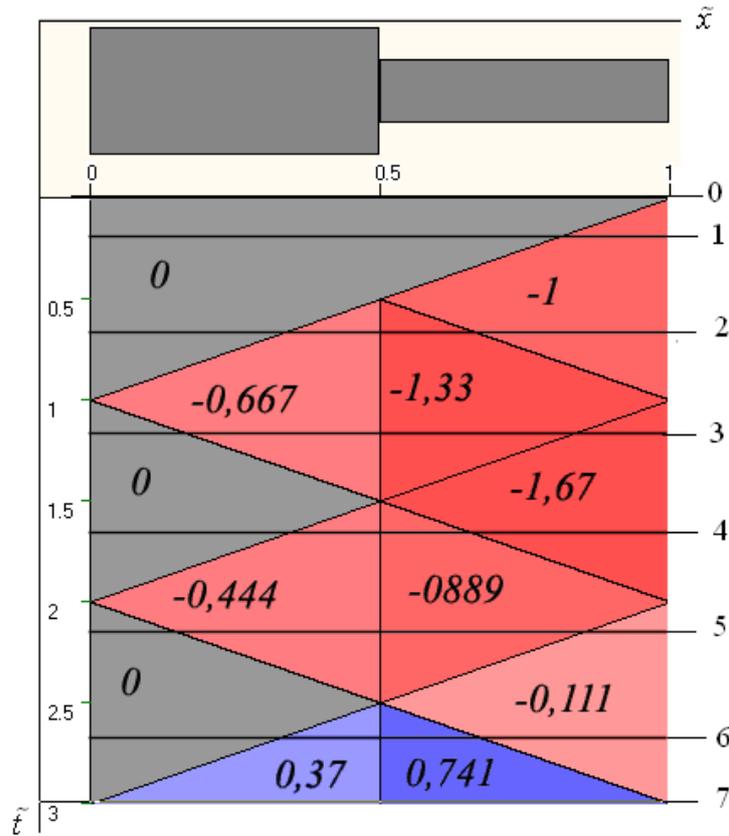


Рис. 1.4.26. Поле состояний сечений стержня

На рисунке 1.4.26 горизонтальные линии 1, 2, ..., 7 пересекают области волновых состояний сечений стержня, соответствующие рисункам 1.4.18 – 1.4.25. Диагональными и вертикальными линиями поле разбито на области, соответствующие разным значениям продольной деформации в поперечных сечениях стержня.

Горизонтальная линия 0 касается только области начального волнового состояния (рис. 1.4.18). Продольная деформация в поперечных сечениях стержня  $\tilde{\varepsilon}_j(x, t) = -\tilde{f}'_j(a_j t - x) + \tilde{\varphi}'_j(a_j t + x) = -0,5 + 0,5 = 0$ .

Горизонтальная линия 1 пересекает области волновых состояний, для которых продольные деформации в поперечных сечениях соответственно равны  $\tilde{\varepsilon}_j(x, t) = 0$  ( $0 \leq \tilde{x} \leq 0,8$ ) и  $\tilde{\varepsilon}_j(x, t) = -1$  ( $0,8 \leq \tilde{x} \leq 1$ ). Ось времени  $\tilde{t}$  линия 1 пересекает при  $\tilde{t} = 0,2$ . Диаграммы прямых и обратных волн в этот момент времени представлены на рисунке 1.4.19.

Горизонтальная линия 2 пересекает области волновых состояний, для которых продольные деформации в поперечных сечениях соответственно равны на первом участке  $\tilde{\varepsilon}_1(x, t) = 0$  ( $0 \leq \tilde{x} \leq 0,3$ ),  $\tilde{\varepsilon}_1(x, t) = -0,667$  ( $0,3 \leq \tilde{x} \leq 0,5$ ); на втором участке  $\tilde{\varepsilon}_2(x, t) = -1,33$  ( $0,5 \leq \tilde{x} \leq 0,7$ ) и  $\tilde{\varepsilon}_2(x, t) = -1$  ( $0,7 \leq \tilde{x} \leq 1$ ). Ось времени  $\tilde{t}$  линия 2 пересекает при  $\tilde{t} = 0,7$ . Диаграммы прямых и обратных волн в этот момент времени представлены на рисунке 1.4.20.

Горизонтальная линия 3 пересекает области волновых состояний, для которых продольные деформации в поперечных сечениях соответственно равны на первом участке  $\tilde{\varepsilon}_1(x,t) = 0$  ( $0 \leq \tilde{x} \leq 0,2$ ),  $\tilde{\varepsilon}_1(x,t) = -0,667$  ( $0,2 \leq \tilde{x} \leq 0,5$ ); на втором участке  $\tilde{\varepsilon}_2(x,t) = -1,33$  ( $0,5 \leq \tilde{x} \leq 0,8$ ) и  $\tilde{\varepsilon}_2(x,t) = -1,67$  ( $0,8 \leq \tilde{x} \leq 1$ ). Ось времени  $\tilde{t}$  линия 3 пересекает при  $\tilde{t} = 1,2$ . Диаграммы прямых и обратных волн в этот момент времени представлены на рисунке 1.4.21.

Горизонтальная линия 4 пересекает области волновых состояний, для которых продольные деформации в поперечных сечениях соответственно равны на первом участке  $\tilde{\varepsilon}_1(x,t) = 0$  ( $0 \leq \tilde{x} \leq 0,3$ ),  $\tilde{\varepsilon}_1(x,t) = -0,444$  ( $0,3 \leq \tilde{x} \leq 0,5$ ); на втором участке  $\tilde{\varepsilon}_2(x,t) = -0,889$  ( $0,5 \leq \tilde{x} \leq 0,7$ ) и  $\tilde{\varepsilon}_2(x,t) = -1,67$  ( $0,7 \leq \tilde{x} \leq 1$ ). Ось времени  $\tilde{t}$  линия 4 пересекает при  $\tilde{t} = 1,7$ . Диаграммы прямых и обратных волн в этот момент времени представлены на рисунке 1.4.22.

Горизонтальная линия 5 пересекает области волновых состояний, для которых продольные деформации в поперечных сечениях соответственно равны на первом участке  $\tilde{\varepsilon}_1(x,t) = 0$  ( $0 \leq \tilde{x} \leq 0,15$ ),  $\tilde{\varepsilon}_1(x,t) = -0,444$  ( $0,15 \leq \tilde{x} \leq 0,5$ ); на втором участке  $\tilde{\varepsilon}_2(x,t) = -0,889$  ( $0,5 \leq \tilde{x} \leq 0,85$ ) и  $\tilde{\varepsilon}_2(x,t) = -0,111$  ( $0,85 \leq \tilde{x} \leq 1$ ). Ось времени  $\tilde{t}$  линия 5 пересекает при  $\tilde{t} = 2,15$ . Диаграммы прямых и обратных волн в этот момент времени представлены на рисунке 1.4.23.

Горизонтальная линия 6 пересекает области волновых состояний, для которых продольные деформации в поперечных сечениях соответственно равны на первом участке  $\tilde{\varepsilon}_1(x,t) = 0$  ( $0 \leq \tilde{x} \leq 0,3$ ),  $\tilde{\varepsilon}_1(x,t) = 0,37$  ( $0,3 \leq \tilde{x} \leq 0,5$ ); на втором участке  $\tilde{\varepsilon}_2(x,t) = 0,741$  ( $0,5 \leq \tilde{x} \leq 0,7$ ) и  $\tilde{\varepsilon}_2(x,t) = -0,111$  ( $0,7 \leq \tilde{x} \leq 1$ ). Ось времени  $\tilde{t}$  линия 6 пересекает при  $\tilde{t} = 2,7$ . Диаграммы прямых и обратных волн в этот момент времени представлены на рисунке 1.4.24.

Горизонтальная линия 7 пересекает области волновых состояний, для которых продольные деформации в поперечных сечениях соответственно равны на первом участке  $\tilde{\varepsilon}_1(x,t) = 0,37$  ( $0,3 \leq \tilde{x} \leq 0,5$ ); на втором участке  $\tilde{\varepsilon}_2(x,t) = 0,741$  ( $0,5 \leq \tilde{x} \leq 1$ ). Ось времени  $\tilde{t}$  линия 7 пересекает при  $\tilde{t} = 3$ . Диаграммы прямых и обратных волн в этот момент времени представлены на рисунке 1.4.25.

Из диаграммы видно, что ударное взаимодействие стержня с преградой длится до тех пор, пока в сечении не возникает деформация растяжения.

## 1.5. Волновые процессы в упругом стержне с неудерживающей связью, цепляющим твердое тело. Моделирование процесса движения

### Введение

Динамика механической системы, состоящей из ведущего звена (локомотива), упругого стержня (или троса) и ведомого звена (перемещаемого объекта), представляет интерес для различных прикладных задач (буксировка объекта [1.8, 1.9], транспортировка груза в шахтных подъемных установках [1.25, 1.64, 1.68], буксировка судна).

В наиболее простых постановках стержень (или трос) рассматривается либо как абсолютно твердое тело, либо как упругий элемент, не имеющий массы. Если стержень – это трос, то необходимо учитывать неудерживающую связь между активным и пассивным звеньями.

В представленной работе рассматривается механическая система, когда передача движения от активного звена (локомотива) к транспортируемому объекту передается через упругий стержень. Волновая модель движения стержня позволяет учесть его распределенную массу и рассмотреть волновые процессы, определяющие характер перемещения транспортируемого объекта, деформирование стержня, а также, в случае необходимости, определить момент появления неудерживающей связи.

### Волновая модель движения стержня

Рассмотрена волновая модель движения стержня, жестко соединенного одним концом с ведущим звеном (локомотивом) и цепляющего другим концом ведомое звено. Ведущее звено 1 перемещается в направлении оси  $x$  с постоянной скоростью  $v$  (рис. 1.5.1).

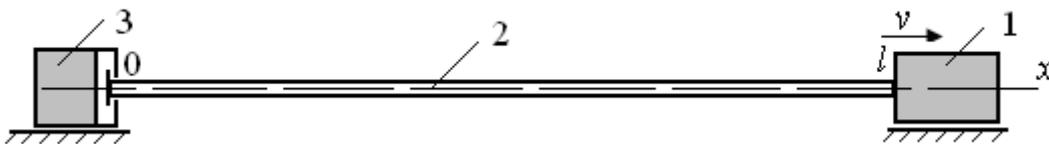


Рис. 1.5.1. Схема движения стержня 2, цепляющего звено 3

Движение поперечных сечений стержня опишем волновым уравнением

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad 0 \leq t < \infty, \quad (1.5.1)$$

где  $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ ,  $u(x,t)$  – скорость и продольное перемещение поперечного

сечения;  $t$  – время;  $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$  – продольная деформация в сечении,

положение которого определяется координатой  $x$ ;  $a$  – скорость распространения продольной волны деформации в стержне.

Начальные условия определяют состояние стержня при  $t = t_0 = 0$ . Примем, что все сечения стержня в начальный момент времени имеют скорость  $v$ , скорость сечения стержня  $x = 0$  при сцеплении с неподвижным звеном 3 равна нулю, деформации в поперечных сечениях стержня в начальный момент отсутствуют. Следовательно, имеем

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = v, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial x} = 0, \quad 0 < x \leq l, \quad \frac{\partial u(0, 0)}{\partial t} = 0. \quad (1.5.2)$$

Граничные условия определяют связь стержня 2 в сечении  $x = l$  с ведущим звеном 1 и сцепление при  $t \geq 0$  с ведомым звеном 3:

$$\frac{\partial u(l, t)}{\partial t} = v, \quad M \frac{\partial^2 u(0, t)}{\partial t^2} = EA \frac{\partial u(0, t)}{\partial x}, \quad (1.5.3)$$

где  $M$  – масса ведомого звена 3,  $E$  – модуль упругости материала стержня,  $A$  – площадь поперечного сечения стержня.

Решение (1.5.1) по методу бегущих волн представим в виде [1.30]:

$$u(x, t) = f(at - x) + \varphi(at + x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad t \geq 0, \quad (1.5.4)$$

где  $f(at - x)$  – функция, описывающая параметры прямой волны, распространяющейся в направлении оси  $x$ ;  $\varphi(at + x)$  – функция, описывающая параметры обратной волны, распространяющейся в направлении, противоположном оси  $x$ .

Скорость и ускорение поперечного сечения стержня определяются как

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = af'(at - x) + a\varphi'(at + x), \quad \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = a^2 f''(at - x) + a^2 \varphi''(at + x). \quad (1.5.5)$$

Деформация в поперечных сечениях стержня равна

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = -f'(at - x) + \varphi'(at + x). \quad (1.5.6)$$

Из начального условия  $\frac{\partial u(x, 0)}{\partial x} = 0$  следует, что

$$-f'(at_0 - x) + \varphi'(at_0 + x) = 0, \quad f'(at_0 - x) = \varphi'(at_0 + x). \quad (1.5.7)$$

Из начального условия  $\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = v$  следует, что

$$af'(at_0 - x) + a\varphi'(at_0 + x) = v.$$

Учитывая (1.5.7), получим

$$2a\varphi'(at_0 + x) = v, \quad \varphi'(at_0 + x) = v/2a, \quad f'(at_0 - x) = v/2a. \quad (1.5.8)$$

Из граничного условия (1.5.3)

$$\frac{\partial u(l, t)}{\partial t} = v, \quad af'(at - l) + a\varphi'(at + l) = v$$

следует, что

$$\varphi'(at+l) = v/a - f'(at-l). \quad (1.5.9)$$

Равенство (1.5.9) определяет параметры формируемой в сечении  $x=l$  обратной волны  $\varphi'(at+l)$ , зависящей от скорости  $v$  ведущего звена и параметров приходящей к сечению  $x=l$  прямой волны  $f'(at-l)$ .

Второе граничное условие (1.5.3) определяет движение ведомого звена 3 и связанного с этим движением процесс формирования прямой волны в сечении  $x=0$ :

$$M \frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial t^2} = EA \frac{\partial u(0,t)}{\partial x},$$

$$Ma^2[f''(at-0) + \varphi''(at+0)] = EA[-f'(at-0) + \varphi'(at+0)].$$

Преобразуем его к виду

$$f''(at-0) + \frac{EA}{Ma^2} f'(at-0) = -\varphi''(at+0) + \frac{EA}{Ma^2} \varphi'(at+0). \quad (1.5.10)$$

Параметры формируемой в сечении  $x=0$  прямой волны  $f'(at-0)$  могут быть определены из решения дифференциального уравнения (1.5.10), если будут известны параметры падающей на сечение  $x=0$  обратной волны.

Так как  $f'(at-x) = f'[a(t-x/a)-0]$ , то прямая волна, формируемая в сечении  $x=0$ , достигнет без искажения сечения  $x$  с запаздыванием по времени на величину  $x/a$ . Соответственно, сечения  $x=l$  эта волна достигнет через время  $l/a$ .

Так как  $\varphi'(at+x) = \varphi'[a(t-(l-x)/a)+l]$ , то обратная волна, сформированная в сечении  $x=l$ , достигнет сечения  $x$  с запаздыванием по времени на величину  $(l-x)/a$ . Соответственно, сечения  $x=0$  эта волна достигнет через время  $l/a$ .

Учитывая изложенное, запишем равенство (1.5.9) в виде

$$\varphi'(at+l) = v/a - f'[a(t-l/a)-0], \quad (1.5.11)$$

а для падающей на сечение  $x=0$  обратной волны

$$\varphi'(at+0) = v/a - f'[a(t-2l/a)-0], \quad (1.5.12)$$

$$\varphi''(at+0) = -f''[a(t-2l/a)-0]. \quad (1.5.13)$$

Структура дифференциального уравнения (1.5.10) соответствует описанию процессов формирования прямых или обратных волн, изложенному в [1.32]. Схема решения дифференциального уравнения (1.5.10) строится следующим образом. Используя начальные условия, находим, что функции

$$\varphi'(at_0+x) = v/2a, \quad \varphi''(at_0+0) = 0.$$

Подставляя эти значения в правую часть уравнения (1.5.10), найдем функции  $f'(at-0)$  и  $f''(at-0)$ , которые позволят определить из (1.5.12) и

(1.5.13) значения  $\varphi'(at+0)$  и  $\varphi''(at+0)$  на следующем интервале  $2l/a \leq t \leq 4l/a$ .

Новые значения функций  $\varphi'(at+0)$  и  $\varphi''(at+0)$  вновь подставим в правую часть уравнения (1.5.10) и найдем функции  $f'(at-0)$  и  $f''(at-0)$  на интервале  $2l/a \leq t \leq 4l/a$ . Далее при необходимости процесс расчета повторяется на интервалах  $4l/a \leq t \leq 6l/a$ ,  $6l/a \leq t \leq 8l/a$  и т. д.

#### Движение стержня на интервале $0 \leq t \leq 2l/a$

На интервале времени  $0 \leq t \leq 2l/a$ , учитывая (1.5.8), имеем

$$\varphi'(at+0) = v/a - f'(at|_{t \leq 0} - 0) = v/a - f'(at_0 - 0) = v/2a, \quad (1.5.14)$$

$$\varphi''(at+0) = f''(at_0 - 0) = 0. \quad (1.5.15)$$

Подставив (1.5.14) и (1.5.15) в (1.5.10), получим на интервале  $0 \leq t \leq 2l/a$

$$f''(at-0) + \alpha f'(at-0) = \alpha v/2a, \quad \alpha = \frac{EA}{Ma^2}. \quad (1.5.16)$$

Так как  $\alpha l = \frac{EA l}{Ma^2} = \frac{a^2 \rho A l}{Ma^2} = m_c / M$  (где  $\rho$  – плотность материала стержня,  $m_c$  – масса стержня,  $M$  – масса ведомого звена), то параметры формируемых волн зависят от соотношения масс  $m_c / M$ .

Решение (1.5.16) на интервале  $0 \leq t \leq 2l/a$  складывается из решений

$$f'(at-0) = f'_r(at-0) + f'_*(at-0), \quad (1.5.17)$$

где  $f'_*(at-0)$  – частное решение уравнения (1.5.16),  $f'_r(at-0)$  – решение однородного уравнения вида

$$f''(at-0) + \alpha f'(at-0) = 0. \quad (1.5.18)$$

Решение однородного уравнения (1.5.18) представим в виде

$$f'_r(at-0) = -\alpha C_1 e^{-\alpha at}, \quad (1.5.19)$$

частное решение уравнения (1.5.16) на интервале  $0 \leq t \leq 2l/a$  представим как

$$f'_*(at-0) = v/2a. \quad (1.5.20)$$

Тогда общее решение на интервале  $0 \leq t \leq 2l/a$

$$f'(at-0) = -\alpha C_1 e^{-\alpha at} + v/2a. \quad (1.5.21)$$

Постоянную интегрирования  $C_1$  найдем из начального условия (1.5.2), из которого при  $t=0$  скорость сечения  $x=0$  равна нулю:

$$\frac{\partial u(0,0)}{\partial t} = 0, \quad af'(at-0)|_{t=0} + a\varphi'(at_0+0) = 0.$$

Учитывая (1.5.14) и (1.5.21) при  $t=0$ , получим

$$-\alpha C_1 + v/2a + v/2a = 0, \quad C_1 = v/\alpha a. \quad (1.5.22)$$

Общее решение (1.5.21) на интервале  $0 \leq t \leq 2l/a$  с учетом (1.5.22) примет вид

$$f'(at-0) = -e^{-\alpha at} v / a + v / 2a = v / a (1/2 - e^{-\alpha at}), \quad 0 \leq t \leq 2l / a. \quad (1.5.23)$$

$$\tilde{f}'(at-0) = \frac{f'(at-0)}{v/a} = 0,5 - \exp(-\tilde{m}\tilde{t}), \quad 0 \leq \tilde{t} \leq 2, \quad \tilde{t} = \frac{t}{2l/a}.$$

Скорость сечения  $x = 0$  на интервале  $0 \leq t \leq 2l / a$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial t} = af'(at-0) + a\varphi'(at+0) = v(1/2 - e^{-\alpha at}) + v/2 = v(1 - e^{-\alpha at}). \quad (1.5.24)$$

Если учесть, что

$$\alpha l = m_c / M, \quad \alpha at = \frac{\alpha lat}{l} = \frac{(m_c / M)t}{T} = \tilde{m} \cdot \tilde{t}, \quad \tilde{m} = m_c / M, \quad \frac{t}{T} = \tilde{t}, \quad (1.5.25)$$

то из (1.5.23) отношение скорости сечения  $x = 0$  (скорости транспортируемого объекта) к скорости ведущего звена (локомотива) на интервале  $0 \leq t \leq 2l / a$  определится как

$$\tilde{v}(0,t) = \frac{\partial u(0,t)}{\partial t} / v = 1 - e^{-\tilde{m}\tilde{t}}, \quad 0 \leq t \leq 2l / a, \quad (1.5.26)$$

где  $\tilde{t} = t / T$ ,  $T = l / a$  – время распространения волны по стержню.

На рис. 1.5.2 представлены диаграммы изменения относительной скорости транспортируемого объекта на интервале  $0 \leq t \leq 2l / a$  в зависимости от соотношения масс  $\tilde{m} = m_c / M$ . При соотношении масс  $\tilde{m} = m_c / M = 0,6$  скорость транспортируемого объекта в конце интервала (при  $t = 2l / a$ ) составляет величину порядка  $0,7v$ .

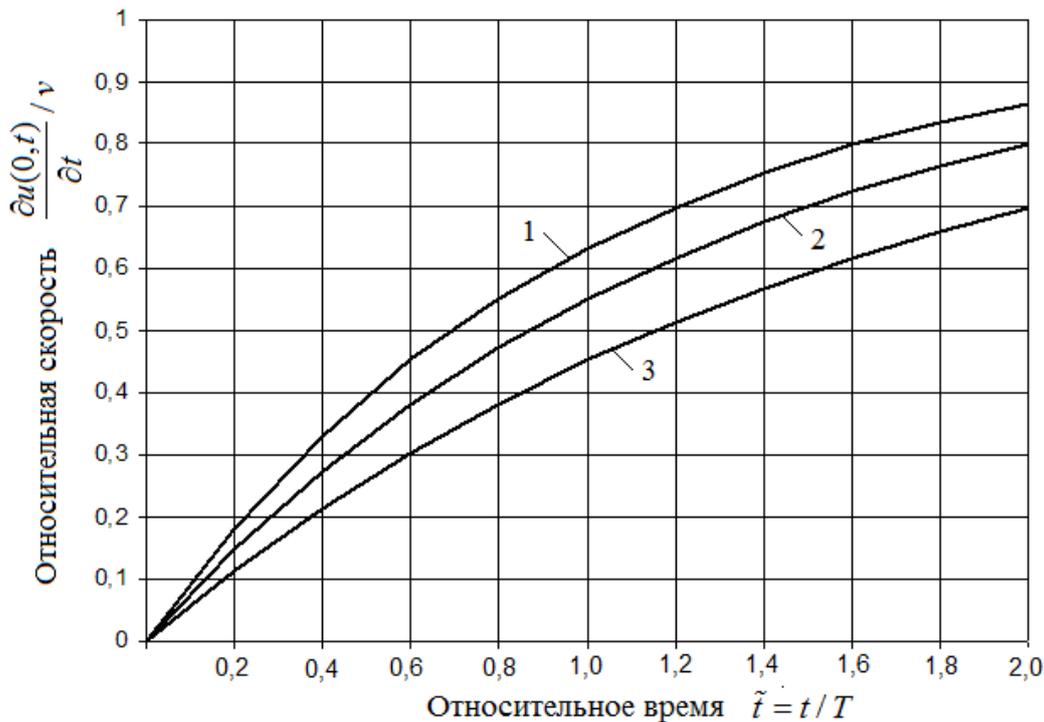


Рис. 1.5.2. Изменение скорости транспортируемого объекта на интервале  $0 \leq t \leq 2l / a$ : диаграмма 1 –  $m_c / M = 1$ ; диаграмма 2 –  $m_c / M = 0,8$ ; диаграмма 3 –  $m_c / M = 0,6$

Равенство (1.5.26) показывает, что в начальный момент времени (при  $\tilde{t} = 0$ ) скорость транспортируемого объекта равна нулю. На интервале  $0 \leq t \leq 2l/a$  скорость транспортируемого объекта не в состоянии достигнуть скорости ведущего звена (локомотива). Чем меньше масса транспортируемого объекта, тем больше скорость транспортируемого объекта в конце интервала. Если масса транспортируемого объекта стремится к нулю  $M \rightarrow 0$  ( $\tilde{m} = m_c / M \rightarrow \infty$ ), то скорость транспортируемого объекта в конце интервала  $0 \leq t \leq 2l/a$  стремится к скорости  $v$  ведущего звена (локомотива).

Деформация в сечении  $x = 0$  на интервале  $0 \leq t \leq 2l/a$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = -f'(at-0) + \varphi'(at+0) = -v/a(1/2 - e^{-\alpha at}) + v/2a = \frac{v}{a}e^{-\alpha at}. \quad (1.5.27)$$

Равенство (1.5.27) показывает, что в начальный момент времени (при  $\tilde{t} = 0$ ) продольная деформация в сечении  $x = 0$  равна  $v/a$ . В этот момент времени продольная деформация является максимальной для интервала времени  $0 \leq t \leq 2l/a$ .

Если учесть (1.5.25), то из (1.5.27) отношение продольной деформации в сечении  $x = 0$  к значению  $v/a$  на интервале  $0 \leq t \leq 2l/a$  определится как

$$\tilde{\varepsilon}(0,t) = \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} / \frac{v}{a} = e^{-\tilde{m}\tilde{t}}, \quad 0 \leq t \leq 2l/a. \quad (1.5.28)$$

На рисунке 1.5.3 представлены диаграммы изменения продольной деформации в сечении  $x = 0$  на интервале  $0 \leq t \leq 2l/a$  в зависимости от соотношения масс  $\tilde{m} = m_c / M$ .

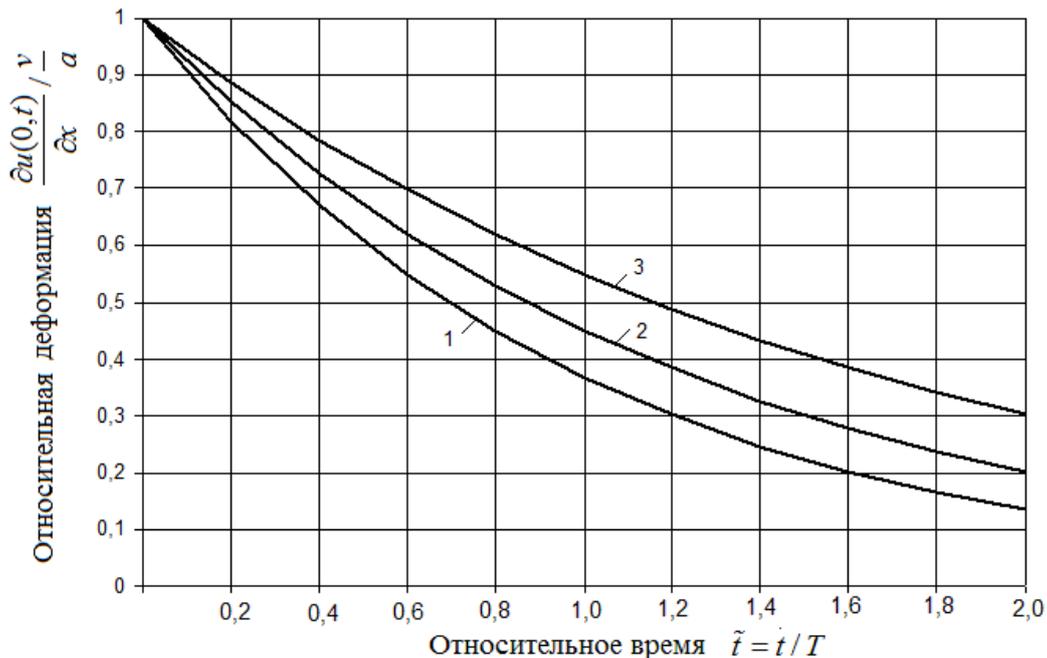


Рис. 1.5.3. Изменение продольной деформации в сечении  $x = 0$  на интервале  $0 \leq t \leq 2l/a$ : 1 —  $m_c / M = 1$ ; 2 —  $m_c / M = 0,8$ ; 3 —  $m_c / M = 0,6$

На интервале  $0 \leq t \leq 2l/a$  продольная деформация в сечении  $x=0$  является положительной, т. е. стержень в этом сечении испытывает растяжение.

Нормальные напряжения  $\sigma(0,t)$  в сечении  $x=0$  стержня на интервале  $0 \leq t \leq 2l/a$  равны

$$\sigma(0,t) = E \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = E \frac{v}{a} e^{-\tilde{m}\tilde{t}}. \quad (1.5.29)$$

Максимального значения нормальные напряжения  $\sigma_{\max} = E \frac{v}{a}$  в сечении  $x=0$  стержня на интервале  $0 \leq t \leq 2l/a$  достигают в начальный момент времени при  $\tilde{t}=0$ . Так как и модуль упругости  $E$  и скорость распространения волны  $a$  зависят от материала стержня, то максимальные напряжения  $\sigma_{\max}$  пропорциональны скорости  $v$  ведущего звена (локомотива).

#### Движение стержня на интервале $2l/a \leq t \leq 4l/a$

Так как  $f'(at-l) = f'[a(t-l/a)-0]$ , то на интервале  $l/a \leq t \leq 3l/a$

$$f'(at-l) = v/a(1/2 - e^{-\alpha a(t-l/a)}), \quad l/a \leq t \leq 3l/a. \quad (1.5.30)$$

Учитывая (1.5.9), получим на интервале  $l/a \leq t \leq 3l/a$

$$\varphi'(at+l) = \frac{v}{a}(1/2 + e^{-\alpha a(t-l/a)}), \quad l/a \leq t \leq 3l/a. \quad (1.5.31)$$

Скорость сечения  $x=l$  на интервале  $l/a \leq t \leq 3l/a$  равна

$$\frac{\partial u(l,t)}{\partial t} = v(1/2 - e^{-\alpha a(t-l/a)}) + v(1/2 + e^{-\alpha a(t-l/a)}) = v. \quad (1.5.32)$$

Продольная деформация в сечении  $x=l$  на интервале  $l/a \leq t \leq 3l/a$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} &= -f'(at-l) + \varphi'(at+l) = -\frac{v}{a}(1/2 - e^{-\alpha a(t-l/a)}) + \frac{v}{a}(1/2 + e^{-\alpha a(t-l/a)}), \\ \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} &= 2\frac{v}{a}e^{-\alpha a(t-l/a)}, \quad l/a \leq t \leq 3l/a. \end{aligned} \quad (1.5.33)$$

Заметим, что продольная деформация в сечении  $x=l$  на интервале  $l/a \leq t \leq 3l/a$  является положительной. Равенство (1.5.33) показывает, что в момент времени  $t=l/a$  эта деформация является максимальной на интервале  $l/a \leq t \leq 3l/a$  и составляет величину  $2v/a$ . Это значение в два раза превышает максимальную продольную деформацию в сечении  $x=0$  на интервале  $0 \leq t \leq 2l/a$ .

Формируемая в сечении  $x=l$  обратная волна  $\varphi'(at+l)$  распространяется по стержню от сечения  $x=l$  к сечению  $x=0$ . Соответственно, сечения  $x=0$  эта волна достигнет через время  $l/a$ . Так

как  $\varphi'(at+0) = \varphi'[a(t-l/a)+l]$ , то, учитывая (1.5.31), на интервале  $2l/a \leq t \leq 4l/a$

$$\varphi'(at+0) = \frac{v}{a}(1/2 + e^{-\alpha a(t-2l/a)}), \quad 2l/a \leq t \leq 4l/a, \quad (1.5.34)$$

$$\varphi''(at+0) = -\alpha \frac{v}{a} e^{-\alpha a(t-2l/a)}, \quad 2l/a \leq t \leq 4l/a. \quad (1.5.35)$$

Подставив (1.5.34) и (1.5.35) в (1.5.10), получим на интервале  $2l/a \leq t \leq 4l/a$

$$f''(at-0) + \alpha f'(at-0) = \alpha \frac{v}{2a} + 2\alpha \frac{v}{a} e^{-\alpha a(t-2l/a)}. \quad (1.5.36)$$

Преобразуем (1.5.36) к виду

$$f''(\xi) + \alpha f'(\xi) = \frac{\alpha \tilde{v}}{2} + 2\alpha \tilde{v} e^{-\alpha(\xi-2l)}, \quad \xi = at, \quad \tilde{v} = v/a, \quad 2l \leq \xi \leq 4l. \quad (1.5.37)$$

Решение (1.5.37) для  $f'(\xi)$  на интервале  $2l \leq \xi \leq 4l$  представим как

$$f'(\xi) = e^{-\alpha\xi} \int [\alpha \tilde{v} / 2 + 2\alpha \tilde{v} e^{-\alpha(\xi-2l)}] e^{\alpha\xi} d\xi + C_2 e^{-\alpha\xi}. \quad (1.5.38)$$

Учитывая, что  $\int [\alpha \tilde{v} / 2 + 2\alpha \tilde{v} e^{-\alpha(\xi-2l)}] e^{\alpha\xi} d\xi = \frac{\tilde{v}}{2} e^{\alpha\xi} + 2\alpha \tilde{v} e^{2\alpha l} \cdot \xi$ , приходим

к зависимости

$$f'(\xi) = e^{-\alpha\xi} \left( \frac{\tilde{v}}{2} e^{\alpha\xi} + 2\alpha \tilde{v} e^{2\alpha l} \cdot \xi \right) + C_2 e^{-\alpha\xi} = \frac{\tilde{v}}{2} + 2\alpha \tilde{v} \xi \cdot e^{-\alpha(\xi-2l)} + C_2 e^{-\alpha\xi}. \quad (1.5.39)$$

Скорость сечения  $x=0$  на интервале  $2l \leq \xi \leq 4l$  из (1.5.5) с учетом (1.5.34) и (1.5.39)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(0,t)}{\partial t} &= af'(\xi) + a\varphi'(\xi) = \frac{v}{2} + 2\alpha v \xi \cdot e^{-\alpha(\xi-2l)} + aC_2 e^{-\alpha\xi} + \frac{v}{2} + v e^{-\alpha(\xi-2l)}, \\ \frac{\partial u(0,t)}{\partial t} &= v + v(2\alpha\xi + 1)e^{-\alpha(\xi-2l)} + aC_2 e^{-\alpha\xi}. \end{aligned} \quad (1.5.40)$$

Постоянную интегрирования  $C_2$  найдем из условия равенства скоростей, определенных по зависимостям (1.5.24) и (1.5.40) при  $\xi = 2l$ :

$$v(1 - e^{-2\alpha l}) = v + v(4\alpha l + 1) + aC_2 e^{-2\alpha l}.$$

Из данного равенства следует, что

$$-v e^{-2\alpha l} - v(4\alpha l + 1) = aC_2 e^{-2\alpha l}, \quad C_2 = -\frac{v}{a} [(4\alpha l + 1) + e^{-2\alpha l}] e^{2\alpha l}. \quad (1.5.41)$$

Подставив (1.5.41) в (1.5.39), получим решение для  $f'(\xi)$  на интервале  $2l \leq \xi \leq 4l$ :

$$f'(\xi) = \frac{\tilde{v}}{2} + 2\tilde{v}\alpha\xi \cdot e^{-\alpha(\xi-2l)} - \tilde{v}(4\alpha l + 1 + e^{-2\alpha l}) e^{-\alpha(\xi-2l)}.$$

Данное равенство представим в виде

$$f'(\xi) = \frac{\tilde{v}}{2} - \tilde{v}e^{-\alpha\xi} + \tilde{v}[2\alpha(\xi - 2l) - 1]e^{-\alpha(\xi - 2l)}, \quad 2l \leq \xi \leq 4l. \quad (1.5.42)$$

Скорость сечения  $x = 0$  на интервале  $2l \leq \xi \leq 4l$  из (1.5.40) с учетом (1.5.41)

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial t} = v + v(2\alpha\xi + 1)e^{-\alpha(\xi - 2l)} - v[(4\alpha l + 1) + e^{-2\alpha l}]e^{-\alpha(\xi - 2l)}.$$

Упростим данное выражение, представив его в виде

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial t} = v[1 + 2\alpha(\xi - 2l)e^{-\alpha(\xi - 2l)} - e^{-\alpha\xi}], \quad 2l \leq \xi \leq 4l.$$

Преобразуем это выражение, представив его в виде отношения скорости сечения  $x = 0$  (соответственно, скорости транспортируемого объекта) к скорости сечения  $x = l$  (соответственно, скорости звена-локомотива):

$$\tilde{v}(0,t) = \frac{\partial u(0,t)}{\partial t} / v = 1 + 2\alpha l(\xi / l - 2)e^{-\alpha l(\xi / l - 2)} - e^{-\alpha l \xi / l}, \quad 2 \leq \xi / l \leq 4. \quad (1.5.43)$$

Если учесть, что  $\alpha l = m_c / M = \tilde{m}$ ,  $\xi / l = t / T = \tilde{t}$ , то

$$\tilde{v}(0,t) = \frac{\partial u(0,t)}{\partial t} / v = 1 + 2\tilde{m}(\tilde{t} - 2)e^{-\tilde{m}(\tilde{t} - 2)} - e^{-\tilde{m}\tilde{t}}, \quad 2 \leq \tilde{t} \leq 4. \quad (1.5.44)$$

Равенство (1.5.44) показывает, что в момент времени  $\tilde{t} = 2$  скорость транспортируемого объекта равна  $1 - e^{-\tilde{m}\tilde{t}}$ . Скорость транспортируемого объекта не достигла скорости ведущего звена (локомотива).

Оценим возможность достижения ведомым звеном скорости локомотива на интервале  $2 \leq \tilde{t} \leq 4$ . Эта возможность обеспечивается, если

$$2\tilde{m}(\tilde{t}_* - 2)e^{-\tilde{m}(\tilde{t}_* - 2)} - e^{-\tilde{m}\tilde{t}_*} \geq 0,$$

где  $\tilde{t}_*$  – относительное время, когда ведомое звено достигнет скорости локомотива.

Разделив обе части неравенства на  $e^{-\tilde{m}\tilde{t}_*}$ , получим

$$2\tilde{m}(\tilde{t}_* - 2)e^{2\tilde{m}} \geq 1, \quad \tilde{t}_* \geq 2 + 0,5e^{-2\tilde{m}} / \tilde{m}, \quad 2 \leq \tilde{t} \leq 4. \quad (1.5.45)$$

В частности, из (1.5.45) следует, что при  $\tilde{m} = 1$  время  $\tilde{t}_* = 2,067$ ; при  $\tilde{m} = 0,8$  время  $\tilde{t}_* = 2,126$ ; при  $\tilde{m} = 0,6$  время  $\tilde{t}_* = 2,25$ .

На рисунке 1.5.4 представлены диаграммы изменения относительной скорости транспортируемого объекта на интервалах  $0 \leq t \leq 2l / a$  и  $2l / a \leq t \leq 4l / a$  в зависимости от соотношения масс  $\tilde{m} = m_c / M$ .

Из диаграмм видно, что для рассмотренного соотношения масс ( $\tilde{m} = m_c / M = 1,0; 0,8; 0,6$ ) на интервале  $2l / a \leq t \leq 4l / a$  скорость

транспортируемого объекта не только достигнет скорости локомотива, но и значительно превысит ее:  $\frac{\partial u(0,t)}{\partial t} / v = 1,68$  при  $\tilde{m} = 1,0$ ;  $\frac{\partial u(0,t)}{\partial t} / v = 1,665$  при  $\tilde{m} = m_c / M = 0,8$ ;  $\frac{\partial u(0,t)}{\partial t} / v = 1,632$  при  $\tilde{m} = m_c / M = 0,6$ .

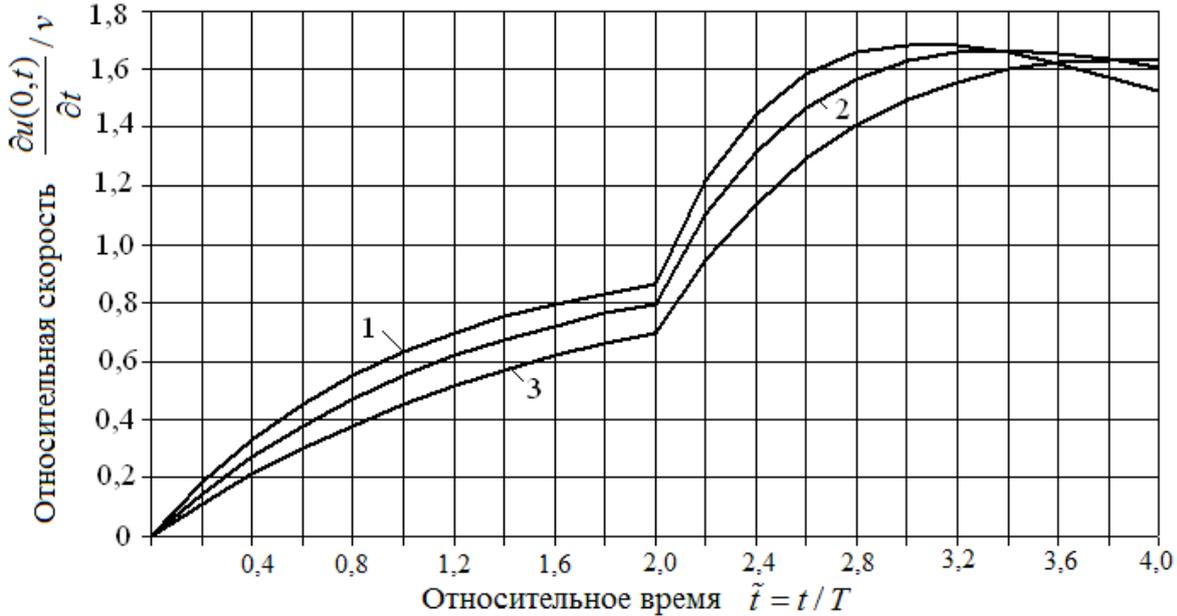


Рис. 1.5.4. Изменение скорости транспортируемого объекта на интервалах  $0 \leq t \leq 2l/a$  и  $2l/a \leq t \leq 4l/a$ : 1 –  $m_c / M = 1$ ; 2 –  $m_c / M = 0,8$ ; 3 –  $m_c / M = 0,6$

Рассмотрим особенности деформирования стержня на интервале  $2l \leq \xi \leq 4l$ . Учитывая (1.5.42) и (1.5.34), определим деформацию в сечении  $x = 0$  на интервале  $2l \leq \xi \leq 4l$ :

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = -f'(\xi) + \varphi'(\xi) = -\frac{\tilde{v}}{2} + \tilde{v}e^{-\alpha\xi} - \tilde{v}[2\alpha(\xi - 2l) - 1]e^{-\alpha(\xi - 2l)} + \frac{\tilde{v}}{2} + \tilde{v}e^{-\alpha(\xi - 2l)}.$$

Упростим данное выражение, представив его в виде

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \tilde{v}e^{-\alpha\xi} + 2\tilde{v}[1 - \alpha(\xi - 2l)]e^{-\alpha(\xi - 2l)}, \quad 2l \leq \xi \leq 4l. \quad (1.5.46)$$

Чтобы выяснить влияние соотношения масс  $\tilde{m} = m_c / M$  на процесс деформирования стержня, преобразуем (1.5.46):

$$\tilde{\varepsilon}(0,t) = \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} / \tilde{v} = e^{-\alpha\xi/l} + 2[1 - \alpha l(\xi/l - 2)]e^{-\alpha l(\xi/l - 2)}, \quad 2l \leq \xi \leq 4l.$$

Если учесть, что  $\alpha l = \frac{m_c}{M}$ ,  $\alpha l a t = \frac{\alpha l a t}{l} = \frac{(m_c / M)t}{T} = \tilde{m} \cdot \tilde{t}$ ,  $\tilde{m} = \frac{m_c}{M}$ ,  $\frac{t}{T} = \tilde{t}$ ,

то относительная продольная деформация в сечении  $x = 0$  на интервале  $2l \leq \xi \leq 4l$  равна

$$\tilde{\varepsilon}(0,t) = \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} / \tilde{v} = e^{-\tilde{m}\tilde{t}} + 2[1 - \tilde{m}(\tilde{t} - 2)]e^{-\tilde{m}(\tilde{t}-2)}, \quad 2 \leq \tilde{t} \leq 4. \quad (1.5.47)$$

Анализируя (1.5.47), заметим, что в момент прихода обратной волны  $\phi'(at+0)$ , сформированной в сечении в сечении  $x=l$ , относительная продольная деформация в сечении  $x=0$  достигает максимального значения на интервале  $2 \leq \tilde{t} \leq 4$  и равна при  $\tilde{t} = 2$

$$\tilde{\varepsilon}(0,t) = \frac{\partial u(0,\tilde{t}=2)}{\partial x} / \tilde{v} = e^{-2\tilde{m}} + 2.$$

Это значение более чем в два раза превышает максимальную величину относительной продольной деформации на предыдущем интервале в момент зацепа транспортируемого объекта при  $\tilde{t} = 0$ .

На рисунке 1.5.5 представлены диаграммы изменения относительной продольной деформации в сечении  $x=0$  на интервалах  $0 \leq t \leq 2l/a$  и  $2l/a \leq t \leq 4l/a$  в зависимости от соотношения масс  $\tilde{m} = m_c / M$ .

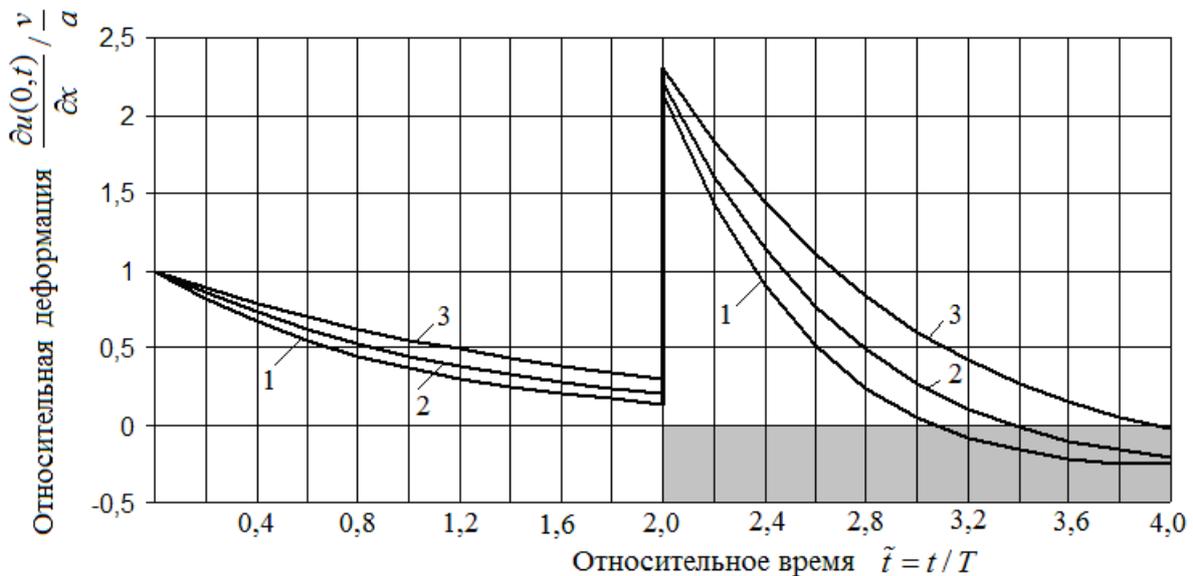


Рис. 1.5.5. Изменение продольной деформации в сечении  $x=0$  на интервалах  $0 \leq t \leq 2l/a$  и  $2l/a \leq t \leq 4l/a$ : 1 –  $m_c/M = 1$ ; 2 –  $m_c/M = 0,8$ ; 3 –  $m_c/M = 0,6$

На интервале  $2l/a \leq t \leq 4l/a$  продольная деформация в сечении  $x=0$  для рассмотренного соотношения масс ( $\tilde{m} = m_c / M = 1,0; 0,8; 0,6$ ) является положительной только до определенного времени  $t_{**}$ : для  $\tilde{m} = m_c / M = 1,0$  время  $t_{**} = 3,0676$ ; для  $\tilde{m} = m_c / M = 0,8$  время  $t_{**} = 3,376$ ; для  $\tilde{m} = 0,6$  время  $t_{**} = 3,9175$ .

Зона отрицательных значений относительной продольной деформации в сечении  $x=0$  для рассмотренного соотношения масс ( $\tilde{m} = m_c / M = 1,0; 0,8; 0,6$ ) на рисунке 1.5.5 представлена затененной зоной. Если связь между активным звеном (локомотивом) и транспортируемым объектом является

неудерживающей, необходимо для этой зоны новые условия связи стержня и транспортируемого объекта в сечении  $x = 0$ .

Аналитическое решение рассматриваемой задачи может быть громоздким на интервалах движения  $6l/a \leq t \leq 8l/a$ ,  $8l/a \leq t \leq 10l/a$  и т. д. В этой связи представляется важным разработка вычислительной схемы расчета волнового процесса на основе численных методов.

Аналитические решения задачи на интервалах  $0 \leq t \leq \frac{2l}{a}$ ,  $\frac{2l}{a} \leq t \leq \frac{4l}{a}$ , ... могут быть использованы для тестовых оценок.

### Волновые состояния механической системы

Рассмотрим построение поля волновых состояний при взаимодействии стержня 2 с ведущим звеном и транспортируемым объектом 3 (рис. 1.5.6).

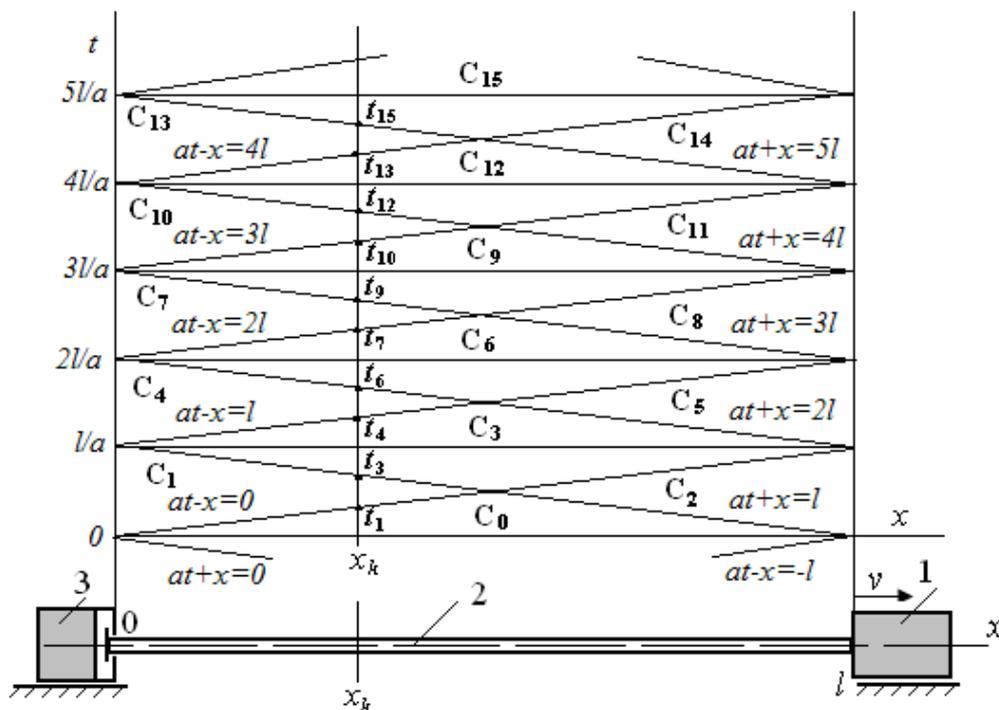


Рис. 1.5.6. Схема движения механической системы и поле волновых состояний

Прямые волны в стержне 2 формируются в сечении  $x=0$  и распространяются по характеристикам  $at-x=-l$ ,  $at-x=0$ ,  $at-x=l$ ,  $at-x=2l$ ,  $at-x=3l$  и так далее (рис. 1.5.6). Характеристики представляют собой аргументы функций прямых волн и в системе координат  $t-x$  могут быть изображены прямыми с угловым коэффициентом  $1/a$ .

