

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ЛИПЕЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

А.Н. Цупров

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ДИНАМИКЕ МАШИН

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Липецк
Липецкий государственный технический университет
2014



**КАДРЫ ДЛЯ РЕГИОНА –
МЕТАЛЛУРГИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ ЛГТУ**



**КАФЕДРА
МЕТАЛЛУРГИЧЕСКОГО
ОБОРУДОВАНИЯ**



**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ЛИПЕЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

А.Н. Цупров

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ДИНАМИКЕ МАШИН

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Липецк
Липецкий государственный технический университет
2014

УДК 669.02 (07)
Ц869

Рецензенты:

- Анцупов В.П., д-р техн. наук, проф. кафедры проектирования и эксплуатации металлургических машин и оборудования Магнитогорского государственного технического университета им. Г.И. Носова;
- кафедра «Технологические машины и оборудование» ФГБОУ ВПО «Норильский индустриальный институт», зав. кафедрой доц., канд. техн. наук Пилипенко С.С.

Цупров, А.Н.

Ц869 Сборник задач по динамике машин [Текст]: учеб. пособие / А.Н. Цупров. – Липецк: Изд-во Липецкого государственного технического университета, 2014 – 121 с.

ISBN 978-5-88247-704-1

В учебном пособии проведены краткие теоретические сведения по основным разделам курса «Динамика машин» для направления «Технологические машины и оборудование».

Предложены к решению комплекты задач по основным разделам курса, приведены примеры решения типовых задач.

Предназначено для студентов направления «Технологические машины и оборудование» и профиля «Металлургические машины и оборудование»

Ил. Библиогр.: 6 назв.

Печатается по решению Редакционно-издательского совета ЛГТУ

ISBN 978-5-88247-704-1

©ФГБОУ ВПО «Липецкий государственный
технический университет», 2014
© Цупров А.Н., 2014

Оглавление

Введение.....	4
1. Периодическое движение.....	5
1.1. Общие положения.....	5
1.2. Пример расчета.....	9
1.3. Задачи.....	13
2. Физическая модель машины.....	17
2.1. Общие положения.....	17
2.2. Примеры расчетов.....	23
2.3. Задачи.....	28
3. Уравнения движения.....	42
3.1. Общие положения.....	42
3.2. Примеры расчётов.....	44
3.3. Задачи.....	51
4. Системы с одной степенью свободы.....	60
4.1. Свободные колебания систем с одной степенью свободы	60
4.1.1. Общие положения.....	60
4.1.2. Примеры решения задач.....	65
4.1.3. Задачи.....	71
4.2. Вынужденные колебания систем с одной степенью свободы.....	80
4.2.1. Общие положения.....	80
4.2.2. Гармоническое возмущение.....	80
4.2.2.1. Неуравновешенность вращательного движения...	86
4.2.2.2. Неуравновешенность возвратно-поступательного движения	88
4.2.2.3. Критическая скорость вращающихся валов.....	89
4.2.2.4. Виброизоляция машин.....	92
4.2.2.5. Система на подвижной основе (кинематическое возмущение)	95
4.2.2.6. Периодическое возмущение.....	100
4.2.3. Примеры решения задач.....	100
4.2.4. Задачи.....	108
Библиографический список.....	120

Введение

Профессиональные компетенции студентов по направлению подготовки «Технологические машины и оборудование» в областях проектно-конструкторской, научно-исследовательской и производственно-технологической деятельности предполагает получение знаний и умений для выполнения расчетов и анализа нагрузок на элементы оборудования с учетом характера и параметров технологического нагружения, структуры машины и ее конструктивных параметров как в стационарных, так и в динамических режимах работы оборудования.

Учебное пособие направлено на получение студентами практических умений и навыков анализа динамических процессов в машинах в переходных режимах работы, разработки динамических моделей машин по их конструктивным параметрам, расчетов динамических нагрузок в элементах машины.

Пособие содержит комплекты задач по основным темам курса «Динамика машин», в пособии приведены примеры решения типовых задач, а также необходимые теоретические положения и методические рекомендации. Объектами предлагаемых к решению задач являются, в основном, установки, машины и механизмы, представляющие практический интерес для студентов специальности.

1. Периодическое движение

1.1. Общие положения

Периодическое движение описывается функцией времени t - $X(t)$, такой, которая через равные промежутки времени называемые периодом, повторяет свое значение, т.е.

$$X(t) = X(t + n \cdot T),$$

где T - период, сек;

n - целое число.

Если на интервале времени равном периоду T функция изменяется по закону синуса (или косинуса):

$$X(t) = A \sin(\omega t + \alpha),$$

а параметры A , ω , α - константы, то такое движение называют простым гармоническим движением (рис. 1.1).

Параметры простого гармонического движения:

- A - амплитуда
- $\omega = \frac{2\pi}{T}$ - круговая частота, $\frac{\text{рад}}{\text{сек}}$;
- $f = \frac{1}{T}$ - частота, $\frac{\text{кол.}}{\text{сек}}$ (герц - Гц);
- α - фаза (фазовый угол, угол сдвига фаз), рад.

Время t_ϕ , соответствующее фазовому углу, на рис.1.1. представляет отрезок ОК равный:

$$OK = t_\phi = \frac{\alpha}{\omega}.$$

Если $X(t)$ - перемещение, то:

– скорость $\frac{dX(t)}{dt} = \dot{X}(t) = A\omega \cos \omega t$,

– ускорение $\frac{d^2X(t)}{dt^2} = \ddot{X}(t) = -A\omega^2 \sin \omega t$.

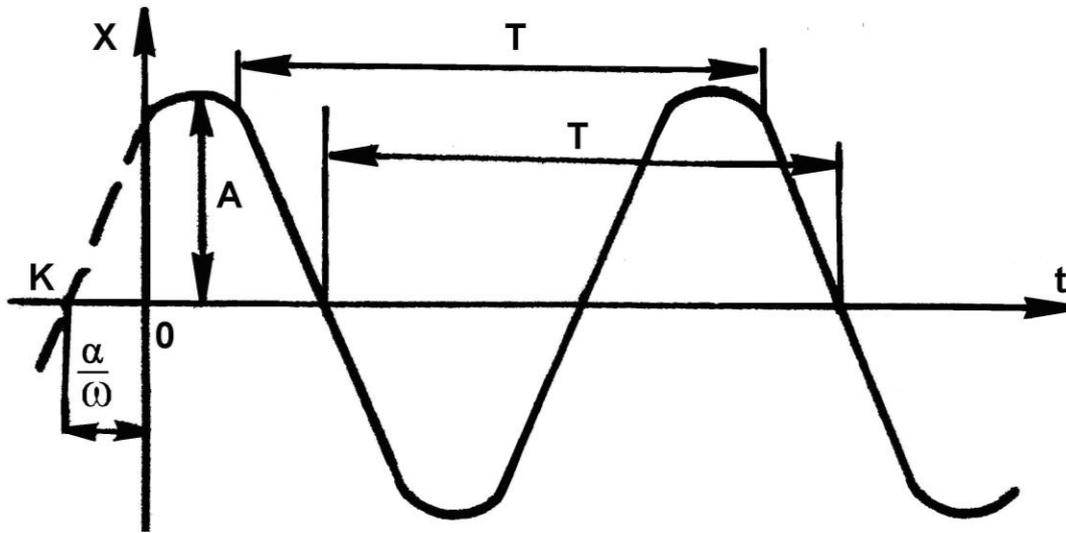


Рис. 1.1. График простого гармонического движения

Сумма синуса и косинуса одного аргумента также простое гармоническое движение:

$$X(t) = A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t = A \sin (\omega t + \alpha),$$

где $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$; $\alpha = \arctg \frac{A_2}{A_1}$.

Сумма двух гармонических движений одинаковой частоты, но с различными фазовыми углами, также простое гармоническое движение:

$$X(t) = A_1 \sin \omega t + A_2 \cos (\omega t + \alpha) =$$

$$= A_1 \sin \omega t + A_2 (\cos \omega t \cos \alpha - \sin \omega t \sin \alpha) = A \cos(\omega t + \beta),$$

где $A = \sqrt{(A_1 + A_2 \cos \alpha)^2 + (A_2 \sin \alpha)^2}$,

$$\beta = \arctg \frac{A_2 \sin \alpha}{A_1 + \cos \alpha}.$$

Сумма двух гармонических движений различной частоты не является гармоническим движением.

В частном случае, когда разница в частотах незначительная, т.е.

$$X(t) = A \cdot \cos(\omega t) + A \cdot \sin(\omega + \varepsilon)t,$$

где $\varepsilon \ll \omega$, результирующее движение представляет собой косинусоидальную функцию с переменной амплитудой, равной $2A \cos \frac{\varepsilon}{2}t$ и частотой, равной $(\omega + \frac{\varepsilon}{2})$, т.е.

$$X(t) = A \cdot \cos \omega t + A \cdot \cos(\omega + \varepsilon)t = 2A \cos\left(\frac{\varepsilon}{2}t\right) \cos\left(\omega + \frac{\varepsilon}{2}\right)t.$$

Считают, что в момент, когда амплитуда достигает максимального значения происходит биение (рис. 1.2). Период биений равен $T_6 = \frac{2\pi}{\varepsilon}$, амплитуда - $A_6 = 2A$.

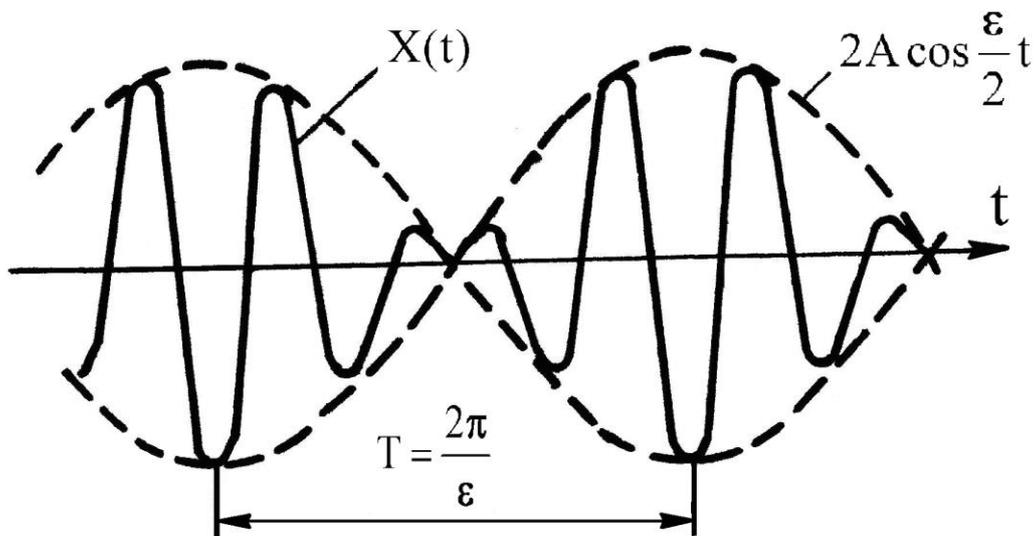


Рис. 1.2. Биение

Другой случай гармонического движения с переменной амплитудой - затухающий гармонический процесс (рис. 1.3), характерный для динамических систем с демпфированием и описываемый функцией вида:

$$X(t) = e^{-at} A \cdot \sin \omega t.$$

Функцию времени $F(t)$, имеющую период T , можно разложить на гармонические составляющие при помощи бесконечного ряда Фурье:

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n \omega t + b_n \sin n \omega t),$$

где n - положительное целое число, $n=1,2,\dots$; номер гармоники;

a_0, a_n, b_n - коэффициент Фурье.

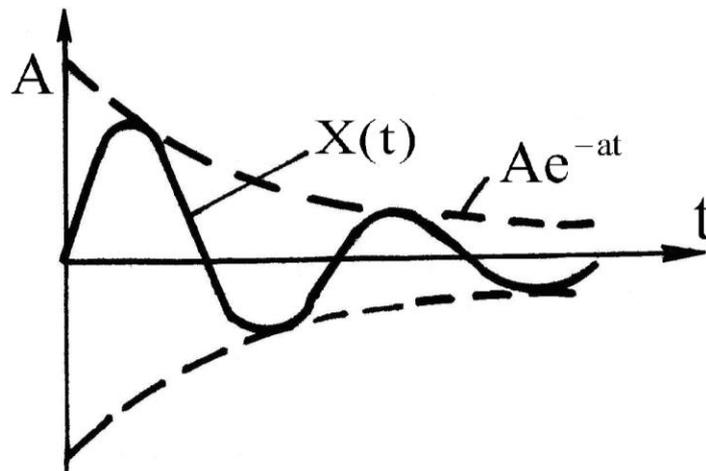


Рис. 1.3. Затухающий гармонический процесс

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) dt;$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cos n \omega t dt;$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \sin n \omega t dt.$$

Сворачивая $a_n \cos n \omega t + b_n \sin n \omega t = A_n \sin(n \omega t + \beta_n)$, ряд Фурье можно записать в виде:

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n \omega t + \beta_n),$$

где

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}; \beta_n = \arctg \frac{a_n}{b_n}.$$

Тогда

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n \omega t + \beta_n).$$

Совокупность коэффициентов $a_n, b_n (n=1,2,\dots)$ разложения периодической функции в ряд Фурье называют частотным спектром этой функции.

Частотные спектры являются функциями номера гармоники:

$$a_n = f(n); b_n = f(n).$$

Частотный спектр удобно представлять графически в виде отрезков длиной a_n, b_n , проведенных перпендикулярно горизонтальной прямой в точках, соответствующих значению n или $\frac{2\pi}{T} n$.

Совокупность величин $A_n = f\left(\frac{2\pi}{T} n\right)$ называют амплитудным частотным спектром.

Совокупность величин $\varphi_n = f\left(\frac{2\pi}{T} n\right)$ называют фазовым частотным спектром.

Совокупность величин $A_n^2 = f\left(\frac{2\pi}{T} n\right)$ называют энергетическим спектром.

На практике количество гармоник в ряду Фурье ограничивают некоторым конечным значением $n < \infty$.

1.2. Пример расчета

Пример.

Периодическую функцию $f(t)$, представленную на рис. 1.4 разложить в ряд Фурье.

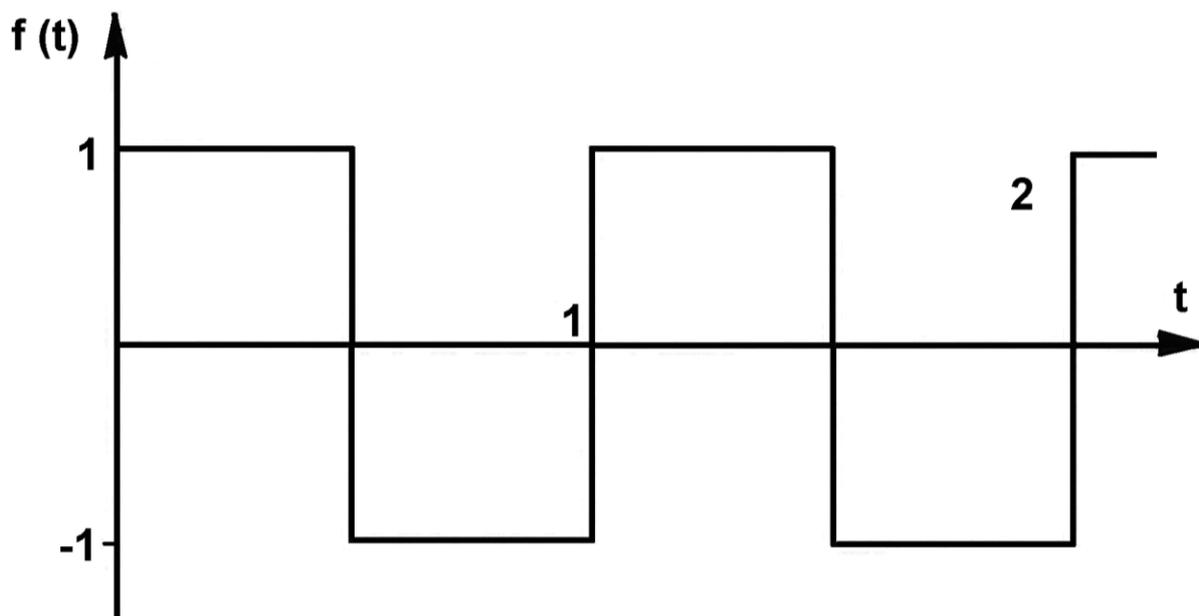


Рис. 1.4. Периодическая функция

Для $n = 4$ построить аппроксимирующую функцию и сравнить с заданной функцией $f(t)$.