Обратные волны в стержне 2 формируются в сечении  $x=l$  и распространяются по стержню по характеристикам  $at+x=0$ ,  $at+x=l$ ,  $at+x=2l$ ,  $at+x=3l$ ,  $at+x=4l$  и так далее. Характеристики

представляют собой аргументы функций обратных волн и в системе координат  $t-x$  могут быть изображены прямыми с угловым коэффициентом  $(-1/a)$ .

Характеристики прямых и обратных волн разбивают координатную плоскость  $t-x$  на области волновых состояний  $C_0, C_1, C_2, \dots, C_{11}, C_{12}, \dots$ . Область  $C_0$  охвачена начальными прямой и обратной волнами с характеристиками  $at-x=-l$  и  $at+x=0$ . Область  $C_1$  охвачена прямой и обратной волнами с характеристиками  $at-x=0$  и  $at+x=0$ . Область  $C_2$  охвачена прямой и обратной волнами с характеристиками  $at-x=-l$  и  $at+x=l$ . Область  $C_3$  охвачена прямой и обратной волнами с характеристиками  $at-x=0$  и  $at+x=l$ . Область  $C_4$  охвачена прямой и обратной волнами с характеристиками  $at-x=l$  и  $at+x=l$ , и так далее.

Если в стержне выделить некоторое произвольное сечение  $0 < x_k < l/2$  (рис. 1.5.6), то на поле волновых состояний можно определить временные интервалы, для которых данное сечение испытывает действие прямых и обратных волн с теми или иными характеристиками.

Так  $t_1$  – время, когда для сечения  $x_k$  заканчивается волновое состояние  $C_0$  и начинается волновое состояние  $C_1$ . Из характеристики  $at-x=0$  (рис. 1.5.6) при  $x = x_k$  следует, что  $t_1 = x_k / a$ . Длительность волнового состояния  $C_0$  для сечения  $x_k$  равно  $\Delta t_0 = t_1 - t_0 = x_k / a$ .

Аналогично,  $t_3$  – время, когда для сечения  $x_k$  заканчивается волновое состояние  $C_1$  и начинается волновое состояние  $C_3$ . Из характеристики  $at+x=l$  (рис. 1.5.6) при  $x = x_k$  следует, что  $t_3 = (l - x_k) / a$ . Длительность волнового состояния  $C_1$  для сечения  $x_k$  определится как  $\Delta t_1 = t_3 - t_1 = (l - 2x_k) / a$ .

Время, когда для сечения  $x_k$  заканчивается волновое состояние  $C_3$  и начинается волновое состояние  $C_4$ , равно  $t_4$ . Из характеристики  $at-x=l$  (рис. 1.5.6) при  $x = x_k$  следует, что  $t_4 = (l + x_k) / a$ . Длительность волнового состояния  $C_3$  для сечения  $x_k$  определится как  $\Delta t_3 = t_4 - t_3 = 2x_k / a$ .

Аналогично могут быть определены длительность волновых состояний  $C_4, C_6, C_7$  и т. д.

### Построение вычислительной схемы решения задачи

Из граничного условия (1.5.3) с учетом (1.5.9) следует, что на любом интервале движения для сечения  $x=l$

$$\frac{\partial u(l,t)}{\partial t} = v, \quad af'(at-l) + a\phi'(at+l) = v, \quad \phi'(at+l) = v/a - f'(at-l). \quad (1.5.48)$$

Равенство (1.5.48) определяет параметры формируемой в сечении  $x=l$  обратной волны  $\phi'(at+l)$ , зависящих от скорости  $v$  ведущего звена и

параметров приходящей к сечению  $x = l$  прямой волны  $f'(at - l)$ .

Из граничного условия (1.5.3)  $M \frac{\partial v(0,t)}{\partial t} = EA \frac{\partial u(0,t)}{\partial x}$  с учетом (1.5.6)

следует, что

$$\frac{\partial v(0,t)}{\partial t} = \frac{EA}{M} [-f'(at - 0) + \varphi'(at + 0)],$$

откуда на интервалах  $(i-1)2l/a \leq t \leq i2l/a$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$

$$v(0,t) = v(0,t_{0i}) + \int_{t_{0i}}^t \frac{EA}{M} [-f'(at - 0) + \varphi'(at + 0)] dt, \quad (1.5.49)$$

где  $v(0,t_{0i})$  – скорость сечения  $x = 0$  в начале  $i$ -го интервала движения;  
 $t_{0i} = (i-1)2l/a$  – начальное время  $i$ -го интервала движения.

Учитывая, что  $v(0,t) = a[f'(at - 0) + \varphi'(at + 0)]$ , находим из (1.5.49)

$$f'(at - 0) = v(0,t_{0i})/a + \int_{t_{0i}}^t \frac{EA}{Ma} [-f'(at - 0) + \varphi'(at + 0)] dt - \varphi'(at + 0). \quad (1.5.50)$$

Изложим процедуру численного расчета процесса движения механической системы. Схема движения приведена на рисунке 1.5.7. Стержень разбит на  $n$  последовательно сопряженных участков, границами которых являются сечения  $0, 1, 2, \dots, n-1, n$ . Длина участка  $\Delta l = l/n$ .

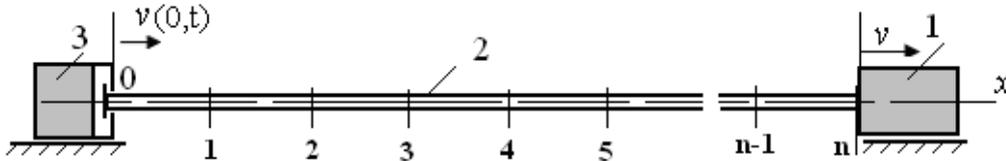


Рис. 1.5.7. Схема с  $n$ -м количеством последовательно сопряженных участков стержня

Рассмотрим особенности преобразования волн на границах участков. Выделим наиболее характерные границы – граничное сечение  $x = 0$  для 1-го участка, произвольное граничное сечение  $j$ -го участка и граничное сечение  $x = l$   $n$ -го участка.

В сечении  $x = 0$  первого участка (рис. 1.5.8) падающей волной является обратная волна  $\varphi_1(at + 0)$ , а формируемой в сечении волной – прямая волна  $f_1(at - 0)$ .

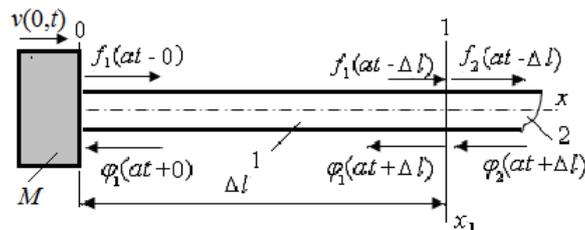


Рис. 1.5.8. Схема формирования прямой волны на границе  $x = 0$

Считаем, что параметры падающей волны известны. В начальный момент времени параметры падающей волны для любого сечения могут быть определены из начальных условий и соответствующих равенств (1.5.8). А последующие значения обратной волны  $\varphi_1(at + 0)$  через шаг вычисления  $\Delta t$  могут быть определены из условия, что

$$\varphi_1(at + 0) = \varphi_1[a(t - \Delta t) + \Delta l], \quad \Delta l = a \cdot \Delta t,$$

то есть для определения  $\varphi_1(at + 0)$  используется значение  $\varphi_1[a(t - \Delta t) + \Delta l]$ , вычисленное в сечении  $x_1 = \Delta l$  на предыдущем шаге.

Схема формирования прямых и обратных волн в произвольном  $j$ -м сечении стержня описана в [1.32]. В сечении  $j$  сопряжены  $j$ -й и  $(j+1)$ -й участки стержня (в общем случае это могут быть разнородные участки). Падающими на сечение  $j$  волнами являются прямая волна  $f'_j(a_j t - x_j)$  со стороны  $j$ -го участка и обратная волна  $\varphi'_{j+1}(a_{j+1} t + x_j)$  со стороны  $(j + 1)$ -го участка. Формируемые в сечении  $j$  прямая волна  $f'_{j+1}(a_{j+1} t - x_j)$   $(j+1)$ -го участка и обратная волна  $\varphi'_j(a_j t + x_j)$   $j$ -го участка определяются как

$$f'_{j+1}(a_{j+1} t - x_j) = Q(j, j+1) f'_j(a_j t - x_j) + R(j+1, j) \varphi'_{j+1}(a_{j+1} t + x_j), \quad (1.5.51)$$

$$\varphi'_j(a_j t + x_j) = R(j, j+1) f'_j(a_j t - x_j) + Q(j+1, j) \varphi'_{j+1}(a_{j+1} t + x_j),$$

где  $Q(j, j+1) = \frac{2r_j a_j}{1+r_j a_{j+1}}$  и  $Q(j+1, j) = \frac{2 a_{j+1}}{1+r_j a_j}$  – коэффициенты

прохождения прямой волны из  $j$ -го в  $(j+1)$ -й участок и обратной волны из  $(j+1)$ -го участка в  $j$ -й участок;  $r_j = \frac{E_j A_j a_{j+1}}{E_{j+1} A_{j+1} a_j}$  – отношение волновых

сопротивлений сопряженных участков;  $R(j+1, j) = \frac{1-r_j}{1+r_j}$  – коэффициент

отражения обратной волны  $(j+1)$ -го участка от  $j$ -го сечения;

$R(j, j+1) = \frac{r_j-1}{r_j+1}$  – коэффициент отражения прямой волны  $j$ -го участка от

$j$ -го сечения.

Если стержень однородный и имеет равную по длине площадь поперечных сечений, то скорости распространения волн на участках и волновые сопротивления сопряженных участков равны, а их отношение  $r_j = 1$  ( $j = 1, 2, 3, \dots, n-1$ ). В этом случае коэффициенты отражения  $R(j, j+1)$  и  $R(j+1, j)$  равны нулю, а коэффициенты прохождения волн  $Q(j, j+1)$  и  $Q(j+1, j)$  равны единице.

В сечении  $x = l$   $n$ -го участка (рис. 1.5.9) падающей волной является прямая волна  $f_n(at - l)$ , а формируемой в этом сечении волной – обратная волна  $\varphi_n(at + l)$ .

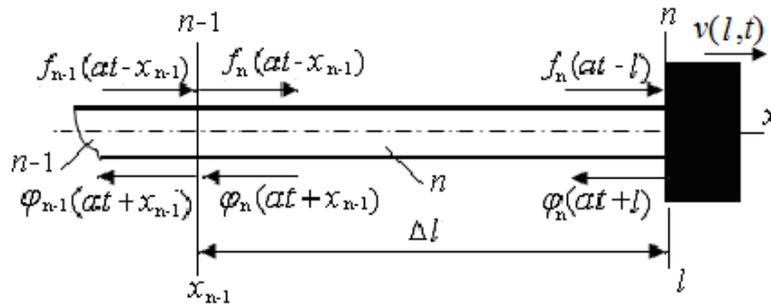


Рис. 1.5.9. Схема формирования обратной волны на границе  $x = l$

В начальный момент времени параметры падающей волны могут быть определены из начальных условий и соответствующих равенств (1.5.8). А последующие значения прямой волны  $f_n(at - l)$  через шаг вычисления  $\Delta t$  могут быть определены из условия, что

$$f_n(at - l) = f_{n-1}[a(t - \Delta t) - (l - \Delta l)], \quad \Delta l = a \cdot \Delta t,$$

то есть для определения  $f_n(at - l)$  используется значение  $f_{n-1}[a(t - \Delta t) - (l - \Delta l)]$ , вычисленное в сечении  $x_{n-1} = l - \Delta l$  на предыдущем шаге.

На формирование обратной волны  $\varphi_n(at + l)$  оказывает влияние падающая на границу прямая волна  $f_n(at - l)$ . Причем в соответствии с равенством (1.5.11) на любом интервале движения, пока есть взаимодействие стержня и жесткого тела,

$$\varphi'_n(at + l) = v / a - f'_n(at - l). \quad (1.5.52)$$

Процедура численного решения уравнения (1.5.50) может быть основана на методе последовательных приближений. Первое приближение можно представить как

$$f'_{1,1}(at - 0) = \frac{v_1(0, t_{0i})}{a} + \int_{t_{0i}}^t \frac{EA}{Ma} [-f'_{1,0}(at - 0) + \varphi'_1(at + 0)] dt - \varphi'_1(at + 0), \quad (1.5.53)$$

где в подынтегральном выражении вместо  $f'_{1,0}(at - 0)$  подставлено начальное значение  $f'_{1,0}(at - 0)$ .

Далее, подставляя в подынтегральное выражение (1.5.53) вместо  $f'_{1,0}(at - 0)$  найденное первое приближение  $f'_{1,1}(at - 0)$ , будем иметь второе приближение:

$$f'_{1,2}(at - 0) = \frac{v_1(0, t_{0i})}{a} + \int_{t_{0i}}^t \frac{EA}{Ma} [-f'_{1,1}(at - 0) + \varphi'_1(at + 0)] dt - \varphi'_1(at + 0).$$

Дальнейшие приближения строятся по формуле

$$f'_{1,p}(at-0) = \frac{v_1(0, t_{0i})}{a} + \int_{t_{0i}}^t \frac{EA}{Ma} [-f'_{1,p-1}(at-0) + \phi'_1(at+0)] dt - \phi'_1(at+0), \quad (1.5.54)$$

где  $p$  – число приближений.

Число приближений должно быть ограничено числом  $s$ , когда последующее приближение отличается от предыдущего на малую величину  $\Delta f'$ .

В пределах малого интервала времени  $\Delta t = t - t_{0i}$ , допуская, что в пределах этого интервала времени подынтегральные функции сохраняют постоянные значения, т. е.

$$\phi'_1(at+0) = const, \quad f'_{1,p-1}(at-0) = const,$$

от интегрального выражения (1.5.54) можем перейти к алгебраическому:

$$f'_{1,p}(at-0) = v_1(0, t_{0i}) / a + \frac{EA}{Ma} [-f'_{1,p-1}(at-0) + \phi'_1(at+0)] \Delta t - \phi'_1(at+0).$$

$$\text{Если учесть, что} \quad \frac{EA}{Ma} = \frac{a^2 \rho Al}{Mal} = \frac{a \cdot m_c}{Ml}, \quad a \Delta t = \Delta l, \quad l / \Delta l = n,$$

где  $n$  – число участков,  $\rho$  – плотность материала стержня,  $m_c$  – масса стержня, то

$$f'_{1,p}(at-0) = \frac{v_1(0, t_{0i})}{a} + \frac{m_c}{Mn} [-f'_{1,p-1}(at-0) + \phi'_1(at+0)] - \phi'_1(at+0), \quad (1.5.55)$$

где  $p = 1, 2, 3, \dots, s$ .

Если стержень разбит на достаточно малые участки длиной  $\Delta l$ , то в качестве малого интервала времени  $\Delta t$  может быть взято время, в течение которого волна деформации распространяется от одного граничного сечения участка до другого. Это тем более удобно, что волны, сформированные на границах однородных участков, достигают противоположных границ без искажения, т. е. описываются теми же функциями, но с запаздыванием на величину  $\Delta t = \Delta l / a$ .

Если связь между стержнем и транспортируемым объектом неударживающая, то в процессе вычислений необходимо контролировать условие неударживающей связи:

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = -f'_1(at-0) + \phi'_1(at+0) = 0, \quad \text{если} \quad \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} \leq 0. \quad (1.5.56)$$

В этом случае формируемая в сечении  $x = 0$  прямая волна  $f'_1(at-0)$  определяется из равенства (1.5.56) как

$$f'_1(at-0) = \phi'_1(at+0). \quad (1.5.57)$$

Равенства (1.5.48) ÷ (1.5.57) положены в основу вычислительного алгоритма для анализа волновых процессов при движении ведущего звена (локомотива), упругого стержня и транспортируемого объекта. Вычислительные алгоритмы такого типа показали свою эффективность

при анализе волновых процессов при распространении волн деформаций в стержневых системах [1.32, 1.33].

При вычислениях предпочтительно пользоваться относительной величиной прямой волны  $\tilde{f}'(at-0) = \frac{f'(at-0)}{v/a}$ ; относительной величиной обратной волны, падающей на сечение  $x = 0$ ,  $\tilde{\varphi}'(at+0) = \frac{\varphi'(at+0)}{v/a}$ ; относительной величиной скорости сечения  $x = 0$ :  $\tilde{v}(0,t) = v(0,t)/v$ ; относительной величиной продольной деформации:  $\tilde{\varepsilon}(0,t) = \frac{\varepsilon(0,t)}{v/a}$ .

Для аналитического расчета этих величин могут быть использованы приведенные выше формулы – (1.5.14), (1.5.42), (1.5.44), (1.5.46), (1.5.47):

$$\varphi'(at+0) = v/2a; \quad \tilde{\varphi}'(at+0) = \frac{\varphi'(at+0)}{v/a} = 0,5; \quad 0 \leq t \leq 2l/a,$$

$$f'(at-0) = v/a(1/2 - e^{-\alpha at}), \quad \tilde{f}'(at-0) = 0,5 - \exp(-\tilde{m}\tilde{t}), \quad 0 \leq \tilde{t} \leq 2,$$

$$\tilde{t} = \frac{t}{2l/a}; \quad \tilde{v}(0,t) = \frac{\partial u(0,t)}{\partial t} / v = 1 - e^{-\tilde{m}\tilde{t}}, \quad \tilde{\varepsilon}(0,t) = \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} / \frac{v}{a} = e^{-\tilde{m}\tilde{t}},$$

$$\varphi'(at+0) = \frac{v}{a}(1/2 + e^{-\alpha a(t-2l/a)}), \quad \tilde{\varphi}'(at+0) = 1/2 + e^{-\alpha a(t-2l/a)},$$

$$f'(\xi) = \frac{\tilde{v}}{2} - \tilde{v}e^{-\alpha\xi} + \tilde{v}[2\alpha(\xi-2l)-1]e^{-\alpha(\xi-2l)}, \quad \xi = at, \quad \tilde{v} = \frac{v}{a}, \quad 2l \leq \xi \leq 4l.$$

$$\tilde{v}(0,t) = \frac{\partial u(0,t)}{\partial t} / v = 1 + 2\tilde{m}(\tilde{t}-2)e^{-\tilde{m}(\tilde{t}-2)} - e^{-\tilde{m}\tilde{t}}, \quad 2 \leq \tilde{t} \leq 4.$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \tilde{v}e^{-\alpha\xi} + 2\tilde{v}[1 - \alpha(\xi-2l)]e^{-\alpha(\xi-2l)}, \quad 2l \leq \xi \leq 4l,$$

$$\tilde{\varepsilon}(0,t) = \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} / \tilde{v} = e^{-\tilde{m}\tilde{t}} + 2[1 - \tilde{m}(\tilde{t}-2)]e^{-\tilde{m}(\tilde{t}-2)}, \quad 2 \leq \tilde{t} \leq 4.$$

В таблице 1.5.1 даны значения  $\tilde{f}'(at-0)$  и  $\tilde{\varphi}'(at+0)$  (соответственно для прямой и обратной волн при  $\tilde{m}=1$ ), скорость  $\tilde{v}(0,t)$  и продольная деформация  $\tilde{\varepsilon}(0,t)$  в сечении  $x=0$  при изменении относительного времени в диапазоне  $0 \leq \tilde{t} \leq 3,1$ . Эти данные получены в результате моделирования и при вычислении по приведенным выше аналитическим зависимостям. Стержень при моделировании представлен множеством участков, имеющих длину  $\Delta l = 0,01l$ .

Таблица 1.5.1

Параметры прямой  $\tilde{f}'(at - 0)$  и обратной волн  $\tilde{\varphi}'(at + 0)$ , скорость  $\tilde{v}(0, t)$  и продольная деформация  $\tilde{\varepsilon}(0, t)$  в сечении  $x = 0$  при  $\tilde{m} = 1$

Время $\tilde{t}$	Прямая волна		Обратная волна		Скорость		Деформация	
	числен.	аналит.	числен.	аналит.	числен.	аналит.	числен.	аналит.
	$\tilde{f}'(at - 0)$	$\tilde{f}'(at - 0)$	$\tilde{\varphi}'(at + 0)$	$\tilde{\varphi}'(at + 0)$	$\tilde{v}(0, t)$	$\tilde{v}(0, t)$	$\tilde{\varepsilon}(0, t)$	$\tilde{\varepsilon}(0, t)$
0	-0,5	-0,5	0,5	0,5	0	0	1	1
0,1	-0,4044	-0,40484	0,5	0,5	0,09554	0,095163	0,90446	0,904837
0,2	-0,3179	-0,31873	0,5	0,5	0,18203	0,181269	0,81797	0,818731
0,3	-0,2397	-0,24082	0,5	0,5	0,26025	0,259182	0,73975	0,740818
0,4	-0,1690	-0,17032	0,5	0,5	0,33099	0,32968	0,66901	0,67032
0,5	-0,1050	-0,10653	0,5	0,5	0,39497	0,393469	0,60503	0,606531
0,6	-0,0471	-0,04881	0,5	0,5	0,45283	0,451188	0,54717	0,548812
0,7	0,00515	0,003415	0,5	0,5	0,50515	0,503415	0,49485	0,496585
0,8	0,05247	0,050671	0,5	0,5	0,55247	0,550671	0,44753	0,449329
0,9	0,09527	0,09343	0,5	0,5	0,59527	0,59343	0,40473	0,40657
1	0,13397	0,132121	0,5	0,5	0,63397	0,632121	0,36603	0,367879
1,1	0,16897	0,167129	0,5	0,5	0,66897	0,667129	0,33103	0,332871
1,2	0,20063	0,198806	0,5	0,5	0,70063	0,698806	0,29937	0,301194
1,3	0,22926	0,227468	0,5	0,5	0,72926	0,727468	0,27074	0,272532
1,4	0,25515	0,253403	0,5	0,5	0,75515	0,753403	0,24485	0,246597
1,5	0,27856	0,27687	0,5	0,5	0,77856	0,77687	0,22144	0,22313
1,6	0,29974	0,298103	0,5	0,5	0,79974	0,798103	0,20026	0,201897
1,7	0,31889	0,317316	0,5	0,5	0,81889	0,817316	0,18111	0,182684
1,8	0,33621	0,334701	0,5	0,5	0,83621	0,834701	0,16379	0,165299
1,9	0,35187	0,350431	0,5	0,5	0,85187	0,850431	0,14813	0,149569
2,0 <sup>-</sup>	0,3647	0,364665	0,5	0,5	0,8647	0,864665	0,1353	0,135335
2,0 <sup>+</sup>	-0,6441	-0,63534	1,5	1,5	0,85584	0,864665	2,14416	2,135335
2,1	-0,3432	-0,3467	1,40446	1,404837	1,06122	1,058134	1,7477	1,751164
2,2	-0,0973	-0,1028	1,31797	1,318731	1,22065	1,215928	1,41529	1,420772
2,3	0,10928	0,102346	1,23975	1,240818	1,34903	1,343164	1,13047	1,137404
2,4	0,28183	0,273908	1,16901	1,17032	1,45084	1,444228	0,88718	0,895102
2,5	0,42494	0,416414	1,10503	1,106531	1,52997	1,522945	0,68009	0,688616
2,6	0,54268	0,533847	1,04717	1,048812	1,58985	1,582659	0,50449	0,513323
2,7	0,63859	0,629693	0,99485	0,996585	1,63344	1,626279	0,35626	0,365157
2,8	0,71577	0,706988	0,94753	0,949329	1,6633	1,656317	0,23176	0,240542
2,9	0,77692	0,768393	0,90473	0,90657	1,68165	1,674963	0,12781	0,136337
3	0,8244	0,816243	0,86603	0,867879	1,66206	1,665742	0,04163	0,049787
3,1	Разрыв связи		Разрыв связи		Разрыв связи		0	0

Сопоставляя результаты моделирования и аналитических вычислений, отметим их соответствие (различие результатов составляет тысячные доли). Причем точность расчета может быть увеличена за счет более мелкого разбиения стержня на участки малой длины.

Моделирование улавливает «скачки» продольной деформации в сечении  $x = 0$  в момент прихода к сечению отраженных от сечения  $x = l$  волн (в табл. 1.5.1 состояние системы в этот момент времени отражено в строках при  $\tilde{t} = 2^-$  и  $\tilde{t} = 2^+$ ). Фиксируется также момент разрыва связи.

## Выводы

Разработана волновая модель движения механической системы, состоящей из активного звена (локомотива), упругого стержня и транспортируемого объекта. Волновая модель позволяет учесть распределенную массу стержня, определить скорость перемещения транспортируемого объекта и характер деформирования стержня.

Решение волнового уравнения строится с использованием метода бегущих волн. Функции прямых и обратных волн на различных интервалах движения определяются из условий их формирования в сечениях стержня, сопряженных с ведущим звеном и транспортируемым объектом.

Характеристики формируемых на границах прямых и обратных волн образуют поле волновых состояний рассматриваемой механической системы. Поле волновых состояний позволяет оценивать характер и длительность волнового состояния, которое испытывает произвольное сечение стержня на любом интервале движения.

Вычислительная схема базируется на представлении стержня в виде множества последовательно сопряженных участков, на схеме формирования прямой волны в сечении  $x = 0$ , на схеме формирования прямой и обратной волн на границах сопряженных участков, на схеме формирования обратной волны на границе «торец стержня – ведущее звено (локомотив)», на свойстве функций прямых и обратных волн сохранять свои параметры при распространении по однородному участку со скоростью звука.

На интервале  $0 \leq t \leq 2l/a$  скорость транспортируемого объекта не в состоянии достигнуть скорости ведущего звена (локомотива). Чем меньше масса транспортируемого объекта, тем больше скорость транспортируемого объекта в конце интервала.

На интервале  $0 \leq t \leq 2l/a$  продольная деформация в сечении  $x = 0$  является положительной, т. е. стержень в этом сечении испытывает растяжение. Максимального значения продольная деформация в сечении  $x = 0$  на интервале  $0 \leq t \leq 2l/a$  достигает в начальный момент времени (при  $\tilde{t} = 0$ ) и равна  $v/a$ .

На интервале  $2l/a \leq t \leq 4l/a$  скорость транспортируемого объекта при соотношении масс  $0,6 \leq \tilde{m} < \infty$  достигнет скорости локомотива в момент времени  $\tilde{t}_* = 2 + 0,5e^{-2\tilde{m}} / \tilde{m}$ .

## 1.6. Математическая модель процесса переноса энергии волны деформации постоянной интенсивности через упругий слой разнородных сопряженных стержней

### Постановка задачи

При нанесении продольного удара по стержневой системе формируется волна деформации, распространяющаяся к технологической среде [1.1-1.5, 1.13-1.15]. Если в стержневой системе имеются сопряжения разнородных участков, то на границе сопряжения возникают процессы, связанные с отражением и трансформацией волн [1.7, 1.32, 1.45-1.49, 1.55, 1.56, 1.61-1.62, 1.69, 1.71, 1.76-1.79].

Наиболее изучены эти процессы для идеальных границ, когда сопряженные сечения участков имеют одинаковые перемещения и скорости, а трансформация волн связана лишь с разной площадью поперечных сечений сопрягаемых участков и различием физико-механических свойств материалов этих участков.

Менее изучены процессы преобразования волн деформаций в стержневой системе, имеющей такие сопряжения, когда перемещения сопряженных сечений различны из-за наличия между ними промежуточных деформируемых тел. Из известных работ можно отметить исследования Алпеевой В.А. [1.7], Саруева Л. А., Слестина А. П., Авдеевой А. И., Шадриной А. В. [1.55, 1.56, 1.61-1.62, 1.69], Шапошникова И. Д. [1.71], Lundberg B., Gupta R., Andersson L. E. [1.78], Nygren T., Andersson L. E., Lundberg B. [1.79].

В работе рассмотрен процесс преобразования продольной волны деформации постоянной интенсивности на границе разнородных стержней. Схема стержневой системы изображена на рис. 1.6.1.

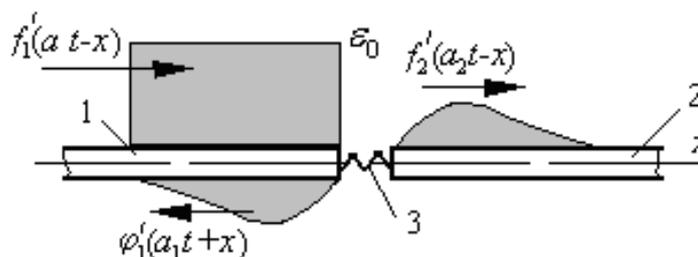


Рис. 1.6.1. Схема стержневой системы при падающей волне деформации:  
1, 2 – стержни системы; 3 – упругий элемент

Два полуограниченных разнородных стержня 1 и 2 (рисунок 1.6.1) в сечении  $x=0$  разделены упругой прокладкой 3. Инерционными свойствами упругой прокладки пренебрегаем, учитывая лишь ее упругие свойства.

На границу  $x=0$  со стороны стержня 1 падает прямая волна. Параметры падающей волны считаются известными. Требуется определить формируемую в сечении  $x=0$  прямую волну, распространяющуюся в направлении оси  $x$  по стержню 2, и обратную волну, формирующуюся в сечении  $x=0$  и распространяющуюся по стержню 1 в другом направлении.

### Волновая модель системы

Движение сечений рассматриваемой динамической системы описывается волновыми уравнениями

$$\frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a_1^2} \frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a_2^2} \frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial t^2} = 0, \quad (1.6.1)$$

где  $u_1(x,t)$ ,  $u_2(x,t)$  – смещения сечений соответственно 1-го и 2-го стержней,  $a_1, a_2$  – скорости распространения волн деформаций в стержнях;  $x$  – координата поперечного сечения,  $t$  – время.

Начальное состояние системы описывается равенствами:

$$\text{при } t = 0 \quad u_1(x,0) = u(x), \quad u_2(x,0) = 0, \quad \frac{\partial u_1(x,0)}{\partial t} = v(x), \quad \frac{\partial u_2(x,0)}{\partial t} = 0. \quad (1.6.2)$$

Граничные условия рассматриваемой динамической системы имеют вид: для  $x = 0$

$$E_1 A_1 \frac{\partial u_1(0,t)}{\partial x} = E_2 A_2 \frac{\partial u_2(0,t)}{\partial x}, \quad E_2 A_2 \frac{\partial u_2(0,t)}{\partial x} = -k[u_1(0,t) - u_2(0,t)], \quad (1.6.3)$$

$$\text{для } x \rightarrow -\infty \quad E_1 A_1 \frac{\partial u_1(x,t)|_{x \rightarrow -\infty}}{\partial x} = 0,$$

$$\text{для } x \rightarrow \infty \quad E_2 A_2 \frac{\partial u_2(\infty,t)|_{x \rightarrow \infty}}{\partial x} = 0, \quad (1.6.4)$$

где  $k$  – жесткость упругого элемента;  $E_1, E_2$  – модули упругости материалов стержней;  $A_1, A_2$  – площади поперечных сечений стержней.

По методу бегущих волн решения уравнений (1.6.1) предоставляются в виде

$$u_1(x,t) = f_1(a_1 t - x) + \varphi_1(a_1 t + x), \quad -\infty \leq x \leq 0, \quad (1.6.5)$$

$$u_2(x,t) = f_2(a_2 t - x) + \varphi_2(a_2 t + x), \quad 0 \leq x \leq \infty, \quad (1.6.6)$$

где  $f_1(a_1 t - x)$ ,  $f_2(a_2 t - x)$  – функции, описывающие волны деформации, распространяющиеся слева направо (прямые волны);  $\varphi_1(a_1 t + x)$ ,  $\varphi_2(a_2 t + x)$  – функции, описывающие волны деформации, распространяющиеся справа налево (обратные волны).

Так как стержень 2 полуограниченный и в начальный момент времени находится в состоянии покоя, то можно принять, что  $\varphi_2(a_2t + x) = 0$ . Тогда

$$u_1(x, t) = f_1(a_1t - x) + \varphi_1(a_1t + x), \quad u_2(x, t) = f_2(a_2t - x). \quad (1.6.7)$$

Продифференцируем последние равенства по  $x$ :

$$\frac{\partial u_1(x, t)}{\partial x} = -f_1'(a_1t - x) + \varphi_1'(a_1t + x), \quad \frac{\partial u_2(x, t)}{\partial x} = -f_2'(a_2t - x). \quad (1.6.8)$$

Для сечения  $x = 0$

$$\frac{\partial u_1(0, t)}{\partial x} = -f_1'(a_1t - 0) + \varphi_1'(a_1t + 0), \quad \frac{\partial u_2(0, t)}{\partial x} = -f_2'(a_2t - 0). \quad (1.6.9)$$

Используя (1.6.9) в первом граничном условии (1.6.3), получим

$$\varphi_1'(a_1t + 0) = -\frac{E_2A_2}{E_1A_1} f_2'(a_2t - 0) + f_1'(a_1t - 0). \quad (1.6.10)$$

Рассмотрим граничное условие (1.6.3):

$$E_2A_2 \frac{\partial u_2(0, t)}{\partial x} = -k[u_1(0, t) - u_2(0, t)].$$

Учитывая (1.6.7) и (1.6.9) при  $x = 0$ , получим

$$E_2A_2 f_2'(a_2t - 0) = k[f_1(a_1t - 0) + \varphi_1(a_1t + 0) - f_2(a_2t - 0)].$$

Дифференцируя по  $t$ , приходим к равенству

$$f_2''(a_2t - 0) = \frac{ka_1}{E_2A_2a_2} \left[ 2f_1'(a_1t - 0) - \frac{E_2A_2}{E_1A_1} f_2'(a_2t - 0) - \frac{a_2}{a_1} f_2'(a_2t - 0) \right].$$

Данное уравнение преобразуем к виду

$$f_2''(a_2t - 0) + \frac{k(r+1)}{E_2A_2r} f_2'(a_2t - 0) = \frac{2ka_1}{E_2A_2a_2} f_1'(a_1t - 0), \quad (1.6.11)$$

где  $r = \frac{E_1A_1}{a_1} \frac{a_2}{E_2A_2}$  – отношение волнового сопротивления  $\frac{E_1A_1}{a_1}$  стержня 1 к волновому сопротивлению  $\frac{E_2A_2}{a_2}$  стержня 2.

Обозначим отношения

$$\frac{k(r+1)}{E_2A_2r} = \alpha, \quad \frac{2ka_1}{E_2A_2a_2} = \beta. \quad (1.6.12)$$

Тогда из (1.6.11)

$$f_2''(a_2t - 0) + \alpha f_2'(a_2t - 0) = \beta f_1'(a_1t - 0). \quad (1.6.13)$$

Введем переменную  $\xi = a_2t - 0$ . Решение дифференциального уравнения (1.6.13) представим как

$$f_2'(\xi) = V(\xi) \cdot Z(\xi), \quad (1.6.14)$$

$$V(\xi) = C_1 \cdot e^{-\alpha\xi}, \quad Z(\xi) = \int \frac{\beta f_1'(a_1 t - 0)}{V(\xi)} d\xi + C_2, \quad (1.6.15)$$

где  $C_1, C_2$  – постоянные интегрирования.

Из (1.6.15) видим, что решение (1.6.14) зависит от функции  $f_1'(a_1 t - 0)$ , определяющей параметры волны деформации, падающей на границу сопряжения стержней со стороны стержня 1.

### **Преобразование падающей волны прямоугольной формы на границе сопряжения стержней с упругим слоем**

Функция  $f_1'(a_1 t - 0)$ , определяющая параметры волны деформации, падающей на границу сопряжения стержней со стороны стержня 1, имеет вид:

$$f_1'(a_1 t - 0) = \begin{cases} \varepsilon_0, & 0 \leq t \leq T, \\ 0, & t \geq T, \end{cases} \quad (1.6.16)$$

где  $\varepsilon_0$  – значение функции  $f_1'(a_1 t - 0)$  на интервале  $0 \leq t \leq T$ ;  $T$  – длительность действия падающей волны;  $t$  – время.

Учитывая (1.6.16) в (1.6.15) при определении функции  $Z(\xi)$ , находим на интервале  $0 \leq t \leq T$   $Z(\xi) = \frac{\beta \varepsilon_0}{\alpha C_1} e^{\alpha\xi} + C_2$ . Решение (1.6.14) с учетом (1.6.15) на интервале  $0 \leq t \leq T$  примет вид

$$f_2'(\xi) = V(\xi) \cdot Z(\xi) = \frac{\beta \varepsilon_0}{\alpha} + C \cdot e^{-\alpha\xi}, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (1.6.17)$$

Постоянную интегрирования  $C$  найдем из условия, что в начальный момент времени при  $\xi = 0$  упругий элемент не деформирован и значение  $f_2'(0) = 0$ . Следовательно, из (1.6.17) при  $\xi = 0$  находим, что  $C = -\frac{\beta \varepsilon_0}{\alpha}$ .

Тогда решение (1.6.17) на интервале  $0 \leq t \leq T$  представим как

$$f_2'(\xi) = \frac{\beta \varepsilon_0}{\alpha} (1 - e^{-\alpha\xi}), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (1.6.18)$$

Рассмотрим теперь процесс формирования волны деформации  $f_2'(\xi)$  после завершения действия падающей волны на интервале  $t \geq T$ , когда  $f_1'(a_1 t) = 0$ . Формирование волны  $f_2'(\xi)$  происходит за счет накопленной в упругом элементе потенциальной энергии.

Учитывая в (1.6.15) при определении функции  $Z(\xi)$ , что на интервале  $t \geq T$  функция  $f_1'(a_1 t) = 0$ , находим

$$Z(\xi) = \int \frac{\beta f_1'(a_1 t)}{V(\xi)} d\xi + C_2 = C_2, \quad t \geq T,$$

а решение (1.6.14) на интервале  $t \geq T$  представим как

$$f_2'(\xi) = C \cdot e^{-\alpha \xi}, \quad t \geq T. \quad (1.6.19)$$

Постоянную  $C$  найдем из условия, что в момент времени  $t = T$  значение  $f_2'(\xi)$  при  $\xi = a_2 T$  определяется из (1.6.18):

$$f_2'(a_2 T) = \frac{\beta \varepsilon_0}{\alpha} (1 - \exp(-\alpha a_2 T)).$$

Подставляя в (1.6.19) при  $\xi = a_2 T$ , получим

$$\frac{\beta \varepsilon_0}{\alpha} (1 - \exp(-\alpha a_2 T)) = C \cdot \exp(-\alpha a_2 T), \quad \text{откуда} \quad C = \frac{\beta \varepsilon_0}{\alpha} (\exp(\alpha a_2 T) - 1).$$

Решение (1.6.19) с учетом  $C$  на интервале  $t \geq T$  примет вид

$$f_2'(\xi) = \frac{\beta \varepsilon_0}{\alpha} (1 - \exp(-\alpha a_2 T)) \cdot \exp(-\alpha a_2 (t - T)), \quad t \geq T. \quad (1.6.20)$$

Итак, если падающая волна  $f_1'(a_1 t - 0)$  имеет прямоугольную форму, то формируемая в стержне 2 волна деформации  $f_2'(a_2 t - 0)$  имеет вид

$$f_2'(\xi) = \begin{cases} \frac{\beta \varepsilon_0}{\alpha} (1 - \exp(-\alpha \xi)), & 0 \leq t \leq T, \\ \frac{\beta \varepsilon_0}{\alpha} (1 - \exp(-\alpha a_2 T)) \cdot \exp(-\alpha a_2 (t - T)), & t \geq T. \end{cases} \quad (1.6.21)$$

Из (1.6.10) в сечении  $x = 0$  обратная волна определится как

$$\varphi_1'(a_1 t - 0) = -\frac{1}{r} \frac{a_2}{a_1} f_2'(a_2 t - 0) + f_1'(a_1 t - 0).$$

Для большей универсальности целесообразно перейти к относительным величинам при определении падающей и формируемых волн. Так относительное значение функции падающей прямой волны

$$\tilde{f}_1'(a_1 t - 0) = \frac{f_1'(a_1 t - 0)}{\varepsilon_0} = \begin{cases} 1, & 0 \leq \frac{t}{T} \leq 1, \\ 0, & \frac{t}{T} \geq 1. \end{cases} \quad (1.6.22)$$

Относительное значение функции в сечении  $x = 0$  прямой волны

$$\tilde{f}_2'(a_2 t - 0) = \frac{f_2'(a_2 t - 0)}{\varepsilon_0} = \begin{cases} \frac{\beta}{\alpha} (1 - e^{-\alpha a_2 t}), & 0 \leq \frac{t}{T} \leq 1, \\ \frac{\beta}{\alpha} (1 - e^{-\alpha a_2 T}) \cdot e^{-\alpha a_2 T (t/T - 1)}, & \frac{t}{T} \geq 1. \end{cases} \quad (1.6.23)$$

Относительное значение функции формируемой в сечении  $x=0$  обратной волны

$$\tilde{\varphi}'_1(a_1t+0) = \frac{\varphi'_1(a_1t+0)}{\varepsilon_0} = -\frac{1}{r} \frac{a_2}{a_1} \tilde{f}'_2(a_2t-0) + \tilde{f}'_1(a_1t-0). \quad (1.6.24)$$

При расчете значений  $\tilde{f}'_2(a_2t-0)$ ,  $\tilde{\varphi}'_1(a_1t+0)$  учитываем [1.44], что

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{2ka_1}{E_2A_2a_2} \cdot \frac{E_2A_2r}{k(r+1)} = \frac{2r}{r+1} \cdot \frac{a_1}{a_2}, \quad \alpha a_2t = \frac{k}{E_2A_2} \cdot \frac{r+1}{r} a_2t = \tilde{k} \frac{r+1}{r} \tilde{t}, \quad (1.6.25)$$

$$\alpha a_2T = \tilde{k} \frac{r+1}{r} \cdot \frac{T}{\Delta T} = \tilde{k} \frac{r+1}{r} \tilde{T}, \quad \frac{t}{T} = \frac{t}{\Delta T} \cdot \frac{\Delta T}{T} = \frac{\tilde{t}}{\tilde{T}}, \quad (1.6.26)$$

где  $\Delta l$  – единица длины стержня 2,  $\tilde{k} = \frac{k \cdot \Delta l}{E_2A_2}$  – отношение жесткости

упругого элемента к продольной жесткости единицы длины стержня 2,  $\Delta T = \Delta l / a_2$  – время прохождения волной деформации расстояния  $\Delta l$  во втором стержне,  $\tilde{t} = t / \Delta T$  – отношение текущего времени  $t$  к  $\Delta T$ ,  $\tilde{T} = T / \Delta T$  – отношение длительности падающей волны  $T$  к  $\Delta T$ .

С учетом представленных равенств имеем

$$\tilde{f}'_2(a_2t-0) = \begin{cases} \frac{2r}{r+1} \cdot \frac{a_1}{a_2} \left( 1 - e^{-\tilde{k} \frac{r+1}{r} \tilde{t}} \right), & 0 \leq \tilde{t} \leq \tilde{T}, \\ \frac{2r}{r+1} \cdot \frac{a_1}{a_2} \left( 1 - e^{-\tilde{k} \frac{r+1}{r} \tilde{T}} \cdot e^{-\tilde{k} \frac{r+1}{r} (\tilde{t} - \tilde{T})} \right), & \tilde{t} \geq \tilde{T}, \end{cases} \quad (1.6.27)$$

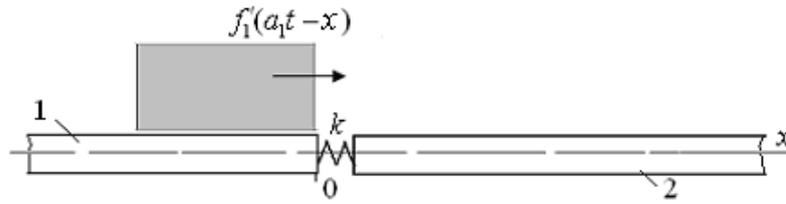
$$\tilde{f}'_1(a_1t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \tilde{t} \leq \tilde{T}, \\ 0, & \tilde{t} \geq \tilde{T}, \end{cases} \quad \tilde{\varphi}'_1(a_1t+0) = -\frac{1}{r} \frac{a_2}{a_1} \tilde{f}'_2(a_2t-0) + \tilde{f}'_1(a_1t-0). \quad (1.6.28)$$

На рисунке 1.6.2 представлены диаграммы падающей волны  $f'_1(a_1t-x)$ , а также сформированных в сечении  $x=0$  прямой волны  $f'_2(a_2t-x)$  и обратной волны  $\varphi'_1(a_1t+x)$  в различные моменты времени в диапазоне  $0 \leq t \leq 2T$ .

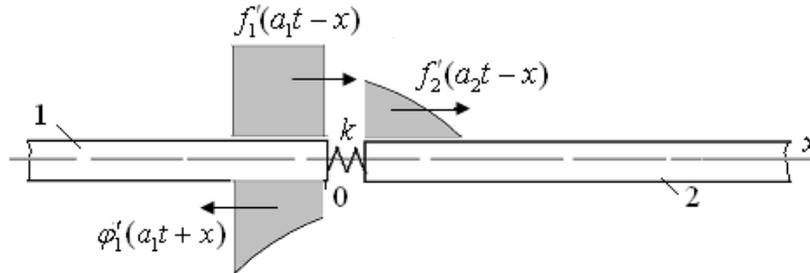
Прошедшая через сечение  $x=0$  волна  $\tilde{f}'_2(a_2t-0)$  существенно отличается по форме от прямоугольной падающей волны. Она состоит из участка роста (передний фронт) и участка спада (задний фронт).

Длительность переднего фронта волны соответствует длительности исходной падающей волны. По отношению к падающей волне длина сформированной в стержне 2 волны увеличивается практически в два раза.

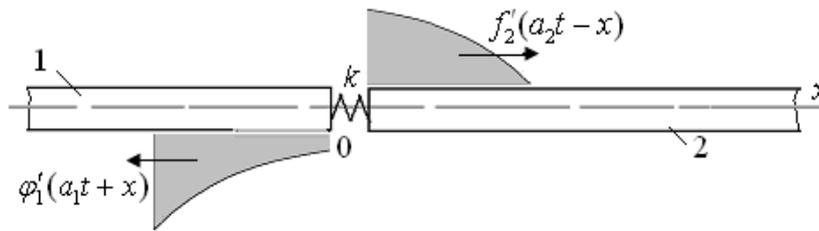
В сформированной волне можно выделить два участка: головной и хвостовой. Длина головного участка волны равна длине падающей прямоугольной волны.



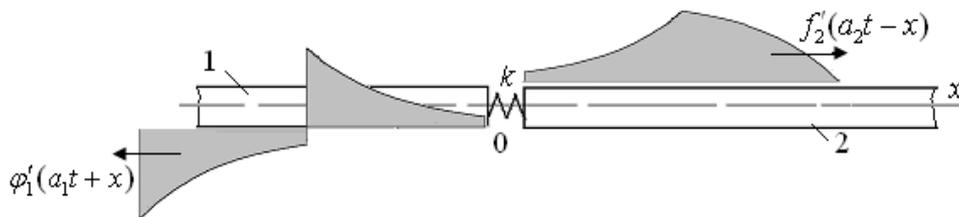
а) диаграмма волны  $f'_1$  при  $t = 0$



б) диаграммы волн  $f'_1$ ,  $f'_2$ ,  $\varphi'_1$  при  $t = T/2$



в) диаграммы волн  $f'_2$ ,  $\varphi'_1$  при  $t = T$



г) диаграммы волн  $f'_2$ ,  $\varphi'_1$  при  $t = 2T$

Рис. 1.6.2. Диаграммы прямых и обратных волн, формируемых на границе сопряжения

Вопрос трансформирования падающей прямоугольной волны рассмотрен в работе [1.44]. Ниже представлены результаты анализа процесса переноса энергии прямоугольной волны на границе сопряжения стержней с упругим слоем.

### Энергия прямых и обратных волн

Энергия  $W_f$  прямой волны деформации  $f'(at - x)$  на участке стержня длиной  $L$  (рис. 1.6.3) состоит из суммы энергий  $dW_f$  элементарных участков, охваченных этой волной:  $W_f = \int_L dW_f$ .

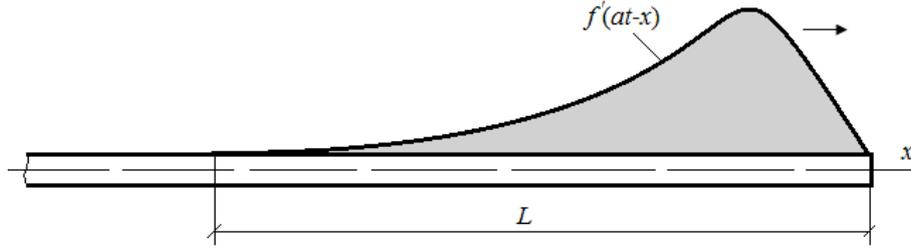


Рис. 1.6.3. Прямая волна  $f'(at-x)$  на участке стержня длиной  $L$

Энергию элементарного участка стержня, охваченного волной, определим как сумму кинетической и потенциальной энергии элементарного участка:

$$dW_f = \frac{dm[af'(at-x)]^2}{2} + \frac{EA[-f'(at-x)]^2}{2} dx,$$

где  $dm = \rho A dx$  – масса элементарного участка длиной  $dx$ ,  $\rho$  – плотность материала,  $E$  – модуль упругости 1-го рода.

Энергия прямой волны

$$W_f = \int_L dW_f = \int_L \left[ \frac{\rho A a^2 [f'(at-x)]^2}{2} + \frac{EA[-f'(at-x)]^2}{2} \right] dx.$$

Если учесть, что  $a^2 \rho = E$ , а длина элементарного участка равна  $dx = a dt$ , то

$$W_f = \int_L dW_f = \int_0^{T_f} EAa [f'(at-x)]^2 dt, \quad (1.6.29)$$

где  $T_f$  – длительность действия прямой волны в сечении  $x$ .

Совершенно аналогично, если участок стержня (рис. 1.6.4) длиной  $L$  охвачен обратной волной  $\varphi'(at+x)$ .

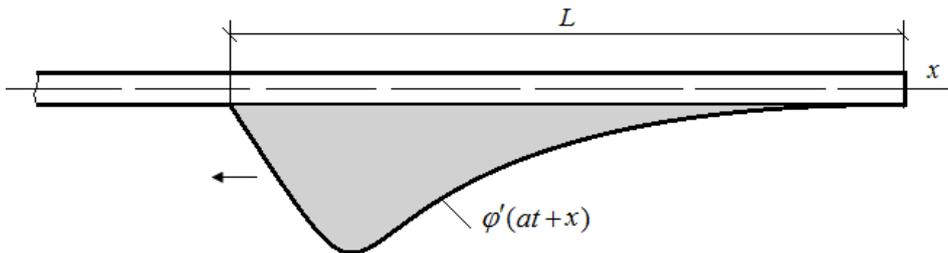


Рис. 1.6.4. Обратная волна  $\varphi'(at+x)$  на участке стержня длиной  $L$

В этом случае энергия  $W_\varphi$  обратной волны  $\varphi'(at+x)$  равна

$$W_\varphi = \int_L dW_\varphi = \int_0^{T_\varphi} EAa [\varphi'(at+x)]^2 dt, \quad (1.6.30)$$

где  $T_\varphi$  – длительность действия обратной волны в сечении  $x$

Рассмотрим схему, когда в сечении  $x=0$  сопряжены два стержня (рис. 1.6.5) и на сечение  $x=0$  со стороны стержня 1 падает прямая волна  $f_1'(a_1t-0)$ .

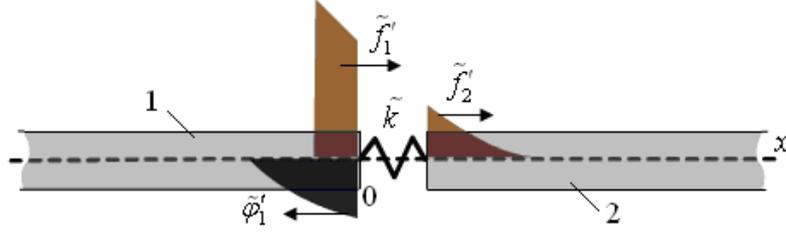


Рис. 1.6.5. Схема сопряжения стержней 1 и 2 с упругим элементом

Для схемы сопряжения стержней, представленной на рис. 1.6.5, энергия падающей на границу сопряжения волны деформации, описываемой функцией  $f_1'(a_1t-0)$ , равна

$$W_{f_1} = \int_0^{T_{f_1}} E_1 A_1 a_1 [f_1'(a_1t-0)]^2 dt, \quad (1.6.31)$$

где  $T_{f_1}$  – длительность действия прямой волны  $f_1'(a_1t-0)$  в сечении  $x=0$ .

Энергия прошедшей через границу сопряжения волны  $f_2'(a_2t-0)$

$$W_{f_2} = \int_0^{T_{f_2}} E_2 A_2 a_2 [f_2'(a_2t-0)]^2 dt, \quad (1.6.32)$$

где  $T_{f_2}$  – длительность формирования прямой волны  $f_2'(a_2t-0)$ .

Коэффициент эффективности передачи энергии во второй стержень определяется отношением

$$\eta = W_{f_2} / W_{f_1} = \left( E_2 A_2 a_2 \int_0^{T_{f_2}} [f_2'(a_2t-0)]^2 dt \right) / \left( E_1 A_1 a_1 \int_0^{T_{f_1}} [f_1'(a_1t-0)]^2 dt \right).$$

Длительность  $T_{f_2}$  формирования прямой волны  $f_2'(a_2t-0)$  в сечении  $x=0$  складывается из длительности  $T_{f_1}$  действия прямой волны  $f_1'(a_1t-0)$  и времени  $(\tau = t - T_{f_1})$  после окончания действия прямой волны  $f_1'(a_1t-0)$ :  $T_{f_2} = T_{f_1} + \tau$ .

Тогда коэффициент эффективности передачи энергии во второй стержень определится как

$$\eta = W_{f_2} / W_{f_1} = \frac{E_2 A_2 a_2 \left[ \int_0^{T_{f_1}} [f_2'(a_2t-0)]^2 dt + \int_{T_{f_1}}^t [f_2'(a_2t-0)]^2 dt \right]}{E_1 A_1 a_1 \int_0^{T_{f_1}} [f_1'(a_1t-0)]^2 dt}. \quad (1.6.33)$$

Для определения энергии  $W_{f_1}$  прямой волны  $f_1'(a_1t-0)$  предложена следующая вычислительная схема. Падающая волна  $f_1'(a_1t-0)$  на оси времени  $t$  (рис. 1.6.6) разбивается на  $n_1$  интервалов длительностью  $\Delta t = T_{f_1} / n_1$ .

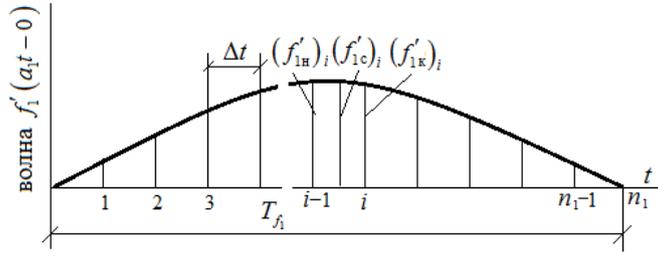


Рис. 1.6.6. Диаграмма падающей волны  $f_1'(a_1t-0)$  с разбивкой времени  $T_{f_1}$  на  $n_1$  интервалов длительностью  $\Delta t = T_{f_1} / n_1$

Примем, что в пределах малого  $\Delta t$  функцию  $f_1'(a_1t-0)$  можно аппроксимировать квадратичной функцией. Тогда для вычисления интеграла  $\int_0^{T_{f_1}} E_1 A_1 a_1 [f_1'(a_1t-0)]^2 dt = W_{f_1}$  используем формулу, дающую точные значения для линейных и квадратичных функций:

$$W_{f_1} = E_1 A_1 a_1 \sum_1^{n_1} \frac{\Delta t}{6} [(f_{1н}')_i]^2 + 4(f_{1с}')_i^2 + (f_{1к}')_i^2, \quad (1.6.34)$$

где  $n_1 = T_{f_1} / \Delta t$  – количество интервалов длительностью  $\Delta t$ ,  $(f_{1н}')_i$  – значение функции  $f_1'(a_1t-0)$  в начале  $i$ -го интервала,  $(f_{1с}')_i$  – значение функции  $f_1'(a_1t-0)$  в середине  $i$ -го интервала,  $(f_{1к}')_i$  – значение функции  $f_1'(a_1t-0)$  в конце  $i$ -го интервала.

Аналогично определим энергию  $W_{f_2}$  формируемой прямой волны  $f_2'(a_2t-0)$ . Волна  $f_2'(a_2t-0)$  на оси времени  $t$  (рис. 1.6.7) разбивается на  $n_2$  интервалов длительностью  $\Delta t = T_{f_2} / n_2$ .

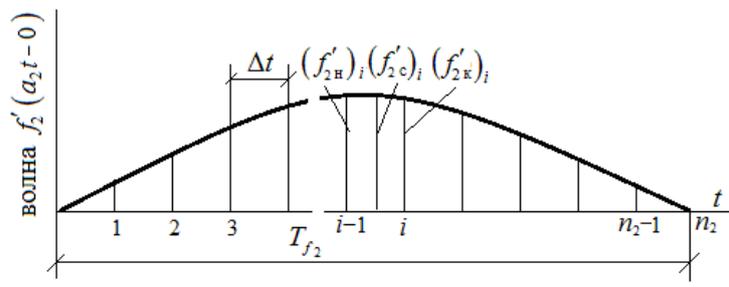


Рис. 1.6.7. Диаграмма формируемой волны  $f_2'(a_2t-0)$  с разбивкой времени  $T_{f_2}$  на  $n_2$  интервалов длительностью  $\Delta t = T_{f_2} / n_2$

Примем, что в пределах малого  $\Delta t$  функцию  $f_2'(a_2t - 0)$  можно аппроксимировать квадратичной функцией. Тогда интеграл

$$\int_0^{T_{f_2}} E_2 A_2 a_2 [f_2'(a_2t - 0)]^2 dt = W_{f_2},$$

$$W_{f_2} = E_2 A_2 a_2 \sum_1^{n_2} \frac{\Delta t}{6} [(f_{2н}'(a_2t - 0))^2 + 4(f_{2с}'(a_1t - 0))^2 + (f_{2к}'(a_1t - 0))^2]_i, \quad (1.6.35)$$

где  $n_2 = T_{f_2} / \Delta t$  – количество интервалов длительностью  $\Delta t$ ,  $f_{2н}'(a_2t - 0)$  – значение функции  $f_2'(a_2t - 0)$  в начале  $i$ -го интервала,  $f_{2с}'(a_2t - 0)$  – значение функции  $f_2'(a_2t - 0)$  в середине  $i$ -го интервала,  $f_{2к}'(a_2t - 0)$  – значение функции  $f_2'(a_2t - 0)$  в конце  $i$ -го интервала.

**Энергия прямой волны  $f_1'(a_1t - 0)$  постоянной интенсивности, падающей на границу сопряжения, и энергия прошедшей через границу волны  $f_2'(a_2t - 0)$**

Пусть падающая волна  $f_1'(a_1t - 0)$  имеет постоянную интенсивность:

$$f_1'(a_1t) = \begin{cases} \varepsilon_0, & 0 \leq t \leq T, \\ 0, & t \geq T, \end{cases}$$

где  $\varepsilon_0$  – значение функции  $f_1'(a_1t)$  на интервале  $0 \leq t \leq T$ ;  $T$  – длительность действия падающей волны;  $t$  – время.

Если длительность действия волны  $f_1'(a_1t - 0)$  в сечении  $x = 0$  равна  $T$ , то энергия падающей на границу сопряжения волны деформации за время  $t = T$  определится как

$$W_{f_1}(T) = \int_0^T E_1 A_1 a_1 [f_1'(a_1t - 0)]^2 dt = E_1 A_1 \varepsilon_0^2 a_1 T = E_1 A_1 \varepsilon_0^2 a_1 \Delta T \tilde{T}, \quad \tilde{T} = \frac{T}{\Delta T}, \quad (1.6.36)$$

где  $\Delta T = \Delta l / a_2$  – время прохождения волны деформации расстояния, равного единице длины  $\Delta l$  второго стержня.

В произвольный момент времени  $\tilde{t}$  ( $0 \leq \tilde{t} \leq \tilde{T}$ ) энергия падающей на границу сопряжения волны деформации  $f_1'(a_1t - 0)$  равна

$$W_{f_1}(t) = \int_0^t E_1 A_1 a_1 [f_1'(a_1t - 0)]^2 dt = E_1 A_1 \varepsilon_0^2 a_1 t = E_1 A_1 \varepsilon_0^2 a_1 \Delta T \tilde{t}, \quad \tilde{t} = t / \Delta T. \quad (1.6.37)$$

При выполнении расчетов целесообразно использовать величину энергии волны деформации  $f_1'(a_1t - 0)$  в безразмерной форме в виде

$$\tilde{W}_{f_1}(t) = W_{f_1}(t) / (E_1 A_1 \varepsilon_0^2 a_1 \Delta T) = \tilde{t}, \quad (1.6.38)$$

где произведение сомножителей  $E_1 A_1 a_1 \varepsilon_0^2 \Delta T = W_{f_1}(T)$ , определяет значение энергии в падающей прямой волне  $W_{f_1}(t)$  при  $\tilde{t} = 1$ .

Энергия прошедшей через границу сопряжения волны  $f_2'(a_2 t - 0)$  равна:

$$W_{f_2} = \int_0^t E_2 A_2 a_2 [f_2'(a_2 t - 0)]^2 dt.$$

Используя относительное время  $\tilde{t} = t / \Delta T$ ,  $\tilde{T} = T / \Delta T$ , запишем

$$W_{f_2} = E_2 A_2 a_2 \Delta T \int_0^{\tilde{t}} [f_2'(a_2 t - 0)]^2 d\tilde{t}.$$

Учитывая (1.6.27), определим формируемую во втором стержне прямую волну  $f_2'(a_2 t - 0)$ :

$$f_2'(a_2 t - 0) = \varepsilon_0 \tilde{f}_2'(a_2 t) = \begin{cases} \varepsilon_0 \frac{2r}{r+1} \cdot \frac{a_1}{a_2} \left( 1 - e^{-\frac{\tilde{k} r + 1}{r} \tilde{t}} \right), & 0 \leq \tilde{t} \leq \tilde{T}, \\ \varepsilon_0 \frac{2r}{r+1} \cdot \frac{a_1}{a_2} \left( 1 - e^{-\frac{\tilde{k} r + 1}{r} \tilde{T}} \right) \cdot e^{-\frac{\tilde{k} r + 1}{r} (\tilde{t} - \tilde{T})}, & \tilde{t} \geq \tilde{T}. \end{cases}$$

Имеет место две фазы движения: 1-я фаза, когда  $0 \leq \tilde{t} \leq \tilde{T}$ , и 2-я фаза, когда  $\tilde{t} \geq \tilde{T}$ . Соответственно, в первой фазе движения энергия волны  $f_2'(a_2 t - 0)$  в произвольный момент времени  $\tilde{t}$  равна

$$(W_{f_2})_I = E_2 A_2 a_2 \Delta T \int_0^{\tilde{t}} [f_2'(a_2 t - 0)]^2 d\tilde{t}, \quad 0 \leq \tilde{t} \leq \tilde{T}, \quad (1.6.39)$$

Во второй фазе движения во второй стержень поступит то количество энергии, которое будет содержаться в формируемой волне  $f_2'(a_2 t - 0)$  за время  $\tilde{\tau} = \tilde{t} - \tilde{T}$

$$(W_{f_2})_{II} = E_2 A_2 a_2 \Delta T \int_{\tilde{T}}^{\tilde{t}} [f_2'(a_2 t - 0)]^2 d\tilde{t}, \quad \tilde{t} \geq \tilde{T}. \quad (1.6.40)$$

Найдем значение энергии, переданной во второй стержень в первой фазе движения системы в произвольный момент времени, когда  $0 \leq \tilde{t} \leq \tilde{T}$ :

$$\begin{aligned} (W_{f_2})_I &= E_2 A_2 a_2 \Delta T \int_0^{\tilde{t}} [f_2'(a_2 t - 0)]^2 d\tilde{t} = \\ &= E_2 A_2 a_2 \Delta T \left( 2 \frac{r}{r+1} \frac{a_1}{a_2} \varepsilon_0 \right)^2 \int_0^{\tilde{t}} \left( 1 - e^{-\frac{\tilde{k}(r+1)}{r} \tilde{t}} \right)^2 d\tilde{t} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= E_2 A_2 a_2 \Delta T \left( 2 \frac{r}{r+1} \frac{a_1}{a_2} \varepsilon_0 \right)^2 \left( \tilde{t} + \frac{2re^{-\frac{\tilde{k}(r+1)\tilde{t}}{r}}}{\tilde{k}(r+1)} - \frac{re^{-\frac{2\tilde{k}(r+1)\tilde{t}}{r}}}{2\tilde{k}(r+1)} - \frac{3r}{2\tilde{k}(r+1)} \right) = \\
&= \frac{E_2 A_2 a_2}{E_1 A_1 a_1} E_1 A_1 a_1 \left( \frac{a_1}{a_2} \right)^2 \varepsilon_0^2 \Delta T \left( 2 \frac{r}{r+1} \right)^2 \times \\
&\quad \times \left( \tilde{t} + \frac{2re^{-\frac{\tilde{k}(r+1)\tilde{t}}{r}}}{\tilde{k}(r+1)} - \frac{re^{-\frac{2\tilde{k}(r+1)\tilde{t}}{r}}}{2\tilde{k}(r+1)} - \frac{3r}{2\tilde{k}(r+1)} \right) = \\
&= \frac{E_2 A_2}{E_1 A_1} \frac{a_1}{a_2} E_1 A_1 a_1 \varepsilon_0^2 \Delta T \left( 2 \frac{r}{r+1} \right)^2 \left( \tilde{t} + \frac{2re^{-\frac{\tilde{k}(r+1)\tilde{t}}{r}}}{\tilde{k}(r+1)} - \frac{re^{-\frac{2\tilde{k}(r+1)\tilde{t}}{r}}}{2\tilde{k}(r+1)} - \frac{3r}{2\tilde{k}(r+1)} \right) = \\
&= \frac{1}{r} E_1 A_1 a_1 \varepsilon_0^2 \Delta T \left( 2 \frac{r}{r+1} \right)^2 \left( \tilde{t} + \frac{2re^{-\frac{\tilde{k}(r+1)\tilde{t}}{r}}}{\tilde{k}(r+1)} - \frac{re^{-\frac{2\tilde{k}(r+1)\tilde{t}}{r}}}{2\tilde{k}(r+1)} - \frac{3r}{2\tilde{k}(r+1)} \right).
\end{aligned}$$

Выполненные преобразования позволили представить формулу для  $(W_{f_2})_1$ , в которую входят сомножители  $E_1 A_1 a_1 \varepsilon_0^2 \Delta T = W_{f_1}(T)$ , определяющие значение энергии в падающей прямой волне  $W_{f_1}(t)$  при  $\tilde{t} = 1$ . Эти преобразования позволяют представить в безразмерной форме энергию, переданную во второй стержень в первой фазе движения системы, когда  $0 \leq \tilde{t} \leq \tilde{T}$ :

$$(\tilde{W}_{f_2})_1 = \frac{(W_{f_2})_1}{E_1 A_1 a_1 \varepsilon_0^2 \Delta T} = \frac{4r}{(r+1)^2} \left( \tilde{t} + \frac{2re^{-\frac{\tilde{k}(r+1)\tilde{t}}{r}}}{\tilde{k}(r+1)} - \frac{re^{-\frac{2\tilde{k}(r+1)\tilde{t}}{r}}}{2\tilde{k}(r+1)} - \frac{3r}{2\tilde{k}(r+1)} \right). \quad (1.6.41)$$

Формулу (1.6.41) можно видоизменить:

$$\frac{4r}{(r+1)^2} = \frac{4r^2}{(r+1)^2} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{a_1^2}{a_2^2} = \frac{1}{r} \left( \frac{2r}{(r+1)} \frac{a_1}{a_2} \right)^2 \frac{a_2^2}{a_1^2} = \frac{q^2}{r} \left( \frac{a_2}{a_1} \right)^2, \quad (1.6.42)$$

$$(\tilde{W}_{f_2})_1 = \frac{(W_{f_2})_1}{E_1 A_1 a_1 \varepsilon_0^2 \Delta T} = \frac{q^2}{r} \left( \frac{a_2}{a_1} \right)^2 \left( \tilde{t} + \frac{2re^{-\frac{\tilde{k}(r+1)\tilde{t}}{r}}}{\tilde{k}(r+1)} - \frac{re^{-\frac{2\tilde{k}(r+1)\tilde{t}}{r}}}{2\tilde{k}(r+1)} - \frac{3r}{2\tilde{k}(r+1)} \right), \quad (1.6.43)$$

где  $q = \frac{2r}{(r+1)} \frac{a_1}{a_2}$  – коэффициент прохождения волны деформации из первого стержня во второй при идеальном сопряжении без упругого элемента в сопряженных сечениях.

Энергия, переданная во второй стержень в конце первой фазы движения системы, когда  $\tilde{t} = \tilde{T}$ :

$$\frac{(W_{f_2})_I|_{\tilde{t}=\tilde{T}}}{E_1 A_1 a_1 \varepsilon_0^2 \Delta T} = \frac{4r}{(r+1)^2} \left( \tilde{T} + \frac{2re^{-\frac{\tilde{k}(r+1)\tilde{T}}{r}}}{\tilde{k}(r+1)} - \frac{re^{-\frac{2\tilde{k}(r+1)\tilde{T}}{r}}}{2\tilde{k}(r+1)} - \frac{3r}{2\tilde{k}(r+1)} \right). \quad (1.6.44)$$

Соответственно, относительная величина

$$(\tilde{W}_{f_2})_I|_{\tilde{t}=\tilde{T}} = \frac{(W_{f_2})_I|_{\tilde{t}=\tilde{T}}}{E_1 A_1 a_1 \varepsilon_0^2 \Delta T},$$

а с учетом (1.6.44)

$$(\tilde{W}_{f_2})_I|_{\tilde{t}=\tilde{T}} = \frac{4r}{(r+1)^2} \left( \tilde{T} + \frac{2re^{-\frac{\tilde{k}(r+1)\tilde{T}}{r}}}{\tilde{k}(r+1)} - \frac{re^{-\frac{2\tilde{k}(r+1)\tilde{T}}{r}}}{2\tilde{k}(r+1)} - \frac{3r}{2\tilde{k}(r+1)} \right). \quad (1.6.45)$$

Значение энергии, переданной во второй стержень во второй фазе движения системы в произвольный момент времени за время  $\tilde{t} = \tilde{t} - \tilde{T}$ , определим из (1.6.40) с учетом (1.6.28):

$$\begin{aligned} (W_{f_2})_{II} &= E_2 A_2 a_2 \left( 2 \frac{r}{r+1} \frac{a_1}{a_2} \varepsilon_0 \right)^2 \left[ 1 - e^{-\frac{\tilde{k}r+1}{r}\tilde{t}} \right]^2 \Delta T \int_{\tilde{T}}^{\tilde{t}-\tilde{T}} \left( e^{-\frac{\tilde{k}r+1}{r}(\tilde{t}-\tilde{T})} \right)^2 d\tilde{t} = \\ &= E_2 A_2 a_2 \left( 2 \frac{r}{r+1} \frac{a_1}{a_2} \varepsilon_0 \right)^2 \left[ 1 - e^{-\frac{\tilde{k}r+1}{r}\tilde{t}} \right]^2 \frac{\Delta T r}{2\tilde{k}(r+1)} \left( 1 - e^{-2\frac{\tilde{k}r+1}{r}(\tilde{t}-\tilde{T})} \right), \quad \tilde{t} \geq \tilde{T}. \\ (W_{f_2})_{II} &= E_2 A_2 a_2 \left( 2 \frac{r}{r+1} \frac{a_1}{a_2} \varepsilon_0 \right)^2 \left[ 1 - e^{-\frac{\tilde{k}r+1}{r}\tilde{t}} \right]^2 \frac{\Delta T r}{2\tilde{k}(r+1)} \left( 1 - e^{-2\frac{\tilde{k}r+1}{r}(\tilde{t}-\tilde{T})} \right) = \\ &= \frac{E_2 A_2 a_2}{E_1 A_1 a_1} E_1 A_1 a_1 \Delta T \left( 2 \frac{r}{r+1} \frac{a_1}{a_2} \varepsilon_0 \right)^2 \left[ 1 - e^{-\frac{\tilde{k}r+1}{r}\tilde{t}} \right]^2 \frac{r}{2\tilde{k}(r+1)} \left( 1 - e^{-2\frac{\tilde{k}r+1}{r}(\tilde{t}-\tilde{T})} \right) = \\ &= \frac{E_2 A_2 a_2}{E_1 A_1 a_1} E_1 A_1 a_1 \Delta T \left( \frac{a_1}{a_2} \right)^2 \varepsilon_0^2 \left( 2 \frac{r}{r+1} \right)^2 \left[ 1 - e^{-\frac{\tilde{k}r+1}{r}\tilde{t}} \right]^2 \frac{r}{2\tilde{k}(r+1)} \left( 1 - e^{-2\frac{\tilde{k}r+1}{r}(\tilde{t}-\tilde{T})} \right). \\ (\tilde{W}_{f_2})_{II} &= \frac{(W_{f_2})_{II}}{E_1 A_1 a_1 \varepsilon_0^2 \Delta T} = \frac{4r}{(r+1)^2} \left[ 1 - e^{-\frac{\tilde{k}r+1}{r}\tilde{t}} \right]^2 \frac{r}{2\tilde{k}(r+1)} \left( 1 - e^{-2\frac{\tilde{k}r+1}{r}(\tilde{t}-\tilde{T})} \right), \quad \tilde{t} \geq \tilde{T}. \end{aligned}$$

Полная энергия  $W_{f_2}$  прошедшей через границу сопряжения волны  $f_2'(a_2 t - 0)$  с учетом первой и второй фаз движения, когда  $\tilde{t} \geq \tilde{T}$ , равна

$$\begin{aligned}
W_{f_2} &= (W_{f_2})_I|_{\tilde{t}=\tilde{T}} + (W_{f_2})_{II}, \\
W_{f_2} &= E_2 A_2 a_2 \Delta T \left( 2 \frac{r}{r+1} \frac{a_1}{a_2} \varepsilon_0 \right)^2 \left( \tilde{T} + \frac{2re^{-\tilde{k}(r+1)\tilde{T}}}{\tilde{k}(r+1)} - \frac{re^{-2\tilde{k}(r+1)\tilde{T}}}{2\tilde{k}(r+1)} - \frac{3r}{2\tilde{k}(r+1)} \right) + \\
&+ E_2 A_2 a_2 \left( 2 \frac{r}{r+1} \frac{a_1}{a_2} \varepsilon_0 \right)^2 \left[ 1 - e^{-\tilde{k}r+1\tilde{T}} \right]^2 \frac{\Delta T r}{2\tilde{k}(r+1)} \left( 1 - e^{-2\tilde{k}r+1(\tilde{t}-\tilde{T})} \right), \quad \tilde{t} \geq \tilde{T}. \\
W_{f_2} &= \frac{E_2 A_2 a_2}{E_1 A_1 a_1} E_1 A_1 a_1 \left( \frac{a_1}{a_2} \right)^2 \varepsilon_0^2 \Delta T \left( 2 \frac{r}{r+1} \right)^2 \times \\
&\times \left( \tilde{T} + \frac{2re^{-\tilde{k}(r+1)\tilde{T}}}{\tilde{k}(r+1)} - \frac{re^{-2\tilde{k}(r+1)\tilde{T}}}{2\tilde{k}(r+1)} - \frac{3r}{2\tilde{k}(r+1)} \right) + \\
&+ \frac{E_2 A_2 a_2}{E_1 A_1 a_1} E_1 A_1 a_1 \left( \frac{a_1}{a_2} \right)^2 \varepsilon_0^2 \Delta T \left( 2 \frac{r}{r+1} \right)^2 \left[ 1 - e^{-\tilde{k}r+1\tilde{T}} \right]^2 \frac{r}{2\tilde{k}(r+1)} \left( 1 - e^{-2\tilde{k}r+1(\tilde{t}-\tilde{T})} \right). \\
W_{f_2} &= E_1 A_1 a_1 \varepsilon_0^2 \Delta T \frac{4r}{(r+1)^2} \left( \tilde{T} + \frac{2re^{-\tilde{k}(r+1)\tilde{T}}}{\tilde{k}(r+1)} - \frac{re^{-2\tilde{k}(r+1)\tilde{T}}}{2\tilde{k}(r+1)} - \frac{3r}{2\tilde{k}(r+1)} \right) + \\
&+ E_1 A_1 a_1 \varepsilon_0^2 \Delta T \frac{4r}{(r+1)^2} \left[ 1 - e^{-\tilde{k}r+1\tilde{T}} \right]^2 \frac{r}{2\tilde{k}(r+1)} \left( 1 - e^{-2\tilde{k}r+1(\tilde{t}-\tilde{T})} \right), \quad \tilde{t} \geq \tilde{T}.
\end{aligned}$$

В таблице 1.6.1 приведены результаты расчета параметров падающей на сечение  $x=0$  прямой волны  $\tilde{f}'_1(a_1 t - 0)$ , формируемой прямой волны  $\tilde{f}'_2(a_2 t - 0)$ , энергии прямой волны  $\tilde{W}_{f_1}(t) = W_{f_1}(t) / E_1 A_1 \varepsilon_0^2 a_1 \Delta T$ ; энергии формируемой прямой волны  $f'_2(a_2 t - 0)$  в первой фазе движения системы  $\tilde{W}_{f_2} = W_{f_2} / E_1 A_1 \varepsilon_0^2 a_1 \Delta T$  (когда  $0 \leq \tilde{t} \leq \tilde{T}$ ), энергии прямой волны  $f'_2(a_2 t - 0)$  во второй фазе движения системы  $\tilde{W}_{f_2} = W_{f_2} / E_1 A_1 \varepsilon_0^2 a_1 \Delta T$  (когда  $\tilde{t} \geq \tilde{T}$ ).

Параметры падающей на сечение  $x=0$  прямой волны  $\tilde{f}'_1(a_1 t - 0) = 1$  на интервале  $0 \leq \tilde{t} \leq \tilde{T}$  и  $\tilde{f}'_1(a_1 t - 0) = 0$ , когда  $\tilde{t} \geq \tilde{T}$ . В таблице 1.6.1 приведены результаты расчета соответственно для  $r=1, \tilde{k}=1, \tilde{T}=1$ ;  $r=1, \tilde{k}=2, \tilde{T}=1$ ;  $r=1, \tilde{k}=5, \tilde{T}=1$ .

Таблица 1.6.1

Результаты расчета параметров падающей и формируемой волн, энергии падающей и формируемой волн

Время $\tilde{t}$	Волна $\tilde{f}_1(a_1t-0)$	Энергия $\tilde{W}_{f_1}(t)$	Волна	Энергия	Волна	Энергия	Волна	Энергия
			$\tilde{f}_2'(a_2t-0)$	$(\tilde{W}_{f_2})$	$\tilde{f}_2'(a_2t-0)$	$(\tilde{W}_{f_2})$	$\tilde{f}_2'(a_2t-0)$	$(\tilde{W}_{f_2})$
			$r=1, \tilde{k}=1, \tilde{T}=1$		$r=1, \tilde{k}=2, \tilde{T}=1$		$r=1, \tilde{k}=5, \tilde{T}=1$	
0	1	0	0	0	0	0	0	0
0,05	1	0,05	0,095163	0,000151	0,181269	0,00057	0,393469	0,002912
0,1	1	0,1	0,181269	0,001137	0,32968	0,00399	0,632121	0,016809
0,15	1	0,15	0,259182	0,003587	0,451188	0,01175	0,77687	0,042137
0,2	1	0,2	0,32968	0,007942	0,550671	0,02442	0,864665	0,076151
0,25	1	0,25	0,393469	0,014496	0,632121	0,04202	0,917915	0,11608
0,3	1	0,3	0,451188	0,023428	0,698806	0,06425	0,950213	0,159833
0,35	1	0,35	0,503415	0,03483	0,753403	0,09069	0,969803	0,205994
0,4	1	0,4	0,550671	0,048728	0,798103	0,12085	0,981684	0,253646
0,45	1	0,45	0,59343	0,065098	0,834701	0,15423	0,988891	0,302216
0,5	1	0,5	0,632121	0,083879	0,864665	0,19037	0,993262	0,351345
0,55	1	0,55	0,667129	0,104985	0,889197	0,22886	0,995913	0,400817
0,6	1	0,6	0,698806	0,128311	0,909282	0,26933	0,997521	0,450495
0,65	1	0,65	0,727468	0,153743	0,925726	0,31144	0,998497	0,500301
0,7	1	0,7	0,753403	0,181158	0,93919	0,35494	0,999088	0,550182
0,75	1	0,75	0,77687	0,210432	0,950213	0,39958	0,999447	0,600111
0,8	1	0,8	0,798103	0,24144	0,959238	0,44517	0,999665	0,650067
0,85	1	0,85	0,817316	0,274062	0,966627	0,49154	0,999797	0,700041
0,9	1	0,9	0,834701	0,308178	0,972676	0,53856	0,999877	0,750025
0,95	1	0,95	0,850431	0,343674	0,977629	0,58612	0,999925	0,800015
1	1	1	0,864665	0,380445	0,981684	0,63411	0,999955	0,850009
1,05	0	1	0,782381	0,414382	0,803735	0,67383	0,606503	0,881612
1,1	0	1	0,707928	0,442168	0,658043	0,70045	0,367863	0,893238
1,15	0	1	0,640559	0,464917	0,53876	0,71829	0,22312	0,897515
1,2	0	1	0,579602	0,483543	0,441099	0,73025	0,135329	0,899089
1,25	0	1	0,524446	0,498792	0,361141	0,73827	0,082081	0,899668
1,3	0	1	0,474538	0,511277	0,295678	0,74365	0,049785	0,899881
1,35	0	1	0,42938	0,521499	0,24208	0,74725	0,030196	0,899959
1,4	0	1	0,388519	0,529868	0,198199	0,74966	0,018315	0,899988
1,45	0	1	0,351546	0,53672	0,162271	0,75128	0,011108	0,899998
1,5	0	1	0,318092	0,54233	0,132857	0,75237	0,006738	0,900002
1,55	0	1	0,287822	0,546923	0,108774	0,7531	0,004087	0,900004

Время $\tilde{t}$	Волна $\tilde{f}'_1(a_1t-0)$	Энергия $\tilde{W}_{f_1}(t)$	Волна $\tilde{f}'_2(a_2t-0)$	Энергия $(\tilde{W}_{f_2})$	Волна $\tilde{f}'_2(a_2t-0)$	Энергия $(\tilde{W}_{f_2})$	Волна $\tilde{f}'_2(a_2t-0)$	Энергия $(\tilde{W}_{f_2})$
			$r=1, \tilde{k}=1, \tilde{T}=1$		$r=1, \tilde{k}=2, \tilde{T}=1$		$r=1, \tilde{k}=5, \tilde{T}=1$	
1,6	0	1	0,260432	0,550683	0,089056	0,75358	0,002479	0,900004
1,65	0	1	0,235649	0,553762	0,072913	0,75391	0,001503	0,900004
1,7	0	1	0,213224	0,556282	0,059696	0,75413	0,000912	0,900004
1,75	0	1	0,192933	0,558346	0,048875	0,75428	0,000553	0,900004
1,8	0	1	0,174573	0,560036	0,040016	0,75437	0,000335	0,900004
1,85	0	1	0,15796	0,561419	0,032762	0,75444	0,000203	0,900004
1,9	0	1	0,142928	0,562552	0,026823	0,75448	0,000123	0,900004
1,95	0	1	0,129327	0,563479	0,021961	0,75451	$\approx 0$	0,900004
2	0	1	0,11702	0,564238	0,01798	0,75453	$\approx 0$	0,900004
2,05	0	1	0,105884	0,56486	0,014721	0,75455	$\approx 0$	0,900004
2,1	0	1	0,095808	0,565369	0,012052	0,75456	$\approx 0$	0,900004

На рис. 1.6.8 представлены диаграммы, характеризующие изменение во времени энергии падающей волны  $\tilde{f}'_1(a_1t-0)$  на интервалах  $0 \leq \tilde{t} \leq \tilde{T}$  и  $\tilde{t} \geq \tilde{T}$ .

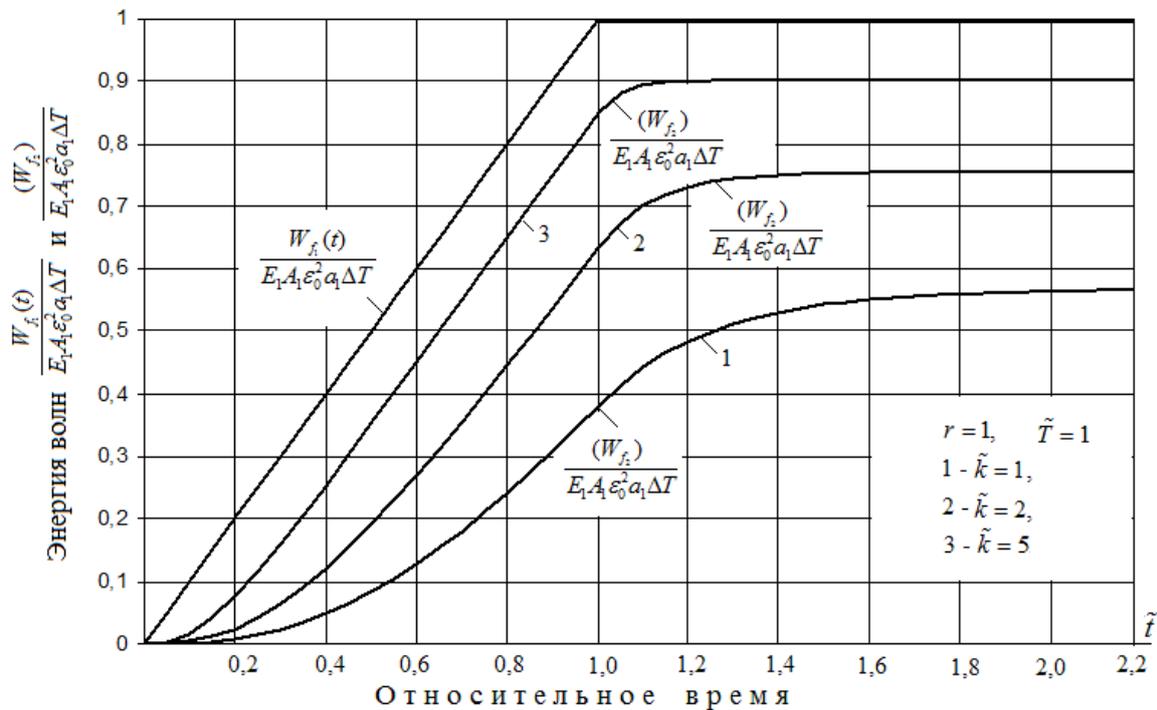


Рис. 1.6.8. Диаграммы, характеризующие изменение во времени энергий падающей  $\tilde{W}_{f_1}(t) = W_{f_1}(t) / E_1 A_1 \varepsilon_0^2 a_1 \Delta T$  и формируемой волн  $\tilde{W}_{f_2}(t) = W_{f_2}(t) / E_1 A_1 \varepsilon_0^2 a_1 \Delta T$ :

1 -  $\tilde{k}=1, 2 - \tilde{k}=2, 3 - \tilde{k}=5$  при  $r=1, \tilde{T}=1$

Здесь  $\tilde{W}_{f_1}(t) = W_{f_1}(t) / E_1 A_1 \varepsilon_0^2 a_1 \Delta T$ ; энергии формируемой во втором стержне прямой волны  $f_2'(a_2 t - 0)$  в первой фазе движения системы в произвольный момент времени  $\tilde{W}_{f_2} = W_{f_2} / E_1 A_1 \varepsilon_0^2 a_1 \Delta T$  (когда  $0 \leq \tilde{t} \leq \tilde{T} = 1$ ), энергии прямой волны  $f_2'(a_2 t - 0)$  во второй фазе движения системы в произвольный момент времени  $\tilde{W}_{f_2} = W_{f_2} / E_1 A_1 \varepsilon_0^2 a_1 \Delta T$  (когда  $\tilde{t} \geq \tilde{T} = 1$ ).

Количество переносимой энергии (при одном и том же значении энергии падающей волны) существенно зависит от относительной жесткости упругого элемента  $\tilde{k}$ . Например, если в момент времени  $\tilde{t} = 0,4$  энергия падающей волны  $\tilde{W}_{f_1}(t)$  равна 0,4, то количество энергии сформированной во втором стержне волны в этот момент времени составляет всего  $\tilde{W}_{f_2} = 0,0487$  для  $\tilde{k} = 1$  (полезная реализация составила всего 12 %);  $\tilde{W}_{f_2} = 0,1208$  для  $\tilde{k} = 2$  (полезная реализация составила 30 %);  $\tilde{W}_{f_2} = 0,2536$  для  $\tilde{k} = 5$  (полезная реализация составила 63,4 %).

В момент времени  $\tilde{t} = 1$  (когда завершено действие падающей волны) и ее энергия  $\tilde{W}_{f_1}(t)$  достигла 1, количество энергии  $\tilde{W}_{f_2}$  в этот момент времени составляет  $\tilde{W}_{f_2} = 0,3804$  для  $\tilde{k} = 1$  (полезная реализация составила 38 %);  $\tilde{W}_{f_2} = 0,6341$  для  $\tilde{k} = 2$  (полезная реализация составила 63,4 %);  $\tilde{W}_{f_2} = 0,85$  для  $\tilde{k} = 5$  (полезная реализация составила 85 %).

### **Вычислительная схема для определения энергии волн деформаций и эффективности процесса переноса энергии на границе сопряжения стержней с упругим слоем**

Если падающая волна будет иметь более сложную форму, процедура получения замкнутых решений может быть весьма громоздкой. Поэтому целесообразна разработка вычислительной схемы расчета рассматриваемых динамических процессов.

Для определения энергии  $W_{f_1}$  прямой волны используется следующая вычислительная схема. Падающая волна  $f_1'(a_1 t - 0)$  на оси времени  $t$  (рис. 1.6.9) разбивается на  $n_1$  интервалов длительностью  $\Delta t = T_{f_1} / n_1$ .

Для вычисления интеграла  $\int_0^{T_{f_1}} E_1 A_1 a_1 [f_1'(a_1 t - 0)]^2 dt = W_{f_1}$  используем формулу, дающую точные значения для линейных и квадратичных функций:

$$W_{f_1} = E_1 A_1 a_1 \sum_1^{n_1} \frac{\Delta t}{6} [(f'_{1н}(a_1 t - 0))^2 + 4(f'_{1с}(a_1 t - 0))^2 + (f'_{1к}(a_1 t - 0))^2]_i,$$

где  $n_1 = T_{f_1} / \Delta t$  – количество интервалов длительностью  $\Delta t$ ,  $f'_{1н}(a_1 t - 0)$  – значение функции  $f'_1(a_1 t - 0)$  в начале  $i$ -го интервала,  $f'_{1с}(a_1 t - 0)$  – значение функции  $f'_1(a_1 t - 0)$  в середине  $i$ -го интервала,  $f'_{1к}(a_1 t - 0)$  – значение функции  $f'_1(a_1 t - 0)$  в конце  $i$ -го интервала.

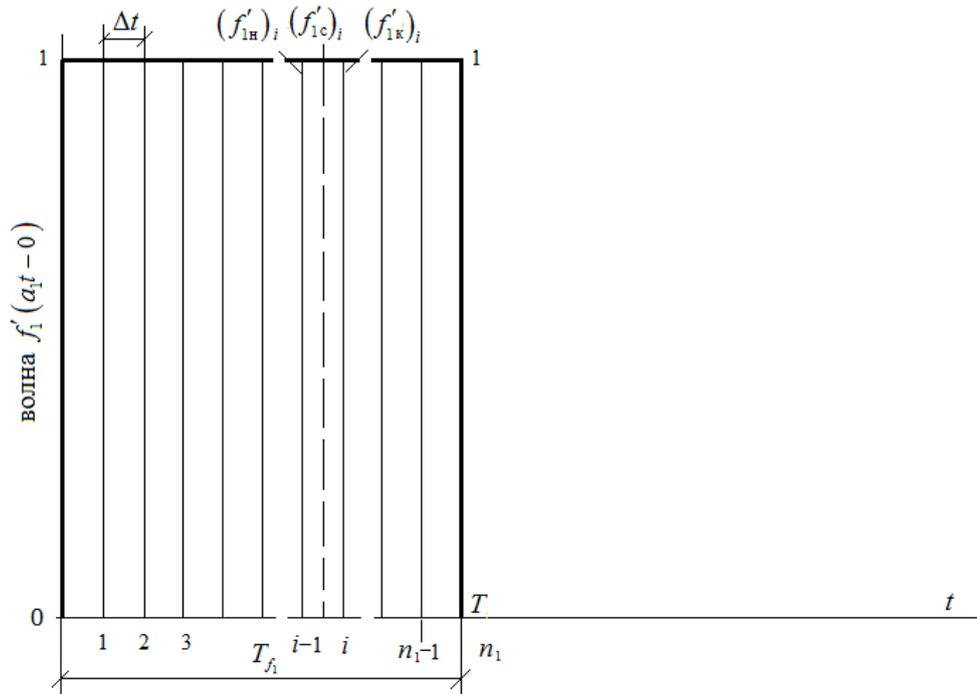


Рис. 1.6.9. Диаграмма падающей волны  $f'_1(a_1 t - 0)$  с разбивкой времени  $T_{f_1}$  на  $n_1$  интервалов длительностью  $\Delta t = T_{f_1} / n_1$

Аналогично определим энергию  $W_{f_2}$  формируемой прямой волны  $f'_2(a_2 t - 0)$ . Волна  $f'_2(a_2 t - 0)$  на оси времени  $t$  (рис. 1.6.10) разбивается на  $n_2$  интервалов длительностью  $\Delta t = T_{f_2} / n_2$ . Примем, что в пределах малого  $\Delta t$  функцию  $f'_2(a_2 t - 0)$  можно аппроксимировать квадратичной функцией. Тогда интеграл  $\int_0^{T_{f_2}} E_2 A_2 a_2 [f'_2(a_2 t - 0)]^2 dt = W_{f_2}$ :

$$W_{f_2} = E_2 A_2 a_2 \sum_1^{n_2} \frac{\Delta t}{6} [(f'_{2н}(a_2 t - 0))^2 + 4(f'_{2с}(a_2 t - 0))^2 + (f'_{2к}(a_2 t - 0))^2]_i,$$

где  $n_2 = T_{f_2} / \Delta t$  – количество интервалов длительностью  $\Delta t$ ,  $f'_{2н}(a_2 t - 0)$  – значение функции  $f'_2(a_2 t - 0)$  в начале  $i$ -го интервала,  $f'_{2с}(a_2 t - 0)$  –

значение функции  $f_2'(a_2t-0)$  в середине  $i$ -го интервала,  $f_{2к}'(a_2t-0)$  – значение функции  $f_2'(a_2t-0)$  в конце  $i$ -го интервала.

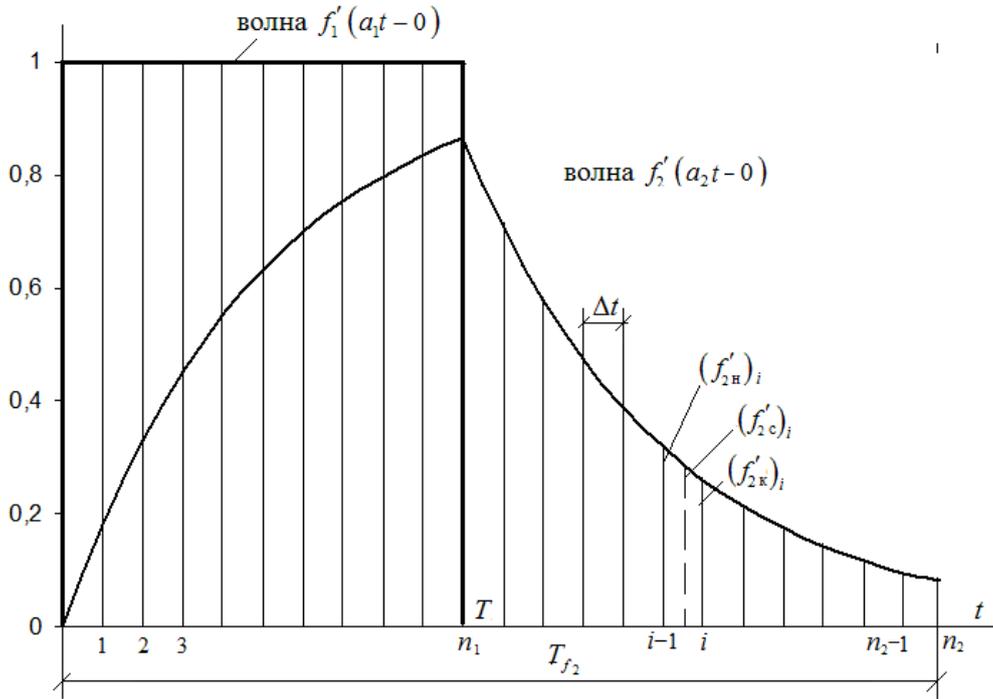


Рис. 1.6.10. Диаграмма формируемой волны  $f_2'(a_2t-0)$  с разбивкой времени  $T_{f_2}$  на  $n_2$  интервалов длительностью  $\Delta t = T_{f_2} / n_2$

В таблице 1.6.2 приведены результаты аналитического расчета по формулам (1.6.27) и (1.6.28) параметров падающей волны  $\tilde{f}_1'(a_1t-0)$  и формируемой во втором стержне прямой волны  $\tilde{f}_2'(a_2t-0)$ ; численного расчета энергии падающей волны, определяемой как

$$(\tilde{W}_{f_1})_{\text{числен}} = \frac{W_{f_1}(t)}{E_1 A_1 \varepsilon_0^2 a_1 \Delta T} =$$

$$= \sum_1^{n_1} \frac{\Delta \tilde{t}}{6} [(\tilde{f}'_{1н}(a_1t-0))^2 + 4(\tilde{f}'_{1с}(a_1t-0))^2 + (\tilde{f}'_{1к}(a_1t-0))^2]_i ;$$

результаты аналитического расчета энергии формируемой во втором стержне прямой волны, определяемой на интервале  $0 \leq \tilde{t} \leq \tilde{T}$  как

$$(\tilde{W}_{f_2})_{\text{аналит}} = \frac{(W_{f_2})_{\text{аналит}}}{E_1 A_1 a_1 \varepsilon_0^2 \Delta T} = \frac{4r}{(r+1)^2} \left( \tilde{t} + \frac{2re^{-\frac{\tilde{k}(r+1)\tilde{t}}{r}}}{\tilde{k}(r+1)} - \frac{re^{-\frac{2\tilde{k}(r+1)\tilde{t}}{r}}}{2\tilde{k}(r+1)} - \frac{3r}{2\tilde{k}(r+1)} \right) ;$$

результаты аналитического расчета энергии формируемой во втором стержне прямой волны, определяемой на интервале  $\tilde{t} \geq \tilde{T}$  как

$$(\tilde{W}_{f_2})_{\text{аналит}} = \frac{(W_{f_2})_{\text{аналит}}}{E_1 A_1 a_1 \varepsilon_0^2 \Delta T} = \frac{4r}{(r+1)^2} \left( \tilde{T} + \frac{2re^{-\frac{\tilde{k}(r+1)\tilde{T}}{r}}}{\tilde{k}(r+1)} - \frac{re^{-\frac{2\tilde{k}(r+1)\tilde{T}}{r}}}{2\tilde{k}(r+1)} - \frac{3r}{2\tilde{k}(r+1)} \right) + E_1 A_1 a_1 \varepsilon_0^2 \Delta T \frac{4r}{(r+1)^2} \left[ 1 - e^{-\frac{\tilde{k}r+1}{r}\tilde{T}} \right]^2 \frac{r}{2\tilde{k}(r+1)} \left( 1 - e^{-\frac{2\tilde{k}r+1}{r}(\tilde{t}-\tilde{T})} \right);$$

результаты численного расчета энергии формируемой во втором стержне прямой волны, определяемой как

$$(\tilde{W}_{f_2})_{\text{числен}} = \sum_1^{n_2} \frac{\Delta \tilde{t}}{6} [(\tilde{f}'_{2н}(a_2 t - 0))^2 + 4(\tilde{f}'_{2с}(a_1 t - 0))^2 + (\tilde{f}'_{2к}(a_1 t - 0))^2]_i,$$

результаты аналитического расчета эффективности переноса во второй стержень  $\eta_{\text{аналит}}$  энергии падающей волны, определяемой как

$$\eta_{\text{аналит}} = (\tilde{W}_{f_2})_{\text{аналит}} / \tilde{W}_{f_1};$$

результаты численного расчета эффективности переноса во второй стержень  $\eta_{\text{числен}}$  энергии падающей волны, определяемой как

$$\eta_{\text{числен}} = (\tilde{W}_{f_2})_{\text{числен}} / \tilde{W}_{f_1}.$$

Таблица 1.6.2

Результаты аналитического и численного расчета эффективности переноса энергии

Время $\tilde{t}$	Волна $\tilde{f}'_1(a_1 t - 0)$	Волна $\tilde{f}'_2(a_2 t - 0)$	$\frac{W_{f_1}(t)}{E_1 A_1 \varepsilon_0^2 a_1 \Delta T}$	$\frac{(W_{f_2})_{\text{аналит}}}{E_1 A_1 \varepsilon_0^2 a_1 \Delta T}$	$\frac{(W_{f_2})_{\text{числен}}}{E_1 A_1 \varepsilon_0^2 a_1 \Delta T}$	$\eta_{\text{аналит}}$	$\eta_{\text{числен}}$
$r = 1, \tilde{k} = 1, \tilde{T} = 1$							
0	1	0	0	0	0	0	0
0,05	1	0,095163	0,05	0,000155	0,000151	0,003095	0,003019
0,1	1	0,181269	0,1	0,001151	0,001137	0,011507	0,01137
0,15	1	0,259182	0,15	0,003615	0,003587	0,024102	0,023915
0,2	1	0,32968	0,2	0,007988	0,007942	0,039939	0,039712
0,25	1	0,393469	0,25	0,014561	0,014496	0,058243	0,057985
0,3	1	0,451188	0,3	0,023513	0,023428	0,078377	0,078094
0,35	1	0,503415	0,35	0,034936	0,03483	0,099817	0,099515
0,4	1	0,550671	0,4	0,048855	0,048728	0,122137	0,121821
0,45	1	0,59343	0,45	0,065245	0,065098	0,144989	0,144662
0,5	1	0,632121	0,5	0,084046	0,083879	0,168091	0,167758

Окончание таблицы 1.6.2

Время $\tilde{t}$	Волна $\tilde{f}_1'(a_1t-0)$	Волна $\tilde{f}_2'(a_2t-0)$	$\frac{W_{f_1}(t)}{E_1 A_1 \varepsilon_0^2 a_1 \Delta T}$	$\frac{(W_{f_2})_{\text{аналит}}}{E_1 A_1 \varepsilon_0^2 a_1 \Delta T}$	$\frac{(W_{f_2})_{\text{числен}}}{E_1 A_1 \varepsilon_0^2 a_1 \Delta T}$	$\eta_{\text{аналит}}$	$\eta_{\text{числен}}$
0,55	1	0,667129	0,55	0,10517	0,104985	0,191219	0,190881
0,6	1	0,698806	0,6	0,128515	0,128311	0,214191	0,213852
0,65	1	0,727468	0,65	0,153963	0,153743	0,236867	0,236527
0,7	1	0,753403	0,7	0,181394	0,181158	0,259135	0,258797
0,75	1	0,77687	0,75	0,210683	0,210432	0,280911	0,280576
0,8	1	0,798103	0,8	0,241706	0,24144	0,302132	0,301801
0,85	1	0,817316	0,85	0,27434	0,274062	0,322753	0,322426
0,9	1	0,834701	0,9	0,308468	0,308178	0,342742	0,34242
0,95	1	0,850431	0,95	0,343976	0,343674	0,36208	0,361763
1	1	0,864665	1	0,380756	0,380445	0,380756	0,380445
1,05	0	0,782381	1	0,414637	0,414382	0,414637	0,414382
1,1	0	0,707928	1	0,442377	0,442168	0,442377	0,442168
1,15	0	0,640559	1	0,465088	0,464917	0,465088	0,464917
1,2	0	0,579602	1	0,483683	0,483543	0,483683	0,483543
1,25	0	0,524446	1	0,498906	0,498792	0,498906	0,498792
1,3	0	0,474538	1	0,511371	0,511277	0,511371	0,511277
1,35	0	0,42938	1	0,521576	0,521499	0,521576	0,521499
1,4	0	0,388519	1	0,529931	0,529868	0,529931	0,529868
1,45	0	0,351546	1	0,536771	0,53672	0,536771	0,53672
1,5	0	0,318092	1	0,542372	0,54233	0,542372	0,54233
1,55	0	0,287822	1	0,546957	0,546923	0,546957	0,546923
1,6	0	0,260432	1	0,550711	0,550683	0,550711	0,550683
1,65	0	0,235649	1	0,553785	0,553762	0,553785	0,553762
1,7	0	0,213224	1	0,556301	0,556282	0,556301	0,556282
1,75	0	0,192933	1	0,558362	0,558346	0,558362	0,558346
1,8	0	0,174573	1	0,560048	0,560036	0,560048	0,560036
1,85	0	0,15796	1	0,561429	0,561419	0,561429	0,561419
1,9	0	0,142928	1	0,56256	0,562552	0,56256	0,562552
1,95	0	0,129327	1	0,563486	0,563479	0,563486	0,563479
2	0	0,11702	1	0,564244	0,564238	0,564244	0,564238
2,05	0	0,105884	1	0,564864	0,56486	0,564864	0,56486
2,1	0	0,095808	1	0,565372	0,565369	0,565372	0,565369
2,15	0	0,08669	1	0,565788	0,565785	0,565788	0,565785

Анализируя результаты, представленные в таблице 1.6.2, можно констатировать, что предложенная вычислительная схема расчета эффективности переноса во второй стержень энергии падающей волны позволяет достаточно качественно определять параметры процесса.