Построить частотный, амплитудный, фазовый и энергетический спектры.

Оценить точность аппроксимации.

Решение.

Представленную на рис. 1.4. функцию $f(t)$ можно аналитически записать в виде:

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{при } 0 < t < \frac{T}{2}; \\ -1, & \text{при } \frac{T}{2} < t < T. \end{cases}$$

где $T = 1$ сек.

Коэффициенты ряда Фурье:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{2}{T} \left(\int_0^{T/2} (1) dt + \int_{T/2}^T (-1) dt \right) = 0;$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n \frac{2\pi}{T} t dt = \frac{2}{T} \left(\int_0^{T/2} (1) \cos n \frac{2\pi}{T} t dt + \int_{T/2}^T (-1) \cos n \frac{2\pi}{T} t dt \right) = \\ &= \frac{2}{T} \frac{T}{2\pi n} \left[-\sin n \frac{2\pi}{T} t \Big|_0^{T/2} + \sin n \frac{2\pi}{T} t \Big|_{T/2}^T \right] = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n \frac{2\pi}{T} t dt = \frac{2}{T} \left(\int_0^{T/2} 1 \sin n \frac{2\pi}{T} t dt + \int_{T/2}^T (-1) \sin n \frac{2\pi}{T} t dt \right) = \\ &= \frac{2}{T} \frac{T}{2\pi n} \left[-\cos n \frac{2\pi}{T} t \Big|_0^{T/2} + \cos n \frac{2\pi}{T} t \Big|_{T/2}^T \right]; \end{aligned}$$

$$n = 1; b_1 = \frac{1}{\pi} [-(\cos \pi - \cos 0) + (\cos 2\pi - \cos \pi)] = \frac{4}{\pi} = \frac{4}{\pi};$$

$$n = 2; b_2 = \frac{1}{2\pi} [-(\cos 2\pi - \cos 0) + (\cos 4\pi - \cos 2\pi)] = 0.$$

$$b_n = \begin{cases} \frac{4}{\pi n}, & \text{при } n \text{ нечетном;} \\ 0, & \text{при } n \text{ четном;} \end{cases}$$

$$\text{Фаза } \beta_n = \arctg \frac{a_n}{b_n} = 0;$$

$$F(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{2\pi}{T} nt, \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

$$F(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{2\pi}{T} nt, \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

$$F(t) = \frac{4}{\pi} \sin \omega t + \frac{4}{3\pi} \sin 3\omega t + \frac{4}{5\pi} \sin 5\omega t + \frac{4}{7\pi} \sin 7\omega t + \dots$$

Гармонические составляющие функции для $n = 1, 3, 5, 7$ представлены на рис. 1.5 (а, б, в, г), а на рис. 1.5, д - исходная $f(t)$ и аппроксимирующая функции $F(t)$ для $n = 7$.

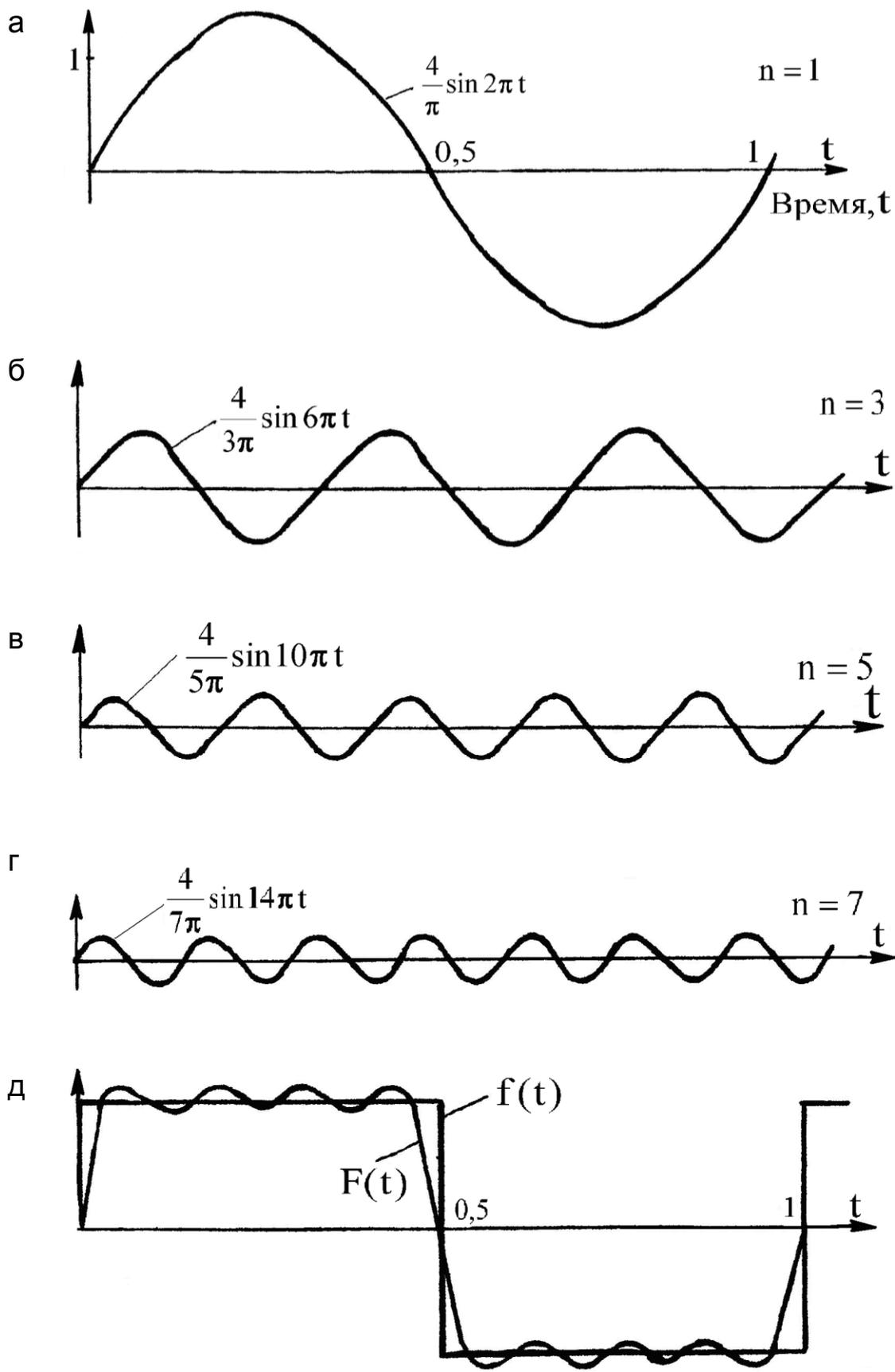


Рис. 1.5. Разложение функции $f(t)$ в ред. Фурье

Частотный спектр ($b_n = f(\omega)$) приведен на рис. 1.6. Для данной функции этот спектр совпадает с амплитудным частотным спектром $A_n = f(\omega)$. Так как $\frac{a_n}{b_n} = 0$, то фазовый спектр отсутствует. Энергетический спектр представлен на рис. 1.6, б.

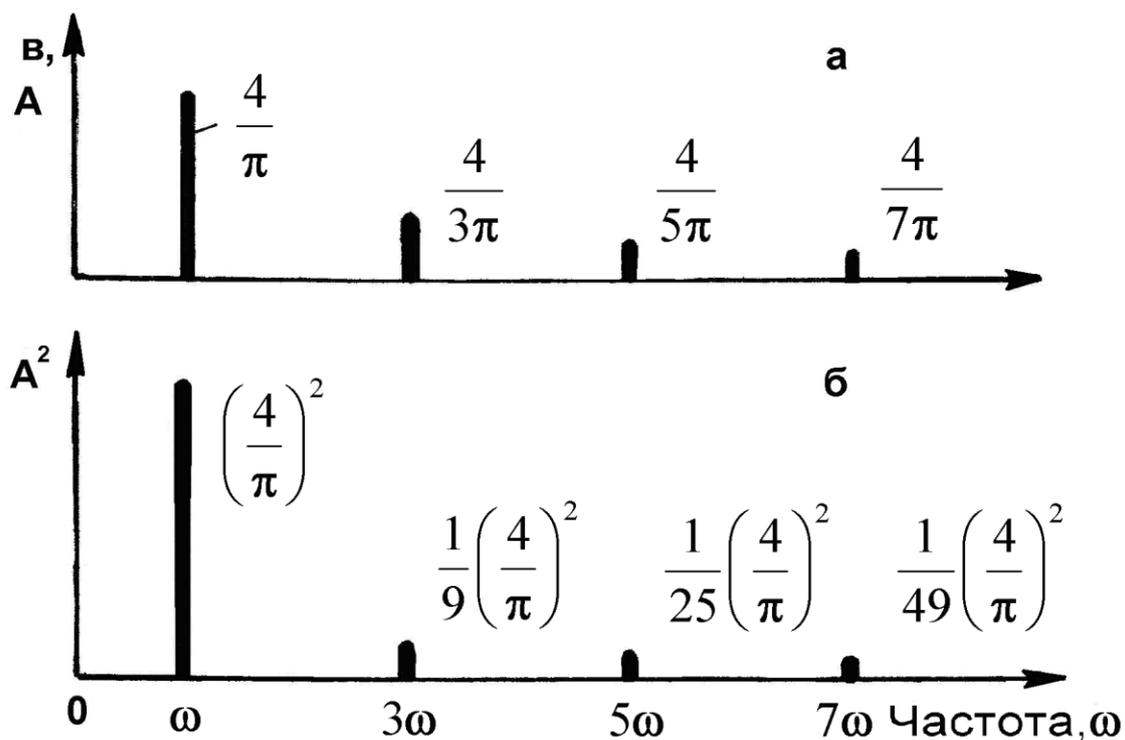


Рис. 1.6. Частотные спектры: а - амплитудный; б - энергетический

1.3. Задачи

Задача 1. Гармоническое движение описывается функцией

$$X(t) = 0,4 \sin\left(10\pi t - \frac{\pi}{6}\right), \text{ где } X - \text{ м, } t - \text{ сек, } \varphi - \text{ рад. Определить:}$$

- а) частоту и период движения;
- б) максимальные перемещения, скорость и ускорение;
- в) параметры движения по п.б при $t = 0$;

г) то же, при $t = 0,1$ сек.

Задача 2. Тело колеблется с частотой с частотой 50 колебаний в секунду. Максимальное ускорение тела 60 м/с^2 . Определить амплитуду колебаний.

Задача 3. Гармоническое движение описывается выражением $X(t) = C \cos(100t + \varphi)$. При $t = 0$ начальное перемещение $X(0) = 0,0025 \text{ м}$, а начальная скорость $X'(0) = 1,25 \text{ м/с}$. Определить:

а) постоянные C и φ ;

б) представить движение в виде $X(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$. Найти постоянные A , B и ω .

Задача 4. Методом алгебраического сложения найти сумму гармонических движений

$$X_1 = 2 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right) \text{ и } X_2 = 3 \sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right). \text{ Построить график } X = X_1 + X_2.$$

Задача 5. Методом алгебраического сложения найти сумму гармонических движений

$$X_1 = 2 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right) \text{ и } X_2 = -3 \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right). \text{ Выразить сумму в виде}$$

$X = A \sin(\omega t + \alpha)$, найти параметры A и α .

Задача 6. Движение описывается выражением $X = 4 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{5}\right)$. Полагая, что движение состоит из двух гармонических составляющих, одна из которых

$X_1 = 2 \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right)$, определить вторую гармоническую составляющую.

Задача 7. Представить графически движение $X(t) = 5 \sin 2\pi t + 3 \sin 4\pi t$ на интервале времени $0 < t < 2$ с.

Задача 8. Найти сумму гармонических движений $X_1 = 5 \cos 50t$ и $X_2 = 5 \cos(50+1)t$, определить амплитуду и частоту биений.

Задача 9. Для $t = 0; 1; 2$ сек. вычислить значения функций:

а) $X(t) = 5 \sin(6,28t + \frac{\pi}{6})$;

б) $X(t) = 2t \cos(12,56t + \frac{\pi}{2})$;

в) $X(t) = 2 \cdot e^{-t} \sin(3,14t + \frac{\pi}{4})$;

г) $X(t) = 2e^{-2t} \sin(3,14t + \frac{\pi}{4})$.

Формулы для справок:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta;$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta;$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta - \alpha}{2}.$$

Задача 10. Разложить в ряду Фурье функции, представленные на рис. 1.7 (а-з).

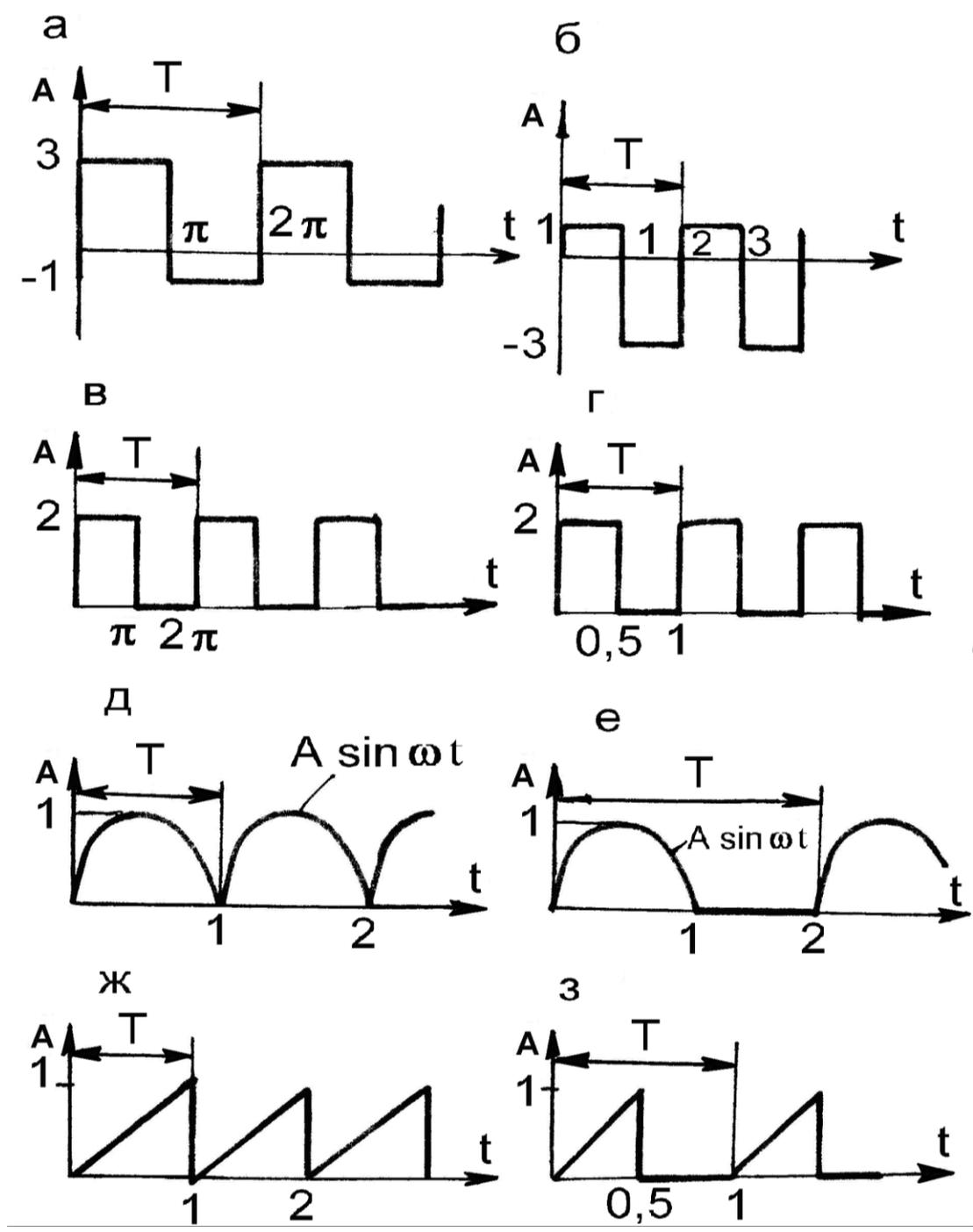


Рис. 1.7. К задаче 10.

Изобразить графически аппроксимирующую функцию, ограничившись тремя первыми значимыми гармониками.

Построить энергетический спектр функции.

2. Физическая модель машины

2.1. Общие положения

В общем случае модель - это идеализированное отображение рассматриваемой системы, используемое при ее теоретическом исследовании и в инженерных расчетах.

При разработке динамической модели анализируют возможные перемещения (деформации) и определяют наиболее существенные, пренебрегая несущественными.

Для машин колебательное движение накладывается на основное движение и может рассматриваться как малое.

При строгом рассмотрении любой детали машины инерционные, упругие и диссипативные свойства распределены по всему её объему, для описания которых используются уравнения в частных производных. Такие системы обладают бесконечно большим числом степеней свободы и неограниченным спектром собственных частот. Поэтому одним из основных приемов идеализации при разработке динамической модели является ограничение её степеней свободы некоторым конечным числом. При этом полагают:

- 1) инерционные свойства элемента системы отображаются массами (или моментами инерции масс), которые сосредоточены в определённых точках или сечениях (центрах масс);
- 2) эти точки (или сечения) соединены безинерционными упруго-диссипативными кинематическими связями.

Практически, в механизме или его приводе выделяются наиболее массивные и наиболее податливые элементы кинематической цепи. Инерционные и упругие свойства остальных (отброшенных) элементов системы учитываются приведением их значений к оставленным в

рассмотрении. При этом исходят из условия неизменности кинетической и потенциальной энергии колебаний системы.

Таким образом, динамическая модель машины - это упрощенная структура, которая показывает распределение масс и упругость звеньев.

Параметры динамической модели (инерционные и упругие) вычисляются по рабочим чертежам деталей, входящих в кинематическую цепь машины. Конфигурации сложных деталей упрощаются, представляются простыми геометрическими фигурами (цилиндрами, параллелепипедами и т.п.)

Инерционными параметрами являются масса или момент инерции массы.

Расчет массы тела m сводится к расчету его объема V и умножению его на плотность ρ материала:

$$m = \rho V .$$

Момент инерции массы J определяется распределением массы относительно оси вращения. Для стандартных элементов машин (ротор двигателя, муфта, тормозной шкив) значения моментов инерции (или маховые моменты GD^2) приводятся в справочной литературе. Момент инерции I ($\text{кг}\cdot\text{м}^2$) и маховый момент GD^2 ($\text{кг}\cdot\text{м}^2$) связаны соотношением:

$$I = 0,25 GD^2 .$$

Момент инерции сплошного цилиндра:

$$I = \rho \frac{\pi}{32} D^4 \ell , \text{ кг}\cdot\text{м}^2 ,$$

где ρ - плотность, $\text{кг}\cdot\text{м}^3$,

D - наружный диаметр, м;

ℓ - длина, м.

Момент инерции полого цилиндра с отверстием диаметра d :

$$I = \rho \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4) \cdot \ell .$$

Для наиболее распространенных деталей момент инерции можно вычислить по выражению:

$$I = K m R^2,$$

где m - масса детали, кг;

R - наружный радиус, м;

K - коэффициент:

$K = 0,6$ - для тормозного шкива;

$K = 0,64$ - для зубчатых колес;

$K = 0,7$ - для барабанов;

$K = 0,44$ - для муфт.

Упругие свойства деталей оценивают коэффициентами жесткости (или податливости) для соответствующего вида деформации.

Коэффициент жесткости (или жесткость) k характеризует нагрузку, необходимую для единичной деформации.

Для линейных деформаций

$$k = \frac{F}{\Delta l}, \frac{H}{m},$$

где F - сила, Н;

Δl - деформация, м;

для угловых деформаций:

$$k = \frac{M}{\Delta \varphi}, \text{ Нм},$$

где M - крутящий момент, Нм;

$\Delta \varphi$ - угловая деформация, рад.

Коэффициент податливости e (податливость) характеризует величину деформации от единичной силы и является величиной, обратной жесткости:

$$e = \frac{1}{k}.$$

При растяжении - сжатии:

$$k_p = \frac{ES}{\ell},$$

где E - модуль упругости материала, Па;

S - площадь поперечного сечения, m^2 ;

ℓ - длина, м.

Жесткость при кручении $k_{кр}$:

$$k_{кр} = \frac{GI_p}{\ell}, \text{ Нм,}$$

где G - модуль сдвига, Па, $G=0,4 E$;

I_p - полярный момент инерции площади поперечного сечения, m^4 ;

ℓ - длина участка деформации, м.

При кручении круглого сплошного вала:

$$k_{кр} = \frac{G \frac{\pi}{32} D^4}{\ell}$$

где d - диаметр вала, м;

Для полого вала:

$$k_{кр} = \frac{\pi}{32} G \frac{D^4 - d_0^4}{\ell},$$

где d_0 - диаметр отверстия, м;

Линейная жесткость пружины:

$$k_{л} = \frac{Gd^4}{8D^3 \cdot z},$$

где d - диаметр сечения проволоки, м;

D - средний диаметр пружины, м;

z - количество рабочих витков.

При определении линейной поперечной (изгибной) жесткости балок, рам и т.д. возникает необходимость определения деформаций для каждого конкретного случая нагружения. При этом прогиб (деформация) определяется от единичной силы, приложенной в расчетной точке. Для линейных эпюр

изгибающих моментов по методу Верещагина прогиб δ_1 от единичной силы определяется из выражения:

$$\delta_1 = \frac{1}{E \cdot I_x} \sum_1^n S_i \cdot Y_i,$$

где E - модуль упругости материала, Па;

I_x - момент инерции площади поперечного сечения балки, м⁴;

S_i - площадь i -того линейного участка эпюры изгибающих моментов от единичной силы;

Y_i - ордината, проходящая через центр тяжести линейного участка эпюры.

Полученное значение δ_1 представляет собой податливость балки в точке приложения единичной нагрузки:

$$e = \delta_1;$$

жесткость

$$k = \frac{1}{e} = \frac{1}{\delta_1}.$$

Если в исходной динамической модели инерционный элемент связан с соседними не одной, а несколькими упругими связями, то он может быть представлен одним упругим элементом с эквивалентной жесткостью (податливостью). При этом при параллельном соединении эквивалентная жесткость равна сумме жесткостей, т.е.:

$$k_3 = \sum_1^n k_i,$$

а при последовательном соединении - эквивалентная податливость равна сумме податливостей:

$$e_3 = \sum e_i.$$

Для разветвленных исходных динамических моделей, содержащих участки с различными скоростями, применяют процедуру приведения модели к виду, при котором все массы имеют одинаковые скорости. При этом значения

инерционных и упругих параметров изменяются. Параметры приведенных моделей определяются исходя из равенства кинетической и потенциальной энергии системы до и после приведения. При приведении к меньшей скорости моменты инерции и жесткости соответствующих участков увеличиваются в квадрат передаточного числа раз.

Полученная представлением реальных деталей машины их динамическими эквивалентами исходная динамическая модель машины содержит достаточно большое число масс, что затрудняет последующие анализ и расчеты. Поэтому число рассматриваемых масс стремятся уменьшить до минимально возможного числа (одной, двух). Другими словами, выполняют упрощение исходной модели.

При этом упрощение модели осуществляется следующим образом.

1. Сравнением величин масс (моментов инерции) элементов модели и исключением масс (моментов инерции) значения которых на порядок меньше.

2. Сравнением значений жесткостей связей между массами системы и объединение масс, связанных жесткостью, на порядок большей минимальной, в одну суммарную массу и исключением из модели участка повышенной жесткости.

3. Исключением промежуточных инерционных элементов системы со значимыми значениями массы (момента инерции) с добавлением по одной третьей части значения инерционного параметра к соседним элементам.

4. Представлением конечного элемента системы (электродвигатель, фундамент, станина и т.п.) неподвижным или имеющим постоянную скорость элементом - заделкой.

2.2. Примеры расчетов

Пример 1. Определить изгибную жесткость балки, представленной на рис. 2.1, а в сечениях 1-1 и 2-2. Момент инерции площади поперечного сечения балки $J_x = 2 \text{ см}^4$.

Решение

Прикладываем в сечении 1-1 единичную силу (рис. 2.1, б), находим реакции в опорах ($R_A=0,4 \text{ Н}$, $R_B=0,6 \text{ Н}$) и строим эпюру изгибающих моментов от нагрузки M_p (она же - от единичной силы M_1) - рис. 2.16.

Прогиб балки в сечении 1-1 - δ_1 равен:

$$\delta_1 = \frac{1}{EI_x} \sum_1^2 S_i Y_i = \frac{1}{I_x E} (S_1 Y_1 + S_2 Y_2).$$

Площади S_1 и S_2 равны:

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot 0,6 \cdot 0,24 = 0,072; S_2 = \frac{1}{2} \cdot 0,4 \cdot 0,24 = 0,048.$$

Из подобия треугольников ординаты Y_1 и Y_2 , проходящие через их центры тяжести:

$$Y_1 = Y_2 = \frac{2}{3} \cdot 0,24 = 0,16$$

$$\delta_1 = \frac{1}{2,1 \cdot 10^{11} \cdot 2 \cdot 10^{-8}} (0,16(0,072 + 0,048)) = 0,0045 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

Податливость балки в сечении 1-1:

$$e_1 = \frac{\delta_1}{1} = 4,5 \cdot 10^{-6} \frac{\text{м}}{\text{Н}}.$$

Жесткость балки в сечении 1-1:

$$k_1 = \frac{1}{e_1} = \frac{1}{4,5} \cdot 10^6 = 0,22 \cdot 10^6 \frac{\text{Н}}{\text{м}}.$$

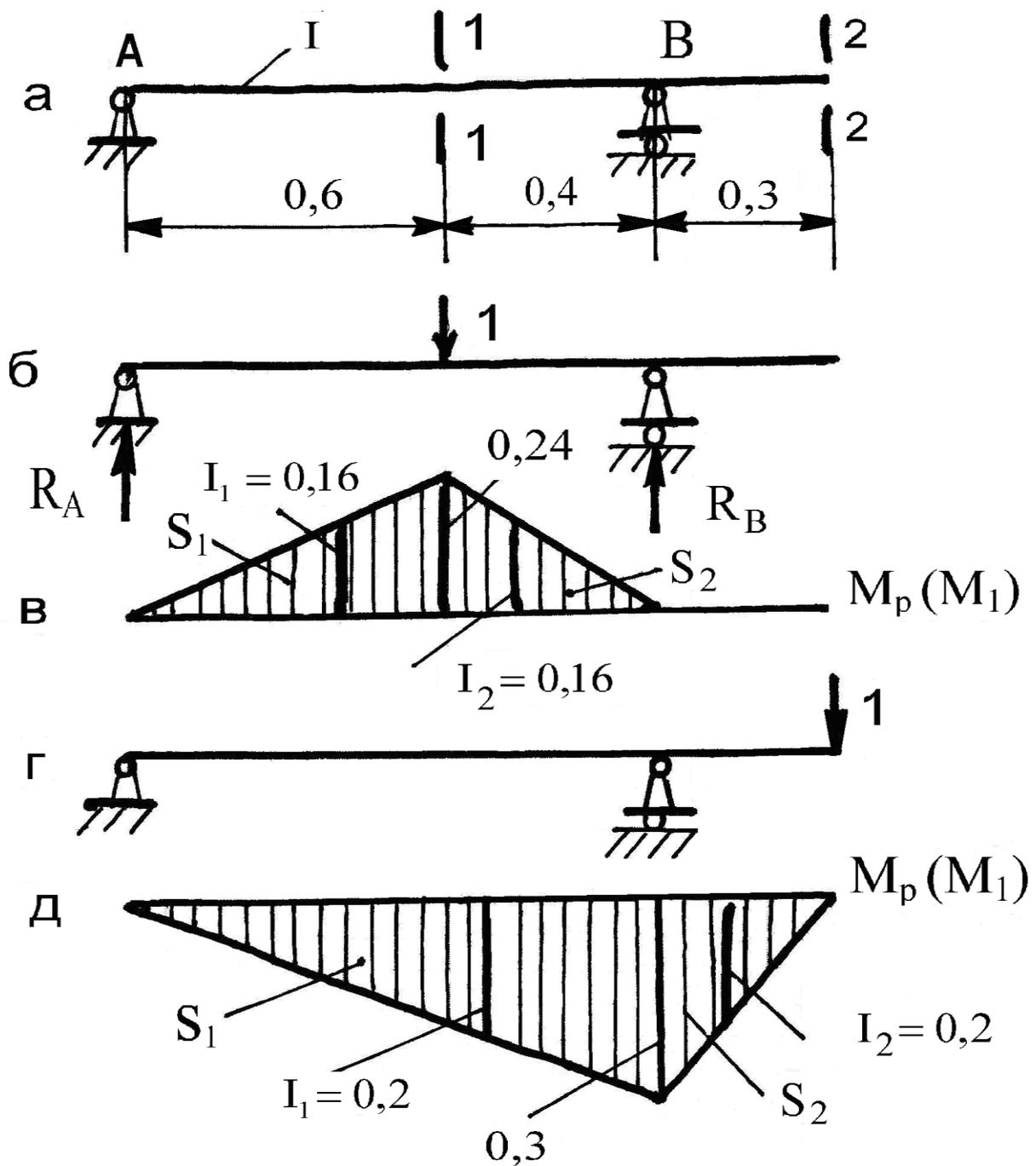


Рис. 2.1. К примеру 1

Аналогично, для сечения 2-2 (рис. 2.1, з, д):

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 0,3 = 0,15; \quad S_2 = \frac{1}{2} \cdot 0,3 \cdot 0,3 = 0,045;$$

$$y_1 = y_2 = \frac{2}{3} \cdot 0,3 = 0,2;$$

$$\delta_2 = \frac{1}{2,1 \cdot 10^{11} \cdot 2 \cdot 10^{-8}} \cdot (0,2(0,15 + 0,045)) = 0,039 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

$$e_2 = \frac{\delta_2}{1} = 3,9 \cdot 10^{-5} \text{ м/н; } k_2 = \frac{1}{e_2} = 0,25 \cdot 10^5 \frac{\text{Н}}{\text{м}}.$$

Пример 2. Разработать динамическую модель привода вращения барабана, схематично изображенную на рис. 2.2, а. Упростить модель до одномассовой. Передаточное число редуктора $i = 30$.

Решение

Инерционные свойства во вращательном движении характеризуются значениями моментов инерции масс деталей J .