**Выводы.** Прошедшая через сечение  $x=0$  волна  $\tilde{f}'_2(a_2t-0)$  существенно отличается по форме от прямоугольной падающей волны. Она состоит из участка роста (передний фронт) и участка спада (задний фронт). Длительность переднего фронта волны соответствует длительности исходной падающей волны. По отношению к падающей волне длина сформированной в стержне 2 волны увеличивается практически в два раза. В сформированной волне можно выделить два участка: головной и хвостовой. Длина головного участка волны равна длине падающей прямоугольной волны.

Хвостовой участок волны формируется за счет потенциальной энергии упругого элемента, накопленной в период действия падающей прямоугольной волны. Максимальное значение  $\tilde{f}'_2(a_2t-0)$  сформированной прямой волны меньше, чем у падающей волны.

Если волна  $f'_1(a_1t) = \varepsilon_0$  при  $0 \leq t \leq T$  и  $f'_1(a_1t) = 0$  при  $t \geq T$ , то энергия волны  $W_{f_2}$  прошедшей через границу сопряжения волны  $f'_2(a_2t-0)$  с учетом первой и второй фаз движения, когда  $\tilde{t} \geq \tilde{T}$ , равна

$$W_{f_2} = E_1 A_1 a_1 \varepsilon_0^2 \Delta T \frac{4r}{(r+1)^2} \left( \tilde{T} + \frac{2re^{-\frac{\tilde{k}(r+1)\tilde{T}}{r}}}{\tilde{k}(r+1)} - \frac{re^{-\frac{2\tilde{k}(r+1)\tilde{T}}{r}}}{2\tilde{k}(r+1)} - \frac{3r}{2\tilde{k}(r+1)} \right) +$$

$$+ E_1 A_1 a_1 \varepsilon_0^2 \Delta T \frac{4r}{(r+1)^2} \left[ 1 - e^{-\frac{\tilde{k}(r+1)\tilde{T}}{r}} \right]^2 \frac{r}{2\tilde{k}(r+1)} \left( 1 - e^{-\frac{2\tilde{k}(r+1)(\tilde{t}-\tilde{T})}{r}} \right), \quad \tilde{t} \geq \tilde{T}.$$

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК главы 1

- 1.1. Александров, Е. В. Прикладная теория и расчет ударных систем / Е. В. Александров, В. Б. Соколинский. – М. : Наука, 1969. – 199 с.
- 1.2. Алимов, О. Д. Бурильные машины / О. Д. Алимов, Л. Т. Дворников. – М. : Машиностроение, 1976. – 295 с.
- 1.3. Алимов, О. Д. Распространение волн деформаций в ударных системах / О. Д. Алимов, В. К. Манжосов, В. Э. Еремьянц. – Фрунзе : Илим, 1978. – 196 с.
- 1.4. Алимов, О. Д. Метод расчета ударных систем с элементами различной конфигурации / О. Д. Алимов, В. К. Манжосов, В. Э. Еремьянц. – Фрунзе : Илим, 1981. – 72 с.
- 1.5. Алимов, О. Д. Удар. Распространение волн деформаций в ударных системах / О. Д. Алимов, В. К. Манжосов, В. Э. Еремьянц. – М. : Наука, 1985. – 354 с.
- 1.6. Алимов, О. Д. Гидравлические виброударные системы / О. Д. Алимов, С. А. Басов. – М. : Наука, 1990. – 352 с.
- 1.7. Алпеева, В. А. Возбуждение и преобразование волн деформаций в ударных системах машин для испытаний изделий: дисс. канд. техн. наук / В. А. Алпеева. – Фрунзе : ФПИ, 1990. – 281 с.
- 1.8. Асланов, В. С. Динамика буксировки твердого тела на упругом тросе в безгравитационном пространстве / В. С. Асланов, В. В. Юдинцев // Вестник СамГУ – Естественнонаучная серия. Механика. – 2013. – № 3 (104). – С. 58–66.
- 1.9. Асланов, В. С. Колебания спутника с вертикальным упругим тросом на орбите / В. С. Асланов // Известия РАН. Серия: Механика твердого тела. – 2011. – № 5. – С. 3–15.
- 1.10. Ашавский, А. М. Силовые импульсные системы / А. М. Ашавский, А. Я. Вольперт, В. С. Шейнбаум. – М. : Машиностроение, 1978. – 200 с.
- 1.11. Бабицкий, В. И. Теория виброударных систем / В. И. Бабицкий. – М. : Наука, 1978. – 352 с.
- 1.12. Гольдсмит, В. Удар. / В. Гольдсмит. – М. : Стройиздат, 1965. – 448 с.
- 1.13. Дворников, Л. Т. Продольный удар полукатеноидальным бойком / Л. Т. Дворников, И. А. Жуков. – Новокузнецк, 2006. – 80 с.
- 1.14. Дворников, Л. Т. Формирование ударного импульса в полубесконечном стержне бойком, имеющим форму гиперболоида вращения / Л. Т. Дворников, А. А. Мясников // Труды Фрунзенского политехн. ин-та. – Фрунзе : ФПИ, 1977. – вып. 104. – С. 70–82.
- 1.15. Дворников, Л. Т. Исследование импульсов, генерируемых бойками различной формы / Л. Т. Дворников, И. Д. Шапошников // Исследование узлов буровых установок. – Фрунзе : Илим, 1972. – С. 64–70.
- 1.16. Дозоров, А. А. Моделирование переходных процессов движения ударной системы при периодической пульсирующей силе и соударениях о жесткие преграды / А. А. Дозоров, В. К. Манжосов // Автоматизация процессов управления. – 2012. – № 4. – С. 55–61.
- 1.17. Дозоров, А. А. Моделирование движения ударной системы с ударами о жесткие преграды / А. А. Дозоров, В. К. Манжосов // Известия Саратовского университета. – 2013, т. 13, вып. 2, часть 1. Новая серия. Математика. Механика. Информатика. – С. 54–60.
- 1.18. Дозоров, А. А. Синтез виброударной системы при периодической пульсирующей силе с ударами о преграды / А. А. Дозоров, В. К. Манжосов // Фундаментальные и

- прикладные проблемы техники и технологии. Естественные науки. – 2013. – №1 (297). – С. 8–15.
- 1.19. Дозоров, А. А. Режимы движения виброударной системы при изменении характеристик линейной функции пульсирующей силы / А. А. Дозоров, В. К. Манжосов // Автоматизация процессов управления. – 2014. – № 2(36). – С. 36–42.
  - 1.20. Еремьянц, В. Э. Ударное нагружение оснащенных стержней / В. Э. Еремьянц, Ю. В. Невенчаный, Н. Г. Писаренко. – Фрунзе : Илим, 1987. – 165 с.
  - 1.21. Ешуткин, Д. Н. Гидравлические ручные машины ударного действия / Д. Н. Ешуткин, А. В. Журавлева, А. И. Абдурашитов. – Орел : ОрелГТУ, 2011. – 137 с.
  - 1.22. Жуков, И. А. Формирование упругих волн в волноводах при ударе по ним полукатеноидальными бойками: автореф. дисс. канд. техн. наук / И. А. Жуков. – Томск, 2005. – 21 с.
  - 1.23. Жуков, И. А. Модификация дифференциальных уравнений волновой теории продольного соударения стержней / И. А. Жуков, Л. Т. Дворников // Известия Томского политехнического университета. – 2008. – Т. 313, № 2. – С. 5–9.
  - 1.24. Кильчевский, Н. А. Динамическое контактное сжатие твердых тел. Удар / Н. А. Кильчевский. – Киев : Наукова думка, 1976. – 320 с.
  - 1.25. Колосов, Л. В. Продольно-поперечные колебания струны каната подъемной установки / Л. В. Колосов, Т. И. Жигула // Известия вузов. Горный журнал. – 1981. – № 3. – С. 83–86.
  - 1.26. Котылев, Ю. Е. Гидравлические машины ударного действия / Ю. Е. Котылев, В. А. Кравченко, Л. С. Ушаков. – М. : Машиностроение. 2000. – 416 с.
  - 1.27. Листрова, К. С. Моделирование продольного удара упругого стержня как механической системы с конечным числом степеней свободы / К. С. Листрова, В. К. Манжосов // Известия Саратовского ун-та. Нов. сер. – 2011. – Т. 11. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 2. – С. 96–102.
  - 1.28. Малков, О. Б. Расчет ударных импульсов в ступенчатых стержневых системах / О. Б. Малков. – Омск, 2000. – 112 с.
  - 1.29. Малков, О. Б. О расчете многостержневых ступенчатых ударных систем / О. Б. Малков, Стихановский Б. Н. // Физ.-техн. проблемы разработки полезных ископаемых. – 2000. – № 3. – С. 101–107.
  - 1.30. Манжосов, В. К. Модели продольного удара / В. К. Манжосов. – Ульяновск : УлГТУ, 2006. – 160 с.
  - 1.31. Манжосов, В. К. Динамика и синтез кулачковых ударных механизмов / В. К. Манжосов. – Ульяновск : УлГТУ, 2006. – 219 с.
  - 1.32. Манжосов, В. К. Продольный удар / В. К. Манжосов. – Ульяновск : УлГТУ, 2007. – 358 с.
  - 1.33. Манжосов, В. К. Моделирование продольного удара в стержневых системах неоднородной структуры / В. К. Манжосов, В. В. Слепухин. – Ульяновск : УлГТУ, 2011. – 208 с.
  - 1.34. Манжосов, В. К. Моделирование волновых процессов при продольном ударе конического стержня о жесткую преграду / В. К. Манжосов, В. В. Слепухин // Вестник Казанского государственного технического университета им. А. Н. Туполева. – 2009. – №2. – С. 71–75.
  - 1.35. Манжосов, В. К. Моделирование режимов движения ударной системы при периодическом силовом воздействии / В. К. Манжосов, Д. А. Новиков // Известия Саратовского университета. Серия Математика. Механика. Информатика. – 2010. – Т. 10, вып. 4. – С. 65–71.

- 1.36. Манжосов, В. К. Предельные циклы движения ударной системы при действии силы релейного типа и ударе в момент переключения силы / В. К. Манжосов, Д. А. Новиков // Автоматизация процессов управления. – 2011. – № 3 (25). – С. 14–20.
- 1.37. Моделирование виброударной системы при периодическом силовом воздействии с учетом явления дребезга / В. К. Манжосов, Д. А. Новиков, Д. Е. Корняков, И. И. Муромцев. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2010614035. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 22.06.10.
- 1.38. Манжосов, В. К. Проблемно-ориентированный программный комплекс для моделирования движения объекта при ударах о препятствие / В. К. Манжосов, Д. А. Новиков // Автоматизация процессов управления. – 2011. – № 4 (26). – С. 86–91.
- 1.39. Манжосов, В. К. Физическое и математическое моделирование движения виброударной системы / В. К. Манжосов, Д. А. Новиков // В мире научных открытий. – 2011. – № 12 (24). – С. 30–38.
- 1.40. Манжосов, В. К. Управление процессом моделирования движения объекта с ударами о преграду / В. К. Манжосов, Д. А. Новиков // Программные продукты и системы. – 2012. – № 4. – С. 193–198.
- 1.41. Манжосов, В. К. Моделирование движения виброударной системы при различных циклах периодического силового воздействия / В. К. Манжосов, Д. А. Новиков // Прикладная математика и механика: Сборник научных трудов. – Ульяновск : УлГТУ, 2011. – С. 379–388.
- 1.42. Манжосов, В. К. Моделирование невозмущенного и возмущенного движений виброударной системы при анализе устойчивости предельных циклов / В. К. Манжосов, Д. А. Новиков // Материалы X Международной Четаевской конференции «Аналитическая механика, устойчивость и управление», Т. 3. – Казань, 12 – 16 июня 2012. – С. 121–126.
- 1.43. Манжосов, В. К. Синтез виброударной системы при периодическом силовом воздействии / В. К. Манжосов, О. Д. Новикова, Д. А. Новиков // Вестник УлГТУ. – 2008. – № 1. – С. 32–36.
- 1.44. Манжосов, В. К. Трансформация продольной волны деформации постоянной интенсивности на границе соединения стержней с упругим элементом / В. К. Манжосов, И. А. Новикова // Известия Юго-Западного государственного университета. – 2013. – № 1 (46). – С. 155–161.
- 1.45. Манжосов, В. К. Преобразование продольной волны деформации с убывающей интенсивностью на границе сопряжения стержней с упругой прокладкой / В. К. Манжосов, И. А. Новикова // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. – 2010. – № 2 (280). – С. 3–10.
- 1.46. Манжосов, В. К. Преобразование продольной волны деформации линейной формы на границе сопряжения стержней с упругой прокладкой / В. К. Манжосов, И. А. Новикова // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. – 2011. – № 6 (290). – С. 23 – 31.
- 1.47. Манжосов, В. К. Преобразование продольной волны деформации на границе сопряжения стержней с упругим элементом / В. К. Манжосов, И. А. Новикова // Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета им. академика С. П. Королева (национального исследовательского университета). – 2011. – № 2. – С. 186–194.

- 1.48. Манжосов, В. К. Моделирование процесса преобразования волны деформации на границе сопряжения стержней с упругим элементом / В. К. Манжосов, И. А. Новикова // Автоматизация процессов управления. – 2012. – № 1. – С. 30–36.
- 1.49. Манжосов, В. К. Преобразование продольной волны деформации линейной формы с возрастающей интенсивностью в соединении стержней с упругой прокладкой / В. К. Манжосов, И. А. Новикова // Известия Саратовского университета. – 2012. – Т. 12, вып. 4. Новая серия. Математика. Механика. Информатика. – С. 90–96.
- 1.50. Мясников, А. А. Импульс продольных колебаний, генерируемый бойком, имеющим форму гиперболоида вращения, в стержне постоянного поперечного сечения / А. А. Мясников // Материалы 6-й науч.-практ. конф. по проблемам машиностроения, металлургических и горных машин. – Новокузнецк : Сиб. гос. горно-металлургическая академия, 1997. – С. 55–67.
- 1.51. Мясников, А. А. Модифицированное уравнение продольных колебаний стержней переменного поперечного сечения в цилиндрической системе координат / А. А. Мясников // Материалы 7-й науч.-практ. конф. по проблемам машиностроения, металлургических и горных машин. – Новокузнецк : Сиб. гос. горно-металлургическая академия, 1998. – С. 70–79.
- 1.52. Никитин, Л. В. Удар жестким телом по упругому стержню с внешним сухим трением / Л. В. Никитин // МТТ. – 1967. – № 2. – С. 166–170.
- 1.53. Новиков, Д. А. Программный комплекс для моделирования движения ударной системы при периодическом силовом воздействии на ударную массу / Д. А. Новиков // Вестник УлГТУ. – 2011. – № 1. – С. 29–35.
- 1.54. Пановко, Я. Г. Введение в теорию механического удара / Я. Г. Пановко. – М. : Наука, 1977. – 220 с.
- 1.55. Саруев, Л. А. Передача энергии по ставу штанг при продольном импульсном воздействии / Л. А. Саруев, А. П. Слистин, А. И. Авдеева. – Томск, 1995. – 6 с. – Деп. в ВИНИТИ 29.11.95, № 3164-В95.
- 1.56. Саруев, Л. А. Исследование распространения упругих волн в колонне буровых штанг при ударно-вращательном бурении скважин в лабораторных условиях / Л. А. Саруев, А. В. Шадрин // Известия Томского политехнического университета. – 2006. – Т. 309, № 6. – С. 140–144.
- 1.57. Слепухин, В. В. Моделирование движения и восстановления скорости ступенчатого стержня при ударе о жесткую преграду / В. В. Слепухин // Известия ОрелГТУ, серия «Информационные системы и технологии». – 2009. – № 5. – С. 48–55.
- 1.58. Слепухин, В. В. Моделирование волновых процессов при разгоне ступенчатого стержня при действии постоянного давления на торце и последующем ударе о жесткую преграду / В. В. Слепухин // Вестник УлГТУ. – 2008. – № 3. – С. 35–39.
- 1.59. Слепухин, В. В. ModeRod01 / В. В. Слепухин, В. К. Манжосов // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2009610124, 11.01.2009.
- 1.60. Слепухин, В. В. Моделирование волновых процессов в ступенчатом стержне при действии постоянного давления на торце и последующем ударе о жесткую преграду / В. В. Слепухин // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2009610418, 19.01.2009.
- 1.61. Слистин, А. П. Расчет параметров процесса передачи продольного ударного воздействия по составным стержням : автореф. дисс. канд. техн. наук / А. П. Слистин. – Томск, 1990. – 18 с.

- 1.62. Слистин, А. П. Моделирование препятствия типа упругость-масса / А. П. Слистин // Известия Томского политехнического университета. – 2005. – Т. 308. – № 6. – С. 140–143.
- 1.63. Соколинский, В. Б. Машины ударного разрушения / В. Б. Соколинский. – М. : Машиностроение, 1982. – 184 с.
- 1.64. Степанов, А. Г. Динамика машин / А. Г. Степанов. – Екатеринбург : УРО РАН, 1999. – 304 с.
- 1.65. Стихановский, Б. Н. Центральный упругий удар стержней одинакового сечения и материала. О критической массе / Б. Н. Стихановский // Физ.-техн. проблемы разработки полезных ископаемых. – 1965. – № 5. – С. 174–176.
- 1.66. Стихановский, Б. Н. Расчет параметров удара в системах со ступенчатыми ударниками / Б. Н. Стихановский, О. Б. Малков // Анализ и синтез механических систем. – Омск : ОмГТУ, 1998. – С. 40–43.
- 1.67. Ушаков, Л. С. Импульсные технологии и гидравлические ударные механизмы / Л. С. Ушаков. – Орел : ОрелГТУ, 2009. – 249 с.
- 1.68. Флоринский, Ф. В. Динамика шахтного подъемного каната / Ф. В. Флоринский. – М. : Углетехиздат, 1955. – 240 с.
- 1.69. Шадрина, А. В. Исследование закономерностей распространения силовых импульсов по колонне труб при бурении скважин : автореф. дисс. канд. техн. наук / А. В. Шадрина. – Томск : ТПУ, 2007. – 21 с.
- 1.70. Шапошников, И. Д. Исследование волновых ударных импульсов с целью повышения эффективности работы вращательно-ударных механизмов бурильных машин: автореф. дисс... канд. техн. наук / И. Д. Шапошников. – Фрунзе : ФПИ, 1969. – 20 с.
- 1.71. Шапошников, И. Д. Продольный удар. Бурение скважин, влияние стыков штанг // Современные проблемы теории машин : Материалы 2-й Международной научно-практической конференции / И. Д. Шапошников. – Новокузнецк : Издательский центр СибГИУ, 2014. – С. 111–121.
- 1.72. Babitsky V. I., Krupenin V. L. Vibration of Strongly Nonlinear Discontinuous Systems. – Berlin, Heidelberg, New York: Springer – Verlag, 2001. – 404 p.p.
- 1.73. Babitsky V. I., Krupenin, V. L. Vibration of Strongly Nonlinear Discontinuous Systems // Springer 2001, XVI, 397 p. 124 illus.
- 1.74. Bityrin A. A., Manzhosov V. K. Waves induced by the longitudinal impact of a rod against a stepped rod in contact with a rigid barrier // Journal of Applied Mathematics and Mechanics 73 (2009). Pp. 162 – 168.
- 1.75. Krupenin V. L., Veprik A. M. Vibroconductors equipped with impact elements end distributed vibroimpact systems // Proceedings of the 2-nd European Nonlinear Oscillations Conference. V. 1. Czech. Prague: CTU, 1996. – p.p. 229 – 234.
- 1.76. Ibrahim, Raouf A. Vibro-Impact Dynamics Modeling, Mapping and Applications // Springer 2009, XII, 300 p.
- 1.77. Ibrahim Raouf A.; Babitsky V. I.; Okuma, Masaaki (Eds.) Vibro-Impact Dynamics of Ocean Systems and Related Problems // Springer 2009, X, 290 p. 166 illus.
- 1.78. Lundberg B., Gupta R. and Andersson L. E. Optimum transmission of elastic waves through joints. Wave Motion, № 1, 1979. – pp. 193 – 200.
- 1.79. Nygren T., Andersson L. E. and Lundberg B. Optimum transmission of waves through a non-uniform viscoelastic junction between elastic bars. Eur. J. Mech., A/Solids 15, № 1, 1996 – pp. 29–49.

## 2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ АЭРОУПРУГИХ СИСТЕМ

### 2.1. К асимптотической теории трансзвуковых течений газа

Задачи аэродинамики, связанные с переходом через скорость звука, имеют большое прикладное значение. Одной из важных задач является задача обтекания тела безграничным потоком. Этот класс задач играет значительную роль в аэродинамике крыла и снаряда, так как полет многих современных летательных аппаратов происходит в условиях трансзвукового режима обтекания. Результаты анализа и расчета задач обтекания используются при решении ряда актуальных проблем высокоскоростной (реактивной) авиации и внешней баллистики. Другим важным направлением применения теории трансзвуковых течений является расчет движения газа в соплах реактивных двигателей.

Основы теории трансзвуковых течений были заложены на заре развития сверхзвуковой авиации в 1946-1950 гг. С. В. Фальковичем [2.59], Т. Карманом [2.72], Л. В. Овсянниковым [2.54], Ф. И. Франклем [2.61], К. Г. Гудерлеем [2.39] и др. Для нестационарных течений приближенное околосвуковое уравнение было получено в работе [2.63], при этом основная сложность исследования заключается в том, что даже в приближенной постановке указанная проблема нелинейна. Вследствие нелинейности трансзвукового уравнения большой интерес представляет вопрос отыскания точных частных решений, которые необходимы для того, чтобы на основе примеров течений, построенных с их помощью, изучить характерные свойства околосвуковых течений.

#### Вывод асимптотических уравнений и условий

Безвихревые изэнтропические течения газа в цилиндрических безразмерных координатах  $x, r, \theta$  описываются уравнением:

$$\begin{aligned} \Phi_{tt} + 2\Phi_x \Phi_{xt} + 2\Phi_r \Phi_{rt} + \frac{2}{r^2} \Phi_\theta \Phi_{\theta t} + 2\Phi_x \Phi_r \Phi_{rx} + \frac{2}{r^2} \Phi_x \Phi_\theta \Phi_{\theta x} + \frac{2}{r^2} \Phi_\theta \Phi_r \Phi_{r\theta} + \\ + \Phi_x^2 \Phi_{xx} + \Phi_r^2 \Phi_{rr} + \frac{1}{r^4} \Phi_\theta^2 \Phi_{\theta\theta} - a^2 \left( \Phi_{xx} + \Phi_{rr} + \frac{1}{r} \Phi_r + \frac{1}{r^2} \Phi_{\theta\theta} \right) = 0, \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

$$a^2(\Phi) = \rho^{\chi-1} = p^{\frac{(\chi-1)}{\chi}} = \frac{\chi+1}{2} - \frac{\chi-1}{2} \left( 2\Phi_t + \Phi_x^2 + \Phi_r^2 + \frac{1}{2r^2} \Phi_\theta^2 \right). \quad (2.1.2)$$

В (2.1.1) – (2.1.2)  $\Phi(x, r, \theta, t)$  – потенциал скорости,  $t$  – время,  $a$  – скорость звука,  $\rho$  – плотность,  $p$  – давление,  $\chi$  – показатель адиабаты Пуассона, индексы снизу обозначают частные производные.

Введем для  $\Phi(x, r, \theta, t)$  асимптотическое разложение:

$$\Phi = x + \varepsilon \psi(r, \theta, t^0) + \varepsilon^3 \varphi(x^0, r, \theta, t^0) + \dots, \quad x = \varepsilon x^0, \quad t = \frac{1}{\varepsilon} t^0, \quad (2.1.3)$$

где  $\varepsilon$  – малый параметр, функция  $\varphi(x^0, r, \theta, t^0)$  определяет основное течение, а функция  $\psi(r, \theta, t^0)$  задает поперечное возмущение. Подставляя (2.1.3) в (2.1.1) – (2.1.2) и оставляя члены старшего порядка, получим для функции  $\varphi(x^0, r, \theta, t^0)$  трансзвуковое уравнение:

$$2\varphi_{x^0 t^0} + (\chi + 1)\varphi_{x^0} \varphi_{x^0 x^0} + 2\psi_r \varphi_{x^0 r} + \frac{2}{r^2} \psi_\theta \varphi_{x^0 \theta} - \Delta \varphi + \frac{\chi - 1}{2} \left( 2\psi_{t^0} + \psi_r^2 + \frac{1}{r^2} \psi_\theta^2 \right) \varphi_{x^0 x^0} = L(\psi). \quad (2.1.4)$$

В (2.1.4) введены обозначения:

$$\begin{aligned} -L(\psi) \equiv & \psi_{t^0 t^0} + 2\psi_r \psi_{r t^0} + \frac{2}{r^2} \psi_\theta \psi_{\theta t^0} + \psi_r^2 \psi_{rr} + \\ & + \frac{1}{r^4} \psi_\theta^2 \psi_{\theta\theta} + \frac{2}{r^2} \psi_\theta \psi_r \psi_{r\theta} - \frac{1}{r^3} \psi_r \psi_\theta^2, \\ \Delta \varphi \equiv & \varphi_{rr} + \frac{1}{r} \varphi_r + \frac{1}{r^2} \varphi_{\theta\theta}. \end{aligned}$$

Функция  $\psi(r, \theta, t^0)$  удовлетворяет уравнению Лапласа  $\Delta \psi = 0$ .

Если  $\psi \equiv 0$ , то получим классическое трансзвуковое уравнение Линя-Рейсснера-Тзяна [2.48]:

$$2\varphi_{x^0 t^0} + (\chi + 1)\varphi_{x^0} \varphi_{x^0 x^0} - \varphi_{rr} - \frac{1}{r} \varphi_r - \frac{1}{r^2} \varphi_{\theta\theta} = 0,$$

которое в стационарном случае переходит в уравнение смешанного типа Кармана-Фальковича [2.59, 2.72]:

$$(\chi + 1)\varphi_{x^0} \varphi_{x^0 x^0} - \varphi_{rr} - \frac{1}{r} \varphi_r - \frac{1}{r^2} \varphi_{\theta\theta} = 0.$$

Уравнение (2.1.4) описывает трансзвуковые течения газа, возникающие при воздействии на обтекаемое тело бокового (по отношению к основному направлению движения, совпадающему с направлением оси  $x$ ) возмущения основного трансзвукового потока (для возмущающего поперечного течения –  $\Phi_r, \Phi_\theta \sim \varepsilon$ , для основного течения –  $\Phi_r, \Phi_\theta \sim \varepsilon^3$ ).

Для внешнего обтекания летательных аппаратов таким возмущением является, например, боковой, меняющий свою скорость с течением времени ветер  $\psi = V_\infty(t) r \cos(\theta + \alpha(t))$ . Для внутреннего обтекания, например для течений в соплах, таким возмущением может быть закрутка потока ( $\psi = \Gamma(t)\theta$ ).

При переходе через ударную волну, заданную уравнением  $g(x, y, z, t) = 0$ , решения уравнений газовой динамики должны удовлетворять на ее фронте условиям Ренкина-Гюгонио:

$$\begin{aligned} & (g_t + \Phi_x^* g_x + \Phi_y^* g_y + \Phi_z^* g_z) (g_t + \Phi_x g_x + \Phi_y g_y + \Phi_z g_z) = \\ & = \frac{\chi - 1}{\chi + 1} (g_t + \Phi_x g_x + \Phi_y g_y + \Phi_z g_z)^2 + \frac{2a^2(\Phi)}{\chi + 1} (g_x^2 + g_y^2 + g_z^2), \quad \Phi = \Phi^*. \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

Здесь  $\Phi$  и  $\Phi^*$  соответствуют течению с разных сторон от ударной волны,  $a^2(\Phi)$  задается выражением (2.1.2). Условия на фронте ударной волны  $x^0 = x^0(r, \theta, t^0)$  получим из условий (2.1.5), подставляя в них разложение (2.1.3) и оставляя члены старшего порядка:

$$\begin{aligned} & 2 \frac{\partial x^0}{\partial t^0} + \left( \frac{\partial x^0}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial x^0}{\partial \theta} \right)^2 + 2\psi_r \frac{\partial x^0}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \psi_\theta \frac{\partial x^0}{\partial \theta} = \\ & = \frac{\chi - 1}{2} \left( 2\psi_{t^0} + \psi_r^2 + \frac{1}{r^2} \psi_\theta^2 \right) + \frac{\chi + 1}{2} (\varphi_{x^0} + \varphi_{x^0}^*), \quad \varphi = \varphi^*. \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

Здесь  $\varphi$  и  $\varphi^*$  соответствуют течению с разных сторон от ударной волны. Если в (2.1.6) положить  $\varphi \equiv \varphi^*$ , то получим характеристическое уравнение для (2.1.4).

Выведем условия на обтекаемой поверхности, мало отличающейся от цилиндрической, задав ее в виде:

$$r = r_0(\theta, t^0) + r_2(x^0, \theta, t^0) \varepsilon^4 + \dots \quad (2.1.7)$$

Подставляя (2.1.3) и (2.1.7) в точное условие непротекания  $-\Phi_x r_x + \Phi_r - r^{-2} r_\theta \Phi_\theta = r_t$  и оставляя старшие члены, получим:

$$\psi_r - \frac{1}{r_0^2} \frac{\partial r_0}{\partial \theta} \psi_\theta = \frac{\partial r_0}{\partial t^0}, \quad \varphi_r - \frac{1}{r_0^2} \frac{\partial r_0}{\partial \theta} \varphi_\theta = \frac{\partial r_2}{\partial x^0}. \quad (2.1.8)$$

Значения  $\varphi_r$ ,  $\varphi_\theta$ ,  $\psi_r$ ,  $\psi_\theta$  в (2.1.8) вычисляются при  $r = r_0(\theta, t^0)$ .

Уравнение звуковой поверхности ( $V^2 = a^2$ ) в трансзвуковом приближении принимает вид:

$$N \equiv \frac{\chi + 1}{2} \left( \psi_r^2 + \frac{1}{r^2} \psi_\theta^2 \right) + (\chi - 1) \psi_{t^0} + (\chi + 1) \varphi_{x^0} = 0. \quad (2.1.9)$$

Для установившихся течений ( $\partial / \partial t = 0$ ) уравнение (2.1.4) имеет смешанный тип. В этом случае звуковая поверхность  $N = 0$  является

поверхностью параболичности уравнения (2.1.4), при этом в сверхзвуковой области (области гиперболичности)  $N > 0$ , в дозвуковой области (области эллиптичности)  $N < 0$ .

Подставляя (2.1.3) в выражение для давления (2.1.2), проводя разложение в ряд Тейлора и оставляя старшие по порядку члены, получим асимптотическую формулу для определения давления:

$$P = 1 - \chi \varepsilon^2 \left( \psi_{t^0} + \varphi_{x^0} + \frac{1}{2} \psi_r^2 + \frac{1}{2r^2} \psi_\theta^2 \right). \quad (2.1.10)$$

### Примеры стационарных течений

Уравнение (2.1.4) имеет решение (индекс ноль у переменных  $x$ ,  $t$  будем здесь и далее опускать):

$$\varphi = \sum_{k=0}^3 \varphi_k(r, \theta, t) x^k. \quad (2.1.11)$$

Рассмотрим стационарный случай. Положим  $\psi = \Gamma \theta$ ,  $\Gamma = const$ . Тогда уравнение (2.1.4) примет вид:

$$(\chi + 1) \varphi_x \varphi_{xx} + \frac{2}{r^2} \Gamma \varphi_{x\theta} - \Delta \varphi + \frac{\chi - 1}{2r^2} \Gamma^2 \varphi_{xx} = 0. \quad (2.1.12)$$

В классе решений (2.1.11) в случае установившихся течений содержится решение уравнения (2.1.12), которое описывает течение газа в соплах Лаваля с постоянным ускорением ( $\varphi_{xx} = const$ ) и учитывает закрутку потока:

$$\varphi = ax^2 + (\chi + 1)a^2 r^2 x + \left[ \frac{\chi - 1}{2} \Gamma^2 a \ln^2 r + \frac{1}{8} (\chi + 1)^2 a^3 r^4 \right]. \quad (2.1.13)$$

Уравнение звуковой поверхности для (2.1.13), согласно (2.1.9), имеет вид:

$$x = -\frac{\chi + 1}{2} ar^2 - \frac{\Gamma^2}{4ar^2}.$$

Условия (2.1.8) имеют вид:  $\frac{dr_0}{d\theta} = 0$ ,  $\frac{\partial r_2}{\partial x} = \varphi_r$  ( $\varphi_r$  вычисляется при  $r = r_0$ ).

Тогда получим уравнение обтекаемой поверхности:

$$r = r_0 + \varepsilon^4 \left[ r_0 a^2 (\chi + 1) x^2 + \left( (\chi - 1) \Gamma^2 a \frac{\ln r_0}{r_0} + \frac{1}{2} (\chi + 1)^2 a^3 r_0^3 \right) x \right], \quad r_0 = const.$$

Решение (2.1.13) описывает течения в кольцеобразных соплах, уравнения внутренней и внешней стенок которых получим при  $r_0 = r_0^{(1)}$ ,  $r_0 = r_0^{(2)}$ ,  $r_0^{(k)} = const \neq 0$ . В качестве примера на рисунке 2.1.1 изображены стенки сопла и звуковая поверхность, соответствующие решению (2.1.13), при  $r_0^{(1)} = 0,1$ ,  $r_0^{(2)} = 1$ ,  $\Gamma = 1$ ,  $\chi = 1,4$ ,  $a = 30$ ,  $\varepsilon = 0,1$ . Левее звуковой поверхности (на которой  $V = a$ ) скорость потока дозвуковая ( $V < a$ ), правее – сверхзвуковая ( $V > a$ ), реализуется течение Майера с переходом через скорость звука по всей горловине сопла.

Если в (2.1.13)  $\Gamma = 0$ , то получим известное решение, описывающее течение в центре сопла Лаваля [2.59].

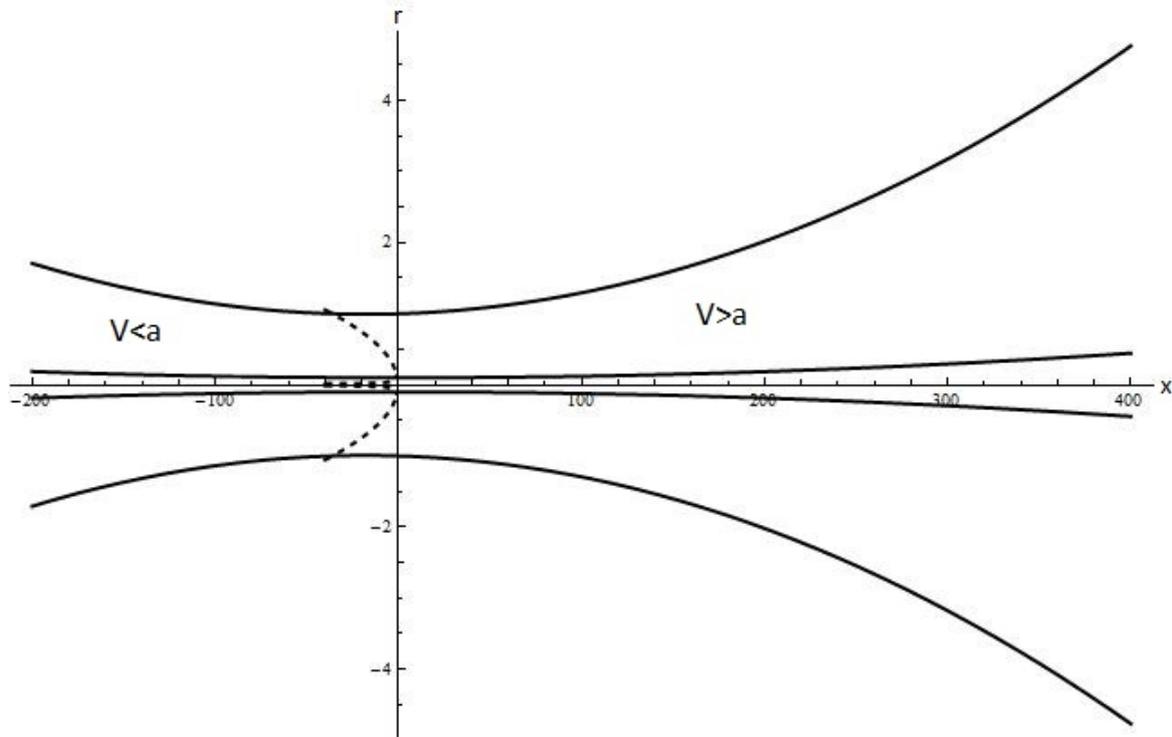


Рис. 2.1.1 Сечение сопла

Рассмотрим решение уравнения (2.1.12), обладающее свойствами:  $V_x, V_r, V_\theta \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow \infty$

$$\varphi = f(x, \theta)r^{-2} + g(r, \theta), \Delta g = 0. \quad (2.1.14)$$

Это решение допускает обобщение:  $\varphi = f(\xi, \eta)r^{-2} + g(r, \theta)$ ,  $\xi = x + \alpha \ln r$ ,  $\eta = \theta + \beta \ln r$ ;  $\alpha, \beta$  – произвольные числа.

Подставляя (2.1.14) в (2.1.12), получим уравнение для функции  $f(x, \theta)$ :

$$(\chi + 1)f_x f_{xx} + 2\Gamma f_{x\theta} - 4f - f_{\theta\theta} + \frac{\chi - 1}{2}\Gamma^2 f_{xx} = 0. \quad (2.1.15)$$

Условия (2.1.8) примут вид:  $\frac{dr_0}{d\theta} = 0$ ,  $-2fr_0^{-3} + g_r = \frac{\partial r_2}{\partial x^0}$  ( $g_r$  вычисляется при  $r = r_0$ ).

Уравнение (2.1.15) имеет решение вида:

$$f(x, \theta) = \sum_{k=0}^3 f_k(\theta) x^k. \quad (2.1.16)$$

Подставляя (2.1.16) в (2.1.15), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для функций, зависящих от  $\theta$ :

$$\begin{cases} 18f_3^2(\chi+1) - 4f_3 - f_3'' = 0, \\ 18f_2f_3(\chi+1) + 6\Gamma f_3' - 4f_2 - f_2'' = 0, \\ (\chi+1)(4f_2^2 + 6f_1f_3) + 4\Gamma f_2' - 4f_1 - f_1'' + 3(\chi-1)\Gamma^3 f_3 = 0, \\ 2(\chi+1)f_1f_2 + 2\Gamma f_1' - 4f_0 - f_0'' + (\chi-1)\Gamma^2 f_2 = 0. \end{cases}$$

### Обтекание поверхности, мало отличающейся от цилиндра

Рассмотрим обтекание поверхности, мало отличающейся от цилиндра ( $r_0 = R$ ). В этом случае, предполагая поперечное обтекание поверхности безотрывным, положим  $\psi = V_\infty \cos \theta (r + R^2 r^{-1})$ . Тогда уравнение (2.1.4) примет вид:

$$\begin{aligned} 2\varphi_{xt} + (\chi+1)\varphi_x\varphi_{xx} + 2V_\infty \cos \theta \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \varphi_{xr} - 2V_\infty \frac{\sin \theta}{r} \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) \varphi_{x\theta} - \Delta\varphi + \\ + \frac{\chi-1}{2} V_\infty^2 \varphi_{xx} \left(1 - 2\frac{R^2}{r^2} \cos 2\theta + \frac{R^4}{r^4}\right) = \\ = -2 \left(\frac{R^2}{r^3}\right) V_\infty^3 \cos \theta \left(1 - \frac{2R^2}{r^2} + \frac{R^4}{r^4} - 4\sin^2 \theta\right). \end{aligned} \quad (2.1.17)$$

От правой части (обозначим ее  $\alpha(r, \theta)$ ) уравнения (2.1.17) можно освободиться, введя новую функцию  $\bar{\varphi} = \varphi + h(r, \theta)$ ,  $\Delta h = \alpha(r, \theta)$ . Тогда в стационарном случае получим уравнение для функции  $\bar{\varphi}$ :

$$\begin{aligned} (\chi+1)\bar{\varphi}_x\bar{\varphi}_{xx} + 2V_\infty \cos \theta \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \bar{\varphi}_{xr} - 2V_\infty \frac{\sin \theta}{r} \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) \bar{\varphi}_{x\theta} - \Delta\bar{\varphi} + \\ + \frac{\chi-1}{2} V_\infty^2 \bar{\varphi}_{xx} \left(1 - 2\frac{R^2}{r^2} \cos 2\theta + \frac{R^4}{r^4}\right) = 0. \end{aligned} \quad (2.1.18)$$

Уравнение (2.1.18) имеет решение вида (2.1.11), где  $\varphi_k$  зависят от  $r, \theta$ , при этом можно положить  $\varphi_3 = w(\theta)r^{-2}$  (в частности,  $w=0$  или  $w=1/(3(\chi+1)\cos^2\theta)$ ). Для течения вдали от тела ( $r \rightarrow \infty$ ) решение уравнения (2.1.18) можно искать в виде:

$$\bar{\varphi} = r^\lambda f(\xi, \theta) + \dots, \quad \xi = xr^{-n}.$$

Так как при  $V_\infty = 0$  мы должны получить асимптотику, соответствующую классическому уравнению  $(\chi+1)\varphi_x\varphi_{xx} - \Delta\varphi = 0$ , то можно, по-видимому, положить  $\lambda = 3n - 2$ . Отметим, что при формальном переходе в (2.1.17) при  $r \rightarrow \infty$  получим предельное уравнение:

$$M(\varphi) \equiv 2\varphi_{xt} + (\chi+1)\varphi_x\varphi_{xx} + 2V_\infty \cos\theta\varphi_{xr} - (2/r)V_\infty \sin\theta\varphi_{x\theta} - \Delta\varphi + \\ + ((\chi-1)/2)V_\infty^2\varphi_{xx} = -(2R^2/r^3)V_\infty^3 \cos\theta(1-4\sin^2\theta),$$

которое в стационарном случае допускает точное решение:

$$\varphi = rf(\xi, \theta) + g(\theta)r^{-1}, \quad \xi = x/r, \quad g(\theta) = -R^2V_\infty^3 \sin^2\theta \cos\theta.$$

При  $V_\infty \ll 1$  решение (2.1.17) можно искать в виде:

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\varphi}_n(x, r, \theta)V_\infty^n.$$

В этом случае для  $\tilde{\varphi}_0$  будем иметь известное трансзвуковое уравнение  $(\chi+1)\tilde{\varphi}_{0x}\tilde{\varphi}_{0xx} - \Delta\tilde{\varphi}_0 = 0$ .

В случае отрывного обтекания, предполагая, что с поверхности цилиндра сходят две вихревые прямолинейные пелены бесконечной длины с постоянными и противоположными по знаку интенсивностями  $\Gamma$ , выражение для  $\psi(r, \theta)$  можно записать в виде:

$$\psi(r, \theta) = V_\infty \cos\theta(r + R^2/r) + (\Gamma/2\pi) \int_0^\infty (\arctg((r \sin\theta - R)/(r \cos\theta - S)) - \\ - \arctg((r \sin\theta + R)/(r \cos\theta - S))) dS + \\ + (\Gamma/2\pi) \int_0^\infty (\arctg((r \sin\theta(S^2 + R^2) + R^3)/(r \cos\theta(S^2 + R^2) - SR^2)) - \\ - \arctg((r \sin\theta(S^2 + R^2) - R^3)/(r \cos\theta(S^2 + R^2) - SR^2))) dS. \quad (2.1.19)$$

Точками схода вихрей являются точки  $r = R, \theta = \pm \frac{\pi}{2}$ . Для определения силового воздействия на обтекаемое тело согласно (2.1.10) необходимо найти  $\psi_\theta(R, \theta)$  ( $\psi_r(R, \theta) = 0$ ). Определяя  $\psi_\theta$  из (2.1.19) дифференцированием по  $\theta$  и проводя затем интегрирование по  $S$ , получим:

$$\psi_\theta(R, \theta) = -(\Gamma + 2V_\infty)R \sin\theta + (\Gamma R/2\pi) (\cos\theta \ln|(1 - \sin\theta)/(1 + \sin\theta)| - \\ - 2 \sin\theta (\arctg(\cos\theta/(1 - \sin\theta))) + \arctg(\cos\theta/(1 + \sin\theta))).$$

## 2.2. К вопросу о динамической устойчивости трубопровода

Рассматривается плоская задача аэрогидроупругости о колебаниях, возникающих при протекании жидкости через трубопровод. Ранее задачи о динамике и устойчивости трубопровода рассматривались в работах [2.4, 2.18, 2.21, 2.24, 2.28, 2.51, 2.57, 2.58, 2.60, 2.62, 2.64, 2.66 и др.].

Пусть на плоскости  $xOy$  трубопроводу соответствует на оси  $Ox$  отрезок  $[0, l]$ . Скорость жидкости равна  $U$  и имеет направление, совпадающее с направлением оси  $Ox$ .

**Исследование устойчивости в линейном приближении.** В линейном приближении колебания вязкоупругого стержня, связанного с упругим основанием, описываются модельным уравнением для прогиба  $w(x, t)$

$$Dw'''' + (m_0 + m_*)\dot{w} + (N + m_*U^2)w'' + 2Um_*\dot{w}' + \xi\dot{w} + \theta w + \psi\dot{w}'''' - \varphi\dot{w}'' = 0. \quad (2.2.1)$$

Коэффициенты  $m_0, m_*, D$  вычисляются по формулам:

$$m_0 = \rho_0\pi(R_*^2 - R_0^2), m_* = \rho_*\pi R_0^2, D = \frac{\pi E}{4}(R_*^4 - R_0^4), R_* = R_0 + h_0.$$

Здесь  $w(x, t)$  – деформация (прогиб) в сечении  $x$  в момент времени  $t$ ;  $D$  – изгибная жесткость трубы;  $E$  – модуль упругости,  $U, m_*, \rho_*$  – скорость, масса жидкости (газа) на единицу длины и плотность жидкости (газа);  $l$  – длина трубы между шарнирными опорами;  $R_*, R_0, h_0$  – внешний и внутренний радиусы трубопровода и толщина,  $\theta$  – коэффициент жесткости основания;  $m_0, \rho_0$  – масса металла на единицу длины трубы и его плотность;  $N$  – сжимающая (растягивающая) сила;  $\xi, \psi$  – коэффициенты внешнего и внутреннего демпфирования соответственно; коэффициент  $\varphi$  учитывает инерцию вращения сечений. Все коэффициенты, входящие в уравнение, постоянные, точка сверху обозначает производную по времени  $t$ , а штрих – производную по координате  $x$ .