В кинематическую цепь машины входят 6 деталей: барабан 1, тихоходный вал 2, тихоходное колесо 3, быстроходная шестерня 4, быстроходный вал 5 и электродвигатель 6.

Значения моментов инерции масс деталей:

1. Барабан - полый цилиндр:

$$I_1 = \rho \frac{\pi}{32} \ell (D^4 - d^4) = 7800 \frac{3,14}{32} 1 (0,6^2 - 0,5^2) = 86 \text{ кг м}^2.$$

2. Тихоходный вал

$$I_2 = \rho \frac{\pi}{32} \ell d^4 = 7800 \frac{3,14}{32} \cdot 1 \cdot 0,08^4 = 0,032 \text{ кг м}^2$$

3. Тихоходное зубчатое колесо:

$$I_3 = \rho \frac{\pi}{32} \ell d^4 = 7800 \frac{3,14}{32} \cdot 0,1 \cdot 0,3^4 = 0,63 \text{ кг м}^2$$

4. Быстроходная шестерня

$$I_4 = \rho \frac{\pi}{32} \ell d^4 = 7800 \frac{3,14}{32} 0,1 \cdot 0,1^4 = 0,0078 \text{ кг м}^2$$

5. Быстроходный вал

$$I_5 = \rho \frac{\pi}{32} \ell d^4 = 7800 \frac{3,14}{32} 0,2 \cdot 0,021^4 = 2,5 \cdot 10^{-5} \text{ кг м}^2$$

6. Электродвигатель

$$I_6 = 0,25GD^2 = 0,25 \cdot 1,14 = 0,35 \text{ кг м}^2.$$

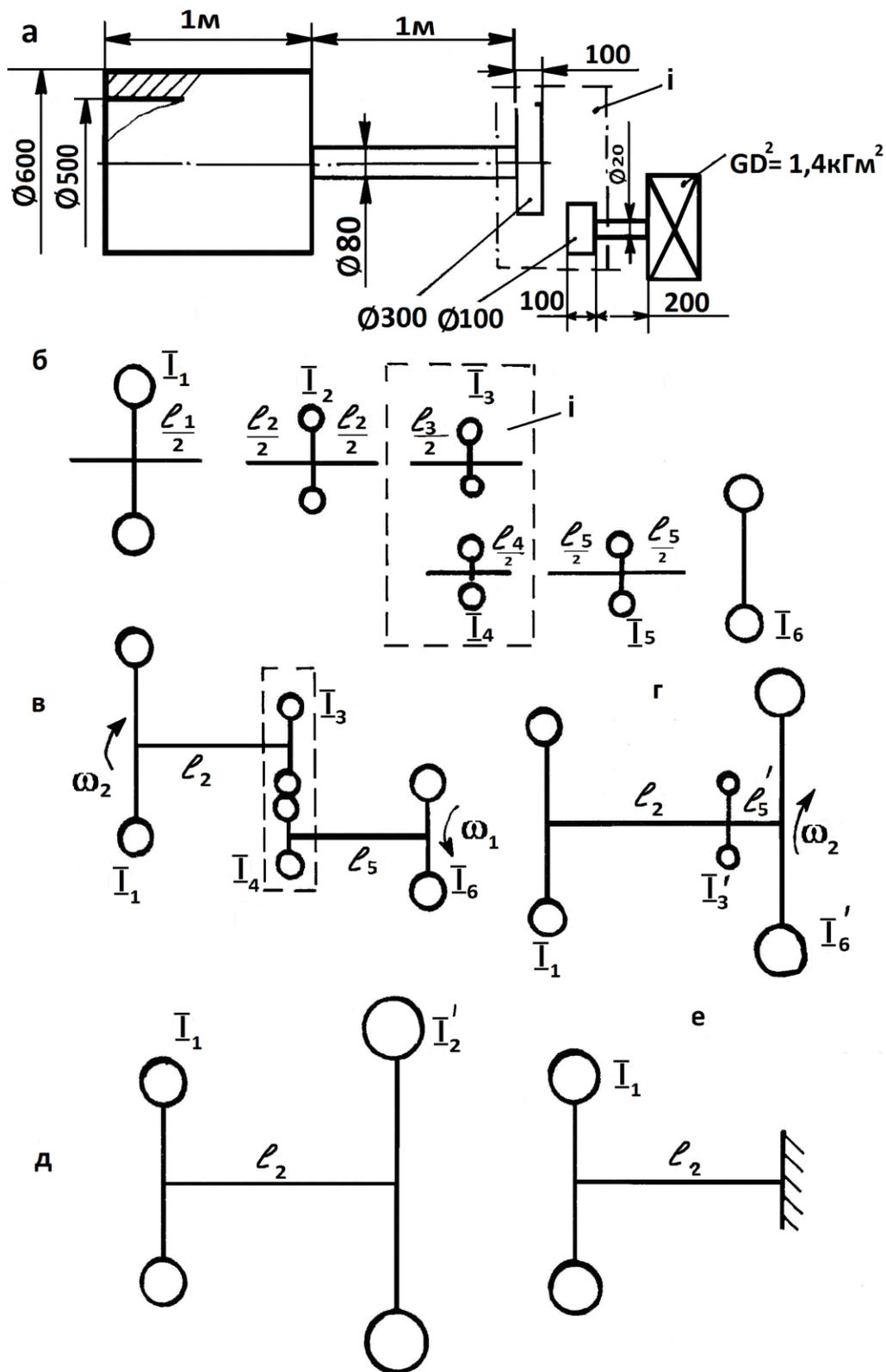


Рис. 2.2. К примеру 2

Упругие свойства элементов системы характеризуются значениями податливостей e (жесткостей K) при кручении.

1. Полный барабан

$$e_1 = \frac{1}{G \frac{\pi}{32} (d^4 - d_0^4)} = \frac{1}{\frac{3,14}{3,2} \cdot 0,4 \cdot 2,1 \cdot 10^{11} (0,6^4 - 0,5^4)} = 1,8 \cdot 10^{-9} \frac{1}{\text{Нм}}.$$

2. Тихоходный вал

$$e_2 = \frac{1}{\frac{\pi}{32} G d^4} = \frac{1}{\frac{3,14}{3,2} \cdot 0,84 \cdot 10^{11} (8 \cdot 10^{-2})^4} = 2,9 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{Нм}};$$

3. Тихоходное зубчатое колесо

$$e_3 = \frac{1}{\frac{\pi}{32} G d^4} = \frac{0,1}{\frac{3,14}{3,2} \cdot 0,84 \cdot 10^{11} 0,3^4} = 1,47 \cdot 10^{-9} \frac{1}{\text{Нм}};$$

4. Быстроходная шестерня

$$e_4 = \frac{1}{\frac{\pi}{32} G d^4} = \frac{0,1}{\frac{3,14}{3,2} \cdot 0,84 \cdot 10^{11} (0,1)^4} = 0,12 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{Нм}};$$

5. Быстроходный вал

$$e_5 = \frac{1}{\frac{\pi}{32} G d^4} = \frac{0,2}{\frac{3,14}{3,2} \cdot 0,84 \cdot 10^{11} (2 \cdot 10^{-2})^4} = 1,48 \cdot 10^{-4} \frac{1}{\text{Нм}}.$$

Динамические эквиваленты элементов перевода барабана представлены на рис. 2.2, б.

Сравнивая значения моментов инерции элементов быстроходного вала, исключаем из модели момент инерции вала J_2 . На быстроходной ступени исключаем момент инерции вала J_5 .

Сравнивая значение податливостями барабана и зубчатого колеса, а на быстроходном валу - податливостью шестерни, в результате получаем

исходную разветвленную модель привода барабана, представленную на рис. 2.2, б.

Для дальнейшего анализа приведем все детали к одной угловой скорости, например, к тихоходному валу. Приведенная динамическая модель представлена на рис. 2.2, г.

При приведении к тихоходному валу значения моментов инерции элементов быстроходного вала увеличиваются в квадрат передаточного числа раз, а значения податливостей - уменьшаются в это же число раз.

Тогда:

$$I_3' = I_3 + I_4 i^2 = 0,63 + 0,0078 \cdot 30^2 = 7,02 \text{ кг} \cdot \text{м}^2;$$

$$I_6' = I_6 i^2 = 0,35 \cdot 30^2 = 315 \text{ кг} \cdot \text{м}^2;$$

$$e_5' = \frac{e_5}{i^2} = \frac{1,48 \cdot 10^{-4}}{30^2} 1,6 \cdot 10^{-7} \frac{1}{\text{Нм}}.$$

Малая податливость e_5' позволяет объединить моменты инерции I_3' и I_6' в один (рис. 2.2, д):

$$I_2' = I_3' + I_6' = 7,02 + 315 = 322,02 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Сравнивая значения моментов инерции I_1 и I_2' , момент инерции I_2' можно считать заделкой. Полученная одномассовая динамическая модель привода барабана представлена на рис. 2.2, е.

2.3. Задачи

Задача 1. Масса $m=200\text{кг}$ установлена на стальной ступенчатой колонне (рис. 2.3).

Разработать одномассовую динамическую модель вертикальных перемещений массы m . Массу m считать точечной.

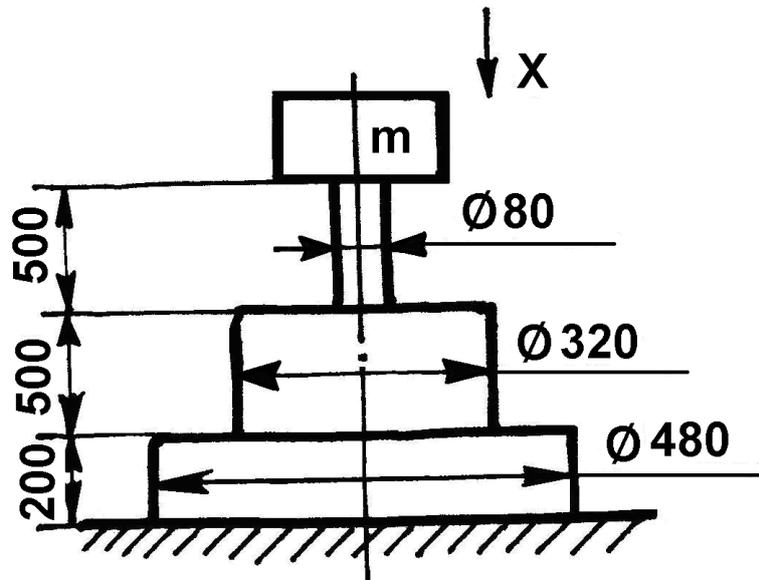


Рис. 2.3. Схема к задаче 1

Задача 2. Масса $m=100$ кг установлена на штоке гидравлического цилиндра двухстороннего действия (рис. 2.4, а). В обеих полостях гидроцилиндра находится минеральное масло под избыточным давлением, а полости заперты. Разработать одномассовую динамическую модель вертикальных колебаний массы m . Коэффициент объемного сжатия масла $\beta_v = 0,7 \cdot 10^{-10} / \text{Па}$. Деформацией цилиндра пренебречь.

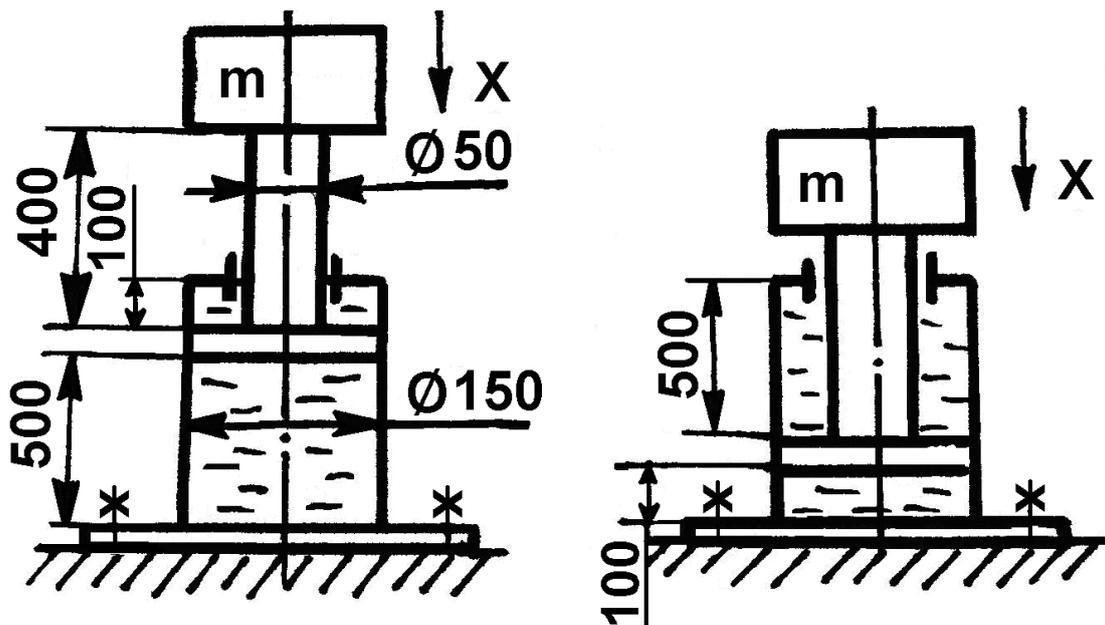


Рис. 2.4. К задаче 2

Задача 3. Разработать одномассовую динамическую модель вертикальных колебаний массы $m=100$ кг установки, представленной на рис. 2.5. Объемный модуль упругости рабочей жидкости гидроцилиндра $E = 1,3 \cdot 10^9$ Па.

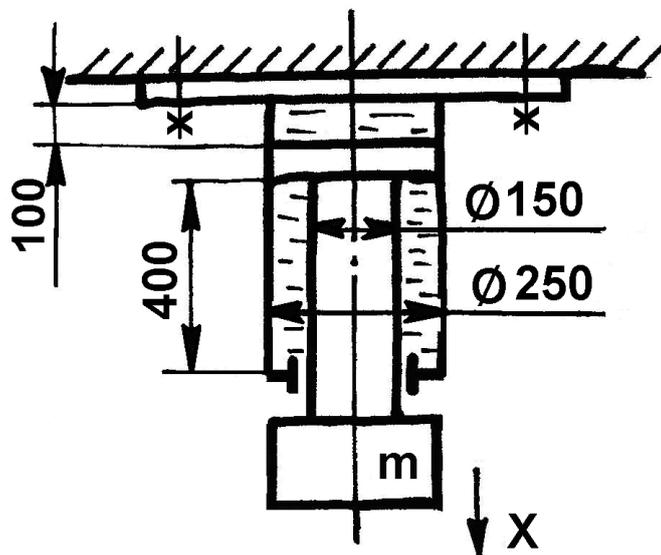


Рис. 2.5. К задаче 3.

Задача 4. Разработать динамическую модель крутильных колебаний ступенчатого стального вала, заделанного одним концом, с размерами, представленными на рис. 2.6,а.

Как изменятся параметры динамической модели, если защементировать и второй конец вала (рис. 2.6, б)?