Умножая уравнение (2.2.1) на  $\dot{w}(x, t)$ , получим:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{2} D (w'')^2 + \frac{1}{2} (m_0 + m_*) \dot{w}^2 - \frac{1}{2} (N + m_* U^2) (w')^2 + \frac{1}{2} \theta w^2 + \frac{1}{2} \varphi (\dot{w}')^2 \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left[ D (\dot{w} w'''' - \dot{w}' w'') + (N + m_* U^2) \dot{w} w' + U m_* \dot{w}^2 + \psi (\dot{w} w'''' - \dot{w}' w'') - \varphi \dot{w} \dot{w}' \right] + \\ & + \xi \dot{w}^2 + \psi (\dot{w}'')^2 = 0. \end{aligned}$$

Введем в рассмотрение функционал:

$$J(t) = \frac{1}{2} \int_0^l [D (w'')^2 + (m_0 + m_*) \dot{w}^2 - (N + m_* U^2) (w')^2 + \varphi (\dot{w}')^2 + \theta w^2] dx.$$

Найдем производную  $\frac{dJ}{dt}$ ;

$$\frac{dJ}{dt} = -\int_0^l [D(\dot{w}w''' - \dot{w}'w'') + (N + m_*U^2)\dot{w}w' + Um_*\dot{w}^2 + \psi(\dot{w}w''' - \dot{w}'w'') - \varphi\dot{w}\ddot{w}'] dx - \xi\dot{w}^2 - \psi(\dot{w}'')^2.$$

Рассмотрим некоторые виды закрепления концов трубопровода:

а) шарнирное закрепление концов трубопровода

$$w(0,t) = w(l,t) = 0, \quad w''(0,t) = w''(l,t) = 0;$$

б) жесткое закрепление концов трубопровода

$$w(0,t) = w(l,t) = 0, \quad w'(0,t) = w'(l,t) = 0;$$

в) один конец (любой) закреплен шарнирно, другой – жестко.

Для указанных типов закреплений

$$\frac{dJ}{dt} = -\xi\dot{w}^2 - \psi(\dot{w}'')^2 < 0.$$

Тогда  $J(t) < J(0)$ , то есть

$$\begin{aligned} & \int_0^l [D(w'')^2 + (m_0 + m_*)\dot{w}^2 - (N + m_*U^2)(w')^2 + \varphi(\dot{w}')^2 + \theta w^2]_{t=t} dx \leq \\ & \leq \int_0^l [D(w'')^2 + (m_0 + m_*)\dot{w}^2 - (N + m_*U^2)(w')^2 + \varphi(\dot{w}')^2 + \theta w^2]_{t=0} dx. \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

Имеет место неравенство Релея [2.4.4]

$$\int_0^l (w'')^2 dx \geq \lambda_1 \int_0^l (w')^2 dx,$$

где  $\lambda_1$  – наименьшее собственное значение соответствующей краевой задачи для уравнения  $\psi'''' - \lambda^4\psi = 0$ . Например, для закрепления концов типа «шарнир-шарнир» краевая задача имеет вид

$$\psi'''' - \lambda^4\psi = 0, \quad \psi(0) = \psi(l) = 0, \quad \psi''(0) = \psi''(l) = 0.$$

Общее решение дифференциального уравнения определяется выражением  $\psi(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 e^{-\lambda x} + c_3 \sin \lambda x + c_4 \cos \lambda x$ . Удовлетворяя

граничным условиям, получим  $c_1 = c_2 = c_4 = 0$ ,  $\psi(x) = c_3 \sin \lambda_n x$ ,  $\lambda_n = \frac{n\pi}{l}$ ,

где  $\lambda_n$  – собственные значения, а  $\sin \lambda_n x$  – собственные функции, при этом

$$\min_n(\lambda_n) = \lambda_1 = \frac{\pi}{l}.$$

С учетом неравенства Релея согласно (2.2.2) получаем:

$$\int_0^l [(D\lambda_1 - N - m_*U^2)(w')^2 + (m_0 + m_*)\dot{w}^2 + \varphi(\dot{w}')^2 + \theta w^2]_{t=t} dx \leq \quad (2.2.3)$$

$$\leq \int_0^l [D(w'')^2 + (m_0 + m_*)\dot{w}^2 - (N + m_*U^2)(w')^2 + \varphi(\dot{w}')^2 + \theta w^2]_{t=0} dx.$$

Из последнего неравенства следует теорема.

**Теорема 1.** Если  $N < D\lambda_1 - m_*U^2$ , то малым значениям начальных данных  $w(x, 0), \dot{w}(x, 0), w'(x, 0), w''(x, 0), \dot{w}'(x, 0)$  (прогиба, скорости, углу поворота, кривизны, угловой скорости) будут соответствовать малые (в среднем, в интегральном смысле)  $w(x, t), \dot{w}(x, t), w'(x, t), \dot{w}'(x, t)$  в любой момент времени  $t > 0$ .

Таким образом, условие устойчивости для закрепления типа «шарнир-шарнир» имеет вид:

$$N < \frac{\pi}{l} D - m_*U^2.$$

Заметим, что это достаточное (но не необходимое) условие устойчивости.

Изобразим область устойчивости на плоскости  $(N, U)$  (рис. 2.2.1).

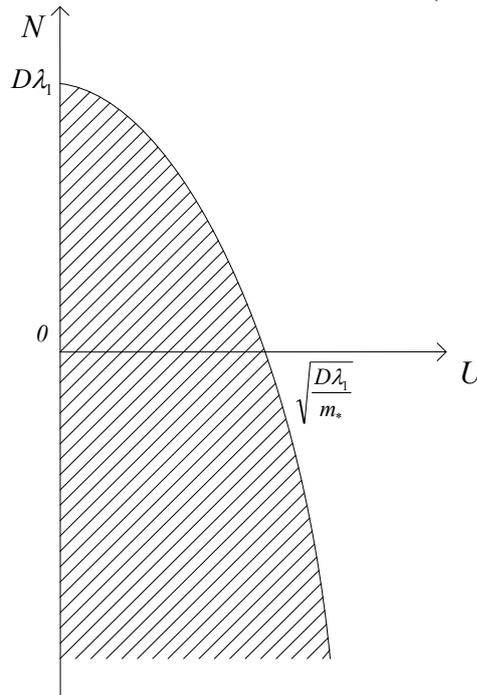


Рис. 2.2.1 Область устойчивости

Для точек, расположенных ниже параболы  $N = \frac{\pi}{l} D - m_*U^2$ , имеет место устойчивость.

Имеет место неравенство, являющееся следствием неравенства Коши-Буняковского:

$$w^2(x,t) \leq l \int_0^l w'^2(x,t) dx.$$

Тогда согласно (2.2.3) получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{l} (D\lambda_1 - N - m_* U^2) w^2(x,t) + \int_0^l [(m_0 + m_*) \dot{w}^2 + \varphi(\dot{w}')^2 + \theta w^2]_{t=t} dx \leq \\ & \leq \int_0^l [D(w'')^2 + (m_0 + m_*) \dot{w}^2 - (N + m_* U^2)(w')^2 + \varphi(\dot{w}')^2 + \theta w^2]_{t=0} dx. \end{aligned}$$

Из этого неравенства следует равномерная устойчивость для  $w(x,t)$  для  $\forall x \in [0, l]$ . А именно малым значениям начальных данных  $w(x,0), \dot{w}(x,0), w'(x,0), w''(x,0), \dot{w}'(x,0)$  будут соответствовать малые значения  $w(x,t)$  для  $\forall x \in [0, l]$ .

Аналогичным образом исследовалась устойчивость колебаний трубопровода на основе нелинейной модели, которая описывается уравнением

$$\begin{aligned} & (m_0 + m_*) \ddot{w} + \xi \dot{w} + \psi \dot{w}''' + 2Um_* \dot{w}' + Dw'''' + Nw'' + \theta w + m_* U^2 w'' - \\ & - \frac{1}{2} w'' \left[ k \int_0^l (w')^2 dx - \alpha \left( \int_0^l (w')^2 dx \right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

### Исследование устойчивости в рамках двухстепенной модели

Рассмотрим данную задачу с учетом также колебаний в направлении оси  $Ox$ . Введем обозначения:  $w(x,t)$  и  $u(x,t)$  – упругие перемещения точки оси стержня в направлении осей  $Oy$  и  $Ox$  соответственно (рис. 2.2.2).

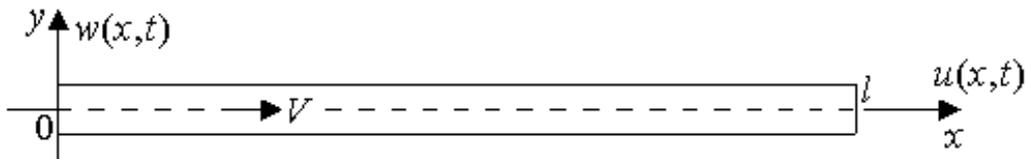


Рис. 2.2.2 Расчетная схема

Перемещения удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} -EF \left( u' + \frac{1}{2} w'^2 \right)' + M\ddot{u} = 0, \\ -EF \left[ w' \left( u' + \frac{1}{2} w'^2 \right) \right]' + EJw'''' + M\dot{w} + m_* V^2 w'' + 2m_* V \dot{w}' = 0. \end{cases} \quad (2.2.5)$$

Здесь и в дальнейшем  $E$  будет обозначать модуль упругости;  $F$  –

площадь поперечного сечения стержня;  $EJ$  – изгибная жесткость стержня;  $V$  – скорость жидкости.

Граничные условия на конце стержня при  $x = 0$  или  $x = l$  могут иметь вид:

1) жесткое закрепление (рис. 2.2.3, а):

$$w(x,t) = w'(x,t) = u(x,t) = 0; \quad (2.2.6)$$

2) шарнирное закрепление (рис. 2.2.3, б):

$$w(x,t) = w''(x,t) = u(x,t) = 0; \quad (2.2.6б)$$

3) жесткое закрепление с отсутствием внешней силы (рис. 2.2.3, в):

$$w(x,t) = w'(x,t) = u'(x,t) = 0; \quad (2.2.6в)$$

4) шарнирное закрепление с отсутствием внешней силы (рис. 2.2.3, г):

$$w(x,t) = w''(x,t) = u'(x,t) + \frac{1}{2} w'^2(x,t) = 0; \quad (2.2.6г)$$

5) свободная заделка (рис. 2.2.3, д):

$$w'(x,t) = w'''(x,t) = u(x,t) = 0; \quad (2.2.6д)$$

6) свободное закрепление с отсутствием внешней силы (рис. 2.2.3, е):

$$w'(x,t) = w'''(x,t) = u'(x,t) = 0; \quad (2.2.6е)$$

7) жесткое закрепление при действии внешней силы  $P(t)$

(рис. 2.2.3, ж):

$$w(x,t) = w'(x,t) = EFu'(x,t) + P(t) = 0; \quad (2.2.6ж)$$

8) шарнирное закрепление при действии внешней силы  $P(t)$

(рис. 2.2.3, з):

$$w(x,t) = w'(x,t) = EF \left( u'(x,t) + \frac{1}{2} w'^2(x,t) \right) + P(t) = 0; \quad (2.2.6з)$$

9) свободное закрепление при действии внешней силы (рис. 2.2.3, и):

$$w(x,t) = w'(x,t) = EFu'(x,t) + P(t) = 0. \quad (2.2.6и)$$

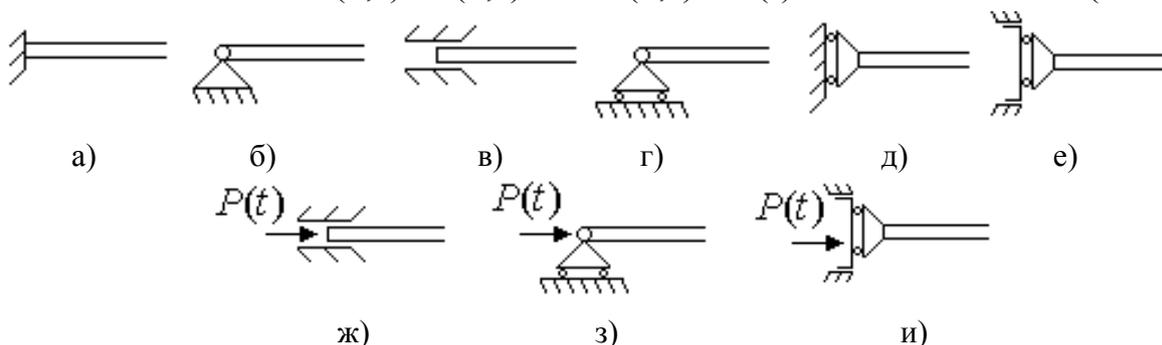


Рис. 2.2.3 Способы закреплений

Получим достаточные условия устойчивости решений системы дифференциальных уравнений (2.2.5) по отношению к возмущениям начальных условий. Введем функционал

$$\Phi(t) = \int_0^l \left\{ M(\dot{u}^2 + \dot{w}^2) - m_* V^2 w'^2 + EJw''^2 + EF \left( u' + \frac{1}{2} w'^2 \right)^2 \right\} dx. \quad (2.2.7)$$

Найдем производную от  $\Phi$  по  $t$

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}(t) = \int_0^l \left\{ 2M(\dot{u}\ddot{u} + \dot{w}\ddot{w}) - 2m_* V^2 w' \dot{w}' + 2EJw'' \dot{w}'' + \right. \\ \left. + 2EF \left( u' + \frac{1}{2} w'^2 \right) (\dot{u}' + w' \dot{w}') \right\} dx. \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

Для функций  $w(x, t)$  и  $u(x, t)$ , являющихся решениями системы уравнений (2.2.5), равенство (2.2.8) принимает вид:

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}(t) = 2 \int_0^l \left\{ EF\dot{u} \left( u' + \frac{1}{2} w'^2 \right)' + EF\dot{w} \left[ w' \left( u' + \frac{1}{2} w'^2 \right) \right]' - \right. \\ \left. - EJ\dot{w}w'''' - m_* V^2 \dot{w}w'' - 2m_* V \dot{w}\dot{w}' + m_* V^2 w' \dot{w}' + \right. \\ \left. + EJw'' \dot{w}'' + EF\dot{u}' \left( u' + \frac{1}{2} w'^2 \right) + EFw' \dot{w}' \left( u' + \frac{1}{2} w'^2 \right) \right\} dx. \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

I. Пусть граничные условия на левом конце при  $x=0$  имеют один из типов (2.2.6а)-(2.2.6г), а на правом при  $x=l$  – (2.2.6а)-(2.2.6е). Тогда, интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned} \int_0^l \dot{w}w'''' dx &= \dot{w}w''''|_0^l - \int_0^l \dot{w}'w'''' dx = -\dot{w}'w''''|_0^l + \int_0^l \dot{w}''w'''' dx = \int_0^l \dot{w}''w'' dx, \\ \int_0^l \dot{w}w'' dx &= \dot{w}w''|_0^l - \int_0^l \dot{w}'w'' dx = -\int_0^l \dot{w}'w'' dx, \\ \int_0^l \dot{u}' \left( u' + \frac{1}{2} w'^2 \right)' dx &= \dot{u}' \left( u' + \frac{1}{2} w'^2 \right)'|_0^l - \int_0^l \dot{u}'' \left( u' + \frac{1}{2} w'^2 \right) dx = -\int_0^l \dot{u}'' \left( u' + \frac{1}{2} w'^2 \right) dx, \\ \int_0^l \dot{w}' \left[ w' \left( u' + \frac{1}{2} w'^2 \right) \right]' dx &= \dot{w}' w' \left( u' + \frac{1}{2} w'^2 \right)'|_0^l - \int_0^l \dot{w}'' w' \left( u' + \frac{1}{2} w'^2 \right) dx = \\ &= -\int_0^l \dot{w}' w' \left( u' + \frac{1}{2} w'^2 \right) dx, \quad \int_0^l \dot{w}\dot{w}' dx = \frac{1}{2} \dot{w}^2|_0^l = \frac{1}{2} \dot{w}^2(l, t). \end{aligned}$$

Подставляя эти равенства в (2.2.9), получим

$$\dot{\Phi}(t) = -m_* V \dot{w}^2(l, t) \leq 0.$$

Интегрируя от 0 до  $t$ , получим

$$\Phi(t) \leq \Phi(0). \quad (2.2.10)$$

Учитывая выражение для функционала (2.2.7), оценим правую и левую части неравенства (2.2.10)

$$\Phi(t) \geq \int_0^l \left\{ EJw''^2 - m_*V^2w'^2 + EF \left( u' + \frac{1}{2}w'^2 \right)^2 \right\} dx, \quad (2.2.11)$$

$$\Phi(0) = \int_0^l \left\{ M(\dot{u}_0^2 + \dot{w}_0^2) - m_*V^2w_0'^2 + EJw_0''^2 + EF \left( u_0' + \frac{1}{2}w_0'^2 \right)^2 \right\} dx, \quad (2.2.12)$$

где введены обозначения  $w_0 = w(x, 0)$ ,  $\dot{w}_0 = \dot{w}(x, 0)$ ,  $u_0' = u'(x, 0)$ ,  $\dot{u}_0 = \dot{u}(x, 0)$ ,  $w_0' = w'(x, 0)$ ,  $w_0'' = w''(x, 0)$ .

Рассмотрим краевую задачу для уравнения  $\psi^{IV}(x) = -\lambda\psi''(x)$ ,  $x \in [0, l]$  с краевыми условиями: на левом конце при  $x = 0$  один из типов (2.2.6,а) – (2.2.6,г), на правом при  $x = l$  – (2.2.6,а) – (2.2.6,е). Эта задача является самосопряженной и полностью определенной. Для функций  $w(x, t)$  получим неравенство:

$$\int_0^l w''^2(x, t) dx \geq \lambda_1 \int_0^l w'^2(x, t) dx, \quad (2.2.13)$$

где  $\lambda_1$  – наименьшее собственное значение рассматриваемой краевой задачи.

Далее, воспользовавшись неравенством Буняковского, будем иметь

$$w^2(x, t) \leq l \int_0^l w'^2(x, t) dx. \quad (2.2.14)$$

$$u^2(x, t) \leq l \int_0^l u'^2(x, t) dx. \quad (2.2.15)$$

Воспользовавшись (2.2.13), из (2.2.11) получим

$$\Phi(t) \geq \int_0^l \left\{ (EJ\lambda_1 - m_*V^2)w'^2 + EF \left( u' + \frac{1}{2}w'^2 \right)^2 \right\} dx, \quad (2.2.16)$$

Предполагая, что

$$EJ\lambda_1 > m_*V^2, \quad (2.2.17)$$

и, учитывая (2.2.14), из (2.2.16) получим

$$\Phi(t) \geq \frac{EJ\lambda_1 - m_*V^2}{l} w^2(x, t).$$

С другой стороны, учитывая (2.2.13), находим

$$\Phi(t) \leq \Phi(0) = \int_0^l \left\{ M(\dot{u}_0^2 + \dot{w}_0^2) + (EJ - m_*V^2\lambda_1^{-1})w_0''^2 + EF \left( u_0' + \frac{1}{2}w_0'^2 \right)^2 \right\} dx.$$

Таким образом, получим неравенство

$$\frac{EJ\lambda_1 - m_*V^2}{l} w^2(x,t) \leq \int_0^l \left\{ M(\dot{u}_0^2 + \dot{w}_0^2) + (EJ - m_*V^2\lambda_1^{-1})w_0''^2 + EF(u'_0 + 0,5w_0'^2)^2 \right\} dx. \quad (2.2.18)$$

Из этого неравенства следует теорема.

**Теорема 2.** Пусть выполнено условие (2.2.17). Тогда решение  $w(x,t)$  системы уравнений (2.2.5) устойчиво по отношению к возмущениям начальных значений  $\dot{w}_0, w_0', w_0'', \dot{u}_0, u_0'$ , если функция  $w(x,t)$  удовлетворяет краевым условиям: на левом конце при  $x=0$  один из типов (2.2.6,а) – (2.2.6,г), на правом при  $x=l$  – (2.2.6,а) – (2.2.6,е).

Если дополнительно выполняется условие  $|w'(x,t)| < 1$ , то  $w^2(x,t) > w'^4(x,t)$ . Тогда, учитывая (2.2.16), получим

$$\Phi(t) \geq \int_0^l \left\{ (EJ\lambda_1 - m_*V^2)w'^4 + EF\left(u' + \frac{1}{2}w'^2\right)^2 \right\} dx.$$

Используя условия (2.2.15), (2.2.17), запишем это неравенство в виде

$$\begin{aligned} \Phi(t) &\geq \int_0^l \left\{ \left( EJ\lambda_1 - m_*V^2 + \frac{EF}{4} \right) \left( w'^2 + \frac{2EF}{4EJ\lambda_1 - 4m_*V^2 + EF} u' \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{4EF(EJ\lambda_1 - m_*V^2)}{4EJ\lambda_1 - 4m_*V^2 + EF} u'^2 \right\} dx \geq \int_0^l \frac{4EF(EJ\lambda_1 - m_*V^2)}{4EJ\lambda_1 - 4m_*V^2 + EF} u'^2 dx \geq \\ &\geq \frac{4EF(EJ\lambda_1 - m_*V^2)}{l(4EJ\lambda_1 - 4m_*V^2 + EF)} u^2(x,t). \end{aligned}$$

Таким образом, получим

$$\frac{4EF(EJ\lambda_1 - m_*V^2)}{l(4EJ\lambda_1 - 4m_*V^2 + EF)} u^2(x,t) \leq \int_0^l \left\{ M(\dot{u}_0^2 + \dot{w}_0^2) + (EJ - m_*V^2\lambda_1^{-1})w_0''^2 + EF\left(u'_0 + \frac{1}{2}w_0'^2\right)^2 \right\} dx. \quad (2.2.19)$$

Из неравенств (2.2.18), (2.2.19) следует теорема.

**Теорема 3.** Пусть выполнено условие (2.2.17). Тогда при  $|w'(x,t)| < 1$  решение  $w(x,t), u(x,t)$  системы уравнений (2.2.5) устойчиво по отношению к возмущениям начальных значений  $\dot{w}_0, w_0', w_0'', \dot{u}_0, u_0'$ , если  $w(x,t), u(x,t)$  удовлетворяют краевым условиям: на левом конце при  $x=0$  одно из условий (2.2.6,а) – (2.2.6,г), на правом при  $x=l$  – одно из условий (2.2.6,а) – (2.2.6,е).

II. Пусть на правом конце стержня выполняется одно из краевых условий (2.2.6,ж)-(2.2.6,и), а на левом – (2.2.6,а)-(2.2.6,г), тогда в отличие от случая I получим

$$\begin{aligned} EF \int_0^l \dot{u} \left( u' + \frac{1}{2} w'^2 \right) dx &= EF \dot{u} \left( u' + \frac{1}{2} w'^2 \right) \Big|_0^l - EF \int_0^l \dot{u}' \left( u' + \frac{1}{2} w'^2 \right) dx = \\ &= EF \dot{u}(l,t) \left( u'(l,t) + \frac{1}{2} w'^2(l,t) \right) - EF \int_0^l \dot{u}' \left( u' + \frac{1}{2} w'^2 \right) dx = -\dot{u}(l,t)P(t) - \\ &\quad - EF \int_0^l \dot{u}' \left( u' + \frac{1}{2} w'^2 \right) dx. \end{aligned}$$

Подставляя в (2.2.9), получим

$$\dot{\Phi}(t) = -\dot{u}(l,t)P(t) - m_* V \dot{w}^2(l,t).$$

Предполагая, что

$$-\dot{u}(l,t)P(t) - m_* V \dot{w}^2(l,t) \leq 0, \quad (2.2.20)$$

аналогично теоремам 1 и 2 получим следующие теоремы.

**Теорема 4.** Пусть выполнено условие (2.2.17) и функция  $P(t)$  такова, что выполняется условие (2.2.20). Тогда решение  $w(x,t)$  системы уравнений (2.2.5) устойчиво по отношению к возмущениям начальных значений  $\dot{w}_0, w'_0, w''_0, \dot{u}_0, u'_0$ , если функция  $w(x,t)$  удовлетворяет краевым условиям: на правом конце стержня при  $x=l$  выполняется одно из краевых условий (2.2.6,ж)-(2.2.6,и), а на левом при  $x=0$  – (2.2.6,а)-(2.2.6,г).

**Теорема 5.** Пусть выполнено условие (2.2.17) и функция  $P(t)$  такова, что выполняется условие (2.2.20). Тогда при  $|w'(x,t)| < 1$  решение  $w(x,t), u(x,t)$  системы уравнений (2.2.5) устойчиво по отношению к возмущениям начальных значений  $\dot{w}_0, w'_0, w''_0, \dot{u}_0, u'_0$ , если  $w(x,t), u(x,t)$  удовлетворяют краевым условиям: на правом конце стержня при  $x=l$  выполняется одно из краевых условий (2.2.6,ж)-(2.2.6,и), а на левом при  $x=0$  – (2.2.6,а)-(2.2.6,г).

### **Исследование устойчивости с учетом запаздывания внешних воздействий**

Для описания динамики трубопровода с учетом запаздывания внешних воздействий (реакции и демпфирования основания) можно предложить уравнение

$$\begin{aligned} Dw'''' + (m_0 + m_*) \ddot{w} + (N + m_* u^2) w'' + 2um_* \dot{w} + \xi^* \dot{w}(x,t) + \theta^* w(x,t) + \\ + \xi \dot{w}(x,t - \tau) + \theta w(x,t - \beta) + \psi \dot{w}'''' - \varphi \dot{w}'' - w'' \left[ k \int_0^l (w')^2 dx + 2\alpha \int_0^l w' \dot{w} dx \right] = \\ = G(x,t, w(x,t), \dot{w}(x,t), w(x,t - \beta), \dot{w}(x,t - \tau)), \end{aligned} \quad (2.2.21)$$

где  $\tau$  и  $\beta$  – параметры запаздывания демпфирования и реакции основания или какого-либо другого внешнего воздействия;  $G$  – нелинейная составляющая внешнего воздействия.

С учетом как поперечной, так и продольной деформации трубопровода, уравнения, описывающие его динамику с учетом запаздывания внешних воздействий, можно представить в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} -EF \left( u' + \frac{1}{2} w'^2 \right)' + M\ddot{u} + \psi_0 \dot{u}'' + \xi_0^* \dot{u}(x, t) + \theta_0^* u(x, t) + \xi_0 \dot{u}(x, t - \tau_0) + \\ + \theta_0 u(x, t - \beta_0) = H(x, t, u(x, t), \dot{u}(x, t), u(x, t - \beta_0), \dot{u}(x, t - \tau_0)), \\ -EF \left[ w' \left( u' + \frac{1}{2} w'^2 \right) \right]' + EJw'''' + M\dot{w} + m_* V^2 w'' + 2m_* V \dot{w}' + \\ + \xi_1^* \dot{w}(x, t) + \theta_1^* w(x, t) + \xi_1 \dot{w}(x, t - \tau_1) + \theta_1 w(x, t - \beta_1) + \psi_1 \dot{w}'''' - \\ - \varphi \dot{w}'' = G(x, t, w(x, t), \dot{w}(x, t), w(x, t - \beta_1), \dot{w}(x, t - \tau_1)). \end{array} \right. \quad (2.2.22)$$

Здесь  $\tau_0, \beta_0, \tau_1, \beta_1$  – параметры запаздывания демпфирования и реакции основания или какого-либо другого внешнего воздействия;  $G, H$  – нелинейные составляющие внешних воздействий.

На основе математических моделей (2.2.21), (2.2.22) можно составить функционалы, позволяющие исследовать динамическую устойчивость трубопровода с учетом запаздывания внешних воздействий.

В качестве примера исследуем устойчивость трубопровода в модели (2.2.21) с учетом запаздывания только реакции основания

$$Dw'''' + (m_0 + m_*) \dot{w} + (N + m_* u^2) w'' + 2um_* \dot{w}' + \xi \dot{w}(x, t) + \theta w(x, t - \tau) + \\ + \psi \dot{w}'''' - \varphi \dot{w}'' - w'' \left[ k \int_0^l (w')^2 dx + 2\alpha \int_0^l w' \dot{w} dx \right] = 0. \quad (2.2.23)$$

Получим достаточные условия устойчивости решений дифференциального уравнения (2.2.23) по отношению к возмущениям начальных условий. Введем функционал

$$\Phi(t) = \int_0^l \left[ Dw'' + M\dot{w}^2 - (N + m_* u^2) w'^2 + \right. \\ \left. + \theta \int_{t-\tau}^t dt_1 \int_{t_1}^t \dot{w}^2(x, s) ds + \varphi \dot{w}^2 + \theta w^2 \right] dx + \frac{k}{2} \left( \int_0^l w'^2 dx \right)^2. \quad (2.2.24)$$

Найдем производную от  $\Phi$  по  $t$

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}(t) = & \int_0^l \left[ Dw''\dot{w}' + 2M\dot{w}\dot{w}' - 2(N + m_*u^2)w'\dot{w}' + \theta\tau\dot{w}^2 - \right. \\ & \left. - \theta \int_{t-\tau}^t \dot{w}^2(x,s)ds + 2\varphi\dot{w}'\dot{w}' + 2\theta w\dot{w}' \right] dx + 2k \left( \int_0^l w'^2 dx \right) \left( \int_0^l w'\dot{w}' dx \right). \end{aligned} \quad (2.2.25)$$

Пусть концы трубопровода закреплены жестко или шарнирно. Тогда, интегрируя по частям, получим

$$\int_0^l w''\dot{w}' dx = \int_0^l \dot{w}w'''' dx, \quad \int_0^l w'\dot{w}' dx = -\int_0^l \dot{w}w'' dx, \quad \int_0^l \dot{w}'\dot{w}' dx = -\int_0^l \dot{w}\dot{w}'' dx. \quad (2.2.26)$$

Для функции  $w(x,t)$ , являющейся решением уравнения (2.2.23), с учетом (2.2.26), равенство (2.2.25) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}(t) = & \int_0^l \left[ -4um_*\dot{w}\dot{w}' - 2\xi\dot{w}^2 + 2\theta\dot{w} \int_{t-\tau}^t \dot{w}(x,s)ds - 2\psi\dot{w}w'''' + \right. \\ & \left. + \theta\tau\dot{w}^2 - \theta \int_{t-\tau}^t \dot{w}^2(x,s)ds \right] dx + 4\alpha \int_0^l \dot{w}w'' dx \int_0^l w'\dot{w}' dx. \end{aligned} \quad (2.2.27)$$

Для указанных типов закрепления справедливы следующие равенства

$$\int_0^l \dot{w}\dot{w}'''' dx = \int_0^l \dot{w}''^2 dx, \quad \int_0^l \dot{w}w'' dx = -\int_0^l \dot{w}'w' dx, \quad \int_0^l \dot{w}\dot{w}' dx = 0. \quad (2.2.28)$$

Далее, воспользовавшись неравенством

$$2\dot{w}(x,t)\dot{w}(x,s) \leq \dot{w}^2(x,t) + \dot{w}^2(x,s), \quad (2.2.29)$$

и подставляя (2.2.28) в (2.2.27), получим следующую оценку для  $\dot{\Phi}(t)$ :

$$\dot{\Phi}(t) \leq \int_0^l \left[ (-2\xi + \theta\tau)\dot{w}^2 - 2\psi\dot{w}''^2 \right] dx. \quad (2.2.30)$$

Учитывая неравенство Релея:

$$\int_0^l \dot{w}''^2 dx \geq \mu_1 \int_0^l \dot{w}^2 dx, \quad (2.2.31)$$

где  $\mu_1$  – наименьшее собственное значение краевой задачи  $w'''' = \mu w$ , получим

$$\dot{\Phi}(t) \leq \int_0^l \left[ (-2\xi + 2\theta\tau - 2\psi\mu_1)\dot{w}^2 \right] dx. \quad (2.2.32)$$

Таким образом, если выполняется условие

$$\xi - \theta\tau + \psi\mu_1 \geq 0, \quad (2.2.33)$$

то  $\dot{\Phi}(t) \leq 0 \Rightarrow \Phi(t) \leq \Phi(0)$ .

Оценим функционал, используя неравенство (2.2.31). Подставляя  $\mu_1 = 2/l$ , получим

$$\Phi(t) \geq \int_0^l \left[ (\lambda_1 D - N - m_* u^2) w'^2 \right] dx. \quad (2.2.34)$$

Если выполняется условие

$$\lambda_1 D - N - m_* u^2 > 0, \quad (2.2.35)$$

то имеет место оценка для функционала

$$\Phi(t) \geq \frac{2(\lambda_1 D - N - m_* u^2)}{l} w^2(x, t). \quad (2.2.36)$$

Значение функционала в начальный момент времени определяется выражением

$$\Phi(0) = \int_0^l \left[ Dw_0'' + M\dot{w}_0'^2 - (N + m_* u^2) w_0'^2 + \varphi \dot{w}_0'^2 + \theta w_0'^2 \right] dx + \frac{k}{2} \left( \int_0^l w_0'^2 dx \right)^2. \quad (2.2.37)$$

Следовательно, имеет место следующее неравенство

$$w^2(t) \leq \frac{l}{2(\lambda_1 D - N - m_* u^2)} \times \left\{ \int_0^l \left[ Dw_0'' + M\dot{w}_0'^2 - (N + m_* u^2) w_0'^2 + \varphi \dot{w}_0'^2 + \theta w_0'^2 \right] dx + \frac{k}{2} \left( \int_0^l w_0'^2 dx \right)^2 \right\}. \quad (2.2.38)$$

Из неравенства (2.2.38) следует теорема 6.

**Теорема 6.** Пусть выполнено условие (2.2.35). Тогда решение  $w(x, t)$  дифференциального уравнения (2.2.23) устойчиво по отношению к возмущениям начальных значений  $\dot{w}_0, w_0', w_0'', \dot{w}_0'$ , если функция  $w(x, t)$  удовлетворяет краевым условиям: на левом конце при  $x = 0$  и на правом при  $x = l$  шарнирный или жесткий тип закрепления.

**Исследование устойчивости в линейной модели с учетом запаздывания**

$$Dw'''' + (m_0 + m_*) \dot{w} + (N + m_* U^2) w'' + 2Um_* \dot{w}' + \psi \dot{w}'''' - \phi \dot{w}'' + \sum_{k=1}^n \theta_k \dot{w}(x, t - \tau_k) + \sum_{k=1}^m \xi_k w(x, t - \beta_k) = 0. \quad (2.2.39)$$

Решение уравнения (2.2.39) можно искать в виде  $w(x, t) = g(x)e^{\omega t}$ , тогда для  $g(x)$  получим однородное дифференциальное уравнение

$$(D + \psi\omega)g'''' + (N + m_* U^2 - \phi\omega^2)g'' + 2Um_*\omega g' + \left[ (m_0 + m_*)\omega^2 + \omega \sum_{k=1}^n \theta_k e^{-\omega\tau_k} + \sum_{k=1}^m \xi_k e^{-\omega\beta_k} \right] g = 0. \quad (2.2.40)$$

Добавляя граничные условия для функции  $g(x)$ , получим задачу на собственные значения. Например, при шарнирном закреплении левого

конца  $x = 0$  и жестко защемленном правом конце  $x = l$  условия имеют вид

$$g(0) = g''(0) = 0, \quad g(l) = g'(l) = 0. \quad (2.2.41)$$

Один из способов решения задачи может состоять в отыскании решения уравнения (2.2.40) в виде  $g(x) = e^{\lambda x}$ , для  $\lambda$  получим алгебраическое уравнение четвертого порядка. Восстановив по найденным значениям  $\lambda$  фундаментальную систему решений  $g_1(x), g_2(x), g_3(x), g_4(x)$ , общее решение уравнения (2.2.40) запишем в виде

$$g(x) = \sum_{k=1}^4 c_k g_k(x). \quad (2.2.42)$$

Удовлетворяя четырем однородным граничным условиям, получим систему уравнений для произвольных постоянных  $c_1, c_2, c_3, c_4$ . При этом в процессе решений должны определиться возможные собственные значения  $\omega$ .

Другой способ основан на методе Галеркина. В этом случае решение краевых задач для уравнения (2.2.40), например, краевой задачи (2.2.40)-(2.2.41), отыскивается в виде

$$g(x) = \sum_{k=1}^n a_k f_k(x), \quad (2.2.43)$$

где  $\{f_k(x)\}_1^\infty$  – полная на отрезке  $[0, l]$  система базисных функций, удовлетворяющая граничным условиям (2.2.41).

Третий способ состоит в применении метода Галеркина непосредственно к уравнению (2.2.39)

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^n w_k(t) f_k(x). \quad (2.2.44)$$

Тогда для  $w_k(t)$  получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений с несколькими запаздываниями аргумента  $t$ , решение которой можно находить аналитическими или численными методами.

Таким образом, рассмотрены ряд задач аэрогидроупругости о колебаниях, возникающих при протекании жидкости в трубопроводе. В одном случае учитывались только поперечные колебания, в другом – и продольные колебания. Рассмотрен случай запаздывания реакции основания. Для задач приведены возможные типы граничных условий в зависимости от типа закрепления концов трубопровода и наличия внешней силы. На основе построенных функционалов типа Ляпунова произведен анализ устойчивости решений дифференциальных уравнений, описывающих колебания, сформулированы теоремы устойчивости и получены аналитические условия для параметров механической системы.

### 2.3. О влиянии линейной упругой связи на изгибные формы пластины-полосы в сверхзвуковом потоке

Решение задач о статической неустойчивости конструкций связано с теорией ветвления решения дифференциальных уравнений. Исследования в этом направлении проводились аналитическими и численными методами в работах Абботта Ж.П., Аткинсона К.Е., Бола Е., Крандалла М.Г., Рабиновича П.Х., Демулина М.Ж., Чена М., Холмеса П., Марсдена Ж., Кеенера Ж.П., Келлера Х.Б., Кубичека М., Марека М., Лангфорда В.Ф., Плаута Р.Х., Редиена Г.В., Зейдела Р., Стакгольда И., Вебера Х., Вайнберга М.М., Треногина В.А., Логинова Б.В., Вельмисова П.А., Сидорова Н.А. и др. В частности, результаты исследований устойчивости упругих элементов конструкций, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа, приведены в работах Алгазина С.Д., Кийко И.А., Кудрявцева Б.Ю., Показеева В.В., Минасяна Д.М. и других [2.1-2.3, 2.40, 2.41, 2.45, 2.50, 2.52], а также в работах авторов [2.22, 2.25, 2.26, 2.31, 2.37, 2.42, 2.43, 2.65, 2.67, 2.70, 2.71].

Рассмотрим математическую модель задачи об изгибных формах пластины-полосы в сверхзвуковом потоке газа, описываемую безразмерным нелинейным интегро-дифференциальным уравнением

$$w^{(4)} + \frac{\alpha \ell^3}{D} w' + \frac{a_3 \ell^6}{D} w^3 - \frac{\theta \ell^3}{D} w'' \int_0^1 (w')^2 dx = 0, \quad (2.3.1)$$

$$\alpha = \frac{\alpha_0 \rho_0 V^2}{\sqrt{M^2 - 1}}, \quad M = \frac{V}{a}, \quad \theta = \frac{EF}{2\ell(1 - \mu^2)}, \quad D = EJ$$

и линейными граничными условиями:

$$w''(0) = 0, \quad w'''(0) = 0, \quad w'(1) = 0, \quad d_0 w'''(1) = d_1 w(1). \quad (2.3.2)$$

В (2.3.1)  $D$  – изгибная жесткость пластины;  $V$ ,  $\rho_0$ ,  $a$  – скорость газа, плотность и скорость звука, соответствующие однородному потоку;  $M$  – число Маха;  $a_3$  – коэффициент, характеризующий жесткость основания; интегральный член учитывает нелинейное воздействие продольного усилия;  $\alpha w'$  – член, учитывающий аэродинамическое воздействие;  $\alpha_0 = 1$  ( $\alpha_0 = 2$ ) соответствует одностороннему (двустороннему) обтеканию пластины;  $w(x)$  – прогиб пластины;  $E$  – модуль упругости;  $\mu$  – коэффициент Пуассона;  $F$  – площадь поперечного сечения;  $J$  – момент инерции сечения. Все коэффициенты, входящие в уравнение и граничные условия, постоянные.

Линеаризованная система имеет вид

$$w^{(4)} + \lambda w' = 0, \quad \lambda = \frac{\alpha l^3}{D}, \quad (2.3.3)$$

$$w''(0) = 0, \quad w'''(0) = 0, \quad d_0 w'''(1) = d_1 w(1), \quad w'(1) = 0.$$

В (2.3.3)  $d_0 = D = EJ$  – жесткость;  $d_1$  – коэффициент жесткости опоры. Закрепление правого конца допускает его упругое вертикальное смещение. Дисперсионное соотношение, определяющее точки ветвления  $\lambda = s_0^3$  имеет вид

$$\frac{1}{2} e^{-\frac{3}{2}s} + \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}s\right) = 0, \quad s_1 \approx 1,85. \quad (2.3.4)$$

Собственным числам из (2.3.4) отвечает собственная функция  $\varphi_*(x)$

$$\varphi_*(x) = 2\sqrt{3} \left( \frac{d_0}{d_1} s^3 + 1 \right) \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}s + \frac{\pi}{3}\right) e^{\frac{s}{2}} + e^{-sx} - 2e^{\frac{sx}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}sx + \frac{\pi}{6}\right). \quad (2.3.5)$$

Согласно [23], сопряженная задача имеет вид

$$u^{(4)} - \lambda u' = 0, \quad (2.3.6)$$

$$u''(0) = 0, \quad u'''(0) - \lambda u(0) = 0, \quad u'(1) = 0, \quad (d_0 / d_1 + s^3)u(1) = u'''(1).$$

Задача (2.3.6) имеет те же собственные числа, определяемые из соотношения (2.3.4), что и прямая задача (2.3.3). Собственная функция сопряженной задачи имеет вид

$$\psi_*(x) = \left(1/2 + \sqrt{3}e^{3s/2} \sin(\sqrt{3}s/2)\right) e^{-\frac{sx}{2}} \cos(\sqrt{3}sx/2) + e^{sx} +$$

$$+ \left(\sqrt{3}/2 - e^{3s/2} \sin(\sqrt{3}s/2)\right) \cdot e^{-\frac{sx}{2}} \sin(\sqrt{3}sx/2). \quad (2.3.7)$$

Асимптотика решений уравнения (2.3.1) имеет вид

$$w(x) = \pm \sqrt{-\frac{L_{11}^*}{L_{30}^*} \varepsilon} \cdot \varphi_*(x) + o(\sqrt{\varepsilon}) \quad (2.3.8)$$

с коэффициентами

$$\begin{aligned}
L_{11}^* &= -\int_0^1 \varphi'_* \psi_* dx = -\int_0^1 \left( \left( \frac{d_0}{d_1} s^3 + 1 \right) 2\sqrt{3} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}s + \frac{\pi}{3}\right) e^{\frac{s}{2}} + e^{-sx} - \right. \\
&\quad \left. - 2e^{\frac{sx}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}sx + \frac{\pi}{6}\right) \right)' \cdot \left( e^{sx} + \left( \sqrt{3}e^{\frac{3}{2}s} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}s\right) + \frac{1}{2} \right) e^{-\frac{sx}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}sx\right) + \right. \\
&\quad \left. + \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - e^{\frac{3}{2}s} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}s\right) \right) e^{-\frac{sx}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}sx\right) \right) dx = \frac{3}{2}s + \sqrt{3}se^{\frac{3}{2}s} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}s\right),
\end{aligned}$$

$$L_{30}^* = -\frac{a_3 \ell^6}{D} \int_0^1 \varphi_*^3 \psi_* dx + \frac{\theta \ell^3}{D} \int_0^1 \varphi_*'^2 dx \int_0^1 \varphi_*'' \psi_* dx = -\frac{a_3 \ell^6}{D} L_{30}^{*(1)} + \frac{\theta \ell^3}{D} L_{30}^{*(2)},$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \varphi_*'^2 dx &= \int_0^1 \left( -se^{-sx} - se^{\frac{sx}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}sx + \frac{\pi}{6}\right) - \sqrt{3}se^{\frac{sx}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}sx + \frac{\pi}{6}\right) \right)^2 dx = \\
&= \frac{3}{4}se^{-2s} + \frac{3}{2}se^s + \frac{3\sqrt{3}}{2}se^{-\frac{s}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}s\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \varphi_*'' \psi_* dx &= \int_0^1 \left( s^2 e^{-sx} + s^2 e^{\frac{sx}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}sx + \frac{\pi}{6}\right) - \sqrt{3}s^2 e^{\frac{sx}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}sx + \frac{\pi}{6}\right) \right) \cdot \left( e^{sx} + \right. \\
&\quad \left. + \left( \frac{1}{2} + \sqrt{3}e^{\frac{3}{2}s} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}s\right) \right) e^{-\frac{sx}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}sx\right) + \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - e^{\frac{3}{2}s} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}s\right) \right) e^{-\frac{sx}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}sx\right) \right) dx = \\
&= 2\sqrt{3}se^{\frac{3}{2}s} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}s\right) - \sqrt{3}s^2 e^{\frac{3}{2}s} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}s\right) + \frac{3}{2}s^2 + 3s,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_{30}^{*(2)} &= \left( \frac{3}{4}se^{-2s} + \frac{3}{2}se^s + \frac{3\sqrt{3}}{2}se^{-\frac{s}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}s\right) \right) \left( \frac{3}{2}s^2 + 3s + 2\sqrt{3}se^{\frac{3}{2}s} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}s\right) - \right. \\
&\quad \left. - \sqrt{3}s^2 e^{\frac{3}{2}s} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}s\right) \right) = \frac{9}{4}s^3 e^{-2s} + 3\sqrt{3}s^2 e^{-\frac{s}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}s\right) \left( 2 + \frac{1}{2}s \right) + \\
&\quad + \frac{9}{2}s^2 e^s \left( 3 - \frac{1}{2}s \right) + 3\sqrt{3}s^2 e^{\frac{5}{2}s} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}s\right) \left( 1 - \frac{1}{2}s \right),
\end{aligned}$$

$$L_{30}^{*(1)} = \int_0^1 \varphi_*^3 \psi_* dx = \int_0^1 \left( \left( \frac{d_0}{d_1} s^3 + 1 \right) 2\sqrt{3} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}s + \frac{\pi}{3}\right) e^{\frac{s}{2}} + e^{-sx} - 2e^{\frac{sx}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}sx + \frac{\pi}{6}\right) \right)^3 \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \left( \left( \sqrt{3}e^{\frac{3}{2}s} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}s\right) + \frac{1}{2} \right) e^{-\frac{sx}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}sx\right) + \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - e^{\frac{3}{2}s} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}s\right) \right) e^{-\frac{sx}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}sx\right) + \right. \\
& \left. + e^{sx} \right) dx = \left( \frac{d_0}{d_1} s^3 + 1 \right)^3 \left( \frac{18\sqrt{3}}{s} e^{-\frac{s}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}s\right) - \frac{81}{2s} e^s + \frac{9\sqrt{3}}{s} e^{\frac{5}{2}s} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}s\right) \right) + \\
& + \left( \frac{d_0}{d_1} s^3 + 1 \right)^2 \left( 6\sqrt{3}e^{\frac{s}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}s\right) - 9\sqrt{3}e^{\frac{5}{2}s} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}s\right) - \frac{9\sqrt{3}}{2s} e^{\frac{7}{2}s} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}s\right) + \right. \\
& \left. + \frac{9}{4s} e^{-2s} - \frac{9\sqrt{3}}{s} e^{\frac{5}{2}s} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}s\right) - \frac{15\sqrt{3}}{s} e^{\frac{s}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}s\right) + \frac{63}{2s} e^s \right) + \\
& + \left( \frac{d_0}{d_1} s^3 + 1 \right) \left( \frac{335}{56s} e^{-2s} + \frac{153}{14s} e^{2s} + \frac{54\sqrt{3}}{56s} e^{\frac{7}{2}s} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}s\right) + \right. \\
& \left. + \frac{54\sqrt{3}}{7s} e^{\frac{5}{2}s} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}s\right) + \frac{435\sqrt{3}}{7s} e^{\frac{s}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}s\right) - \frac{2961}{56s} e^s + \frac{9}{s} e^{-s} + \right. \\
& \left. + \frac{3\sqrt{3}}{14s} e^{\frac{3}{2}s} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}s\right) - \frac{3\sqrt{3}}{7s} e^{\frac{s}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}s\right) + \frac{9}{2s} \right) + \\
& \left. + \frac{4095\sqrt{3}}{728s} e^{\frac{3}{2}s} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}s\right) + \frac{2799}{364s} e^s. \right.
\end{aligned}$$

Для полученных асимптотических решений (2.3.8) построены зависимости  $w(V)$  (рис. 2.3.1) и  $w(x)$  (рис. 2.3.2).

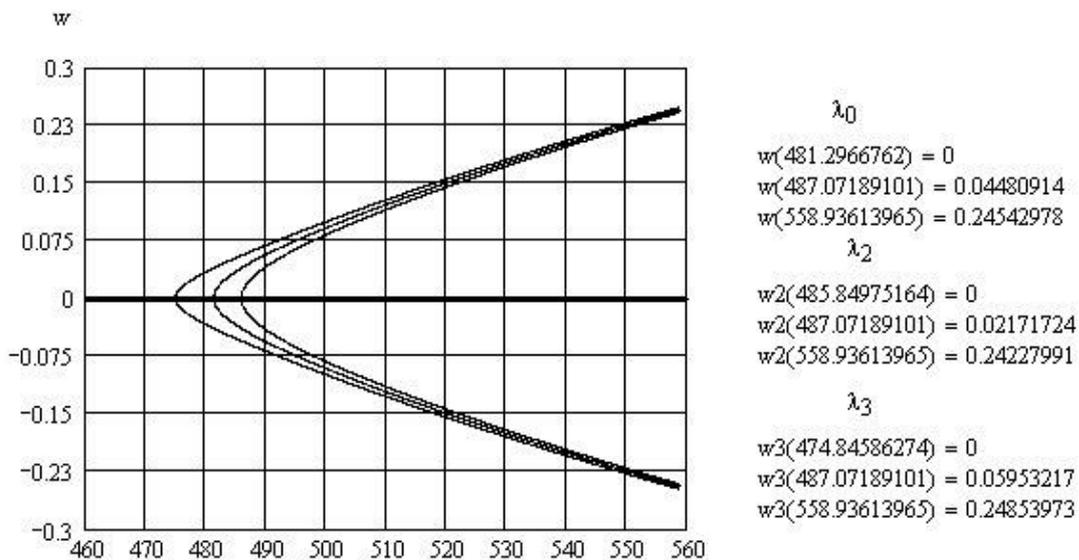


Рис. 2.3.1 Бифуркационные диаграммы

$$\varepsilon = 0.01$$

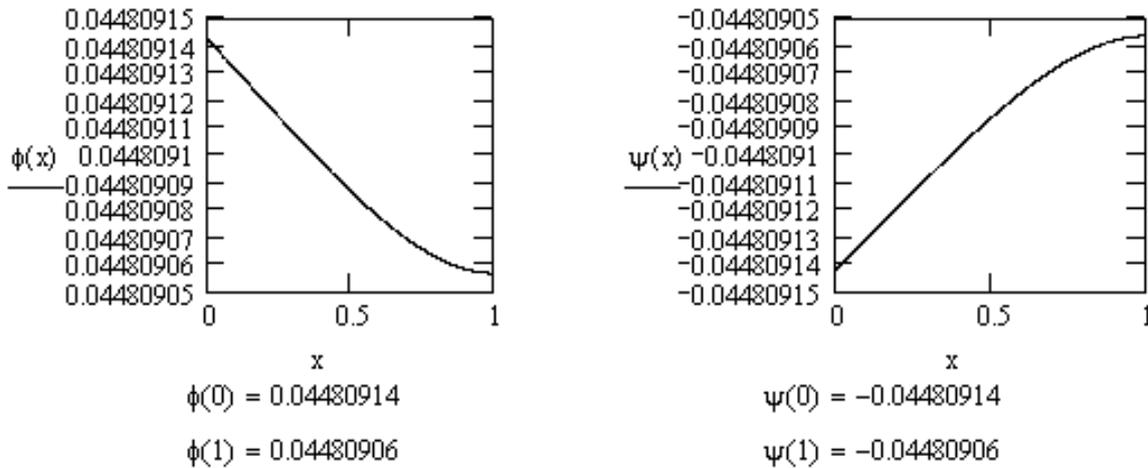


Рис. 2.3.2 Прогиб пластины

Построение проводилось со значениями параметров: толщина пластины  $h = 5$  мм,  $E = 7 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>,  $\mu = 0.31$  (алюминий),  $\ell = 1$  м,  $a = 330$  м/с,  $\rho_0 = 1.2$  кг/м<sup>3</sup> (воздух),  $\theta = 35 \cdot 10^5$  Н/м,  $\alpha_0 = 2$ ,  $a_3 = 1$  Н/м<sup>4</sup>,  $D_2 = 82.63 \cdot 10^3$  Нм<sup>2</sup>,  $D_0 = 82.73 \cdot 10^3$  Нм<sup>2</sup>,  $D_3 = 82.83 \cdot 10^3$  Нм<sup>2</sup>.

Построение проводилось с помощью программы Mathcad 2001i Professional. Зависимость максимального прогиба пластины от скорости набегающего потока  $V$  определяется формулой

$$w(V) = \pm \sqrt{-\frac{L_{11}}{L_{30}} \left( \frac{\ell^3 \rho a V^2 \alpha}{D \sqrt{V^2 - a^2}} - s_0^3 \right)} \max(\varphi(x)). \quad (2.3.9)$$

Если возмущение  $\varepsilon = \lambda - s_0^3$  образуется за счет увеличения скорости потока, то ветвление в точке  $\lambda_0 = s_0^3$  надкритическое, то есть  $\varepsilon > 0$ . В то же время  $\varepsilon > 0$ , при неизменной скорости потока, может быть получено вследствие уменьшения изгибной жесткости, для которой ветвление будет подкритическим. Бифуркационные диаграммы представлены на рисунке 2.3.1 при фиксированных коэффициентах изгибной жесткости  $D_2 < D_0 < D_3$  в зависимости от изменения скорости набегающего потока сверх критических значений  $\lambda_3 < \lambda_0 = s_0^3 < \lambda_2$ .

На рисунке 2.3.2 левая диаграмма соответствует  $D_2$ ,  $\lambda_3$ ,  $w_2$ ; средняя –  $D_0$ ,  $\lambda_0$ ,  $w$ ; правая –  $D_3$ ,  $\lambda_2$ ,  $w_3$ .

## 2.4. Математическое моделирование динамики упругих элементов вибрационного устройства

При проектировании различных конструкций, устройств, приборов, аппаратов, систем и т. д., находящихся во взаимодействии с газожидкостной средой (обтекаемых потоком жидкости или газа), необходимо решать задачи, связанные с исследованием динамики и устойчивости упругих элементов, требуемой для их качественного функционирования и надежности эксплуатации [2.5-2.20, 2.23, 2.31-2.36, 2.48, 2.49, 2.55 и др.].

Воздействие потока может приводить к эффектам, являющимся причиной нарушения функциональных свойств элементов, вплоть до их разрушения (например, приводит к состоянию неустойчивости вследствие увеличения амплитуды или ускорения колебаний до критически допустимых значений).

Такая проблема, когда неустойчивость является негативным явлением, возникает, например, при проектировании составных частей летательных и подводных аппаратов: элерона – составной части крыла; руля высоты – составной части стабилизатора, руля направления – составной части киля; панели – составной части фюзеляжа или крыла.

В то же время для функционирования некоторых технических устройств явление возбуждения колебаний при аэрогидродинамическом воздействии, указанное выше в качестве негативного, является необходимым. Примерами подобных устройств, относящихся к вибрационной технике и используемых для интенсификации технологических процессов, являются устройства для приготовления однородных смесей и эмульсий, в частности, устройства для подачи смазочно-охлаждающей жидкости в зону обработки (см., например [2.55]).

Другим примером, когда деформация упругих элементов при аэрогидродинамическом воздействии необходима для функционирования приборов и является основой их работы, являются датчики давления [2.5, 2.23, 2.32, 2.48].

Ниже предложена математическая модель гидродинамического излучателя – вибрационного устройства, предназначенного для приготовления однородных смесей и эмульсий. Основными элементами устройства являются расположенные в проточном канале упругие элементы, колебания которых приводят к размешиванию неоднородной среды, подаваемой в этот канал.

Рассматривается плоская задача аэрогидроупругости о малых колебаниях, возникающих при бесциркуляционном обтекании пластины потенциальным потоком идеального несжимаемого газа (жидкости) в канале с прямолинейными стенками.

Пусть в состоянии покоя на плоскости  $xOy$  пластине, содержащей  $n$  упругих вставок  $[a_k, b_k]$ ,  $k = \overline{1, n}$ , соответствует отрезок  $[a, b]$  оси  $Ox$  (рис. 2.4.1).

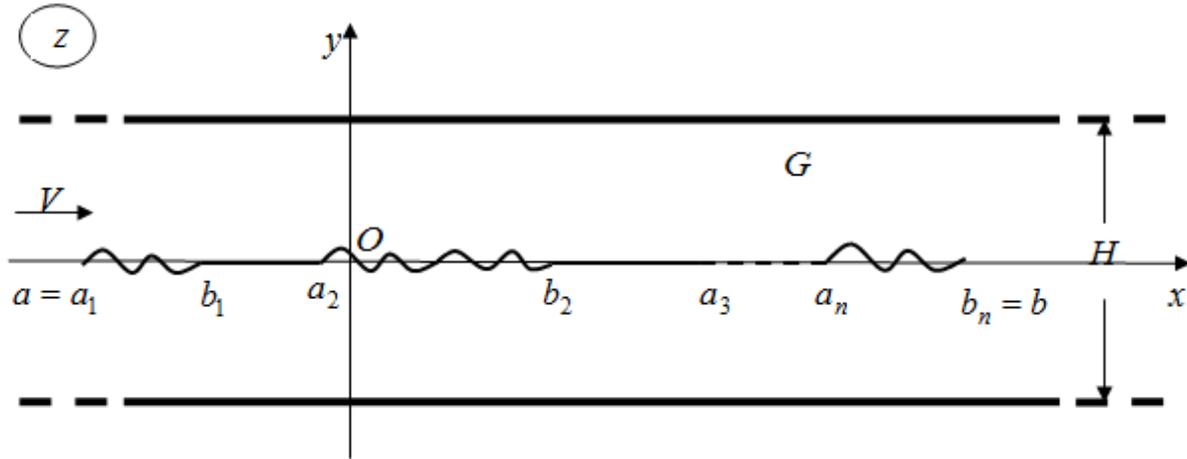


Рис. 2.4.1 Расчетная схема

Скорость набегающего потока газа (жидкости) равна  $V$  и направлена вдоль оси  $Ox$ , ширина канала равна  $H$ . Предполагается, что возмущение однородного потока и деформации упругих вставок малы, то есть  $\bar{\varphi}(x, y, t) = Vx + \varepsilon\varphi(x, y, t)$ ,  $\bar{w}_k(x, t) = \varepsilon w_k(x, t)$ ,  $\varepsilon \ll 1$ ,  $k = \overline{1, n}$ . Здесь  $\bar{\varphi}(x, y, t)$  – потенциал скорости возмущенного потока,  $\bar{w}_k(x, t)$  – деформация (прогиб)  $k$ -й вставки;  $x, y$  – декартовы координаты,  $t$  – время.

Потенциал  $\varphi$  удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0, \quad (x, y) \in G = R^2 \setminus [a, b], \quad (2.4.1)$$

условию отсутствия возмущений на бесконечности справа и слева от пластины

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_t^2) = 0 \quad (2.4.2)$$

и линеаризованным граничным условиям

$$\varphi_y \left( x, \pm \frac{H}{2}, t \right) = 0, \quad x \in (-\infty, \infty), \quad (2.4.3)$$

$$\varphi_y^\pm(x, 0, t) = \lim_{y \rightarrow 0^\pm} \varphi_y(x, y, t) = \begin{cases} \dot{w}_k(x, t) + Vw_k'(x, t), & x \in (a_k, b_k), k = \overline{1, n}; \\ 0, & x \in (b_k, a_{k+1}), k = \overline{1, n-1}. \end{cases} \quad (2.4.4)$$

В (2.4.4) и далее штрих означает производную по  $x$ , а точка – производную по  $t$ .

Линеаризуя интеграл Лагранжа-Коши, получим следующее выражение для реакции газа (жидкости) на пластину

$$Q = \rho(\varphi_t^+ - \varphi_t^-) + \rho V(\varphi_x^+ - \varphi_x^-),$$

где  $\rho$  – плотность газа (жидкости). Тогда уравнение колебаний упругих вставок можно записать в виде

$$L_k(w_k) = \rho(\varphi_t^+ - \varphi_t^-) + \rho V(\varphi_x^+ - \varphi_x^-), \quad x \in (a_k, b_k), \quad y = 0, \quad (2.4.5)$$

$$L_k(w_k) \equiv M_k \ddot{w}_k + D_k w_k'''' + N_k w_k'' + \delta_k \dot{w}_k'''' + \beta_k \dot{w}_k + \alpha_k w_k, \quad (2.4.6)$$

где  $M_k, D_k, N_k, \delta_k, \beta_k, \alpha_k$  – некоторые постоянные,  $k = \overline{1, n}$ .

Выражая потенциал  $\varphi(x, y, t)$  через функцию прогиба  $w_k(x, t)$ , запишем уравнения колебаний (2.4.5) относительно функций  $w_k(x, t)$ . С этой целью в области  $G$  введем комплексный потенциал  $W = f(z, t) = \varphi + i\psi$ , где  $\psi = \psi(x, y, t)$  – функция тока,  $z = x + iy$ . Функцию скоростей  $f_z(z, t) = \varphi_x - i\varphi_y$  представим в виде

$$f_z(z, t) = \frac{\gamma}{\pi \sqrt{h(z)}} \left( \int_a^b v(\tau, t) \sqrt{h(\tau)} \operatorname{cth} \gamma(\tau - z) d\tau + \gamma \Gamma(t) \right), \quad z \in G, \quad (2.4.7)$$

где  $h(z) = sh \gamma(z - a) sh \gamma(b - z)$ ,  $\gamma = \pi/H$ ,

$$v(x, t) = \begin{cases} \dot{w}_k(x, t) + V w_k'(x, t), & x \in (a_k, b_k), k = \overline{1, n}; \\ 0, & x \in (b_k, a_{k+1}), k = \overline{1, n-1}, \end{cases}$$

$\Gamma(t)$  – функция, определяющая циркуляцию скорости вокруг пластины  $[a, b]$ .

Ветвь корня в формуле (2.4.7) фиксирована условием

$$\sqrt{h(z)} = i \sqrt{sh \gamma(x - a) sh \gamma(x - b)} \quad \text{при } z = x > b. \quad (2.4.8)$$

Так как функция  $f_z(z, t)$  аналитическая в области  $G$ , то в этой области согласно условию по условию Коши-Римана  $(\varphi_x)_x = (-\varphi_y)_y$ , или  $\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0$ . Проверим выполнение граничных условий (2.4.3), (2.4.4). На

стенках канала  $z = x \pm i \frac{H}{2} = x \pm \frac{i\pi}{2\gamma}$ . Поскольку

$$sh \gamma(z - a) = sh \gamma \left( x - a \pm \frac{i\pi}{2\gamma} \right) = \pm ich \gamma(x - a),$$

$$sh \gamma(b - z) = sh \gamma \left( b - x \pm \frac{i\pi}{2\gamma} \right) = \pm ich \gamma(b - x),$$

$$cth \gamma(\tau - z) = cth \gamma \left( \tau - x \pm \frac{i\pi}{2\gamma} \right) = th \gamma(\tau - x),$$

то

$$f_z \left( x \pm \frac{iH}{2}, t \right) = \varphi_x - i\varphi_y = \\ = \frac{\gamma}{\pi \sqrt{ch\gamma(x-a)ch\gamma(b-x)}} \left( \int_a^b v(\tau, t) \sqrt{h(\tau)} th\gamma(\tau-x) d\tau + \gamma \Gamma(t) \right),$$

следовательно,  $\varphi_y \left( x, \pm \frac{H}{2}, t \right) = 0$ ,  $x \in (-\infty, +\infty)$ .

Чтобы проверить выполнение условий (2.4.4), воспользуемся разложением

$$ctgz = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2 \pi^2},$$

согласно которому

$$\gamma th\gamma(\tau-z) = i\gamma ctgi\gamma(\tau-z) = \frac{1}{\tau-z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(\tau-z)}{(\tau-z)^2 + n^2 H^2},$$

и перейдем в (2.4.7) к пределу при  $z \rightarrow x \pm i0$ ,  $x \in (a, b)$ .

Применяя формулы Сохоцкого [2.46] и учитывая, что в силу условия (2.4.8)  $\sqrt{h(z)} \rightarrow \mp \sqrt{h(x)}$ , будем иметь

$$\varphi_x^{\pm} - i\varphi_y^{\pm} = \frac{1}{\mp \pi \sqrt{h(x)}} \left[ \pm \pi i v(x, t) \sqrt{h(x)} + \int_a^b v(\tau, t) \sqrt{h(\tau)} \left( \frac{1}{\tau-x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(\tau-x)}{(\tau-x)^2 + n^2 H^2} \right) d\tau + \gamma^2 \Gamma(t) \right] = \\ = -i v(x, t) \mp \frac{\gamma}{\pi \sqrt{h(x)}} \left( \int_a^b v(\tau, t) \sqrt{h(\tau)} cth\gamma(\tau-x) d\tau + \gamma \Gamma(t) \right),$$

где  $x \in (a, b)$ .

Отсюда следует, что

$$\varphi_y^{\pm}(x, 0, t) = v(x, t) = \begin{cases} \dot{w}_k(x, t) + V w_k'(x, t), x \in (a_k, b_k), k = \overline{1, n}; \\ 0, x \in (b_k, a_{k+1}), k = \overline{1, n-1} \end{cases},$$

то есть выполняются условия (2.4.4). Кроме того, приравняв вещественные части, имеем

$$\varphi_x^{\pm} = \mp \frac{\gamma}{\pi \sqrt{h(x)}} \left( \int_a^b v(\tau, t) \sqrt{h(\tau)} cth\gamma(\tau-x) d\tau + \gamma \Gamma(t) \right).$$

Следовательно,

$$\varphi_x^+ - \varphi_x^- = -\frac{2\gamma}{\pi\sqrt{h(x)}} \left( \int_a^b v(\tau, t) \sqrt{h(\tau)} \operatorname{cth}\gamma(\tau - x) d\tau + \gamma\Gamma(t) \right), \quad x \in (a, b). \quad (2.4.9)$$

Комплексный потенциал  $W = f(z, t)$  найдем по формуле

$$W = \varphi + i\psi = \int_a^z f_z(z, t) dz + C(t), \quad (2.4.10)$$

где  $C(t)$  – произвольная функции времени,  $z \in G$ .

Так как  $G$  – двусвязная область, то интеграл в (2.4.10), вообще говоря, зависит от линии интегрирования. Поэтому  $\varphi_t$ , а значит и правые части уравнений (2.4.5) однозначно не определяются. Подберем функцию  $\Gamma(t)$  так, чтобы циркуляция скорости вокруг пластины равнялась нулю.

При обходе против часовой стрелки разреза  $[a, b]$  циркуляция

$$\Gamma_0(t) = \int_a^b \varphi_x^- dx + \int_b^a \varphi_x^+ dx = \int_a^b (\varphi_x^- - \varphi_x^+) dx.$$

Воспользовавшись формулой (2.4.9), получим

$$\Gamma_0(t) = \frac{2\gamma}{\pi} \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{h(x)}} \int_a^b v(\tau, t) \sqrt{h(\tau)} \operatorname{cth}\gamma(\tau - x) d\tau + \frac{2\gamma^2\Gamma(t)}{\pi} \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{h(x)}} = 0,$$

если

$$\Gamma(t) = -\frac{1}{M\gamma} \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{h(x)}} \int_a^b v(\tau, t) \sqrt{h(\tau)} \operatorname{cth}\gamma(\tau - x) d\tau, \quad (2.4.11)$$

где  $M = \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{h(x)}}$ . В этом случае при обходе против часовой стрелки разреза  $l = [a, b]$  имеем

$$\begin{aligned} \oint_l f_z(z, t) dz &= \oint_l \varphi_x dx + \varphi_y dy + i \oint_l \varphi_x dy - \varphi_y dx = \\ &= \oint_l \varphi_x dx - i \oint_l \varphi_x dx = \Gamma_0(t) + i \int_a^b (\varphi_y^+ - \varphi_y^-) dx = 0. \end{aligned}$$

Отсюда по теореме Коши следует, что интеграл от функции  $f_z(z, t)$  по любому замкнутому контуру, принадлежащему области  $G$ , равен нулю. А тогда значение потенциала  $\varphi$ , определяемое формулой (2.4.10), не зависит от линии интегрирования, соединяющей точки  $a$  и  $z$ .

Интегрируя по частям, представим (2.4.7) в виде

$$f_z(z, t) = \frac{\gamma}{\pi\sqrt{h(z)}} \left( \gamma\Gamma(t) - \int_a^b \bar{v}(\tau, t) \left( \sqrt{h(\tau)} \operatorname{cth}\gamma(\tau - z) \right)'_\tau d\tau \right), \quad (2.4.12)$$

где  $\bar{v}(\tau, t) = \int_a^\tau v(x, t) dx$ .

Далее, с учетом того, что (см. Приложение)

$$\left( \frac{\sqrt{h(\tau)}}{sh\gamma(\tau - z)} \right)'_{\tau} = -\frac{\sqrt{h(z)}}{\sqrt{h(\tau)}} \left( \frac{\sqrt{h(z)}}{sh\gamma(\tau - z)} \right)'_z, \quad (2.4.13)$$

имеем

$$\begin{aligned} f_z(z, t) &= \frac{\gamma}{\pi\sqrt{h(z)}} \left( \mathcal{H}(t) - \int_a^b \bar{v}(\tau, t) \left[ \left( \frac{\sqrt{h(z)}}{sh\gamma(\tau - z)} \right)'_z cth\gamma(\tau - z) + \gamma\sqrt{h(\tau)} \right] d\tau \right) = \\ &= \frac{\gamma^2}{\pi\sqrt{h(z)}} \left( \Gamma(t) - \int_a^b \bar{v}(\tau, t) \sqrt{h(\tau)} d\tau \right) + \frac{\gamma}{\pi} \int_a^b \frac{\bar{v}(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} \left( \frac{\sqrt{h(z)}}{sh\gamma(\tau - z)} \right)'_z cth\gamma(\tau - z) d\tau. \end{aligned}$$

Полагая  $A(t) = \Gamma(t) - \int_a^b \bar{v}(\tau, t) \sqrt{h(\tau)} d\tau$  и замечая, что

$$\left( \frac{\sqrt{h(z)}}{sh\gamma(\tau - z)} \right)'_z cth\gamma(\tau - z) = \left( \sqrt{h(z)} cth\gamma(\tau - z) \right)'_z + \gamma\sqrt{h(z)},$$

окончательно запишем

$$f_z(z, t) = \frac{\gamma}{\pi} \int_a^b \frac{\bar{v}(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} \left[ \left( \sqrt{h(z)} cth\gamma(\tau - z) \right)'_z + \gamma\sqrt{h(z)} \right] d\tau + \frac{\gamma^2 A(t)}{\pi\sqrt{h(z)}}. \quad (2.4.14)$$

Подставляя (2.4.14) в (2.4.10), получим

$$\begin{aligned} W = \varphi + i\psi &= \frac{\gamma\sqrt{h(z)}}{\pi} \int_a^b \frac{\bar{v}(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} cth\gamma(\tau - z) d\tau + \\ &+ \frac{\gamma^2}{\pi} \int_a^b \frac{\bar{v}(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} d\tau \int_a^z \sqrt{h(z)} dz + \frac{\gamma^2 A(t)}{\pi} \int_a^z \frac{dz}{\sqrt{h(z)}} + C(t). \end{aligned} \quad (2.4.15)$$

Подберем функцию  $C(t)$  так, чтобы выполнялось условие (2.4.2).

Пусть  $z = x < a$ , тогда  $\sqrt{h(z)} = -i\sqrt{-h(x)}$  в силу выбора ветви корня, а

$$\begin{aligned} W = f(x, t) &= \frac{-i\gamma\sqrt{-h(x)}}{\pi} \int_a^b \frac{\bar{v}(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} cth\gamma(\tau - x) d\tau - \\ &- \frac{i\gamma^2}{\pi} \int_a^b \frac{\bar{v}(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} d\tau \int_a^x \sqrt{-h(x)} dx + \frac{i\gamma^2 A(t)}{\pi} \int_a^x \frac{dx}{\sqrt{-h(x)}} + C(t), \end{aligned}$$

следовательно,

$$\varphi(x, 0, t) = \operatorname{Re}\{C(t)\}, \quad x < a. \quad (2.4.16)$$

Если  $z = x > b$ , то  $\sqrt{h(z)} = i\sqrt{-h(x)}$ ,

$$W = f(x, t) = \frac{i\gamma\sqrt{-h(x)}}{\pi} \int_a^b \frac{\bar{v}(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} cth\gamma(\tau - x) d\tau + \frac{\gamma^2}{\pi} \int_a^b \frac{\bar{v}(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} d\tau \int_a^b (\mp\sqrt{h(x)}) dx +$$

$$+ \frac{\gamma^2 A(t)}{\pi} \int_a^b \frac{dx}{\mp\sqrt{h(x)}} + \frac{i\gamma^2}{\pi} \int_a^b \frac{\bar{v}(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} d\tau \int_b^x \sqrt{-h(x)} dx + \frac{\gamma^2 A(t)}{\pi} \int_b^x \frac{dx}{i\sqrt{-h(x)}} + C(t),$$

$$\varphi(x, 0, t) = \mp \frac{\gamma^2}{\pi} \left( \int_a^b \frac{\bar{v}(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} d\tau \int_a^b \sqrt{h(x)} dx + A(t) \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{h(x)}} \right) + \operatorname{Re}\{C(t)\}, \quad x > a.$$

Поскольку (см. Приложение)

$$\int_a^b \frac{\bar{v}(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} d\tau \int_a^b \sqrt{h(x)} dx + A(t) \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{h(x)}} = 0, \quad (2.4.17)$$

то

$$\varphi(x, 0, t) = \operatorname{Re}\{C(t)\}, \quad x > b. \quad (2.4.18)$$

Из (2.4.7), (2.4.16), (2.4.18) следует, что

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_z(z, t) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\varphi_x - i\varphi_y) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \varphi(x, 0, t) = \operatorname{Re}\{C(t)\},$$

поэтому условие (2.4.2) будет выполнено, если положить  $\operatorname{Re}\{C(t)\} \equiv \operatorname{const}$ .

Найдем граничные значения функции  $\varphi_t(x, y, t)$ . Переходя в (2.4.15) к пределу при  $z \rightarrow x \pm i0$ ,  $x \in (a, b)$ , получаем

$$\varphi^\pm + i\psi^\pm = \mp \frac{\sqrt{h(x)}}{\pi} \left( \pm\pi i \frac{\bar{v}(x, t)}{\sqrt{h(x)}} + \gamma \int_a^b \frac{\bar{v}(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} cth\gamma(\tau - z) d\tau \right) \mp$$

$$\mp \frac{\gamma^2}{\pi} \int_a^b \frac{\bar{v}(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} d\tau \int_a^x \sqrt{h(x)} dx \mp \frac{\gamma^2 A(t)}{\pi} \int_a^x \frac{dx}{\sqrt{h(x)}} + C(t),$$

следовательно,

$$\varphi_t^+ - \varphi_t^- = -\frac{2\gamma\sqrt{h(x)}}{\pi} \int_a^b \frac{\tilde{v}(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} cth\gamma(\tau - x) d\tau -$$

$$-\frac{2\gamma^2}{\pi} \int_a^b \frac{\tilde{v}(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} d\tau \int_a^x \sqrt{h(x)} dx - \frac{2\gamma^2 A'(t)}{\pi} \int_a^x \frac{dx}{\sqrt{h(x)}}, \quad (2.4.19)$$

где  $\tilde{v}(\tau, t) = \overline{v}(\tau, t) = \int_a^\tau v(x, t) dx$ .

Таким образом, согласно формулам (2.4.9), (2.4.19) система уравнений (2.4.5) принимает вид

$$L_k(w_k) = -\frac{2\rho\gamma}{\pi} \left( \sqrt{h(x)} \int_a^b \frac{b\tilde{v}(\tau,t)}{a\sqrt{h(\tau)}} cth\gamma(\tau-x) d\tau + \gamma \int_a^b \frac{b\tilde{v}(\tau,t)}{a\sqrt{h(\tau)}} d\tau \int_a^x \sqrt{h(x)} dx + \right. \\ \left. + \gamma A'(t) \int_a^x \frac{dx}{\sqrt{h(x)}} \right) - \frac{2\gamma\rho V}{\pi\sqrt{h(x)}} \left( \int_a^b v(\tau,t)\sqrt{h(\tau)} cth\gamma(\tau-x) d\tau + \gamma\Gamma(t) \right), \quad (2.4.20)$$

$$x \in (a_k, b_k), \quad k = \overline{1, n}.$$

Левые части уравнения системы (2.4.20) определяется формулами (2.4.6),

$$h(x) = sh\gamma(x-a)sh\gamma(b-x), \quad \gamma = \pi/H,$$

$$\Gamma(t) = -\frac{1}{M\gamma} \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{h(x)}} \int_a^b v(\tau,t)\sqrt{h(\tau)} cth\gamma(\tau-x) d\tau = \\ = \int_a^b \tilde{v}(\tau,t)\sqrt{h(\tau)} d\tau - \frac{N}{M} \int_a^b \frac{\tilde{v}(\tau,t)}{\sqrt{h(\tau)}} d\tau,$$

$$M = \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{h(x)}}, \quad N = \int_a^b \sqrt{h(x)} dx,$$

$$A'(t) = \Gamma'(t) - \int_a^b \tilde{v}(\tau,t)\sqrt{h(\tau)} d\tau = -\frac{N}{M} \int_a^b \frac{\tilde{v}(\tau,t)}{\sqrt{h(\tau)}} d\tau,$$

$$\tilde{v}(\tau,t) = \int_a^\tau v(x,t) dx, \quad \tilde{v}(\tau,t) = \int_a^\tau \dot{v}(x,t) dx,$$

$$v(x,t) = \begin{cases} \dot{w}_k(x,t) + Vw'_k(x,t), & x \in (a_k, b_k), k = \overline{1, n}; \\ 0, & x \in (b_k, a_{k+1}), k = \overline{1, n-1}. \end{cases}$$

**Приложение.** Докажем равенство (2.4.13). Так как

$$\left( \frac{\sqrt{h(\tau)}}{sh\gamma(\tau-z)} \right)'_{\tau} = \frac{h'(\tau)sh\gamma(\tau-z) - 2\gamma h(\tau)ch\gamma(\tau-z)}{2\sqrt{h(\tau)}sh^2\gamma(\tau-z)},$$

$$\left( \frac{\sqrt{h(\tau)}}{sh\gamma(\tau-z)} \right)'_z = \frac{h'(z)sh\gamma(\tau-z) + 2\gamma h(z)ch\gamma(\tau-z)}{2\sqrt{h(z)}sh^2\gamma(\tau-z)},$$

то

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\sqrt{h(\tau)}}{sh\gamma(\tau-z)} \right)'_{\tau} + \frac{\sqrt{h(z)}}{\sqrt{h(\tau)}} \left( \frac{\sqrt{h(z)}}{sh\gamma(\tau-z)} \right)'_z = \\ & = \frac{(h'(\tau) + h'(z))sh\gamma(\tau-z) - 2\gamma ch\gamma(\tau-z)(h(\tau) - h(z))}{2\sqrt{h(\tau)}sh^2\gamma(\tau-z)}. \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$h(z) = sh\gamma(z-a)sh\gamma(b-z) = \frac{1}{2}(ch\gamma(b-a) - ch\gamma(2z-a-b)),$$

получаем

$$\begin{aligned} h'(\tau) + h'(z) &= -\gamma(sh\gamma(2\tau-a-b) + sh\gamma(2z-a-b)) = \\ &= -2\gamma sh\gamma(\tau+z-a-b)ch\gamma(\tau-z), \\ h(\tau) - h(z) &= \frac{1}{2}(ch\gamma(2z-a-b) - ch\gamma(2\tau-a-b)) = \\ &= sh\gamma(\tau+z-a-b)sh\gamma(z-\tau). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\sqrt{h(\tau)}}{sh\gamma(\tau-z)} \right)'_{\tau} + \frac{\sqrt{h(z)}}{\sqrt{h(\tau)}} \left( \frac{\sqrt{h(z)}}{sh\gamma(\tau-z)} \right)'_z = \\ & = \frac{-2\gamma sh\gamma(\tau+z-a-b)ch\gamma(\tau-z)sh\gamma(\tau-z) - 2\gamma ch\gamma(\tau-z)sh\gamma(z+\tau-a-b)sh\gamma(z-\tau)}{2\sqrt{h(\tau)}sh^2\gamma(\tau-z)} = 0, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Докажем равенство (2.4.17), в котором

$$A(t) = \Gamma(t) - \int_a^b \bar{v}(\tau, t) \sqrt{h(\tau)} d\tau, \quad \Gamma(t) = -\frac{1}{M\gamma} \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{h(x)}} \int_a^b v(\tau, t) \sqrt{h(\tau)} cth\gamma(\tau-x) d\tau.$$

Преобразуем выражение для функции  $\Gamma(t)$ . Интегрируя по частям и применяя формулу (2.4.13) при  $z = x$ , будем иметь

$$\begin{aligned} & \int_a^b v(\tau, t) \sqrt{h(\tau)} cth\gamma(\tau-x) d\tau = \bar{v}(\tau, t) \sqrt{h(\tau)} cth\gamma(\tau-x) \Big|_a^b - \\ & - \int_a^b \bar{v}(\tau, t) \left( \sqrt{h(\tau)} cth\gamma(\tau-x) \right)'_{\tau} d\tau = \\ & = - \int_a^b \bar{v}(\tau, t) \left[ \left( \frac{\sqrt{h(\tau)}}{sh\gamma(\tau-x)} \right)'_{\tau} cth\gamma(\tau-x) + \gamma \sqrt{h(\tau)} \right] d\tau = \end{aligned}$$

$$= \sqrt{h(x)} \int_a^b \frac{\bar{v}(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} \left( \frac{\sqrt{h(x)}}{\operatorname{sh} \gamma(\tau - x)} \right)'_x \operatorname{ch} \gamma(\tau - x) d\tau - \gamma \int_a^b \bar{v}(\tau, t) \sqrt{h(\tau)} d\tau.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} M\gamma\Gamma(t) &= - \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{h(x)}} \int_a^b v(\tau, t) \sqrt{h(\tau)} \operatorname{ch} \gamma(\tau - x) d\tau = \\ &= - \int_a^b dx \int_a^b \frac{\bar{v}(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} \left( \frac{\sqrt{h(x)}}{\operatorname{sh} \gamma(\tau - x)} \right)'_x \operatorname{ch} \gamma(\tau - x) d\tau + \gamma \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{h(x)}} \int_a^b \bar{v}(\tau, t) \sqrt{h(\tau)} d\tau. \end{aligned}$$

Меняя порядок интегрирования и интегрируя по частям, запишем окончательно

$$\begin{aligned} M\gamma\Gamma(t) &= - \int_a^b \frac{\bar{v}(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} d\tau \int_a^b \left( \frac{\sqrt{h(x)}}{\operatorname{sh} \gamma(\tau - x)} \right)'_x \operatorname{ch} \gamma(\tau - x) d\tau + M\gamma \int_a^b \bar{v}(\tau, t) \sqrt{h(\tau)} d\tau = \\ &= - \int_a^b \frac{\bar{v}(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} \left[ \frac{\sqrt{h(x)} \operatorname{ch} \gamma(\tau - x)}{\operatorname{sh} \gamma(\tau - x)} \Big|_a^b + \gamma \int_a^b \sqrt{h(x)} dx \right] d\tau + M\gamma \int_a^b \bar{v}(\tau, t) \sqrt{h(\tau)} d\tau = \\ &= - \gamma \int_a^b \frac{\bar{v}(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} d\tau \int_a^b \sqrt{h(x)} dx + M\gamma \int_a^b \bar{v}(\tau, t) \sqrt{h(\tau)} d\tau, \end{aligned}$$

или

$$\Gamma(t) = \int_a^b \bar{v}(\tau, t) \sqrt{h(\tau)} d\tau - \frac{N}{M} \int_a^b \frac{\bar{v}(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} d\tau, \quad (*)$$

где  $N = \int_a^b \sqrt{h(x)} dx$ .

Согласно формуле (\*)

$$A(t) = \Gamma(t) - \int_a^b \bar{v}(\tau, t) \sqrt{h(\tau)} d\tau = - \frac{N}{M} \int_a^b \frac{\bar{v}(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} d\tau.$$

Подставляя это выражение в (2.4.17), получаем верное равенство.

## **2.5. Математическое моделирование систем контроля за изменением давления**

Независимо от принципа преобразования все датчики давления в той или иной степени критичны к воздействию высоких температур и повышенных виброускорений. Размещение датчика давления непосредственно на корпусе двигателя принципиально обеспечивает более высокую достоверность измерения, но, как правило, сопровождается воздействием на датчики давления высоких температур и виброускорений, что приводит к погрешности измерений, а в ряде случаев к разрушению упругого чувствительного элемента датчика.

В связи с вышеизложенным, возникает задача проектирования механической системы «трубопровод – датчик давления». В системе датчик расположен на некотором расстоянии от двигателя и соединен с ним с помощью трубопровода, что позволяет ослабить воздействие высоких температур и виброускорений. Задача состоит в получении уравнений, связывающих закон изменения рабочей среды на входе в трубопровод (на выходе из камеры сгорания двигателя) и деформацию упругого элемента датчика, и предназначенных по величине деформации элемента рассчитать давление в двигателе.

Математические модели системы «трубопровод – датчик давления» рассматривались в [2.5, 2.23, 2.27, 2.29, 2.30, 2.32, 2.34, 2.47, 2.48, 2.68, 2.69]. Исследовались как линейные модели (динамика жидкости (газа), а также динамика чувствительного элемента датчика описываются линейными уравнениями), так и нелинейные, в которых уравнения, описывающие динамику пластины, содержат нелинейные слагаемые.

Ниже предложена новая нелинейная модель системы «трубопровод – датчик давления», учитывающая как поперечную, так и продольную деформации упругого элемента датчика.

### **Линейные математические модели механической системы «трубопровод – датчик давления»**

Рассматриваются плоские модели механической системы «трубопровод – датчик давления» для трубопровода конечной длины (рис. 2.5.1), бесконечно длинного трубопровода (рис. 2.5.2) с датчиком, закрепленным на боковой стенке, и бесконечно длинного трубопровода с датчиком, расположенным на стенке полости трубопровода (рис. 2.5.3).

На рис. 2.5.1-2.5.3: 1 – двигатель, 2 – трубопровод, 3 – датчик, 4 – рабочая среда, 5 – пластина (упругий элемент датчика).



Рассмотрим задачу о динамике упругого элемента датчика давления рабочей среды, расположенного на торцевой стенке трубопровода конечной длины (рис. 2.5.1,а).

Предлагаемая математическая модель определяется следующими уравнениями и граничными условиями:

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0, \quad (x, y) \in G = \{(x, y) : 0 < x < x_0, 0 < y < y_0\}, \quad (2.5.1)$$

$$\varphi_y(x, 0, t) = \varphi_y(x, y_0, t) = 0, \quad x \in (0, x_0), \quad (2.5.2)$$

$$\varphi_x(0, y, t) = \dot{w}(y, t), \quad y \in (a, b), \quad 0 < a < b < y_0, \quad (2.5.3)$$

$$\varphi_x(0, y, t) = 0, \quad y \in (0, a) \cup (b, y_0), \quad (2.5.4)$$

$$\tilde{P} - \rho\varphi_t(x_0, y, t) = P_*(y, t), \quad y \in (0, y_0), \quad (2.5.5)$$

$$\begin{aligned} L(w) \equiv M\ddot{w} + Dw_{yyyy} + Nw_{yy} + \alpha\dot{w}_{yyy} + \beta\dot{w} - \delta\dot{w}'' = \\ = P_0(y, t) - \tilde{P} + \rho\varphi_t(0, y, t), \quad y \in (a, b). \end{aligned} \quad (2.5.6)$$

Здесь (2.5.1) – уравнение Лапласа, описывающее движение рабочей среды в трубопроводе; (2.5.2)-(2.5.4) – условия непротекания; условие (2.5.5) задает закон изменения давления на входе в трубопровод; (2.5.6) – уравнение динамики пластины;  $\varphi(x, y, t)$  – потенциал скорости среды;  $w(y, t)$  – прогиб упругого элемента;  $x_0, y_0$  – продольный и поперечный размеры трубопровода;  $a, b$  – координаты концов упругого элемента;  $\tilde{P}$  – давление рабочей среды в трубопроводе в состоянии покоя;  $\rho$  – плотность среды;  $M$  – погонная масса;  $D$  – изгибная жесткость;  $N$  – сжимающее (растягивающее) усилие;  $\alpha, \beta$  – коэффициенты внутреннего и внешнего демпфирования;  $\delta$  – коэффициент, учитывающий инерцию вращения; точка и штрих, также как и индексы  $t$  и  $y$  снизу, обозначают частную производную по  $t$  и  $y$  соответственно;  $P_*(y, t)$  – закон распределения давления среды в сечении  $x = x_0$  (на выходе из двигателя).

Предлагаемая математическая модель (2.5.1)-(2.5.6) рассматривалась в [2.5, 2.23, 2.27, 2.29, 2.30, 2.32, 2.34, 2.47, 2.48, 2.68, 2.69]. На основе метода Фурье задача сводилась к исследованию уравнения для функции деформации упругого элемента. Уравнение, связывающее закон изменения давления рабочей среды на входе в трубопровод и функцию прогиба упругого элемента датчика давления имеет вид:

$$\begin{aligned} L(w) = P_0(y, t) - \frac{\rho x_0}{y_0} \int_a^b \dot{w}(y, t) dy - \frac{1}{y_0} \int_0^{y_0} P_*(y, t) dy - \\ - \frac{2\rho}{y_0} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\cos(\lambda_s y)}{\operatorname{ch}(\lambda_s x_0)} \left[ \int_0^{y_0} \frac{P_*(y, t)}{\rho} \cos(\lambda_s y) dy + \frac{\operatorname{sh}(\lambda_s x_0)}{\lambda_s} \int_a^b \dot{w}(y, t) \cos(\lambda_s y) dy \right], \end{aligned} \quad (2.5.7)$$

где оператор  $L(w)$  определяется, согласно (2.5.6), выражением

$$L(w) \equiv M\ddot{w} + Dw_{yyyy} + Nw_{yy} + \alpha\dot{w}_{yyyy} + \beta\dot{w} - \delta\ddot{w}''.$$

В случае бесконечно длинного трубопровода (рис. 2.5.2, 2.5.3) на основе методов теории функций комплексного переменного (с помощью интеграла Кристоффеля-Шварца, формул Шварца и Сохоцкого) получено уравнение, связывающее закон изменения давления  $P(t)$  на входе в трубопровод и деформацию  $w$  упругого элемента датчика.

Например, для модели, изображенной на рис. 2.5.2,б, имеем:

$$L(w) = P_*(t) - P_0(x, t) + \frac{\rho}{\pi} \int_a^b \ddot{w}(s, t) \ln \left| \operatorname{ch} \frac{\pi s}{y_0} - \operatorname{ch} \frac{\pi x}{y_0} \right| ds,$$

а для модели, изображенной на рис. 2.5.3 –

$$L(w) = P(t) - P_0(x, t) - \frac{\rho}{\pi} \int_a^b \ddot{w}(\tau, t) \ln \left| \frac{\xi(\tau) - n}{\xi(\tau) - \xi(x)} \right| d\tau, \quad x \in (a, b),$$

где  $\xi(x)$  – функция, обратная к функции  $x(\xi) = C_0 \int_0^\xi \sqrt{\frac{m-s}{s(1-s)}} \frac{ds}{n-s}$ ,  $\xi \in [0, 1]$ . Концы интервала  $(\alpha, \beta)$  определяются из условий:  $x(\alpha) = a$ ,  $x(\beta) = b$ . Параметры  $\tilde{N}_0$ ,  $m$ ,  $n$  выражаются через параметры  $l$ ,  $y_0$ ,  $H$ .

### **Нелинейные математические модели механической системы «трубопровод – датчик давления»**

Постановка задач (2.5.1) – (2.5.6) соответствует линейной теории аэрогидроупругости, когда динамика жидкости (газа), а также динамика чувствительного элемента датчика описываются линейными уравнениями.

Авторами предлагаются нелинейные модели, которые определяются приведенными выше уравнениями (2.5.1) – (2.5.6), при этом в уравнении (2.5.6), описывающем динамику пластины, дифференциальный оператор  $L(w)$  заменяется следующим:

$$L(w) \equiv M\ddot{w} + \left( \frac{Dw''}{[1 + (w')^2]^{3/2}} \right)'' + Nw'' + \alpha\dot{w}'''' - \delta\ddot{w}'' + \beta\dot{w}.$$

Полагая прогибы малыми, заменим  $\frac{1}{[1 + (w')^2]^{3/2}}$  на  $\left(1 - \frac{3}{2}(w')^2\right)$ .

В результате получим

$$L(w) \equiv M\ddot{w} + Dw'''' - \frac{3}{2}Dw''''(w')^2 - 9Dw'w''w''' - \quad (2.5.8) \\ - 3D(w'')^3 + Nw'' + \alpha\dot{w}'''' - \delta\ddot{w}'' + \beta\dot{w}.$$

Авторами предлагается новая нелинейная модель системы «трубопровод – датчик давления», учитывающая как поперечную, так и продольную

деформации упругого элемента датчика. В уравнении (2.5.6), описывающем динамику пластины, дифференциальный оператор  $L(w)$  заменяется системой уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} -EF \left[ u' + \frac{1}{2}(w')^2 \right]' + M\ddot{u} + \alpha_* \dot{u}'' = 0, \\ -EF \left[ w' \left( u' + \frac{1}{2}(w')^2 \right) \right]' + \left( \frac{Dw''}{[1+(w')^2]^{\frac{3}{2}}} \right)'' + M\ddot{w} + \alpha \dot{w}'''' - \delta \dot{w}'' + \beta \dot{w} + Nw'' = \\ = P_0(y,t) - \tilde{P} + \rho \varphi_t(0,y,t), \end{array} \right. \quad (2.5.9)$$

$$y \in (a,b).$$

Здесь  $u(y,t)$ ,  $w(y,t)$  – продольная и поперечная деформации упругого элемента.

### Решение уравнения для деформации

Для линейных и нелинейных моделей (динамика чувствительного элемента датчика описывается линейными и нелинейными уравнениями соответственно), согласно методу Галеркина, решение  $w$  уравнения, связывающего закон изменения давления рабочей среды на входе в трубопровод и функцию прогиба упругого элемента датчика давления

ищется в виде  $w(y,t) = \sum_{k=1}^n \omega_k(t) g_k(y)$  (для моделей с упругим элементом

на торцевой стенке), где  $\{g_k(y)\}_{k=1}^{\infty}$  – полная на  $[a,b]$  система базисных функций, удовлетворяющих граничным условиям, соответствующим условиям закрепления пластины.

Например, в случае жесткого защемления концов пластины ( $w = 0$ ,  $w' = 0$ , при  $y = a$ ,  $y = b$ ) решение уравнения будем искать в виде

$$\omega(y,t) = \sum_{k=1}^n \omega_k(t) \psi_k(y),$$

где

$$\psi_k(y) = \operatorname{ch}(\mu_k(y-a)) - \cos(\mu_k(y-a)) - \frac{\operatorname{ch}(\mu_k(b-a)) - \cos(\mu_k(b-a))}{\operatorname{sh}(\mu_k(b-a)) - \sin(\mu_k(b-a))} (\operatorname{sh}(\mu_k(y-a)) - \sin(\mu_k(y-a))),$$

при этом  $\mu_k$  находятся из уравнения  $\operatorname{ch}(\mu_k(b-a)) \cos(\mu_k(b-a)) = 1$  ( $k = 1, \dots, n$ ).

Функции  $\{\psi_k(y)\}_{k=1}^{\infty}$  ортогональны на  $[a, b]$ , т.е.  $\int_a^b \psi_i(y)\psi_j(y)dy = 0$

при  $i \neq j$ . Можно показать, что  $\int_a^b \psi_i^2(y)dy = b - a$ .

Для шарнирного закрепления концов пластины ( $w = 0, w'' = 0$  при  $y = a, y = b$ ) можно положить

$$w(y, t) = \sum_{k=1}^n w_k(t) \sin \beta_k (y - a), \quad \text{где } \beta_k = \frac{\pi k}{b - a}.$$

Для нелинейной модели, учитывающей как продольную, так и поперечную деформации согласно методу Галеркина, искомые функции деформации  $u(y, t)$ ,  $w(y, t)$  ищем в виде

$$u(y, t) = \sum_{k=1}^n u_k(t) h_k(y), \quad w(y, t) = \sum_{k=1}^n w_k(t) g_k(y),$$

где  $\{h_k(y)\}_{k=1}^{\infty}$ ,  $\{g_k(y)\}_{k=1}^{\infty}$  – полные на  $[a, b]$  системы базисных функций, удовлетворяющих граничным условиям, соответствующим условиям закрепления пластины.

Из условия ортогональности невязки уравнения к системе базисных функций  $\{g_k(y)\}_{k=1}^n$  получим систему из  $n$  обыкновенных дифференциальных уравнений для  $w_k(t)$  в случае линейных и нелинейных моделей (динамика чувствительного элемента датчика описывается линейными и нелинейными уравнениями соответственно).

Для нелинейной модели, учитывающей как продольную, так и поперечную деформации, получим систему из  $2n$  обыкновенных дифференциальных уравнений для  $w_k(t)$ .

Например, для  $n = 2$  в случае шарнирного закрепления концов пластины ( $a = 0, b = y_0, \lambda_k = \frac{\pi k}{l}$ ) система обыкновенных дифференциальных уравнений имеет вид:

1. Линейная модель (динамика жидкости (газа), а также динамика чувствительного элемента датчика описываются линейными уравнениями)

$$\begin{cases} A_1 \dot{w}_1(t) + B_1 \dot{w}_1(t) + C_1 w_1(t) = F_1(t), \\ A_2 \dot{w}_2(t) + B_2 \dot{w}_2(t) + C_2 w_2(t) = F_2(t). \end{cases}$$

2. Нелинейная модель (динамика чувствительного элемента датчика описывается нелинейными уравнениями)

$$\begin{cases} A_1 \ddot{w}_1(t) + B_1 \dot{w}_1(t) + D_1 w_1(t) + G_1 w_1^3(t) + H_1 w_1(t) w_2^2(t) = F_1(t), \\ A_2 \ddot{w}_2(t) + B_2 \dot{w}_2(t) + D_2 w_2(t) + G_2 w_2^3(t) + H_2 w_1^2(t) w_2(t) = F_2(t), \end{cases}$$

3. Нелинейная модель (динамика чувствительного элемента датчика описывается системой уравнений для продольной и поперечной деформаций)

$$\begin{cases} a_{11}\ddot{u}_1 + a_{12}\dot{u}_1 + a_{13}u_1 + a_{14}w_1w_2 = 0, \\ a_{21}\ddot{u}_2 + a_{22}\dot{u}_2 + a_{23}u_2 + a_{24}w_1^2 = 0, \\ a_{31}\ddot{w}_1 + a_{32}\dot{w}_1 + a_{33}w_1 + a_{34}w_1^3 + a_{35}w_1w_2^2 + a_{36}u_1w_2 + a_{37}w_1u_2 = F_1(t), \\ a_{41}\ddot{w}_2 + a_{42}\dot{w}_2 + a_{43}w_2 + a_{44}w_2^3 + a_{45}w_2w_1^2 + a_{46}u_1w_2 = 0. \end{cases}$$

### Численное моделирование

Для всех рассмотренных моделей задача Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений решается с помощью системы Mathematica. Проведено численное моделирование на ЭВМ динамики упругого элемента датчика в зависимости от закона изменения давления в двигателе. Исследовалась деформация элемента как функция времени (в фиксированных точках элемента) и как функция координаты (в фиксированные моменты времени) для различных параметров механической системы.

**Пример 1.** Рассмотрим модель, изображенную на рис. 2.5.1,а (шарнирное закрепление концов упругого элемента). Рабочая среда – вода ( $\rho = 10^3 \text{ кг/м}^3$ ), пластина изготовлена из стали  $E = 6 \cdot 10^7 \text{ Па}$ , ( $\rho_0 = 7,8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ ,  $h = 3 \cdot 10^{-4} \text{ м}$ ).