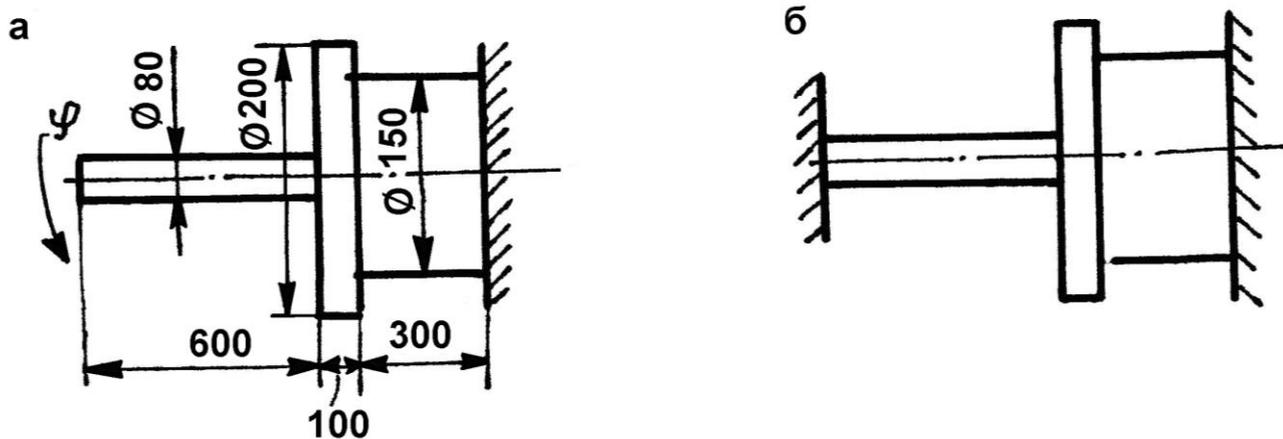


Рис. 2.6. К задаче 4.

Задача 5. Масса $m=100$ кг закреплена стержнями длиной $\ell=1$ м и линейной жесткостью $k=10^6$ Н/м (рис. 2.7). Разработать динамическую модель вертикальных колебаний массы.

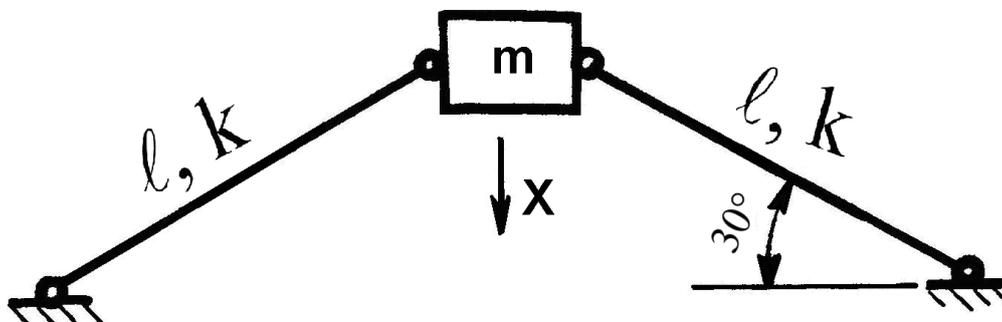


Рис. 2.7. К задаче 5

Задача 6. А. На свободном конце консольной балки длиной $\ell=1$ м и осевым моментом инерции площади поперечного сечения $I_x=100$ см⁴ установлена масса $m=100$ кг (рис. 2.8). Разработать динамическую модель вертикальных колебаний массы. Массой балки пренебречь.

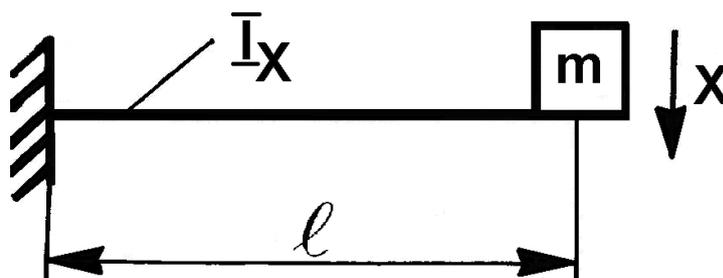


Рис. 2.8. К задаче 6. В

В. Как изменятся параметры динамической модели, если под свободный конец балки установить упругий элемент с линейной жесткостью $k=10^6$ Н/м (рис. 2.9)?

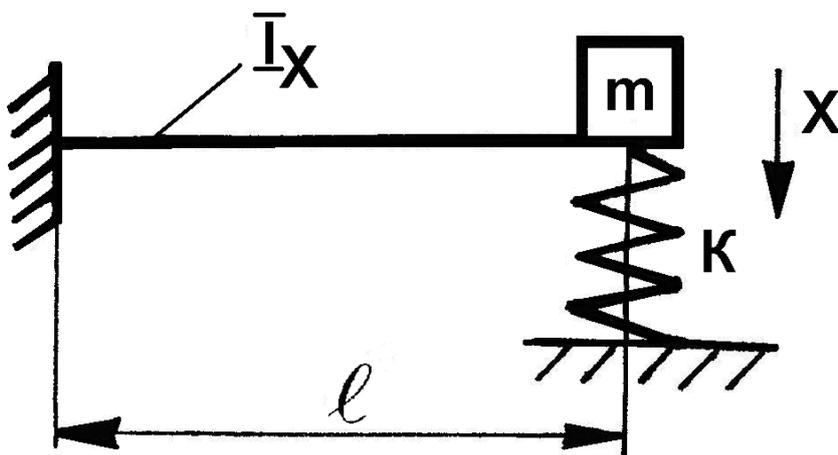


Рис. 2.9. К задаче 6. В

С. Как изменятся параметры динамической модели, если между массой и балкой установить упругий элемент с жесткостью $k = 10^6$ Н/м (рис. 2.10)?

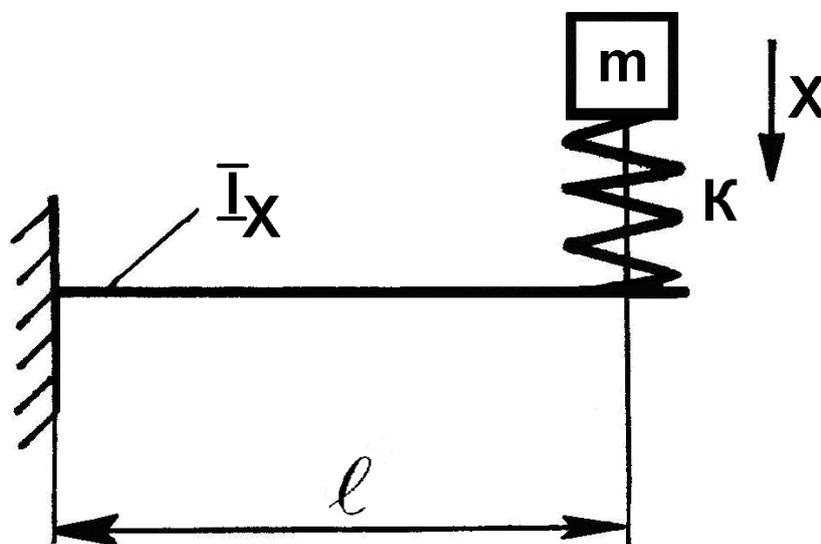


Рис. 2.10. К задаче 6. С

Д. Как изменятся параметры динамической модели, если между массой и балкой установить батарею упругих элементов (рис. 2.11)? Жесткости $k = k_1 = 10^6$ Н/м.

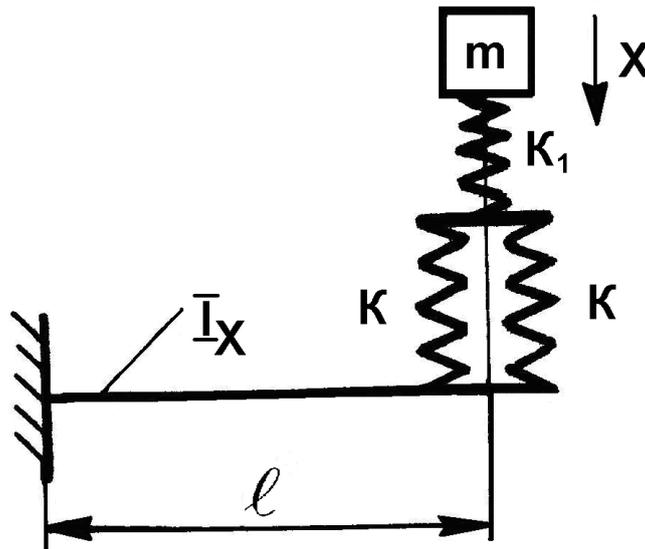


Рис. 2.11. К задаче 6. D

Задача 7. Масса $m = 100$ кг установлена в середине пролета однопролетной балки длиной $\ell = 1$ м и моментом инерции площади поперечного сечения $I_x = 100$ см⁴ (рис. 2.12). Разработать динамическую модель вертикальных колебаний массы. Как изменятся параметры динамической модели, если масса m установлена на расстоянии $\frac{2}{3}\ell$ от левой опоры?

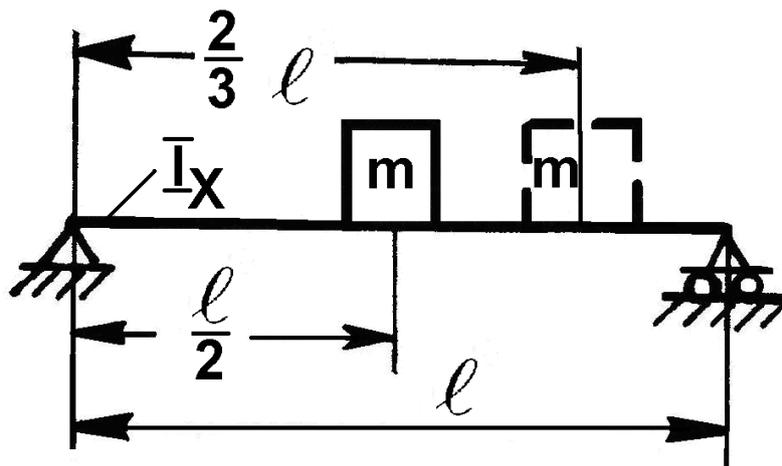


Рис. 2.12. К задаче 7

Задача 8. На консольном конце однопролетной балки длиной $\ell = 1$ м и моментом инерции площади поперечного сечения $I_x = 100$ см⁴ установлена

масса $m = 100$ кг (рис. 2.13). Разработать динамическую модель вертикальных колебаний массы. Массой балки пренебречь.

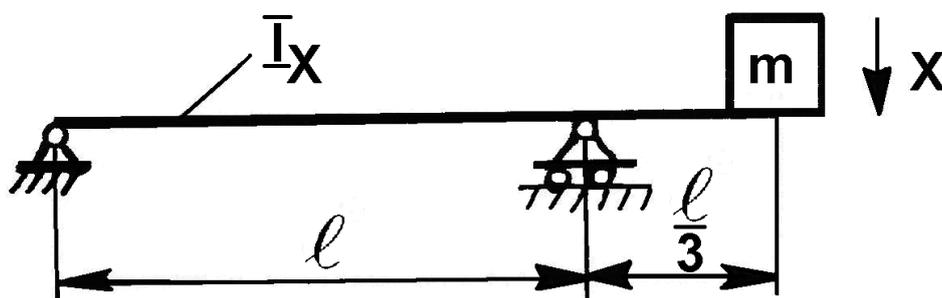


Рис. 2.13. К задаче 8

Задача 9. На платформе, один конец которой шарнирно закреплен, а второй опирается на упругий элемент с линейной жесткостью $k = 10^6$ Н/м, на расстоянии $l = 1$ м от шарнира установлена масса $m = 100$ кг (рис. 2.14). Разработать динамическую модель вертикальных колебаний массы m . Массой платформы пренебречь.

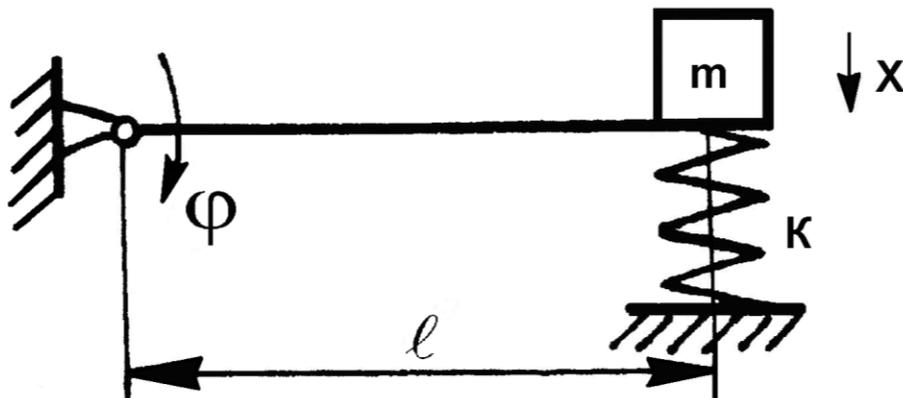


Рис. 2.14. К задаче 9

Задача 10. На платформе, один конец которой шарнирно закреплен, а второй опирается на упругий элемент с линейной жесткостью $k = 10^6$ Н/м, на расстоянии $l_1 = 0,5$ м установлена масса $m = 100$ кг (рис. 2.15). Разработать динамическую модель вертикальных колебаний массы. Массой и деформацией платформы пренебречь.

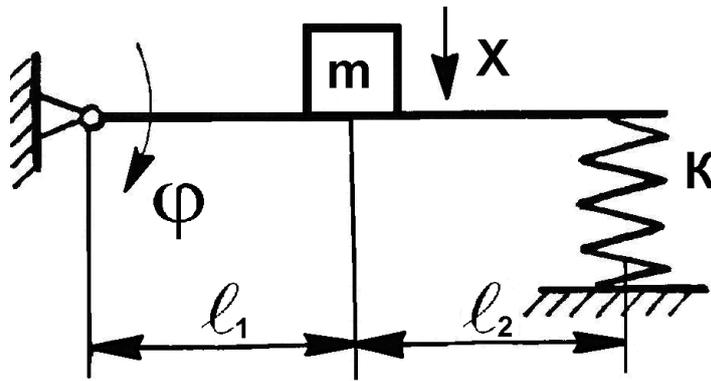


Рис. 2.15. К задаче 10

Задача 11. Платформа, один конец которой шарнирно закреплен, а на другом установлена масса $m = 100$ кг, опирается на упругий элемент с линейной жесткостью $k = 10^6$ Н/м (рис. 2.16). Расстояние от шарнира до упругого элемента $l_1 = 0,5$ м, от упругого элемента до массы $l_2 = 0,3$ м. Разработать динамическую модель вертикальных колебаний массы. Массой и деформацией платформы пренебречь.

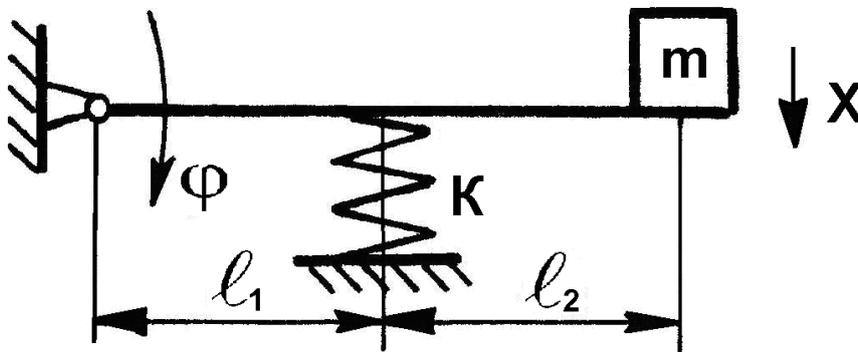


Рис. 2.16. К задаче 11

Задача 12. На платформе, шарнирно закрепленной одним концом и опирающейся на два упругих элемента с линейными жесткостями $k_1 = 10^6$ Н/м и $k_3 = 10^5$ Н/м, установлена масса $m = 100$ кг. Между массой и платформой установлен упругий элемент с линейной жесткостью $k_2 = 10^4$ Н/м. Расстояние между упругими элементами $l_1 = 0,3$ м, $l_2 = 0,5$ м, $l_3 = 0,2$ м (рис. 2.17).

Разработать динамическую модель вертикальных колебаний массы m .