Для значений параметров  $x_0 = 2 \text{ м}$ ,  $y_0 = 0,02 \text{ м}$ ,  $a = 0 \text{ м}$ ,  $b = 0,03 \text{ м}$ ,  $M = 2,34 \text{ кг/м}^2$ ,  $D = 0,495 \text{ Дж}$ ,  $N = 10^3 \text{ Н}$ ,  $\alpha = 0,01 \text{ м} \cdot \text{кг/с}$ ,  $\beta = 0,3 \text{ кг/м}^2 \cdot \text{с}$ ,  $\delta = 0 \text{ кг/м}^2 \cdot \text{с}^2$ ,  $w(y, 0) = 0 \text{ м}$ ,  $\dot{w}(y, 0) = 0,5 \text{ м/с}$ ,  $P_0(x, t) = 0 \text{ Па}$ ,  $P_*(y, t) = 10^5 (20 + \cos(10t)) \text{ Па}$  получено решение для функции  $w(y, t)$  в точке  $y_* = \frac{a+b}{2,5}$  (рис. 2.5.4):

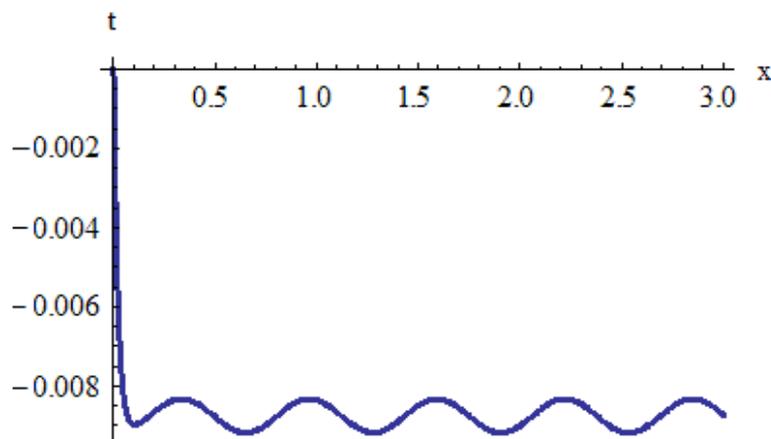


Рис. 2.5.4. График деформации  $w(y, t)$  для линейной модели

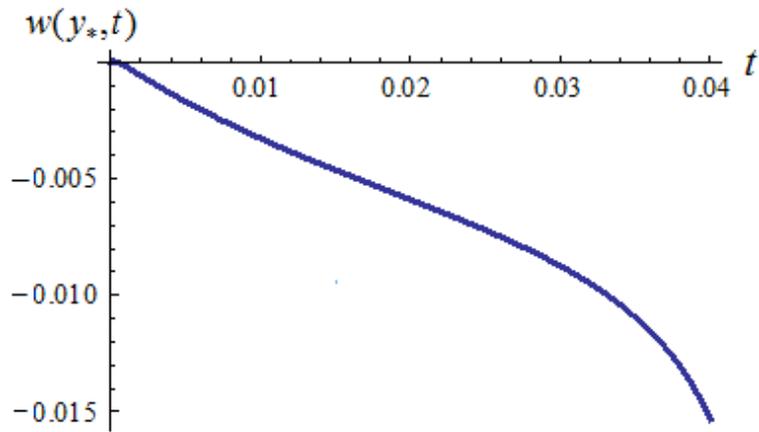


Рис. 2.5.5. График деформации  $w(y, t)$  для нелинейной модели

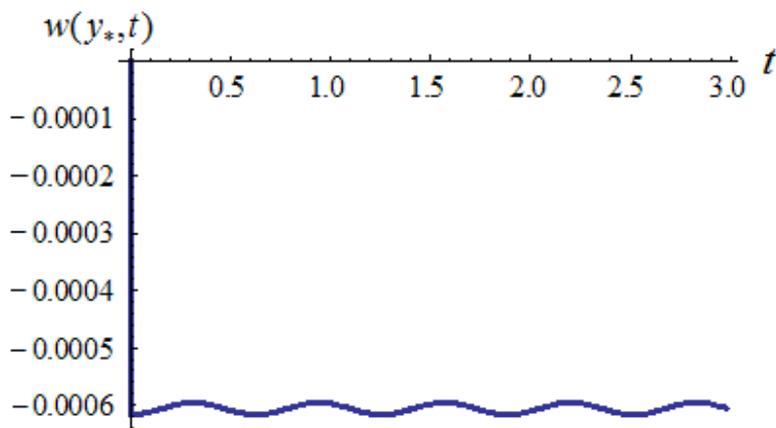


Рис. 2.5.6. График деформации  $w(y, t)$  для нелинейной модели, учитывающей поперечную деформацию

Прогибы упругого элемента в фиксированные моменты времени  $t = t_0$  для линейной и нелинейных моделей представлены на рис. 2.5.7 – 2.5.9.

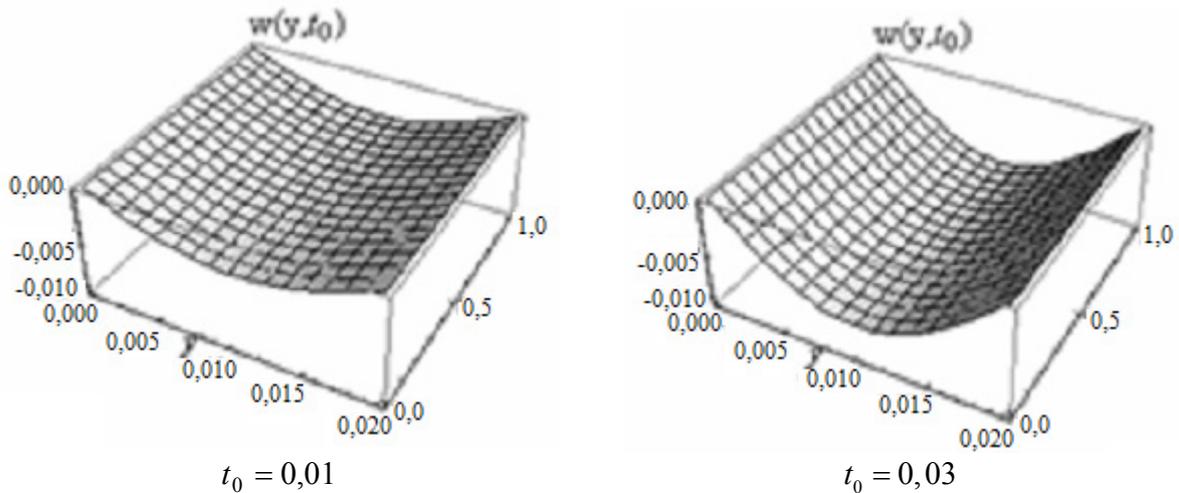


Рис. 2.5.7. График деформации  $w(y, t_0)$  для линейной модели

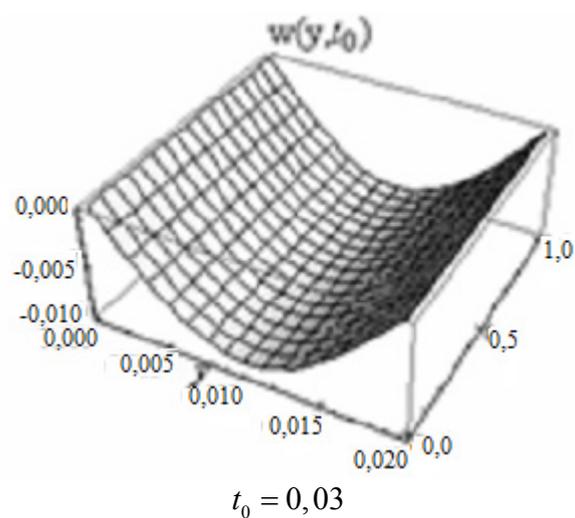
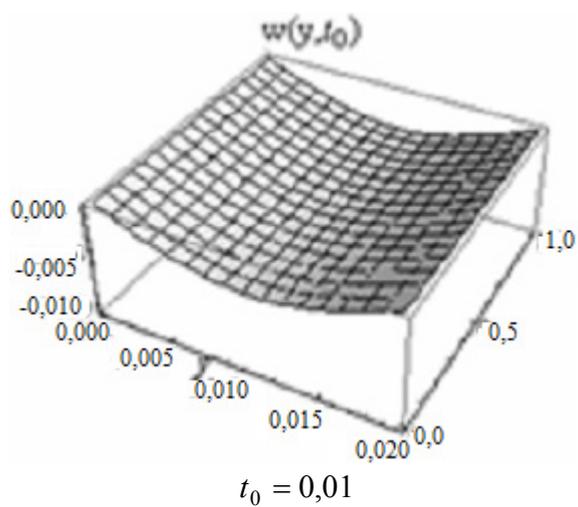


Рис. 2.5.8. График деформации  $w(y, t_0)$  для нелинейной модели

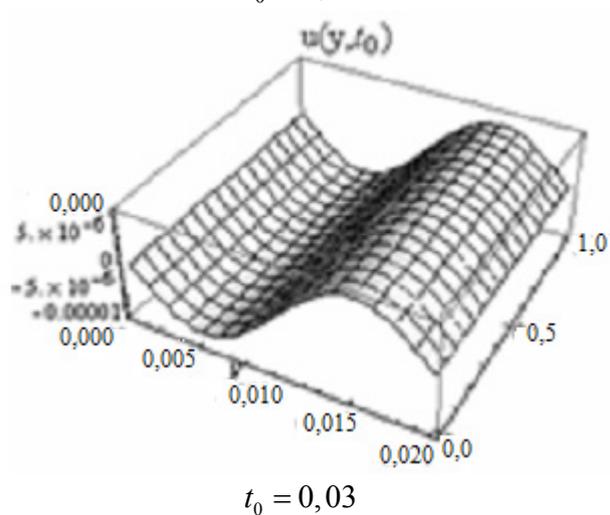
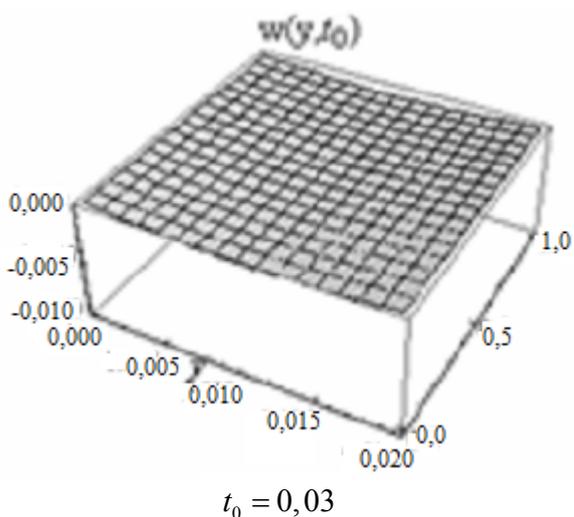
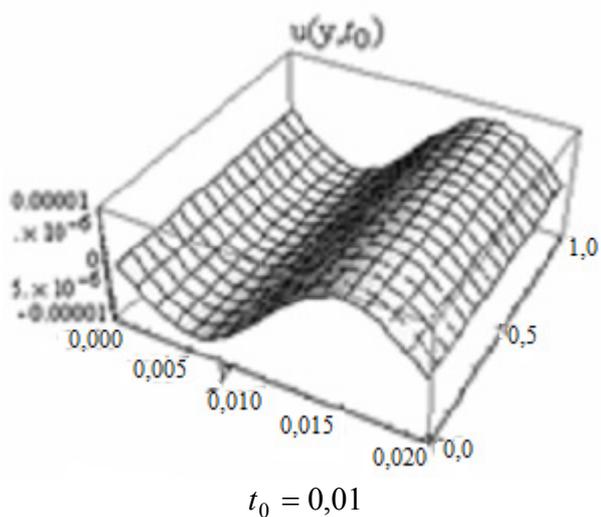
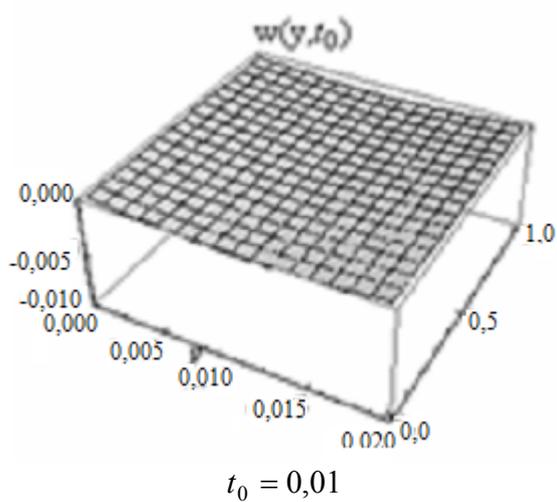


Рис. 2.5.9. График деформации  $w(y, t_0)$  для нелинейной модели, учитывающей как поперечную, так и продольную деформацию

Для указанных выше значений параметров увеличим толщину пластинки  $h = 4 \cdot 10^{-4}$  ( $M = 3,12$ ;  $D = 1,172$ ;  $EF = 8 \cdot 10^7$ ).

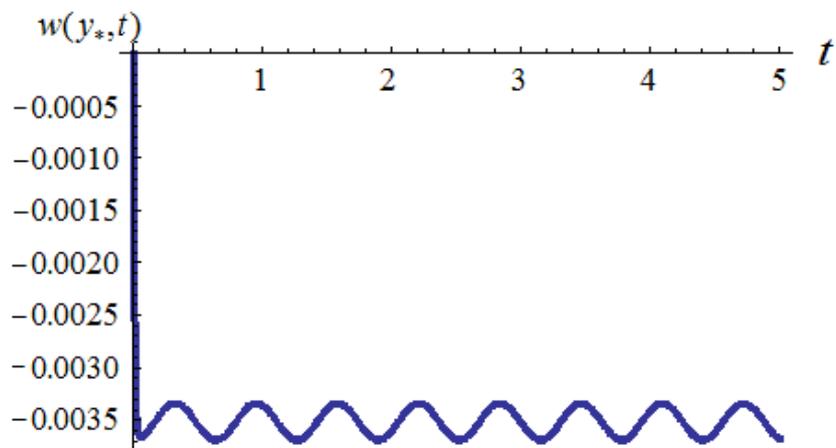


Рис. 2.5.10. График деформации  $w(y, t)$  для линейной модели

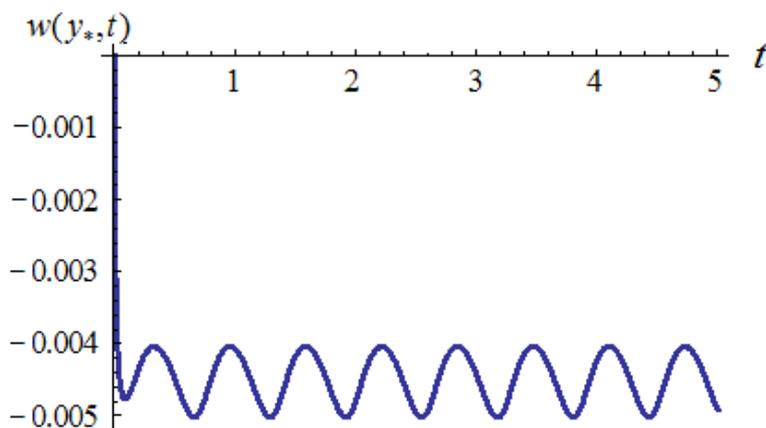


Рис. 2.5.11. График деформации  $w(y, t)$  для нелинейной модели

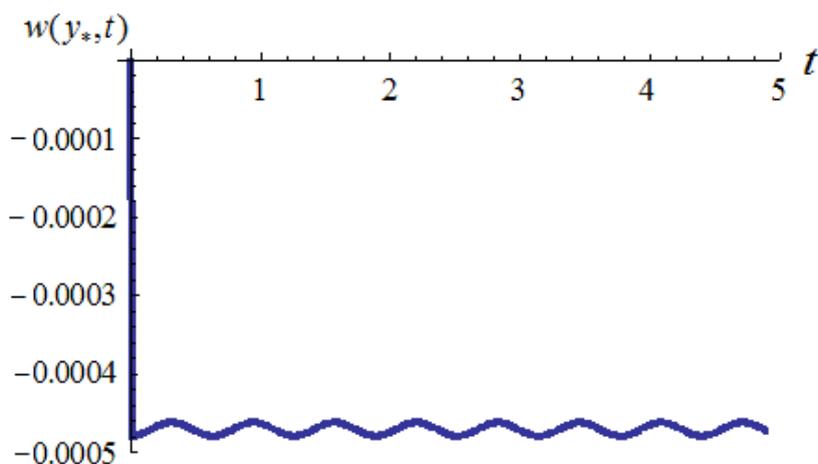


Рис. 2.5.12. График деформации  $w(y, t)$  для нелинейной модели, учитывающей поперечную деформацию

Для указанных выше значений параметров увеличим толщину пластинки  $h = 9 \cdot 10^{-4}$  ( $M = 7,02$ ;  $D = 13,365$ ;  $EF = 18 \cdot 10^7$ ).

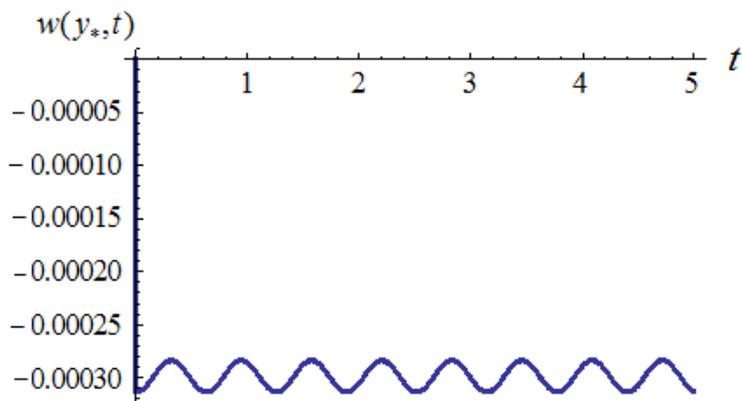


Рис. 2.5.13. График деформации  $w(y, t)$  для линейной модели

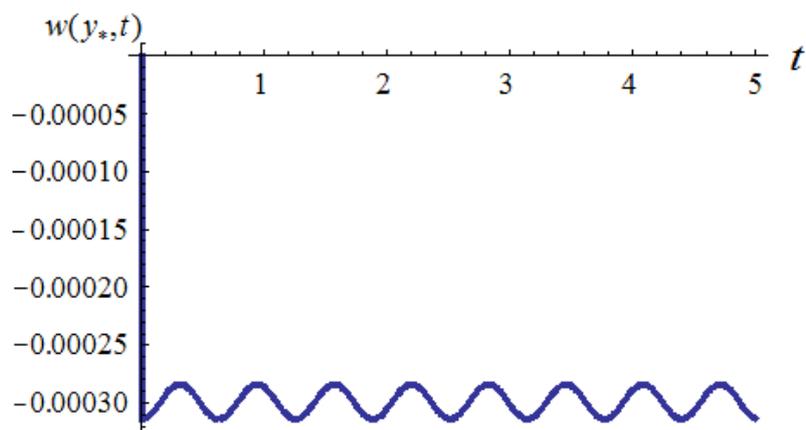


Рис. 2.5.14. График деформации  $w(y, t)$  для нелинейной модели

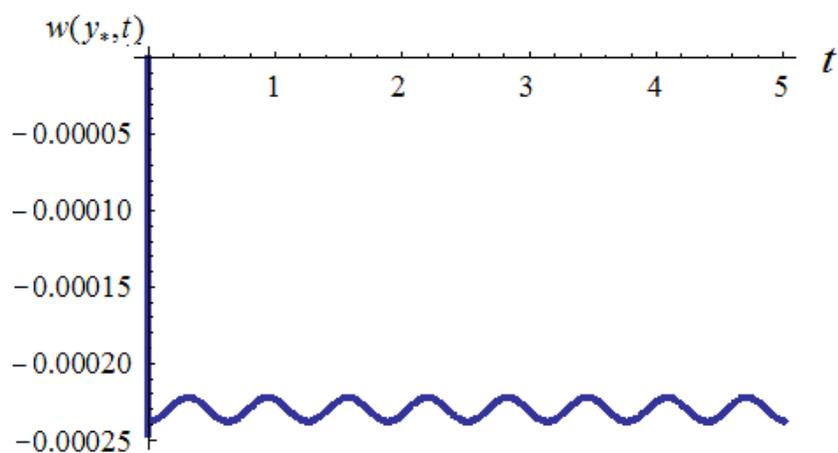


Рис. 2.5.15. График деформации  $w(y, t)$  для нелинейной модели, учитывающей поперечную деформацию

В случае жесткого закрепления базисные функции должны удовлетворять следующим граничным условиям:

$$w(a,t) = w(b,t) = 0, w'(a,t) = w'(b,t) = 0.$$

1. В качестве функций  $\{\psi_k(y)\}_{k=1}^{\infty}$  были выбраны собственные функции краевой задачи для уравнения  $\psi'''' - \mu^4 \psi = 0$

$$\psi_k(y) = \text{ch}(\mu_k(y-a)) - \cos(\mu_k(y-a)) - \frac{\text{ch}(\mu_k(b-a)) - \cos(\mu_k(b-a))}{\text{sh}(\mu_k(b-a)) - \sin(\mu_k(b-a))} (\text{sh}(\mu_k(y-a)) - \sin(\mu_k(y-a))),$$

где  $\mu_k$  находятся из уравнения  $\text{ch}(\mu_k(b-a))\cos(\mu_k(b-a)) = 1$  ( $k = 1, \dots, n$ ).

Данная система ортогональна на отрезке  $[a, b]$ , т.е.

$$\int_a^b \psi_i(y)\psi_k(y)dy = \begin{cases} 0, & k \neq i \\ b-a, & k = i \end{cases}$$

2. В качестве базисных функций были выбраны

$$g_k(y) = y^{k+2}(y-y_0)^2, \quad k = 1, 2, \dots$$

**Пример 2.** Рассмотрим модель, изображенную на рис. 2.5.1,а (жесткое закрепление концов упругого элемента).

Для значений параметров  $x_0 = 3$  м,  $y_0 = 0,05$  м,  $a = 0$  м,  $b = 0,05$  м,  $h = 3 \cdot 10^{-4}$  м,  $\rho = 1$ ,  $M = 2,7$  кг/м<sup>2</sup>,  $D = 6,702$  Дж,  $N = 10^3$  Н,  $\alpha = 0,5$  м · кг/с,  $\beta = 0,3$  кг/м<sup>2</sup>с,  $\delta = 0$  кг/м<sup>2</sup>с<sup>2</sup>,  $w(y, 0) = 0$  м,  $\dot{w}(y, 0) = 0,5$  м/с,  $P_*(y, t) = 10^5 (30 + \cos(10t))$  Па,  $P_0(x, t) = 0$  Па, получено решение для функции  $w(y, t)$  в точке  $y_* = \frac{a+b}{2}$ :

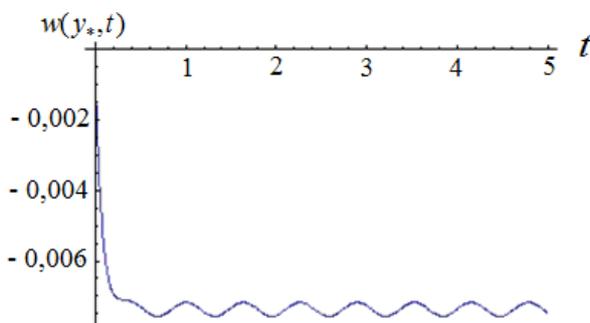


Рис. 2.5.16. График деформации  $w(y, t)$  для линейной модели

$$w(y, t) = \sum_{k=1}^3 w_k(t)\psi_k(y)$$

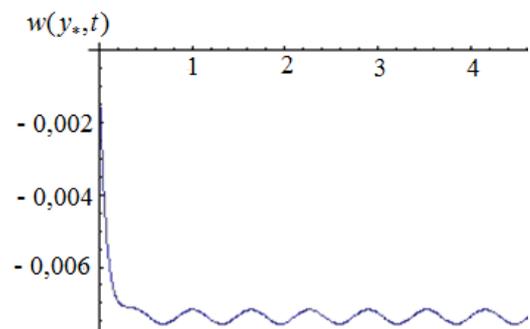


Рис. 2.5.17. График деформации  $w(y, t)$  для линейной модели

$$w(y, t) = \sum_{k=1}^n w_k(t)y^{k+2}(y-y_0)^2$$

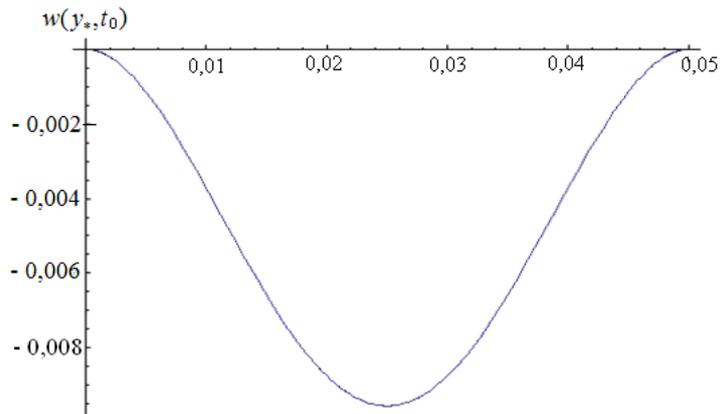


Рис. 2.5.18. График деформации  $w(y, t_0)$  для линейной модели

(случай жесткого закрепления  $w(y, t) = \sum_{k=1}^n w_k(t) \psi_k(y)$  при  $t_0 = 0,01$ )

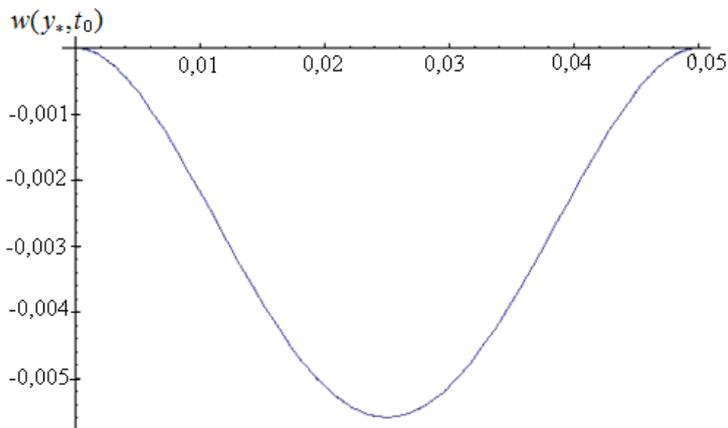


Рис. 2.5.19. График деформации  $w(y, t_0)$  для линейной модели

(случай жесткого закрепления  $w(y, t) = \sum_{k=1}^n w_k(t) \psi_k(y)$  при  $t_0 = 0,1$ )

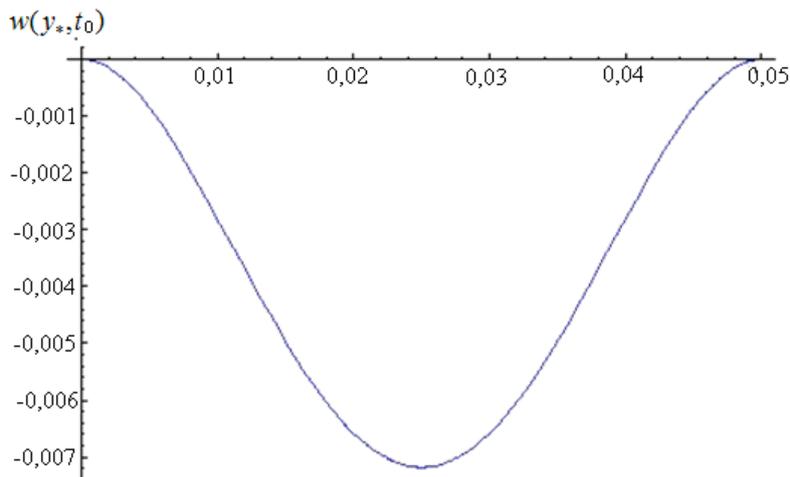


Рис. 2.5.20. График деформации  $w(y, t_0)$  для линейной модели

(случай жесткого закрепления  $w(y, t) = \sum_{k=1}^n w_k(t) \psi_k(y)$  при  $t_0 = 1$ )

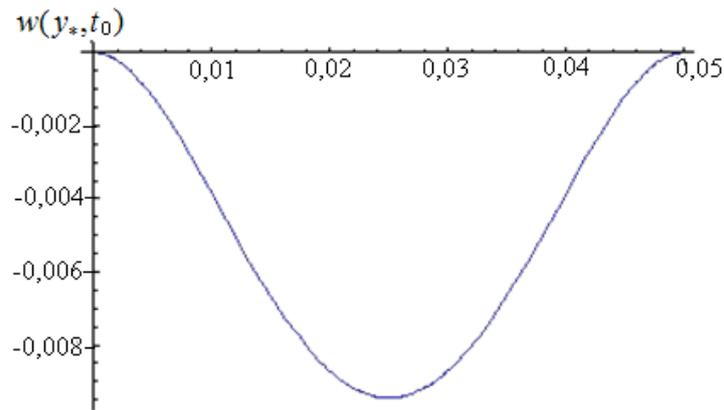


Рис. 2.5.21. График деформации  $w(y, t_0)$  для линейной модели в случае жесткого

закрепления  $w(y, t) = \sum_{k=1}^n w_k(t) y^{k+2} (y - y_0)^2$  при  $t_0 = 0,01$

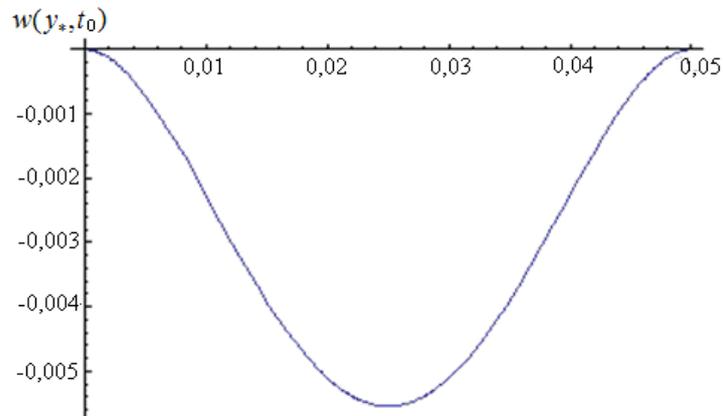


Рис. 2.5.22. График деформации  $w(y, t_0)$  для линейной модели в случае жесткого

закрепления  $w(y, t) = \sum_{k=1}^n w_k(t) y^{k+2} (y - y_0)^2$  при  $t_0 = 0,1$

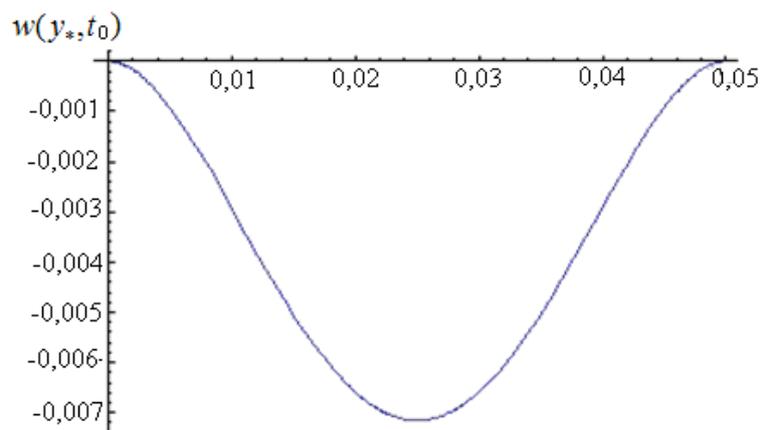


Рис. 2.5.23. График деформации  $w(y, t_0)$  для линейной модели в случае жесткого

закрепления  $w(y, t) = \sum_{k=1}^n w_k(t) y^{k+2} (y - y_0)^2$  при  $t_0 = 1$

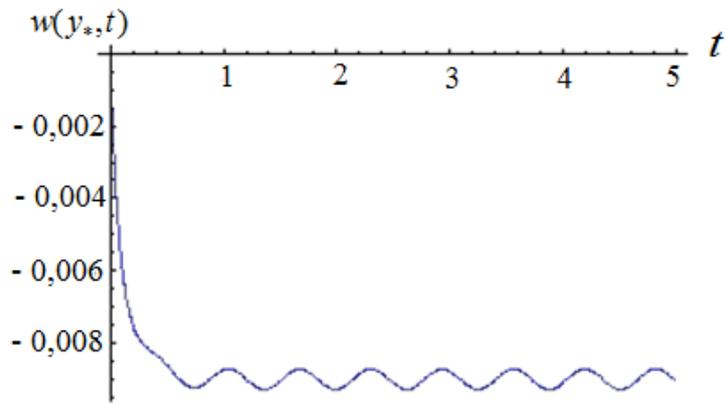


Рис. 2.5.24. График деформации  $w(y, t)$  для нелинейной модели (случай жесткого

$$\text{закрепления } w(y, t) = \sum_{k=1}^n w_k(t) \psi_k(y))$$

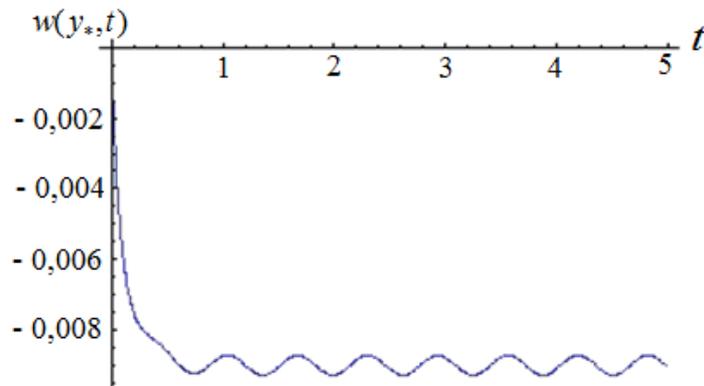


Рис. 2.5.25. График деформации  $w(y, t)$  для нелинейной модели (случай жесткого

$$\text{закрепления } w(y, t) = \sum_{k=1}^n w_k(t) y^{k+2} (y - y_0)^2)$$

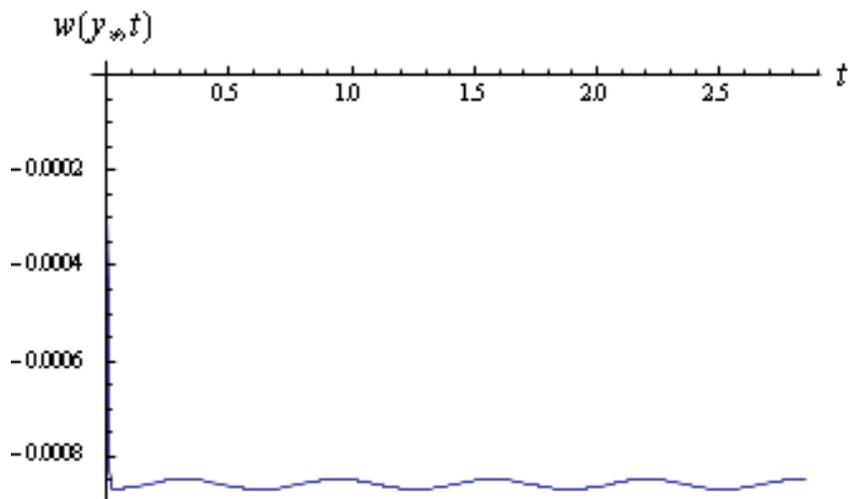


Рис. 2.5.25. График деформации  $w(y, t)$  для нелинейной модели, учитывающей поперечную деформацию (случай жесткого закрепления  $w(y, t) = \sum_{k=1}^3 w_k(t) \psi_k(y)$ )

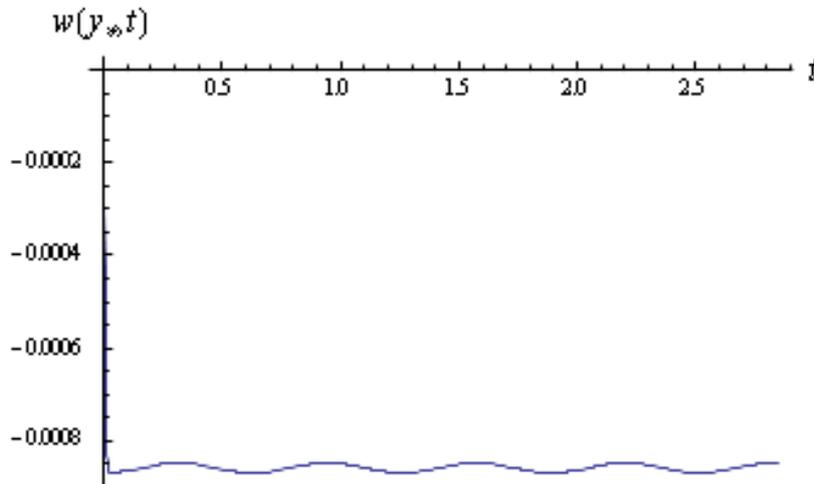


Рис. 2.5.26. График деформации  $w(y, t)$  для нелинейной модели, учитывающей поперечную деформацию (случай жесткого закрепления)

$$w(y, t) = \sum_{k=1}^n w_k(t) y^{k+2} (y - y_0)^2$$

Численный эксперимент показал, что для одинаковых значений параметров системы графики деформаций пластины для нелинейных и линейной моделей существенно отличаются. Можно сделать вывод, что учет нелинейных членов в уравнении, описывающем динамику пластины, имеет важное значение при исследовании динамики чувствительного элемента.

### Заключение

Развитие авиационной техники требует постоянного совершенствования и разработки новых типов первичных преобразователей, в частности, датчиков давления. Последнее обусловлено необходимостью совмещать различные виды экспериментов с целью сокращения длительности измерения, снижения себестоимости.

В связи с вышеизложенным возникает актуальная задача разработки специальных методов исследования динамики и устойчивости упругих элементов датчиков давления, взаимодействующих с жидкостью.

Предложенные авторами новые модели, методика решения задач аэрогидроупругости, позволяют не только дополнить базу современного проектирования датчиков давления, но и усовершенствовать ее.

## 2.6 Математическая модель крылового профиля в проточном канале

В данном подразделе предложена математическая модель крылового профиля с упругими предкрылком (рассекателем) и закрылком (элероном), расположенного в проточном канале и обтекаемого дозвуковым потоком.

Рассматривается соответствующая плоская задача аэрогидроупругости о малых колебаниях упругих элементов тонкого крылового профиля при обтекании его бесциркуляционным потоком идеального газа (жидкости) в канале с прямолинейными стенками [2.49]. Элементы представлены в виде упругих деформируемых пластин. В физической плоскости  $xOy$  упругим элементам (пластинам) соответствуют на оси  $Ox$  отрезки  $[a,c]$  и  $[d,b]$  (рис. 2.6.1).

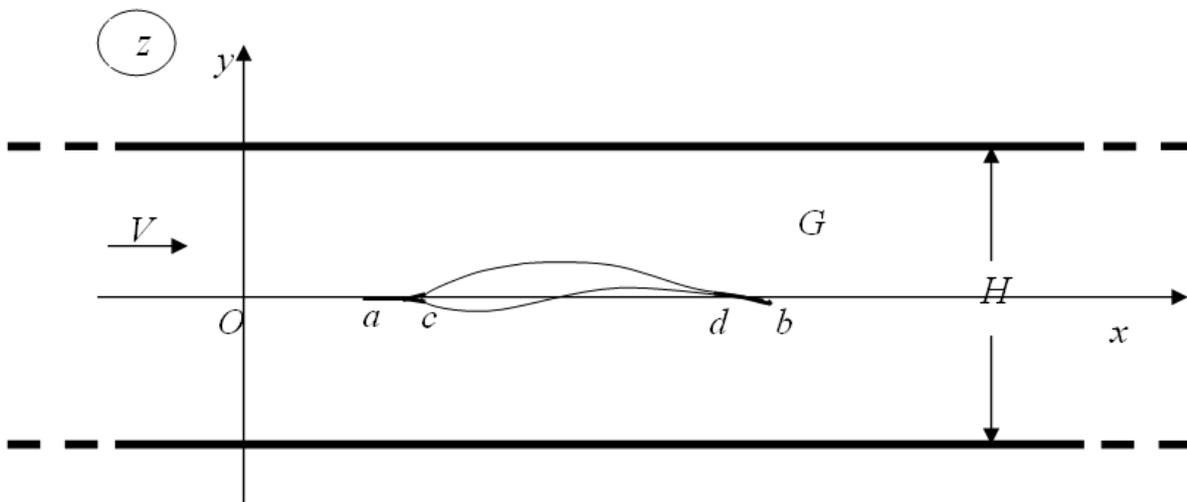


Рис. 2.6.1. Расчетная схема

Скорость набегающего потока газа (жидкости) равна  $V$  и направлена вдоль оси  $Ox$ , ширина канала равна  $H$ . Предполагается, что возмущение однородного потока и деформации упругих элементов (пластин) малы, то есть  $\bar{\varphi}(x, y, t) = Vx + \varepsilon\varphi(x, y, t)$ ,  $\bar{w}_k(x, t) = \varepsilon w_k(x, t)$ ,  $\varepsilon \ll 1$ ,  $k = 1, 2$ . Здесь  $\bar{\varphi}(x, y, t)$  – потенциал скорости потока,  $\bar{w}_1(x, t)$  и  $\bar{w}_2(x, t)$  – деформации (прогибы) упругих элементов  $[a,c]$  и  $[d,b]$  соответственно;  $x, y$  – декартовы координаты,  $t$  – время.

Потенциал  $\varphi$  удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0, (x, y) \in G = R^2 \setminus [a, b], \quad (2.6.1)$$

условию отсутствия возмущений на бесконечности слева и справа от профиля

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_t^2) = 0 \quad (2.6.2)$$

и линеаризованным граничным условиям

$$\varphi_y \left( x, \mp \frac{H}{2}, t \right) = 0, \quad x \in (-\infty, +\infty), \quad (2.6.3)$$

$$\varphi_y^\pm(x, 0, t) = \lim_{y \rightarrow 0 \pm 0} \varphi_y(x, y, t) = \begin{cases} \dot{w}_1(x, t) + Vw_1'(x, t), & x \in (a, c), \\ Vf^\pm(x), & x \in (c, d), \\ \dot{w}_2(x, t) + Vw_2'(x, t), & x \in (d, b), \end{cases} \quad (2.6.4)$$

где  $f^+(x)$ ,  $f^-(x)$  – функции, определяющие форму недеформируемой части профиля. В (2.6.4) и далее штрих обозначает производную по  $x$ , а точка – производную по  $t$ .

Линеаризуя интеграл Лагранжа-Коши, получим следующее выражение для реакции газа (жидкости) на профиль

$$Q = \rho(\varphi_t^+ - \varphi_t^-) + \rho V(\varphi_x^+ - \varphi_x^-),$$

где  $\rho$  – плотность газа (жидкости). Тогда уравнения колебаний упругих элементов можно записать в виде

$$L_1(w_1) = \rho(\varphi_t^+ - \varphi_t^-) + \rho V(\varphi_x^+ - \varphi_x^-), \quad x \in (a, c), \quad y = 0, \quad (2.6.5)$$

$$L_2(w_2) = \rho(\varphi_t^+ - \varphi_t^-) + \rho V(\varphi_x^+ - \varphi_x^-), \quad x \in (d, b), \quad y = 0, \quad (2.6.6)$$

$$L_k(w_k) \equiv M_k \ddot{w}_k + D_k w_k'''' + N_k w_k'' + \delta_k \dot{w}_k'''' + \beta_k \dot{w}_k + \gamma_k w_k, \quad (2.6.7)$$

где  $M_k, D_k, N_k, \delta_k, \beta_k, \gamma_k$  – некоторые постоянные ( $k=1,2$ ).

Выражая потенциал  $\varphi(x, y, t)$  через функции прогиба  $w_k(x, t)$ , запишем уравнения колебаний (2.6.5), (2.6.6) относительно функций  $w_k(x, t)$ . С этой целью в области  $G$  введем комплексный потенциал  $W = f(z, t) = \varphi + i\psi$ , где  $\psi = \psi(x, y, t)$  – функция тока,  $z = x + iy$ . Функцию скоростей  $f_z(z, t) = \varphi_x - i\varphi_y$  представим в виде

$$f_z(z, t) = \frac{\gamma}{\pi \sqrt{h(z)}} \left( \int_a^b v(\tau, t) \sqrt{h(\tau)} \operatorname{cth} \gamma(\tau - z) d\tau + \gamma \Gamma(t) \right) + \\ + \gamma \frac{V}{2\pi} \int_c^d [f^-(\tau) - f^+(\tau)] \operatorname{cth} \gamma(\tau - z) d\tau, \quad z \in G, \quad (2.6.8)$$

где  $h(z) = \operatorname{sh} \gamma(z - a) \operatorname{sh} \gamma(b - z)$ ,  $\gamma = \frac{\pi}{H}$ ,

$$v(x, t) = \begin{cases} \dot{w}_1(x, t) + Vw_1'(x, t), & x \in (a, c), \\ \frac{V}{2} [f^+(x) + f^-(x)], & x \in (c, d), \\ \dot{w}_2(x, t) + Vw_2'(x, t), & x \in (d, b), \end{cases}$$

$\Gamma(t)$  – функция, определяющая циркуляцию скорости вокруг профиля  $[a, b]$ . Ветвь корня в формуле (2.6.8) фиксирована условием

$$\sqrt{h(z)} = i\sqrt{\operatorname{sh}\gamma(x-a)\operatorname{sh}\gamma(x-b)} \text{ при } z = x > b. \quad (2.6.9)$$

Так как функция  $f_z(z, t)$  аналитическая в области  $G$ , то в этой области согласно условию Коши-Римана  $(\varphi_x)_x = (-\varphi_y)_y$ , или  $\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0$ . Проверим выполнение граничных условий (2.6.3), (2.6.4). На стенках канала  $z = x \pm \frac{iH}{2} = x \pm \frac{i\pi}{2\gamma}$ . Поскольку  $\operatorname{sh}\gamma(z-a) = \operatorname{sh}\gamma\left(x-a \pm \frac{i\pi}{2\gamma}\right) = \pm i\operatorname{ch}\gamma(x-a)$ ,

$$\operatorname{sh}\gamma(b-z) = \operatorname{sh}\gamma\left(b-x \pm \frac{i\pi}{2}\right) = \mp i\operatorname{ch}\gamma(b-x),$$

$$\operatorname{cth}\gamma(\tau-z) = \operatorname{cth}\gamma\left(\tau-x \pm \frac{i\pi}{2\gamma}\right) = \operatorname{th}\gamma(\tau-x),$$

то

$$f_z\left(x \pm i\frac{H}{2}, t\right) = \varphi_x - i\varphi_y = \frac{\gamma}{\pi\sqrt{\operatorname{ch}\gamma(x-a)\operatorname{ch}\gamma(b-x)}} \times \\ \times \left( \int_a^b v(\tau, t)\sqrt{h(\tau)}\operatorname{th}\gamma(\tau-x)d\tau + \gamma\Gamma(t) \right) + \frac{\gamma V}{2\pi} \int_c^d [f^-(\tau) - f^+(\tau)]\operatorname{th}\gamma(\tau-x)d\tau,$$

следовательно,  $\varphi_y\left(x, \pm \frac{H}{2}, t\right) = 0$ ,  $x \in (-\infty, +\infty)$ .

Чтобы проверить выполнение условий (2.6.4), воспользуемся разложением [2.46]

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2\pi^2},$$

согласно которому

$$\gamma\operatorname{cth}\gamma(\tau-z) = i\gamma\operatorname{ctg}i\gamma(\tau-z) = \frac{1}{\tau-z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(\tau-z)}{(\tau-z)^2 + n^2H^2},$$

и перейдем в (2.6.8) к пределу при  $z \rightarrow x \pm i0$ ,  $x \in (a, b)$ .

Пусть  $x \in (a, c) \cup (b, d)$ , тогда, применяя формулы Сохоцкого [2.38, 2.46, 2.56] и учитывая, что в силу условия (2.6.9)  $\sqrt{h(z)} \rightarrow \mp\sqrt{h(x)}$ , будем иметь

$$\varphi_x^\pm - i\varphi_y^\pm = \frac{1}{\mp\pi\sqrt{h(x)}} \left[ \pm\pi i v(\tau, x)\sqrt{h(x)} + \int_a^b v(\tau, t)\sqrt{h(x)} \left( \frac{1}{\tau-x} + \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(\tau-x)}{(\tau-x)^2 + n^2H^2} \right) d\tau + \gamma^2\Gamma(t) \right] + \frac{\gamma V}{2\pi} \int_c^d [f^-(\tau) - f^+(\tau)]\operatorname{cth}\gamma(\tau-x)d\tau, \quad (2.6.10)$$

ИЛИ

$$\begin{aligned} \varphi_x^\pm - i\varphi_y^\pm = -iv(x,t) \mp \frac{\gamma}{\pi\sqrt{h(x)}} \left( \int_a^b v(\tau,t) \sqrt{h(\tau)} \operatorname{cth} \gamma(\tau-x) d\tau + \gamma\Gamma(t) \right) + \\ + \frac{\gamma V}{2\pi} \int_c^d [f^-(\tau) - f^+(\tau)] \operatorname{cth} \gamma(\tau-x) d\tau, \quad x \in (a,c) \cup (d,b). \end{aligned}$$

Если  $x \in (c,d)$ , то

$$\begin{aligned} \varphi_x^\pm - i\varphi_y^\pm = -iv(x,t) \mp \frac{\gamma}{\pi\sqrt{h(x)}} \left( \int_a^b v(\tau,t) \sqrt{h(\tau)} \operatorname{cth} \gamma(\tau-x) d\tau + \gamma\Gamma(t) \right) + \\ + \frac{V}{2\pi} \left[ \pm \pi i [f^-(x) - f^+(x)] + \int_c^d [f^-(\tau) - f^+(\tau)] \left( \frac{1}{\tau-x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(\tau-x)}{(\tau-x)^2 + n^2 H^2} \right) d\tau \right], \end{aligned}$$

ИЛИ

$$\begin{aligned} \varphi_x^\pm - i\varphi_y^\pm = -iv(x,t) \mp \frac{\gamma}{\pi\sqrt{h(x)}} \left( \int_a^b v(\tau,t) \sqrt{h(\tau)} \operatorname{cth} \gamma(\tau-x) d\tau + \gamma\Gamma(t) \right) \pm \\ \pm \frac{iV}{2} [f^-(x) - f^+(x)] + \frac{\gamma V}{2\pi} \int_c^d [f^-(\tau) - f^+(\tau)] \operatorname{cth} \gamma(\tau-x) d\tau, \quad x \in (c,d). \end{aligned} \quad (2.6.11)$$

Из (2.6.10) и (2.6.11) следует: если  $x \in (a,c) \cup (b,d)$ , то

$$\varphi_y^\pm = v(x,t) = \begin{cases} \dot{w}_1(x,t) + Vw_1'(x,t), & x \in (a,c), \\ \dot{w}_2(x,t) + Vw_2'(x,t), & x \in (b,d); \end{cases}$$

если  $x \in (c,d)$ , то

$$\begin{aligned} \varphi_y^\pm = v(x,t) \mp \frac{V}{2} [f^-(x) - f^+(x)] = \frac{V}{2} [f^+(x) + f^-(x)] \mp \\ \mp \frac{V}{2} [f^-(x) - f^+(x)] = Vf^\pm(x). \end{aligned}$$

Таким образом, условия (2.6.4) выполняются. Из формул (2.6.10), (2.6.11) следует также, что

$$\begin{aligned} \varphi_x^\pm = \mp \frac{\gamma}{\pi\sqrt{h(x)}} \left( \int_a^b v(\tau,t) \sqrt{h(\tau)} \operatorname{cth} \gamma(\tau-x) d\tau + \gamma\Gamma(t) \right) + \\ + \frac{\gamma V}{2\pi} \int_c^d [f^-(\tau) - f^+(\tau)] \operatorname{cth} \gamma(\tau-x) d\tau, \quad x \in (a,b). \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\varphi_x^+ - \varphi_x^- = -\frac{2\gamma}{\pi\sqrt{h(x)}} \left( \int_a^b v(\tau, t) \sqrt{h(\tau)} \operatorname{cth} \gamma(\tau - x) d\tau + \gamma \Gamma(t) \right), \quad x \in (a, b). \quad (2.6.12)$$

Комплексный потенциал  $W = f(z, t)$  найдём по формуле

$$W = \varphi + i\psi = \int_a^z f_z(z, t) dz + C(t), \quad (2.6.13)$$

где  $C(t)$  – произвольная функция времени,  $z \in G$ .

Дифференцируя (2.6.13) по  $t$ , получим

$$W_t = \varphi_t + i\psi_t = \int_a^z f_{zt}(z, t) dz + C'(t). \quad (2.6.14)$$

Так как  $G$  – двусвязная область, то интеграл в (2.6.14), вообще говоря, зависит от линии интегрирования. Поэтому  $\varphi_t$ , а значит и правые части уравнений (2.6.5), (2.6.6) однозначно не определяются. Подберем функцию  $\Gamma(t)$  так, чтобы циркуляция скорости вокруг профиля равнялась нулю.

При обходе против часовой стрелки разреза  $[a, b]$  циркуляция

$$\Gamma_0(t) = \int_a^b \varphi_x^- dx + \int_a^b \varphi_x^+ dx = \int_a^b (\varphi_x^- - \varphi_x^+) dx.$$

Воспользовавшись формулой (2.6.12), получим

$$\Gamma_0(t) = \frac{2\gamma}{\pi} \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{h(x)}} \int_a^b v(\tau, t) \sqrt{h(\tau)} \operatorname{cth} \gamma(\tau - x) d\tau + \frac{2\gamma^2 \Gamma(t)}{\pi} \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{h(x)}} = 0,$$

если

$$\Gamma(t) = -\frac{1}{M\gamma} \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{h(x)}} \int_a^b v(\tau, t) \sqrt{h(\tau)} \operatorname{cth} \gamma(\tau - x) d\tau, \quad (2.6.15)$$

где  $M = \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{h(x)}}$ .

В этом случае при обходе против часовой стрелки разреза  $l = [a, b]$  имеем

$$\begin{aligned} \oint_l f_z(z, t) dz &= \oint_l \varphi_x dx + \varphi_y dy + i \oint_l \varphi_x dy - \varphi_y dx = \oint_l \varphi_x dx - i \oint_l \varphi_y dx = \\ &= \Gamma_0(t) + i \int_a^b (\varphi_y^+ - \varphi_y^-) dx = iV \int_c^d [f^+(x) - f^-(x)] dx, \end{aligned}$$

поэтому

$$\left( \oint_l f_z(z, t) dz \right)' = \oint_l f_{z_t}(z, t) dz = 0.$$

Отсюда по теореме Коши следует, что интеграл от функции  $f_{z_t}(z, t)$  по любому замкнутому контуру, принадлежащему области  $G$ , равен нулю. А тогда значение  $\varphi_l$ , определяемое формулой (2.6.14), не зависит от линии интегрирования, соединяющей точки  $a$  и  $z$ .

Интегрируя по частям, представим (2.6.8) в виде

$$f_z(z, t) = \frac{\gamma}{\pi \sqrt{h(z)}} \left( \gamma \Gamma(t) - \int_a^b \bar{v}(\tau, t) \left( \sqrt{h(\tau)} \operatorname{cth} \gamma(\tau - z) \right)'_{\tau} d\tau \right) + \frac{\gamma V}{2\pi} \int_c^d [f^-(\tau) - f^+(\tau)] \operatorname{cth} \gamma(\tau - z) d\tau, \quad (2.6.16)$$

где  $\bar{v}(\tau, t) = \int_a^{\tau} v(x, t) dx$ .

Докажем равенство

$$\left( \frac{\sqrt{h(\tau)}}{\operatorname{sh} \gamma(\tau - z)} \right)'_{\tau} = - \frac{\sqrt{h(z)}}{\sqrt{h(\tau)}} \left( \frac{\sqrt{h(z)}}{\operatorname{sh} \gamma(\tau - z)} \right)'_z, \quad (2.6.17)$$

Так как

$$\begin{aligned} \left( \frac{\sqrt{h(\tau)}}{\operatorname{sh} \gamma(\tau - z)} \right)'_{\tau} &= \frac{h'(\tau) \operatorname{sh} \gamma(\tau - z) - 2\gamma h(\tau) \operatorname{ch} \gamma(\tau - z)}{2\sqrt{h(\tau)} \operatorname{sh}^2 \gamma(\tau - z)}, \\ \left( \frac{\sqrt{h(z)}}{\operatorname{sh} \gamma(\tau - z)} \right)'_z &= \frac{h'(z) \operatorname{sh} \gamma(\tau - z) - 2\gamma h(z) \operatorname{ch} \gamma(\tau - z)}{2\sqrt{h(z)} \operatorname{sh}^2 \gamma(\tau - z)}, \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} &\left( \frac{\sqrt{h(\tau)}}{\operatorname{sh} \gamma(\tau - z)} \right)'_{\tau} + \frac{\sqrt{h(z)}}{\sqrt{h(\tau)}} \left( \frac{\sqrt{h(z)}}{\operatorname{sh} \gamma(\tau - z)} \right)'_z = \\ &= \frac{(h'(\tau) + h'(z)) \operatorname{sh} \gamma(\tau - z) - 2\gamma(h(\tau) - h(z)) \operatorname{ch} \gamma(\tau - z)}{2\sqrt{h(\tau)} \operatorname{sh}^2 \gamma(\tau - z)}. \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$h(z) = \operatorname{sh} \gamma(z - a) \operatorname{sh} \gamma(b - z) = \frac{1}{2} (\operatorname{ch} \gamma(b - a) - \operatorname{ch} \gamma(2z - a - b)),$$

получаем

$$\begin{aligned}
 h'(\tau) + h'(z) &= -\gamma(\operatorname{sh}\gamma(2\tau - a - b) + \operatorname{sh}\gamma(2z - a - b)) = \\
 &= -2\gamma\operatorname{sh}\gamma(\tau + z - a - b)\operatorname{ch}\gamma(\tau - z), \\
 h(\tau) - h(z) &= \frac{1}{2}(\operatorname{ch}\gamma(2z - a - b) - \operatorname{ch}\gamma(2\tau - a - b)) = \\
 &= \operatorname{sh}\gamma(\tau + z - a - b)\operatorname{sh}\gamma(z - \tau).
 \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}
 &\left(\frac{\sqrt{h(\tau)}}{\operatorname{sh}\gamma(\tau - z)}\right)'_{\tau} + \frac{\sqrt{h(z)}}{\sqrt{h(\tau)}}\left(\frac{\sqrt{h(z)}}{\operatorname{sh}\gamma(\tau - z)}\right)'_z = \\
 &= \frac{-2\gamma\operatorname{sh}\gamma(\tau + z - a - b)\operatorname{ch}\gamma(\tau - z)\operatorname{sh}\gamma(\tau - z)}{2\sqrt{h(\tau)}\operatorname{sh}^2\gamma(\tau - z)} - \\
 &\quad - \frac{-2\gamma\operatorname{ch}\gamma(\tau - z)\operatorname{sh}\gamma(\tau + z - a - b)\operatorname{sh}\gamma(z - \tau)}{2\sqrt{h(\tau)}\operatorname{sh}^2\gamma(\tau - z)} = 0,
 \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

С учетом (2.6.17) имеем

$$\begin{aligned}
 f_z(z, t) &= \frac{\gamma}{\pi\sqrt{h(z)}}\left(\gamma\Gamma(t) - \int_a^b \bar{v}(\tau, t)\left[\left(\frac{\sqrt{h(\tau)}}{\operatorname{sh}\gamma(\tau - z)}\right)'_{\tau} \operatorname{ch}\gamma(\tau - z) + \gamma\sqrt{h(\tau)}\right]d\tau\right) + \\
 &\quad + \frac{\gamma V}{2\pi} \int_c^d [f^-(\tau) - f^+(\tau)] \operatorname{cth}\gamma(\tau - z) d\tau = \\
 &= \frac{\gamma^2}{\pi\sqrt{h(z)}}\left(\Gamma(t) - \int_a^b \bar{v}(\tau, t)\sqrt{h(\tau)}d\tau\right) + \\
 &\quad + \frac{\gamma}{\pi} \int_a^b \frac{\bar{v}(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}}\left(\frac{\sqrt{h(z)}}{\operatorname{sh}\gamma(\tau - z)}\right)'_z \operatorname{ch}\gamma(\tau - z) d\tau + \\
 &\quad + \frac{\gamma V}{2\pi} \int_c^d [f^-(\tau) - f^+(\tau)] \operatorname{cth}\gamma(\tau - z) d\tau. \tag{2.6.18}
 \end{aligned}$$

Полагая, что

$$A(t) = \Gamma(t) - \int_a^b \bar{v}(\tau, t)\sqrt{h(\tau)}dt,$$

и замечая, что

$$\left( \frac{\sqrt{h(z)}}{\operatorname{sh} \gamma(\tau - z)} \right)' \cdot \operatorname{ch} \gamma(\tau - z) = \left( \sqrt{h(z)} \operatorname{cth} \gamma(\tau - z) \right)'_z + \gamma \sqrt{h(z)},$$

окончательно запишем

$$f_z(z, t) = \frac{\gamma}{\pi} \int_a^b \frac{\bar{v}(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} \left[ \left( \sqrt{h(z)} \operatorname{cth} \gamma(\tau - z) \right)'_z + \gamma \sqrt{h(z)} \right] d\tau + \\ + \frac{\gamma^2 A(t)}{\pi \sqrt{h(z)}} + \frac{\gamma V}{2\pi} \int_c^d \left[ f^-(\tau) - f^+(\tau) \right] \operatorname{cth} \gamma(\tau - z) d\tau.$$

Подставляя (2.6.18) в (2.6.14), получим

$$W_t = \varphi_t + i\psi_t = \frac{\gamma \sqrt{h(z)}}{\pi} \int_a^b \frac{\tilde{v}(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} \operatorname{cth} \gamma(\tau - z) d\tau + \frac{\gamma^2}{\pi} \int_a^b \frac{\tilde{v}(\tau, t)}{\sqrt{h(z)}} d\tau, \quad (2.6.19)$$

где  $\tilde{v}(\tau, t) = \bar{v}_t(\tau, t) = \int_a^\tau \dot{v}(x, t) dx$ .

Подберем функцию  $C(t)$  так, чтобы выполнялось условие (2.6.2). Пусть  $z = x < a$ , тогда  $\sqrt{h(z)} = -i\sqrt{-h(x)}$  в силу выбора ветви корня, а

$$W_t = f_t(x, t) = -\frac{i\gamma \sqrt{-h(x)}}{\pi} \int_a^b \frac{\tilde{v}(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} \operatorname{cth} \gamma(\tau - x) d\tau - \\ - \frac{i\gamma^2}{\pi} \int_a^b \frac{\tilde{v}(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} d\tau \int_a^x \sqrt{-h(x)} dx + \frac{i\gamma^2 A'(t)}{\pi} \int_a^x \frac{dx}{\sqrt{-h(x)}} + C'(t),$$

следовательно,

$$\varphi_t(x, 0, t) = \operatorname{Re}\{C'(t)\}, \quad x < a. \quad (2.6.20)$$

Если  $z = x > b$ , то  $\sqrt{h(z)} = i\sqrt{-h(x)}$ ,

$$W_t = f_t(x, t) = \frac{i\gamma \sqrt{-h(x)}}{\pi} \int_a^b \frac{\tilde{v}(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} \operatorname{cth} \gamma(\tau - x) d\tau +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\gamma^2}{\pi} \int_a^b \frac{\tilde{v}(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} d\tau \int_a^b \left( \mp \sqrt{h(x)} \right) dx + \frac{\gamma^2 A'(t)}{\pi} \int_a^b \frac{dx}{\mp \sqrt{h(x)}} + \\
& + \frac{i\gamma^2}{\pi} \int_a^b \frac{\tilde{v}(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} \int_b^x \sqrt{-h(x)} dx + \frac{\gamma^2 A'(t)}{\pi} \int_b^x \frac{dx}{i\sqrt{-h(x)}} + C'(t), \\
\varphi(x, 0, t) &= \mp \frac{\gamma^2}{\pi} \left( \int_a^b \frac{\tilde{v}(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} d\tau \int_a^b \sqrt{h(x)} dx + A'(t) \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{h(x)}} \right) + \operatorname{Re}\{C'(t)\}.
\end{aligned}$$

Докажем равенство

$$\int_a^b \frac{\tilde{v}(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} d\tau \int_a^b \sqrt{h(x)} dx + A'(t) \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{h(x)}} = 0, \quad (2.6.21)$$

в котором

$$\begin{aligned}
A(t) &= \Gamma(t) - \int_a^b \bar{v}(\tau, t) \sqrt{h(\tau)} d\tau, \\
\Gamma(t) &= -\frac{1}{M\gamma} \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{h(x)}} \int_a^b v(\tau, t) \sqrt{h(\tau)} \operatorname{cth} \gamma(\tau - x) d\tau.
\end{aligned}$$

Преобразуем выражение для функции  $\Gamma(t)$ . Интегрируя по частям и применяя формулу (2.6.17) при  $z = x$ , будем иметь

$$\begin{aligned}
\int_a^b v(\tau, t) \sqrt{h(x)} \operatorname{cth} \gamma(\tau - x) d\tau &= \bar{v}(\tau, t) \sqrt{h(\tau)} \operatorname{cth} \gamma(\tau - x) \Big|_a^b - \\
& - \int_a^b \bar{v}(\tau, t) \left( \sqrt{h(\tau)} \operatorname{cth} \gamma(\tau - x) \right)'_x d\tau = \\
& = - \int_a^b \bar{v}(\tau, t) \left[ \left( \frac{\sqrt{h(\tau)}}{\operatorname{sh} \gamma(\tau - x)} \right)'_\tau \operatorname{ch} \gamma(\tau - x) + \gamma \sqrt{h(\tau)} \right] d\tau = \\
& = \sqrt{h(x)} \int_a^b \frac{\bar{v}(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} \left( \frac{\sqrt{h(x)}}{\operatorname{sh} \gamma(\tau - x)} \right)'_x \operatorname{ch} \gamma(\tau - x) d\tau - \gamma \int_a^b \bar{v}(\tau, t) \sqrt{h(\tau)} d\tau.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
M\gamma\Gamma(t) &= -\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{h(x)}} \int_a^b v(\tau, t) \sqrt{h(\tau)} \operatorname{cth}\gamma(\tau-x) d\tau = \\
&= -\int_a^b dx \int_a^b \frac{\bar{v}(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} \left( \frac{\sqrt{h(x)}}{\operatorname{sh}\gamma(\tau-x)} \right)'_x \operatorname{ch}\gamma(\tau-x) d\tau + \gamma \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{h(x)}} \int_a^b \bar{v}(\tau, t) \sqrt{h(\tau)} d\tau.
\end{aligned}$$

Меняя порядок интегрирования и интегрируя по частям, запишем окончательно

$$\begin{aligned}
M\gamma\Gamma(t) &= -\int_a^b \frac{\bar{v}(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} d\tau \int_a^b \left( \frac{\sqrt{h(x)}}{\operatorname{sh}\gamma(\tau-x)} \right)'_x \operatorname{ch}\gamma(\tau-x) d\tau + \\
&+ M\gamma \int_a^b \bar{v}(\tau, t) \sqrt{h(\tau)} d\tau = -\int_a^b \frac{\bar{v}(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} \left[ \frac{\sqrt{h(x)} \operatorname{ch}\gamma(\tau-x)}{\operatorname{sh}\gamma(\tau-x)} \right]_a^b + \gamma \int_a^b \sqrt{h(x)} dx \Big] d\tau + \\
&+ M\gamma \int_a^b \bar{v}(\tau, t) \sqrt{h(\tau)} d\tau = -\gamma \int_a^b \frac{\bar{v}(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} d\tau \int_a^b \sqrt{h(x)} dx + M\gamma \int_a^b \bar{v}(\tau, t) \sqrt{h(\tau)} d\tau,
\end{aligned}$$

или

$$\Gamma(t) = \int_a^b \bar{v}(\tau, t) \sqrt{h(\tau)} d\tau - \frac{N}{M} \int_a^b \frac{\bar{v}(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} d\tau, \quad (2.6.22)$$

где  $N = \int_a^b \sqrt{h(x)} dx$ .

Согласно формуле (2.6.22)

$$A'(t) = \Gamma'(t) - \int_a^b \tilde{v}(\tau, t) \sqrt{h(\tau)} d\tau = -\frac{N}{M} \int_a^b \frac{\tilde{v}(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} d\tau.$$

Подставляя это выражение в (2.6.21), получаем верное равенство. Поскольку выполняется равенство (2.6.21), то

$$\varphi(x, 0, t) = \operatorname{Re}\{C'(t)\}, \quad x > b. \quad (2.6.23)$$

Из (2.6.8), (2.6.20), (2.6.23) следует, что

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_z(z, t) &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\varphi_x - i\varphi_y) = 0, \\
\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \varphi_t(x, 0, t) &= \operatorname{Re}\{C'(t)\},
\end{aligned}$$

поэтому условие (2.6.2) будет выполнено, если положить  $\operatorname{Re}\{C(t)\} \equiv \operatorname{const}$ .

Найдем граничные значения функции  $\varphi_t(x, y, t)$ . Переходя в (2.6.19) к пределу при  $z \rightarrow x \pm i0$ ,  $x \in (a, b)$ , получаем

$$\begin{aligned} \varphi_t^\pm + i\psi_t^\pm = \mp \frac{\sqrt{h(x)}}{\pi} & \left( \pm \pi i \frac{\tilde{v}(\tau, t)}{\sqrt{h(x)}} + \gamma \int_a^b \frac{\tilde{v}(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} \operatorname{cth} \gamma(\tau - x) d\tau \right) \mp \\ & \pm \frac{\gamma^2}{\pi} \int_a^b \frac{\tilde{v}(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} d\tau \int_a^x \sqrt{h(x)} dx \mp \frac{\gamma^2 A'(t)}{\pi} \int_a^x \frac{dx}{\sqrt{h(x)}} + C'(t), \end{aligned}$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \varphi_t^+ - \varphi_t^- = & -\frac{2\gamma\sqrt{h(x)}}{\pi} \int_a^b \frac{\tilde{v}(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} \operatorname{cth} \gamma(\tau - x) d\tau - \\ & -\frac{2\gamma^2}{\pi} \int_a^b \frac{\tilde{v}(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} d\tau \int_a^x \sqrt{h(x)} dx - \frac{2\gamma^2 A'(t)}{\pi} \int_a^x \frac{dx}{\sqrt{h(x)}}, \quad x \in (a, b) \end{aligned} \quad (2.6.24)$$

Таким образом, согласно формулам (2.6.12), (2.6.24) система уравнений (2.6.5), (2.6.6) принимает вид

$$\begin{aligned} L_k(w_k) = & -\frac{2\rho\gamma}{\pi} \left( \sqrt{h(x)} \int_a^b \frac{\tilde{v}(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} \operatorname{cth} \gamma(\tau - x) + \gamma \int_a^b \frac{\tilde{v}(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} d\tau \int_a^x \sqrt{h(x)} dx + \right. \\ & \left. + \gamma A'(t) \int_a^x \frac{dx}{\sqrt{h(x)}} \right) - \frac{2\gamma\rho V}{\pi\sqrt{h(x)}} \left( \int_a^b v(\tau, t) \sqrt{h(\tau)} \operatorname{cth} \gamma(\tau - x) d\tau + \gamma \Gamma(t) \right), \end{aligned} \quad (2.6.25)$$

$$k = 1, 2;$$

при  $k = 1$  —  $x \in (a, c)$ , при  $k = 2$  —  $x \in (d, b)$ .

Левые части уравнений (2.6.25) определяются формулами (2.6.7),

$$\begin{aligned} h(x) = & \operatorname{sh} \gamma(x - a) \operatorname{sh} \gamma(b - x), \quad \gamma = \frac{\pi}{H}, \\ \Gamma(t) = & -\frac{1}{M\gamma} \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{h(x)}} \int_a^b v(\tau, t) \sqrt{h(\tau)} \operatorname{cth} \gamma(\tau - x) d\tau = \\ = & \int_a^b \bar{v}(\tau, t) \sqrt{h(\tau)} d\tau - \frac{N}{M} \int_a^b \frac{\bar{v}(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} d\tau, \quad M = \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{h(x)}}, \end{aligned}$$

$$N = \int_a^b \sqrt{h(x)} dx, \quad A'(t) = \Gamma'(t) - \int_a^b \tilde{v}(\tau, t) \sqrt{h(\tau)} d\tau = -\frac{N}{M} \int_a^b \frac{\tilde{v}(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} d\tau,$$

$$\bar{v}(\tau, t) = \int_a^\tau v(x, t) dx, \quad \tilde{v}(\tau, t) = \int_a^\tau \dot{v}(x, t) dx,$$

$$v(x, t) = \begin{cases} \dot{w}_1(x, t) + Vw_1'(x, t), & x \in (a, c), \\ \frac{V}{2} [f^+(x) + f^-(x)], & x \in (c, d), \\ \dot{w}_2(x, t) + Vw_2'(x, t), & x \in (d, b). \end{cases}$$

Уравнения (2.6.25) соответствуют линейной теории аэрогидроупругости, когда движение жидкости (газа), а также динамика деформируемого тела описываются линейными уравнениями. Можно предложить также «смешанные» математические модели, в которых уравнения, описывающие динамику упругого элемента, являются нелинейными. Одна из таких моделей определяется уравнениями (2.6.25), в которых  $L_1(w_1)$  и  $L_2(w_2)$  заменяются соответственно выражениями

$$\left( \frac{D_1 w_1''}{[1 + (w_1')^2]^{3/2}} \right)'' + N_1 w_1'' - \theta_1 w_1'' \left( \int_a^c \sqrt{1 + (w_1')^2} dx - c + a \right) + M_1 \ddot{w}_1 +$$

$$+ \delta_1 \dot{w}_1''' - \alpha_1 \dot{w}_1'' + f_1(x, t, w_1, \dot{w}_1, w_2, \dot{w}_2), \quad x \in (a, c),$$

$$\left( \frac{D_2 w_2''}{[1 + (w_2')^2]^{3/2}} \right)'' + N_2 w_2'' - \theta_2 w_2'' \left( \int_d^b \sqrt{1 + (w_2')^2} dx - b + d \right) + M_2 \ddot{w}_2 +$$

$$+ \delta_2 \dot{w}_2''' - \alpha_2 \dot{w}_2'' + f_2(x, t, w_1, \dot{w}_1, w_2, \dot{w}_2), \quad x \in (d, b),$$

где  $f_k(x, t, w_1, \dot{w}_1, w_2, \dot{w}_2)$ ,  $k=1, 2$  – заданные функции, характеризующие внешние воздействия, а также упругие и демпфирующие свойства оснований, штрих обозначает частную производную по  $x$ , точка – частную производную по  $t$ .

Вторая модель также предполагает использование уравнений (2.6.25), при этом каждое из них заменяется системой двух уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} -E_1 F_1 \left[ u_1' + \frac{1}{2} (w_1')^2 \right]' + M_1 \ddot{u}_1 + \delta_1^* \dot{u}_1'' + g_1(x, t, u_1, \dot{u}_1, w_1, \dot{w}_1, u_2, \dot{u}_2, w_2, \dot{w}_2) = 0, \\ -E_1 F_1 \left[ w_1' \left( u_1' + \frac{1}{2} (w_1')^2 \right) \right]' + \left( \frac{D_1 w_1''}{[1 + (w_1')^2]^{3/2}} \right)'' + M_1 \dot{w}_1 + \delta_1^0 \dot{w}_1''' - \alpha_1 \ddot{w}_1'' + N_1 w_1'' - \\ - \theta_1 w_1'' \left( \int_a^c \sqrt{1 + (w_1')^2} dx + a - c \right) + f_1(x, t, u_1, \dot{u}_1, w_1, \dot{w}_1, u_2, \dot{u}_2, w_2, \dot{w}_2) = P_1(w_1, w_2), \\ x \in (a, c), \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -E_2 F_2 \left[ u_2' + \frac{1}{2} (w_2')^2 \right]' + M_2 \ddot{u}_2 + \delta_2^* \dot{u}_2'' + g_2(x, t, u_1, \dot{u}_1, w_1, \dot{w}_1, u_2, \dot{u}_2, w_2, \dot{w}_2) = 0, \\ -E_2 F_2 \left[ w_2' \left( u_2' + \frac{1}{2} (w_2')^2 \right) \right]' + \left( \frac{D_2 w_2''}{[1 + (w_2')^2]^{3/2}} \right)'' + M_2 \dot{w}_2 + \delta_2^0 \dot{w}_2''' - \alpha_2 \ddot{w}_2'' + N_2 w_2'' - \\ - \theta_2 w_2'' \left( \int_d^b \sqrt{1 + (w_2')^2} dx + d - b \right) + f_2(x, t, u_1, \dot{u}_1, w_1, \dot{w}_1, u_2, \dot{u}_2, w_2, \dot{w}_2) = P_2(w_1, w_2), \\ x \in (d, b), \end{array} \right.$$

где  $u_k(x, t)$ ,  $w_k(x, t)$  – продольные и поперечные деформации упругих элементов;  $P_k(w_1, w_2)$  – правые части уравнений (2.6.25);  $g_k(x, t, u_1, \dot{u}_1, w_1, \dot{w}_1, u_2, \dot{u}_2, w_2, \dot{w}_2)$ ,  $f_k(x, t, u_1, \dot{u}_1, w_1, \dot{w}_1, u_2, \dot{u}_2, w_2, \dot{w}_2)$  – заданные функции, характеризующие внешние воздействия, а также упругие и демпфирующие свойства подкрепляющих элементов.

Часть нелинейных математических моделей связана с заменой  $[1 + (w_k')^2]^{-3/2}$  и  $[1 + (w_k')^2]^{1/2}$  на  $\left[1 - \frac{3}{2} (w_k')^2\right]$  и  $\left[1 + \frac{1}{2} (w_k')^2\right]$  соответственно, а также с заменой этих выражений единицей.

**Частный случай.** Пусть  $a = c$ , то есть профиль содержит один упругий элемент – элерон. В этом случае система уравнений (2.6.25) сводится к одному уравнению

$$L(w) = -\frac{2\rho\gamma}{\pi} \left( \sqrt{h(x)} \int_a^b \frac{\tilde{v}(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} \operatorname{cth} \gamma(\tau - x) d\tau + \gamma \int_a^b \frac{\tilde{v}(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} d\tau \int_a^x \sqrt{h(x)} dx + \right. \\ \left. + \gamma A'(t) \int_a^x \frac{dx}{\sqrt{h(x)}} \right) - \frac{2\gamma\rho V}{\pi\sqrt{h(x)}} \left( \int_a^b v(\tau, t) \sqrt{h(\tau)} \operatorname{cth} \gamma(\tau - x) d\tau + \gamma \Gamma(t) \right), \quad (2.6.26) \\ x \in (d, b).$$

В уравнении (2.6.26)

$$L(w) \equiv M\ddot{w} + Dw'''' + Nw'' + \delta\dot{w}'''' + \beta\dot{w} + \gamma w,$$

$w = w(x, t)$  – прогиб упругого элемента,  $h(x) = \operatorname{sh} \gamma(x - a) \operatorname{sh} \gamma(b - x)$ ,  $\gamma = \frac{\pi}{H}$ ,

$$\Gamma(t) = -\frac{1}{M_0\gamma} \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{h(x)}} \int_a^b v(\tau, t) \sqrt{h(\tau)} \operatorname{cth} \gamma(\tau - x) d\tau = \\ = \int_a^b \bar{v}(\tau, t) \sqrt{h(\tau)} d\tau - \frac{N_0}{M_0} \int_a^b \frac{\bar{v}(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} d\tau, \quad M_0 = \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{h(x)}}, \quad N_0 = \int_a^b \sqrt{h(x)} dx,$$

$$A'(t) = \Gamma'(t) - \int_a^b \tilde{v}(\tau, t) \sqrt{h(\tau)} d\tau = -\frac{N_0}{M_0} \int_a^b \frac{\tilde{v}(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} d\tau,$$

$$\bar{v}(\tau, t) = \int_a^\tau v(x, t) dx, \quad \tilde{v}(\tau, t) = \int_a^\tau \dot{v}(x, t) dx,$$

$$v(x, t) = \begin{cases} \frac{V}{2} [f^+(x) + f^-(x)], & x \in (a, d), \\ \dot{w}(x, t) + Vw'(x, t), & x \in (d, b). \end{cases}$$

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК главы 2

- 2.1. Алгазин, С. Д. Численно-аналитическое исследование флаттера пластины произвольной формы в плане / С. Д. Алгазин, И. А. Кийко // ПММ. – 1997. – Т. 61, вып. 1. – С. 171–174.
- 2.2. Алгазин, С. Д. Численное исследование флаттера прямоугольной пластины / С. Д. Алгазин, И. А. Кийко // ЖПМТФ. – 2003. – Т. 44, № 4. – С. 35–42.
- 2.3. Алгазин, С. Д. Флаттер пластин и оболочек / С. Д. Алгазин, И. А. Кийко. – М. : Наука, 2006. – 246 с.
- 2.4. Анкилов, А. В. О динамической устойчивости трубопровода / А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов // Математические методы и модели в науке, технике, естествознании и экономике: Труды международной «Конференции по логике, информатике, науковедению – КЛИН-2007» (Ульяновск, 17-18 мая 2007 г.). – Ульяновск : УлГТУ, 2007. – Т. 4. – С. 10–14.
- 2.5. Анкилов, А. В. Математические модели механической системы «трубопровод – датчик давления» / А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов, Ю. В. Покладова // Вестник Саратовского государственного технического университета. – 2007. – №3(27). – С. 7–14.
- 2.6. Анкилов, А. В. Устойчивость упругих элементов крылового профиля / А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов, Н. А. Дегтярева // Прикладная математика и механика: сборник научных трудов. – Ульяновск : УлГТУ, 2007. – №7 – С. 9–18.
- 2.7. Анкилов, А. В. Устойчивость решений некоторых классов интегро-дифференциальных уравнений в частных производных / А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов // Вестник Самарского государственного университета, естественнонаучная серия. – 2008. – №8/1(67). – С. 331–344.
- 2.8. Анкилов, А. В. Динамика и устойчивость упругих пластин при аэрогидродинамическом воздействии / А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов. – Ульяновск : УлГТУ, 2009. – 220 с.
- 2.9. Анкилов, А. В. Численно-аналитическое исследование динамической устойчивости упругой пластины при аэрогидродинамическом воздействии / А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов // Прикладная математика и механика: сборник научных трудов. – Ульяновск : УлГТУ, 2009. – С. 3–22.
- 2.10. Анкилов, А. В. Математическое моделирование динамики и устойчивости упругих элементов крыла / А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов // Вестник Саратовского государственного технического университета. – 2009. – №1(37). – С. 7–16.
- 2.11. Анкилов, А. В. Исследование динамической устойчивости упругих элементов стенок канала / А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов, Е. П. Семенова // Вестник Саратовского государственного технического университета. – 2009. – №2(38), выпуск 1. – С. 7–17.
- 2.12. Анкилов, А. В. О решениях интегро-дифференциальных уравнений в задаче динамики одной аэроупругой системы типа «тандем» / А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов, Е. П. Семенова // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. – 2011. – № 2(23). – С. 266–271.
- 2.13. Анкилов, А. В. Об устойчивости решений уравнений взаимодействия упругих стенок каналов с протекающей жидкостью / А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. – 2011. – №1(22). – С. 179–185.

- 2.14. Анкилов, А. В. Исследование динамики и устойчивости упругого элемента конструкций при сверхзвуковом обтекании / А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов // Вестник Саратовского государственного технического университета. – 2011. – №3(57) выпуск 1. – С. 59–67.
- 2.15. Анкилов, А. В. Устойчивость решений одной нелинейной начально-краевой задачи аэроупругости / А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов, Ю. А. Казакова // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. – 2013. – №1(30). – С. 1–7.
- 2.16. Анкилов, А. В. Устойчивость решений одной нелинейной начально-краевой задачи аэроупругости / А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов, Ю. А. Казакова // Вестник Самарского гос. техн. ун-та. Серия: Физико-математические науки. – 2013. – №2(31). – С. 120–126.
- 2.17. Анкилов, А. В. Об устойчивости решений начально-краевой задачи о динамике защитного экрана при взаимодействии со сверхзвуковым потоком газа / А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов, В. А. Судаков // Вестник Ульяновского гос. техн. университета. – 2013. – № 3. – С. 45–52.
- 2.18. Болотин, В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости / В. В. Болотин. – М. : Физматгиз, 1961. – 339 с.
- 2.19. Бочкарев, С. А. Решение задачи о панельном флаттере оболочечных конструкций методом конечных элементов / С. А. Бочкарев, В. П. Матвеев // Математическое моделирование. – 2002. – №12. – С. 55–71.
- 2.20. Вельмисов, П. А. Устойчивость уравнений взаимодействия вязкоупругих пластин с жидкостью / П. А. Вельмисов, Ю. А. Решетников, Е. Е. Колмановский // Дифференциальные уравнения. – 1994. – Т30. – №11. – С. 1966–1981.
- 2.21. Вельмисов, П. А. Исследование устойчивости трубопровода / П. А. Вельмисов, Б. В. Логинов, С. Д. Милушева // Приложение на математиката в техниката: Сб. доклады и научни съобщения. XXI национална школа. – Болгария, Варна, 1995. – С. 299–304.
- 2.22. Вельмисов, П. А. Устойчивость пластины в сверхзвуковом потоке газа / П. А. Вельмисов, С. В. Киреев, А. А. Кузнецов // Вестник УлГТУ. – 1999. – № 1. – С. 44.
- 2.23. Вельмисов, П. А. Математическое моделирование механической системы «трубопровод-датчик давления» / П. А. Вельмисов, В. Д. Горбоконенко, Ю. А. Решетников // Датчики и системы. – 2003. – №6(49). – С.12–15.
- 2.24. Вельмисов, П. А. Исследование динамики трубопровода с учетом запаздывания внешних воздействий / П. А. Вельмисов, Ю. В. Покладова // Вестник Ульяновского государственного технического университета. – Ульяновск : УлГТУ. – 2004. – № 4. – С. 26–29.
- 2.25. Вельмисов, П. А. Численный метод решения задачи о статической неустойчивости пластины в сверхзвуковом потоке газа / П. А. Вельмисов, С. В. Киреев // Труды Средневолжского математического общества. – 2004. – № 1. – С. 166–170.
- 2.26. Вельмисов, П. А. Численный метод решения задачи о бифуркации пластины в сверхзвуковом потоке газа / П. А. Вельмисов, С. В. Киреев // Вестник УлГТУ. – 2004. – № 3. – С. 28–31.
- 2.27. Вельмисов, П. А. Исследование колебаний упругого элемента датчика давления / П. А. Вельмисов, Ю. В. Покладова // Вестник Ульяновского государственного технического университета. – 2005. – № 2 (30). – С. 20–22.
- 2.28. Вельмисов, П. А. Математическое моделирование динамики упругих элементов при аэрогидродинамическом воздействии / П. А. Вельмисов, А. А. Васильева, Е. П. Семенова // Труды 7 Международной конференции «Математическое

- моделирование физических, экономических, технических, социальных систем и процессов (2-5 февраля 2009 г., Ульяновск)». – Ульяновск : УлГУ, 2009. – С. 68–70.
- 2.29. Вельмисов, П. А. Математическое моделирование системы «трубопровод – датчик давления» / П. А. Вельмисов, Ю. В. Покладова, Е. С. Серебрянникова // Журнал Средневолжского математического общества. – 2010. – Т.12 № 4. – С. 85–93.
- 2.30. Вельмисов, П. А. О некоторых математических моделях механической системы «трубопровод – датчик давления» / П. А. Вельмисов, Ю. В. Покладова // Proceeding of the international conference “Education, science and economics at universities. Integration to international education area” (Poland, Plock, 20.09.10 – 25.09.10). – Plock: NOVUM, 2010. – PP. 492-499.
- 2.31. Вельмисов, П. А. Математическое моделирование в задачах статической неустойчивости упругих элементов конструкций при аэрогидродинамическом воздействии / П. А. Вельмисов, С. В. Киреев. – Ульяновск: УлГТУ, 2011 – 200 с.
- 2.32. Вельмисов, П. А. О некоторых математических моделях механической системы «трубопровод - датчик давления» / П. А. Вельмисов, Ю. В. Покладова // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Технические науки. – 2011. – №1(29). – С.137–144.
- 2.33. Вельмисов, П. А. Математическое моделирование в задачах динамической устойчивости вязкоупругих элементов проточных каналов / П. А. Вельмисов, А. А. Молгачев. – Ульяновск : УлГТУ, 2012. – 185 с.
- 2.34. Вельмисов, П. А. Математическое моделирование систем динамического контроля за изменением давления / П. А. Вельмисов, Ю. В. Покладова, Е. С. Серебрянникова // Журнал Средневолжского математического общества. – 2012. – Т.14 № 2. – С. 22–33.
- 2.35. Вельмисов, П. А. Устойчивость решений одного класса нелинейных начально-краевых задач аэроупругости / П. А. Вельмисов, В. А. Судаков, Ю. К. Замальдинова // Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Общая топология. Проблемы математического образования: тезисы докладов Четвёртой Международной конференции, посвящённой 90-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН, академика Европейской академии наук Л.Д. Кудрявцева. Москва, РУДН, 25-29 марта 2013 г. – М. : РУДН, 2013. – С. 290–292.
- 2.36. Вельмисов, П. А. Численный эксперимент в задаче о динамике защитного экрана при сверхзвуковом обтекании потоком газа / П. А. Вельмисов, В. А. Судаков, А. В. Анкилов // Вестник Ульяновского государственного технического университета. – 2013. – № 3. – С. 38–44.
- 2.37. Вельмисов, П. А. Математическое моделирование в задачах устойчивости упругих элементов конструкций при сверхзвуковом режиме обтекания / П. А. Вельмисов, С. В. Киреев // Автоматизация процессов управления. – 2014. – № 1 (35). – С. 38–46.
- 2.38. Гахов, Ф. В. Краевые задачи / Ф. В. Гахов. – М. : Наука, 1977. – 640 с.
- 2.39. Гудерлей, К. Г. Теория околосвуковых течений / К. Г. Гудерлей. – М. : Изд-во иностранной литературы, 1960. – 421 с.
- 2.40. Кийко, И. А. Нелинейные аэроупругие колебания прямоугольной пластины / И. А. Кийко, Б. Ю. Кудрявцев // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика, механика. – 2005. – №1. – С. 68–71.

- 2.41. Кийко, И. А. Колебания и устойчивость вязкоупругой полосы в потоке газа / И. А. Кийко, В. В. Показеев // Докл. РАН. – 2005. – Т. 401, № 3. – С. 342–348.
- 2.42. Киреев, С. В. Численный метод решения задачи о бифуркации пластины в сверхзвуковом потоке газа / С. В. Киреев // Механика и процессы управления: сб. науч. тр. – Ульяновск : УлГТУ, 2004. – С. 30–36.
- 2.43. Киреев, С. В. Численный эксперимент в задаче о статической неустойчивости пластины / С. В. Киреев // Континуальные алгебраические логики, исчисления и нейроматематика в науке и технике. Труды международной конференции. – Т. 4: Математические методы и модели в прикладных задачах науки и техники. – Ульяновск : УлГТУ, 2005. – С. 116–121.
- 2.44. Коллатц, Л. Задачи на собственные значения / Л. Коллатц. – М. : Наука, 1968.
- 2.45. Кудрявцев, Б. Ю. Флаттер упругой пластины, находящейся в потоке газа при умеренных сверхзвуковых скоростях / Б. Ю. Кудрявцев // Изв. Тульск. гос. ун-та. Сер. мат. мех. информ. – 2005. – Т. 11, вып. 3. – С. 99–102.
- 2.46. Лаврентьев, М. А. Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. – М. : Наука, 1987. – 688 с.
- 2.47. Математические модели механической системы «трубопровод – датчик давления» / П. А. Вельмисов, Ю. А. Решетников, Ю. В. Ходзицкая, В. Д. Горбоконенко // Вестник Ульяновского государственного технического университета. – 2003. – № 1-2 (21-22). – С. 22–24.
- 2.48. Математическое моделирование механической системы «трубопровод-датчик давления» / А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов, В. Д. Горбоконенко, Ю. В. Покладова. – Ульяновск : УлГТУ, 2008. – 188 с.
- 2.49. Математическая модель крылового профиля в аэродинамической трубе / П. А. Вельмисов, Ю. А. Решетников, Е. П. Семёнова, А. Б. Захарова // Вестник Ульяновского государственного технического университета. – 2013. – № 4. – С. 40–50.
- 2.50. Минасян, Д. М. Флаттер упругой пластинки при малых сверхзвуковых скоростях потока газа: Сравнительный анализ / Д. М. Минасян // Изв. АН Армении. Механика. – 2001. – Т. 54, № 3. – С. 65–72.
- 2.51. Мовчан, А. А. Об одной задаче устойчивости трубы при протекании через нее жидкости / А. А. Мовчан // Прикладная математика и механика. – 1965. – Вып. 4. – С. 760–762.
- 2.52. Морозов, В. И. Нелинейные задачи аэроупругой устойчивости крыла при отрывном обтекании / В. И. Морозов, В. В. Овчинников // Изв. РАН. МТТ. – 2003. – № 6. – С. 158–170.
- 2.53. Найфэ А. Методы возмущений / А. Найфэ. – М. : Мир, 1976. – 455 с.
- 2.54. Овсянников, Л. В. Исследование газовых течений с прямой дозвуковой линией / Л. В. Овсянников // Труды Ленинградской Военно-Воздушной инженерной академии им. А. Ф. Можайского. – 1950. – Вып. 33. – С. 3–24.
- 2.55. Пат. 2062662 Российская Федерация, МПК6 В 06 В 1/18, 1/20. Гидродинамический излучатель / П. А. Вельмисов, Г. М. Горшков, Г. К. Рябов. Заявитель и патентообладатель Ульяновский гос. технич. ун-т. – №5038746/28; заявл. 20.07.92; опубл. 27.06.96, Бюлл. №18.
- 2.56. Седов, Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики / Л. И. Седов. – М. : Наука, 1980. – 448 с.
- 2.57. Светлицкий, В. А. Механика трубопроводов и шлангов: Задачи взаимодействия стержней с потоком жидкости или воздуха / В. А. Светлицкий. – М. : Машиностроение, 1982. – 280 с.

- 2.58. Томпсон Дж. М. Т. Неустойчивости и катастрофы в науке и технике: Пер. с англ. / Дж. М. Т. Томпсон. – М. : Мир, 1985. – 254 с.
- 2.59. Фалькович, С. В. К теории сопла Лавалья / С. В. Фалькович // ПММ. – 1946. – № 10. – С. 503–512.
- 2.60. Феодосьев, В. И. О колебаниях и устойчивости трубы при протекании через нее жидкости / В. И. Феодосьев // Инж. сб., Изд-во АН СССР. 1951, Т.10. – С.169-170.
- 2.61. Франкль, Ф. И. Избранные труды по газовой динамике / Ф. И. Франкль. – М. : Наука, 1973. – 711 с.
- 2.62. Челомей, С. В. О динамической устойчивости упругих систем / С. В. Челомей // Докл. АН СССР, 1980. – Т. 252, №2. – С. 307–310.
- 2.63. Lin, C. C. On two-dimensional non-steady motion of a slender body in a compressible fluid / C. C. Lin, E. Reissner, H. S. Tsien // Jour. Math. Phys. – 1948. – Vol. 27, № 3. – pp. 220–231.
- 2.64. Paidoussis, M. P. Dynamic stability of piped conveying fluid / M. P. Paidoussis, N. T. Issid // J.Sound and Vibr., 1974, v.33. №3. – pp. 267–294.
- 2.65. Vel'misov, P. A. Stability and Bifurcation of a Plate in a Supersonic Gas Flow / P. A. Vel'misov, S. V. Kireev, A. O. Kuznetsov // Applications of Mathematics in Engineering: Proceedings of the XXIV Summer School. – Sozopol 98, Bulgaria: Heron Press, Sofia, 1999. – PP. 41–46.
- 2.66. Vel'misov, P. A. Investigation of the asymptotic stability of a pipeline in the presence of delay in time / P. A. Vel'misov, L. V. Garnefska, S. D. Milusheva // Rev. Mat. Estat., São Paulo, 19: 2001. – pp. 159–178.
- 2.67. Vel'misov, P. A. Asymptotical solution of problem about plate stability in supersonic gas flow / P. A. Vel'misov, S. V. Kireev // Applications of Mathematics in Engineering: Proceedings of the XXVII Summer School. – Sozopol, Bulgaria: Heron Press, Sofia, 2002. – PP. 188–196.
- 2.68. Vel'misov, P. A. An investigation of mathematical models of a mechanical system “Pipeline-Pressure Sensor” / P. A. Vel'misov, Yu. V. Pokladova // Romai Journal. Pitești, Romania. 2005. v.2, №1. – pp. 214–219.
- 2.69. Vel'misov, P. A. Investigation of dynamics of an elastic element of a pressure sensor / P. A. Vel'misov, Yu. V. Pokladova // Applications of Mathematics in Engineering and Economics. – Soft trade, Sofia, Bulgaria. 2006. – P.51–57.
- 2.70. Vel'misov, P. A. Numerical solution of the bifurcation problem of the design elements subject to aerohydrodynamic effects / P. A. Vel'misov, S. V. Kireev // Romanian Society of Applied and Industrial Mathematics ROMAI JOURNAL. Volume:2 Number:2 Year:2006. PP. 195–203.
- 2.71. Vel'misov, P. A. Mathematical Modeling in Problems of Static Instability of Elastic Element of Constructions Upon Aero-Hydrodynamic Influence / P. A. Vel'misov, S. V. Kireev // Applications of Mathematics in Engineering and economics: Proceedings of the 32<sup>nd</sup> International Conference. – Sozopol, Bulgaria: Softtrade Sofia, 2007. – PP. 50–65.
- 2.72. Karman Th. von The similarity law of transonic flow // J. Math. Phys. – 1947. – Vol. 26, № 3. – pp. 182–190.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В монографии представлены работы, посвященные проблемам математического моделирования в задачах динамики виброударных и аэроупругих систем.

Разработана математическая модель виброударной системы с периодическим силовым воздействием релейного типа, с нелинейными свойствами ударного взаимодействия, которая по структуре близка к оптимальным системам и может служить своеобразным эталоном при построении реальных систем.

Аналитические зависимости для расчета параметров движения на различных интервалах переходного процесса позволили установить возможность возникновения явления дребезга и определить минимальное число последовательных ударов при дребезге, превышение которого позволяет с заданным уровнем погрешности отсекалть последующие малые перемещения ударника. Эти результаты позволили решить проблему моделирования дребезга в виброударных системах.

Представлен проблемно-ориентированный программный комплекс для моделирования движения виброударных систем с учетом соударений, разрывных функций силового воздействия на объект, явления дребезга, графическим и числовым воспроизведением параметров движения в процессе моделирования, фиксированием длительности переходных процессов и предельных циклов движения. Разработанные вычислительные процедуры позволяют на порядок повысить производительность процесса моделирования и анализа результатов.

Построена модель продольного удара стержня как механической системы с конечным числом степеней свободы. Уравнения движения преобразованы к виду, когда в структуре уравнений представлен параметр, определяющий скорость звука в материале стержня. Это позволяет естественным образом сопоставлять результаты с волновой моделью продольного удара.

Исследования, посвященные проблеме продольного удара, показывают, что процесс удара тел сопровождается возбуждением в зоне контакта волн деформаций.

Осуществлено моделирование и автоматизированное построение на экране монитора поля волновых состояний неоднородной стержневой системы при продольном ударе о жесткую преграду с возможностью активировать информацию о волновых состояниях в произвольных областях этого поля, представлять диаграммы напряженно-деформированного состояния стержневой системы в любой интересующий пользователя момент времени в течение всего процесса удара.

Вычислительная схема базируется на представлении стержня в виде множества последовательно сопряженных участков, на схеме

формирования прямых и обратных волн на границах сопряженных участков, на свойстве функций прямых и обратных волн сохранять свои параметры при распространении по однородному участку со скоростью звука.

Разработана волновая модель движения механической системы, состоящей из активного звена (локомотива), упругого стержня и транспортируемого объекта. Волновая модель движения стержня позволяет учесть его распределенную массу и рассмотреть волновые процессы, определяющие характер перемещения транспортируемого объекта, деформирование стержня, а также, в случае необходимости, определить момент появления неудерживающей связи.

Рассмотрен процесс преобразования продольной волны деформации постоянной интенсивности на границе разнородных стержней с упругим слоем. Дано решение волновых уравнений, описывающих процесс преобразования волны деформации постоянной интенсивности. Определены параметры формируемых на границе сопряжения волн.

Представлены вопросы развития математической теории трансзвуковых течений газа, т. е. течений, содержащих одновременно дозвуковые и сверхзвуковые области. На основе полученного асимптотического нелинейного уравнения исследуются трансзвуковые течения газа, учитывающие поперечные по отношению к основному потоку возмущения. Построены некоторые точные частные решения этого уравнения и указаны их приложения к решению ряда задач трансзвуковой аэродинамики.

Рассмотрены задачи динамической устойчивости трубопровода – полого стержня, внутри которого протекает жидкость (газ). На основе построенных функционалов типа Ляпунова сформулированы теоремы устойчивости и получены аналитические условия устойчивости для параметров механической системы.

Рассмотрена математическая модель задачи об изгибных формах пластины-полосы в сверхзвуковом потоке газа с линейной упругой связью на концах. Получены асимптотические решения, для которых построены бифуркационные диаграммы, показывающие зависимость максимального прогиба пластины от скорости потока.

Предложена математическая модель гидродинамического излучателя – вибрационного устройства, предназначенного для интенсификации технологических процессов, например, для приготовления однородных смесей и эмульсий. Работа устройства основана на размещении неоднородной среды, подаваемой в проточный канал, за счет колебаний упругих элементов, расположенных в этом канале. Изучается соответствующая плоская задача аэрогидроупругости о малых колебаниях, возникающих при бесциркуляционном обтекании системы упругих

пластин потенциальным потоком газа (жидкости) в канале с прямолинейными стенками. Получены дифференциальные уравнения, описывающие динамику упругих элементов.

Рассматриваются математические модели механической системы, включающей в себя трубопровод с рабочей средой и датчик, составной частью которого является упругий элемент. Датчик предназначен для определения давления рабочей среды (например, на выходе из камеры сгорания двигателя), закон изменения которого считается заданным. Получены дифференциальные уравнения, описывающие колебания упругого элемента, и на их основе проведен численный эксперимент по исследованию динамики элемента.

Предложена математическая модель крылового профиля с упругими предкрылком (рассекателем) и закрылком (элероном), расположенного в проточном канале и обтекаемого дозвуковым потоком. Приведено решение аэрогидродинамической части соответствующей краевой задачи, основанное на методах теории функций комплексного переменного. Получена связанная система дифференциальных уравнений, описывающих динамику упругих элементов.

Научное электронное издание

ВЕЛЬМИСОВ Петр Александрович  
МАНЖОСОВ Владимир Кузьмич

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
В ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ ВИБРОУДАРНЫХ  
И АЭРОУПРУГИХ СИСТЕМ**

ЭИ № 723. Объем данных 4,24 Мб.

Редактор М. В. Теленкова

Печатное издание

ЛР №020640 от 22.10.97

Подписано в печать 20.12.2014. Формат 60×84/14.

Усл. печ. л. 12,09. Тираж 100 экз. Заказ 489.

Ульяновский государственный технический университет  
432027, г. Ульяновск, ул. Сев. Венец, д. 32  
ИПК «Венец» УлГТУ, 432027, г. Ульяновск, ул. Сев. Венец, д. 32  
Тел.: (8422) 778-113  
E-mail: [venec@ulstu.ru](mailto:venec@ulstu.ru)  
<http://www.venec.ulstu.ru>