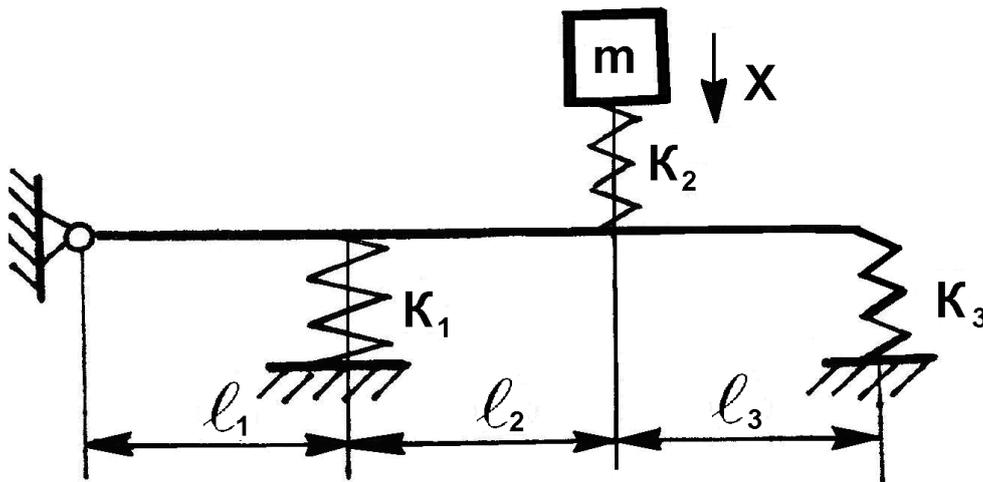


Рис. 2.17. К задаче 12

Задача 13. Для условий задач 9 - 11 разработать динамические модели угловых колебаний массы m .

Задача 14. Груз массой $m = 100$ кг прикреплен к тросу диаметром $d = 1$ см, переброшенному через шкив диаметром $D = 400$ мм. Второй конец троса жестко закреплен. Длины троса $l_1 = 5$ м, $l_2 = 8$ м. момент инерции шкива $I = 1$ кг м² (рис. 2.18). Разработать динамическую модель вертикальных колебаний массы m .

Как изменятся параметры модели, если:

а) $D = 800$ мм; $l_1 = 1$ м, $l_2 = 12$ м;

б) $D = 200$ мм; $l_1 = 12$ м, $l_2 = 1$ м.

Задача 15. Для условий задачи 2.3.14 разработать динамическую модель вращательного движения системы (координата - угол поворота φ).

Задача 16. Для механической системы, представленной на рис. 2.19 разработать динамическую модель вертикальных колебаний массы m . Параметры системы: $m = 100$ кг; $l_1 = 0,3$ м, $l_2 = 4$ м; $R = 0,3$ м; $r = 0,1$ м; $m = 10$ кг.

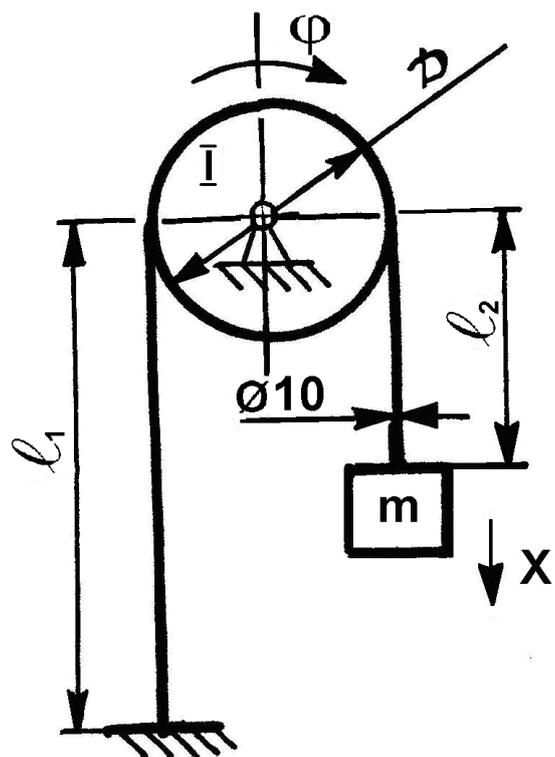


Рис. 2.18. К задаче 14

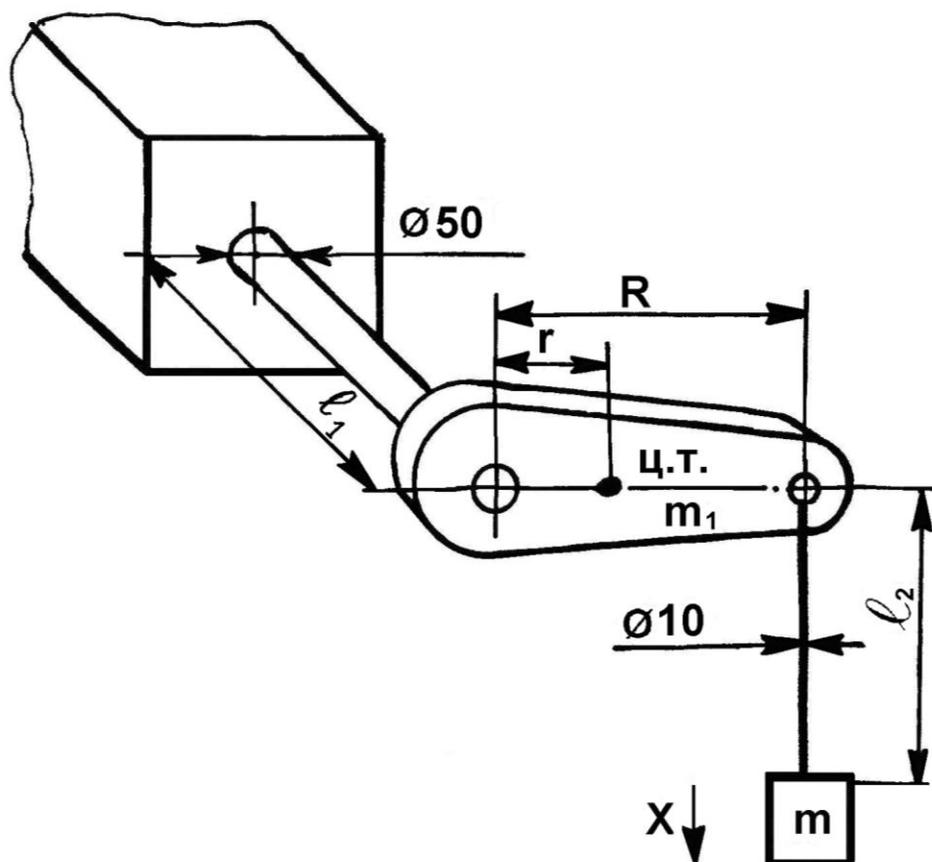


Рис. 2.19. К задаче 16

Задача 17. Для условий задачи 16 разработать динамическую модель вращательного движения системы.

Задача 18. Для механизма привода лебедки грузоподъемного устройства (рис. 2.20) разработать динамическую модель вертикальных колебаний груза $m=100$ кг. Параметры привода:

- маховый момент электродвигателя - $GD^2=1$ кг м²;
- передаточное число редуктора - $i=600$;
- момент инерции барабана $I=10$ кг м²;
- вылет троса $l=2$ м.

Как изменятся параметры модели, если $l=8$ м?

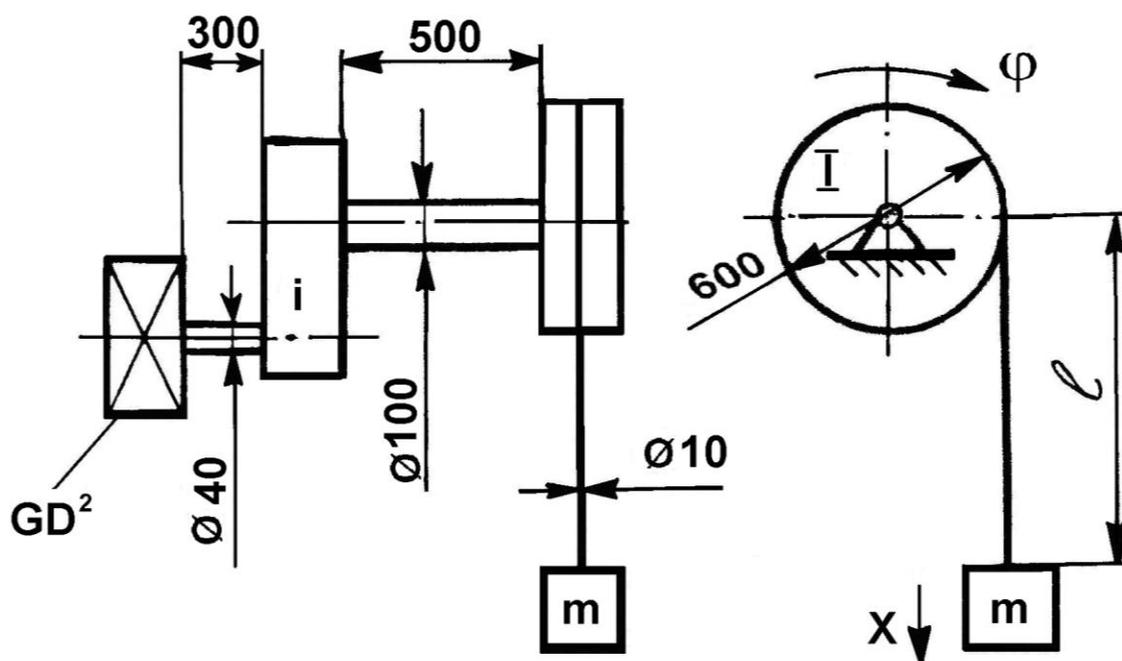


Рис. 2.20. К задаче 2.3.18

Задача 19. Для механической системы по условиям задачи 18 разработать динамическую модель вращательного движения.

Задача 20. Разработать динамическую модель вращательного движения суммарного привода поворота конвертера, кинематическая схема которого приведена на рис. 2.21.

Параметры привода:

- момент инерции конвертера - $I = 10^4$ кг м²;
- маховый момент электродвигателя $GD^2 = 4$ кг м²;
- передаточное число редуктора $i = 400$;
- количество приводов - 6.

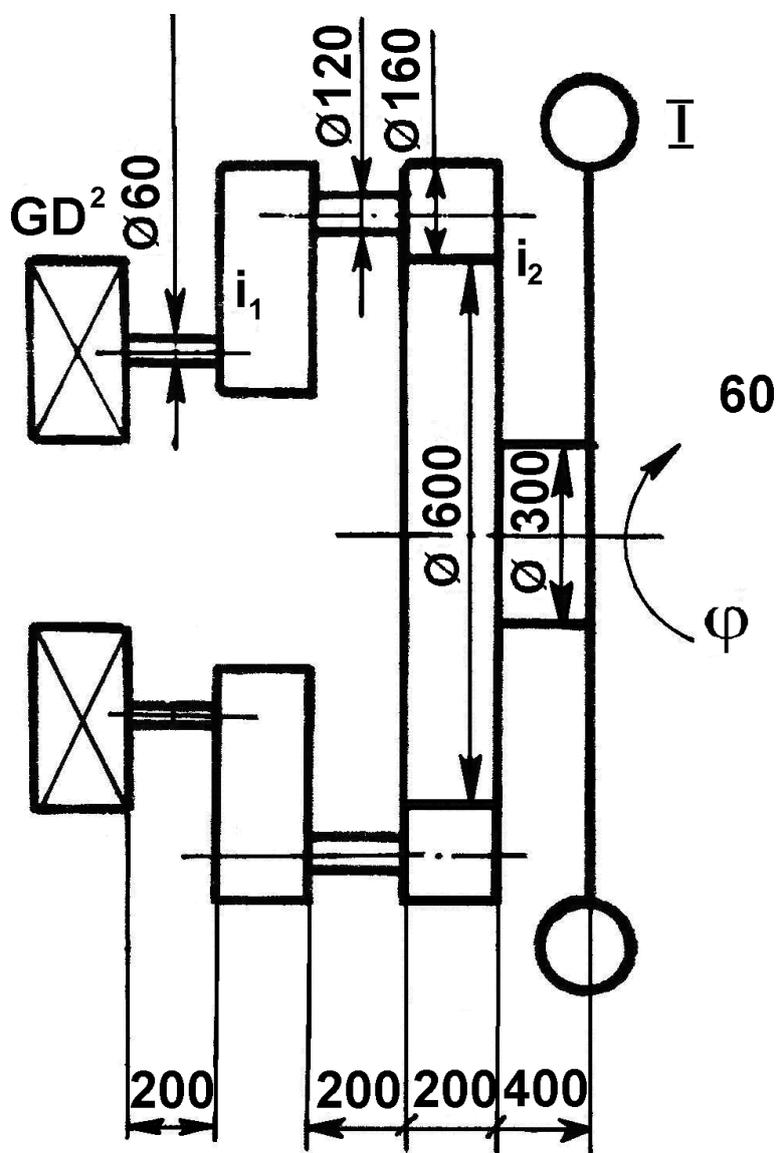


Рис. 2.21. К задаче 20

Задача 21. Разработать динамическую модель вращательного движения привода массы с моментом инерции I , кинематическая схема которого приведена на рис. 2.22.

Параметры привода

- маховый момент электродвигателя $GD^2 = 16 \text{ кг м}^2$;
- передаточное число редуктора $i_1 = 5$; $i_2 = 6$
- момент инерции конвертера - $I = 50 \text{ кг м}^2$.

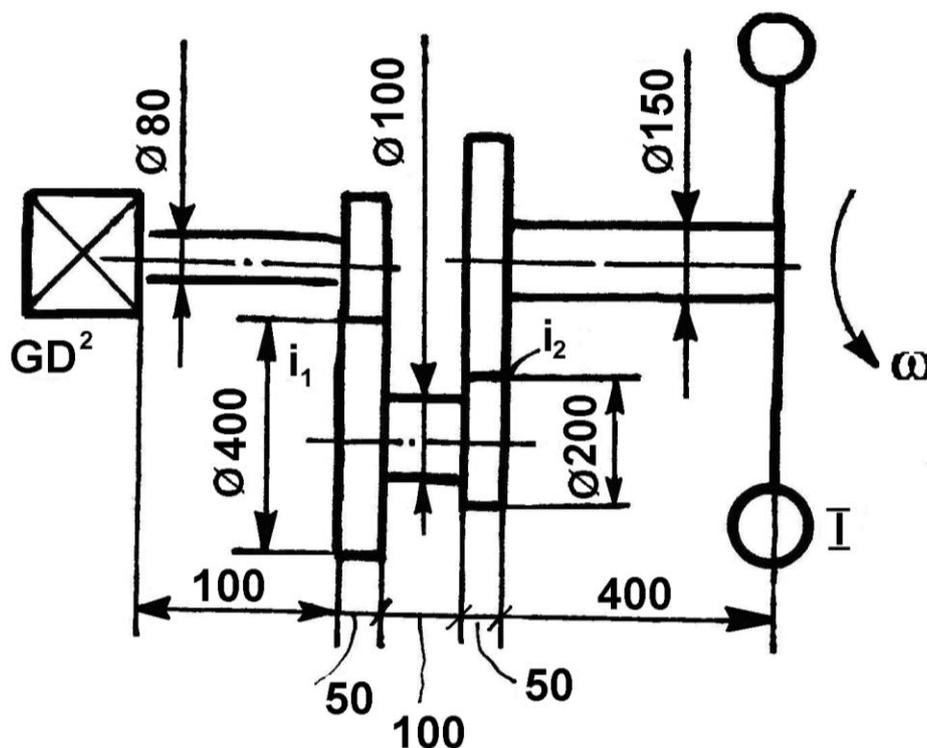


Рис. 2.22. К задаче 21

Задача 22. Разработать динамическую модель главной приводной линии прокатной клетки, кинематическая схема которой приведена на рис. 2.23.

Параметры привода

- маховый момент электродвигателя $GD^2 = 600 \text{ кг м}^2$;
- масса заготовки $m = 10 \text{ т}$.

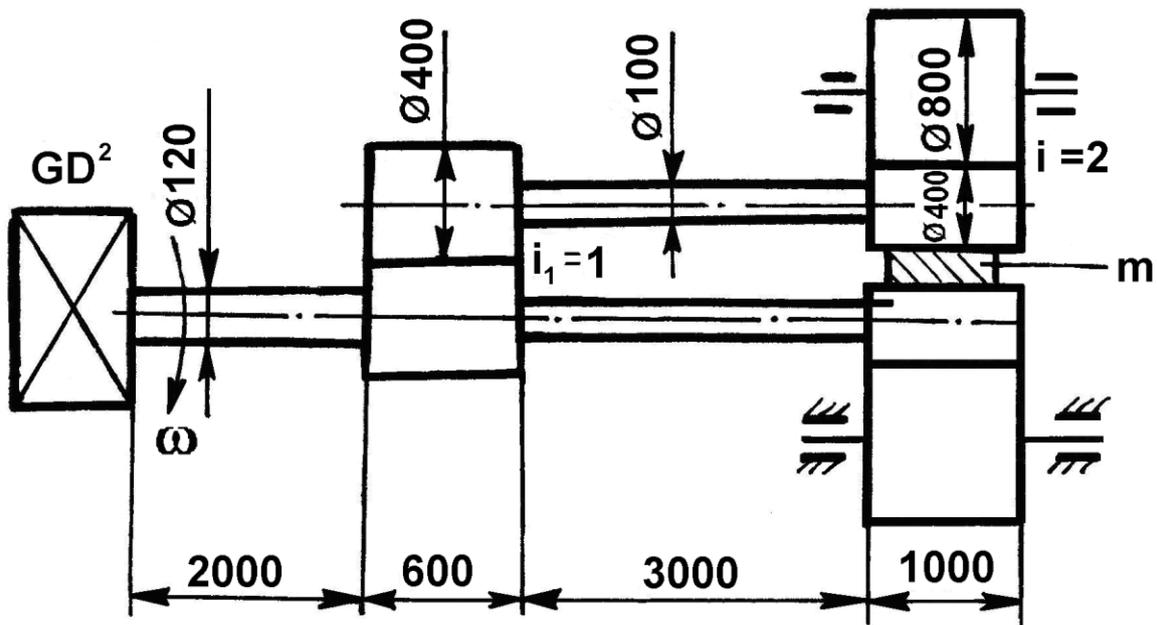


Рис. 2.23. К задаче 22

Задача 23. Как изменятся параметры динамической модели главной приводной линии прокатной клетки по задаче 2.3.22, если в кинематической схеме использовать редукторный привод, фрагмент которого приведен на рис. 2.24, с параметрами: $i_2 = 20$; $GD^2 = 50 \text{ кг м}^2$.

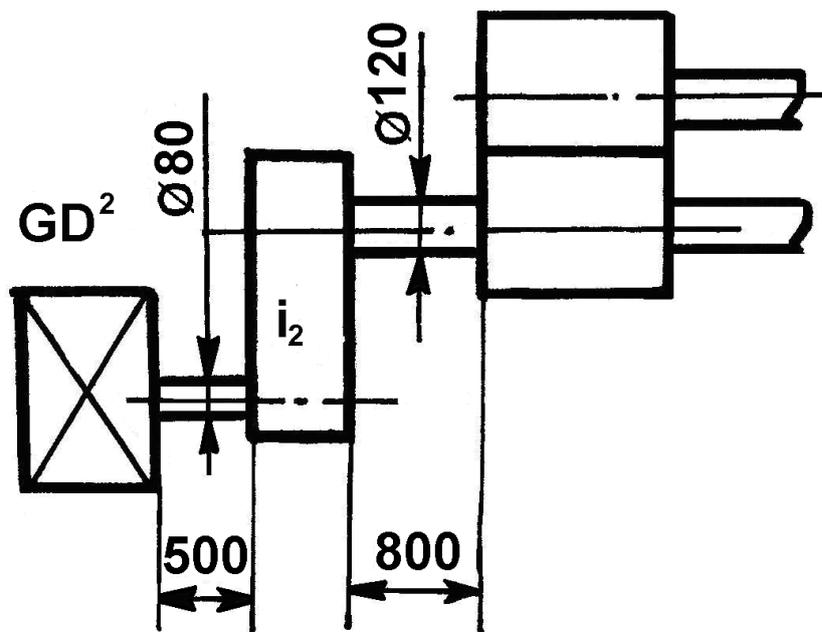


Рис. 2.24. К задаче 23

3. Уравнения движения

3.1. Общие положения

Для консервативной (без подвода и отвода энергии) системы полная механическая энергия (сумма кинематической T и потенциальной Π энергий) постоянна, а скорость изменения полной энергии равна нулю, т.е.:

$$T + \Pi = \text{const}; \quad \frac{d}{dt}(T + \Pi) = 0.$$

Кинетическая энергия поступательного движения $T = \frac{1}{2} m \dot{X}^2$,

вращательного - $T = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \dot{\phi}^2$ (\dot{X} и $\dot{\phi}$ - линейная и угловая скорость соответственно).

Потенциальная энергия складывается из потенциальной энергии положения и потенциальной энергии деформации.

Так, например, для динамической модели, представленной на рис. 3.1, а, в которой масса m совершает вертикальное движение $X(t)$, кинетическая энергия

T равна: $T = \frac{1}{2} m \dot{X}^2$.

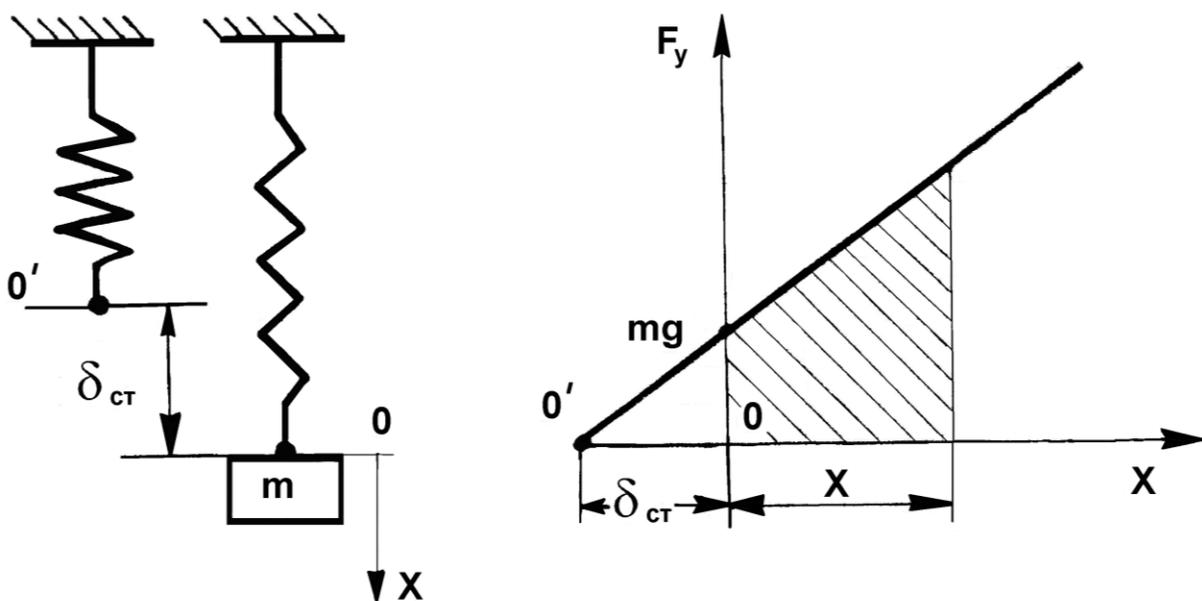


Рис. 3.1. Динамическая модель (а) и потенциальная энергия системы (б)

Потенциальная энергия Π складывается из энергии деформации пружины и потенциальной энергии массы. При выбранной точке начала координат при статическом равновесии массы на пружине, когда упругая сила пружины F_y уравнивает вес груза, а деформация пружины OO' равна статическому удлинению δ (рис. 3.1., а, б), потенциальная энергия равна:

$$\Pi = \int_0^x (mg + kX) dx - mgX .$$

Здесь интеграл представляет собой упругую энергию (заштрихованная область на рис. 3.1, б), а mgX - изменение энергии положения массы.

Интегрируя, получим $\Pi = \frac{1}{2} kX^2$.

Тогда:

$$\frac{d}{dt}(T + \Pi) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m\dot{X}^2 + \frac{1}{2} kX^2 \right) = (m\ddot{X} + kX) \cdot \dot{X} = 0 .$$

Т.к. $\dot{X} \neq 0$, то

$$m\ddot{X} + kX = 0$$

представляет собой уравнение движения рассматриваемой динамической системы.

Уравнения движения могут быть получены и на основе второго закона Ньютона, согласно которому сила инерции материальной точки равна сумме всех сил, действующих на эту точку, или сумма всех сил, действующих на материальную точку и силы инерции равна нулю, т.е:

$$m\ddot{X} = \sum F_i \text{ или}$$

$$m\ddot{X} - \sum F_i = 0 .$$

Для того, чтобы применить второй закон Ньютона для описания движения системы масс, связанных между собой упругими и диссипативными связями, применяют принцип освобождения от связей, по которому связи разрываются, а их действие заменяются реакциями этих связей. Так, например, для системы, представленной на рис. 3.2, а, содержащей массу, соединённую с

заделкой упругой связью k и демпфированием c , на которую действует внешнее возмущение $F(t)$, освобождение от связей приводит к расчётной схеме, приведённой на рис. 3.2, б.

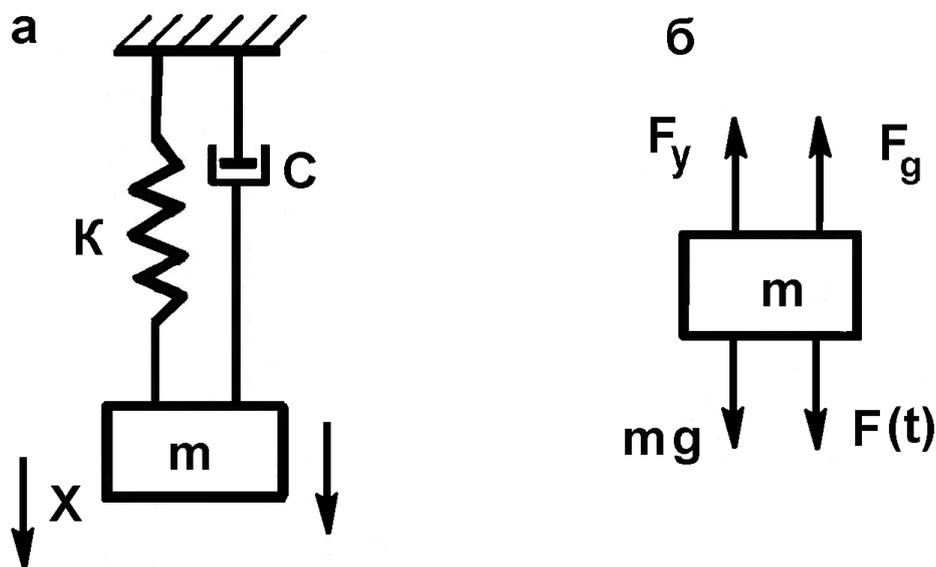


Рис. 3.2. К выводу уравнений движения методом сил (Ньютона)

Принимая за начало координат положение статического равновесия, для реакций связей примем: упругая реакция $F_y = k(X + \delta)$, диссипативная реакция

$$F_d = c\dot{X}$$

По второму закону Ньютона получим:

$$m \frac{d^2}{dt^2}(X + \delta) = -k(X + \delta) - c\dot{X} + mg + F(t)$$

или

$$m\ddot{X} = -kX - k\delta - c\dot{X} + mg + F(t)$$

т.к. $k\delta = mg$, то уравнение движения:

$$m\ddot{X} + c\dot{X} + kX = F(t).$$

Для многомассовых (многосвязных) динамических систем разрывают и односторонние, и двухсторонние связи, заменяя их действие

соответствующими реакциями, и для освобождённых таким образом от связей инерционных элементов в соответствии с методом Ньютона записывают уравнения движения.

Так, например, на рис. 3.3, а представлена линейная динамическая система, состоящая из сосредоточенных масс m_1, m_2, m_3 и т. д., соединённых связями, упругие свойства которых характеризуются коэффициентами жёсткости k_1, k_2, k_3 и т. д. Диссипативные свойства характеризуются коэффициентами демпфирования c_1, c_2, c_3 и т. д. Положение масс характеризуется координатами X_1, X_2, X_3 и т. д., и к массам могут быть приложены внешние возмущающие силы, зависящие от времени $F_1(t), F_2(t), F_3(t)$ и т. д.

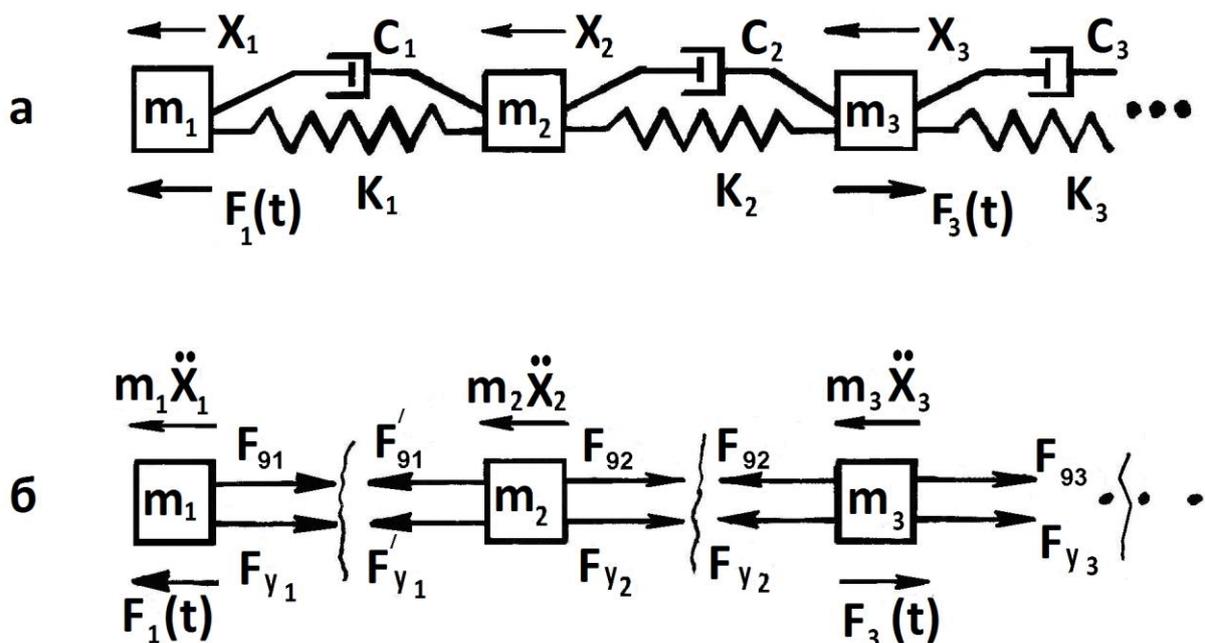


Рис. 3.3. Многомассовая линейная динамическая система

Разрываем связь между массами m_1 и m_2 и заменяем её упругой $F_{y1} = -k_1(X_1 - X_2)$ и диссипативной $F_{y1} = -c_1(\dot{X}_1 - \dot{X}_2)$ силами, направленными в противоположные направления деформации и скорости деформации (рис. 3.3, б).

Тогда для свободной массы m_1 в соответствии с методом Ньютона можем записать:

$$m_1 \ddot{X}_1 = F_1(t) - k_1(X_1 - X_2) - c_1(\dot{X}_1 - \dot{X}_2)$$

или

$$m_1 \ddot{X}_1 + c_1(\dot{X}_1 - \dot{X}_2) + k_1(X_1 - X_2) = F_1(t). \quad (1)$$

Рассматривая массу m_2 , разрываем её связи с массой m_1 и массой m_3 , заменяя их действие соответствующими реакциями: F'_{y1} , $F'_{д2}$, F_{y2} , $F_{д2}$.

Учитывая, что реакция F'_{y1} и $F'_{д1}$ численно равны и противоположно направлены реакциям F_{y1} и $F_{д1}$, а реакции $F_{y2} = k_2(X_2 - X_3)$, $F_{д2} = c_2(\dot{X}_2 - \dot{X}_3)$, для массы m_2 получим:

$$m_2 \ddot{X}_2 + c_2(\dot{X}_2 - \dot{X}_3) + k_2(X_2 - X_3) - c_1(\dot{X}_1 - \dot{X}_2) - K_1(X_1 - X_2) = 0; \quad (F_2(t) = 0). \quad (2)$$

Аналогично для массы m_3 :

$$m_3 \ddot{X}_3 + c_3(\dot{X}_3 - \dot{X}_4) + k_3(X_3 - X_4) - c_2(\dot{X}_2 - \dot{X}_3) - k_2(X_2 - X_3) = -F_3(t). \quad (3)$$

Учитывая, что в уравнение движения каждой массы входят координаты и скорости соседних масс, уравнения движения (1), (2), (3) и т.д. необходимо решать совместно. Другими словами: движение системы описывается системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{X}_1 + c_1(\dot{X}_1 - \dot{X}_2) + k_1(X_1 - X_2) = F_1(t); \\ m_2 \ddot{X}_2 + c_2(\dot{X}_2 - \dot{X}_3) + k_2(X_2 - X_3) - c_1(\dot{X}_1 - \dot{X}_2) - k_1(X_1 - X_2) = 0; \\ m_3 \ddot{X}_3 + c_3(\dot{X}_3 - \dot{X}_4) + k_3(X_3 - X_4) - c_2(\dot{X}_2 - \dot{X}_3) - k_2(X_2 - X_3) = -F(t). \end{cases}$$

3.2. Примеры расчётов

Пример 1. Недеформируемый трос перекинут через блок радиуса R и массой m , поворачивающийся вокруг горизонтальной оси O .

Один конец троса прикреплен к упругому элементу с жёсткостью k , а к другому его концу прикреплена масса m_1 (рис. 3.4).

Составить уравнение движения массы m_1 .

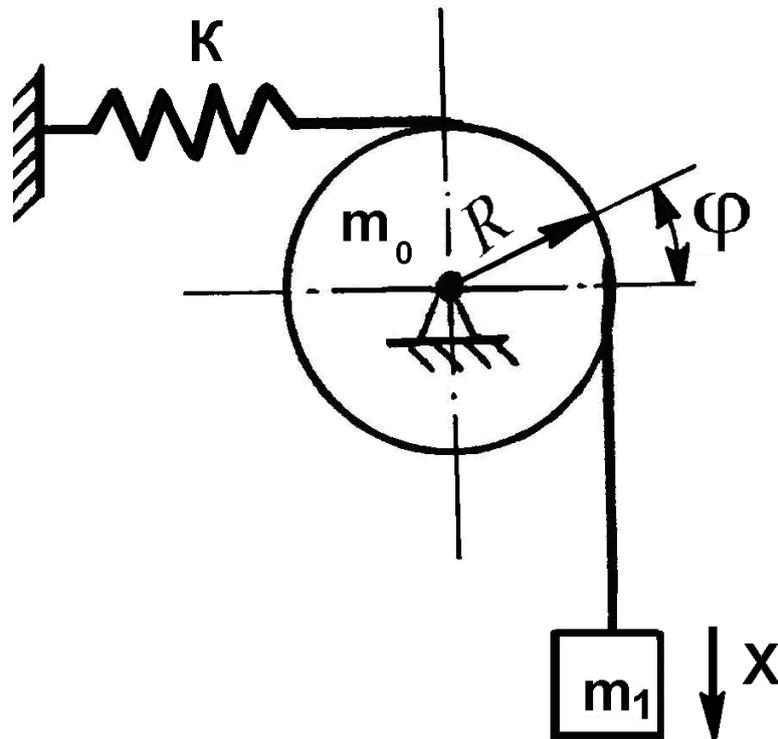


Рис. 3.4. Схема к примеру 1

Решение

Кинетическая энергия системы T :

$$T = \frac{m_1 \dot{X}^2}{2} + \frac{I \omega^2}{2},$$

где I - момент инерции блока, $I = \frac{mR^2}{2}$;

ω - угловая скорость блока, $\omega = \frac{\dot{X}}{R}$.

Тогда:

$$T = \frac{m_1 \dot{X}^2}{2} + \frac{mR^2}{2} \cdot \frac{\dot{X}^2}{2R^2} = \frac{1}{2} \left(m_1 + \frac{m}{2} \right) \dot{X}^2.$$

Потенциальная энергия системы складывается из потенциальной энергии в поле сил тяжести $\dot{I}_1 = -mgX$ и потенциальной энергии деформации пружины:

$$\Pi_2 = \frac{k(X + \delta)^2}{2} - \frac{k\delta^2}{2} = \frac{kX^2}{2} + \frac{2k\delta X}{2} + \frac{k\delta^2}{2} - \frac{k\delta^2}{2} = \frac{kX^2}{2} + mgX ;$$

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 = -mgX + \frac{kX^2}{2} + mgX = \frac{kX^2}{2} .$$

В соответствии с энергетическим методом:

$$\frac{d}{dt}(T + \dot{\Pi}) = 0;$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}(m_1 + \frac{m}{2})\dot{X}^2 + \frac{kX^2}{2}\right) = (m_1 + \frac{m}{2})\ddot{X} + kX = 0.$$

Пример 2. На конец платформы массой m_1 , шарнирно закреплённой в точке O , установлена масса m . Платформа опирается на упругий элемент с жёсткостью k . Расстояние от точки O до центра тяжести платформы - ℓ_1 , до массы и упругого элемента - ℓ . (рис. 3.5).

Составить уравнение движения массы m .

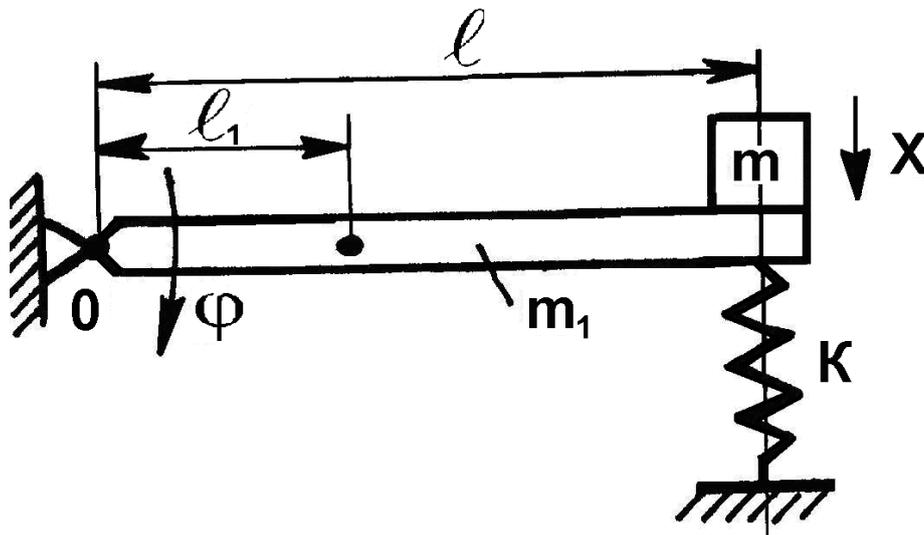


Рис. 3.5. Схема к примеру 2

Решение

Для линейной динамической модели (координата x) кинетическая энергия системы

$$T = \frac{1}{2} m \dot{X}^2 + \frac{1}{2} I_0 \dot{\phi}^2$$

Так как $I_0 = m_1 \ell_1^2$ и $\dot{\phi} = \frac{\dot{X}}{\ell}$, то:

$$T = \frac{1}{2} (m + m_1 \frac{\ell_1^2}{\ell^2}) \dot{X}^2$$

Потенциальная энергия Π складывается из потенциальной энергии в поле сил тяжести \dot{I}_1 :

$$\Pi_1 = -mgX - m_1 g \frac{\ell_1}{\ell} X = -(mg + m_1 g \frac{\ell_1}{\ell}) X$$

и потенциальной энергии деформации пружины \dot{I}_2 :

$$\Pi_2 = \frac{k(\delta + X)^2}{2} - \frac{k\delta^2}{2};$$

$$\Pi_2 = \frac{k\delta^2}{2} + \frac{2k\delta X}{2} + \frac{kX^2}{2} - \frac{k\delta^2}{2} = k\delta X + \frac{kX^2}{2};$$

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 = -(mg + m_1 g \frac{\ell_1}{\ell}) X + k\delta X + \frac{kX^2}{2}.$$

где δ - статическая деформация пружины

Из условия статического равновесия платформы сумма моментов всех сил относительно точки O равна нулю, т. е.:

$$m_1 g \ell_1 + mg \ell - k\delta \ell = 0$$

или

$$m_1 g \frac{\ell_1}{\ell} + mg = k\delta.$$

Тогда:

$$\Pi = \frac{kX^2}{2}.$$

Согласно энергетическому методу:

$$\frac{d}{dt} (T + \Pi) = 0$$

или

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \left(m + m_1 \frac{\ell^2}{\ell^2} \right) \dot{X}^2 + \frac{kX^2}{2} \right) = 0.$$

Дифференцируя получим:

$$\left(m + m_1 \frac{\ell^2}{\ell^2} \right) \ddot{X} + kX = 0.$$

Для вращательной системы (координата φ):

$$T = \frac{1}{2} (m_1 \ell_1^2 + m \ell^2) \dot{\varphi}^2;$$

$$\Pi = \frac{1}{2} k \ell^2 \varphi^2;$$

$$\frac{d}{dt} (T + \Pi) = (m_1 \ell_1^2 + m \ell^2) \ddot{\varphi} + k \ell^2 \varphi = 0.$$

Пример 3. Пользуясь методом сил, составить уравнения малых угловых колебаний механической системы, представленной на рис. 3.6.

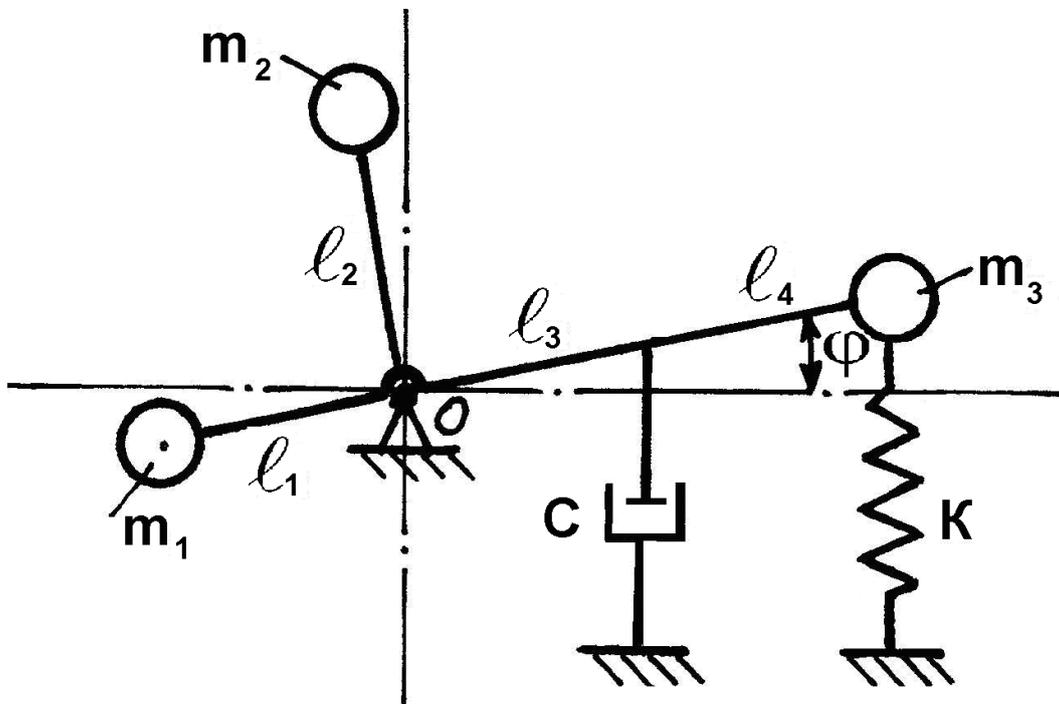


Рис. 3.6. Схема к примеру 3

Решение

По методу Ньютона

$$I_0 \ddot{\varphi} = M_m + M_d + M_y,$$

где I_0 - момент инерции системы относительно точки O ;

$\ddot{\varphi}$ - угловое ускорение;

M_d - момент сил тяжести масс системы относительно точки O ;

$$M_d = m_1 g l_1 \cos \varphi + m_2 g l_2 \sin \varphi - m_3 g (l_3 + l_n) \cos \varphi.$$

Для малых углов φ принимаем $\cos \varphi = 1$, $\sin \varphi = \varphi$, и, учитывая, что в состоянии равновесия ($\varphi = 0$) $m_1 g l_1 = m_3 g (l_3 + l_n) \cos \varphi$, получим:

$$M_m = m_2 g l_2 \varphi.$$

M_d - момент силы демпфирования относительно точки O :

$$M_d = -F_q l_3 = c \dot{X} l_3 = \dot{\varphi} l_3 l_3 = -c l_3^2 \dot{\varphi};$$

M_y - момент силы упругости в пружине относительно оси O :

$$M_y = -F_y (l_3 + l_n) = -kX(l_3 + l_4) = -k\varphi(l_3 + l_n)(l_3 + l_4) = -k(l_3 + l_n)^2 \varphi.$$

Тогда:

$$\left[m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 + m_3 (l_3 + l_4)^2 \right] \ddot{\varphi} = m_2 g l_2 \varphi - c l_3^2 \dot{\varphi} - k (l_3 + l_4)^2 \varphi$$

или

$$\left[m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 + m_3 (l_3 + l_4)^2 \right] \ddot{\varphi} + c l_3^2 \dot{\varphi} + [k(l_3 + l_4)^2 - m_2 g l_2] \varphi = 0$$

3.3. Задачи

Задача 1. Вывести уравнение вращательного движения точечной массы m , закреплённой на стержне длиной l . Стержень шарнирно закреплён в точке O и имеет пренебрежимо малую массу. Угол φ считать малым.

Задачу решить энергетическим методом и методом сил.

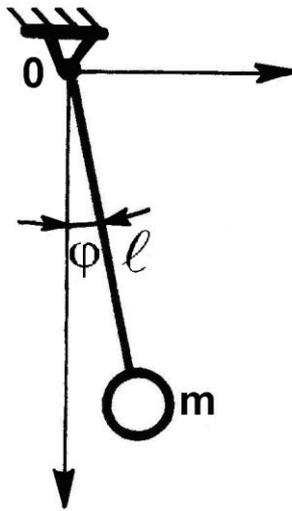


Рис. 3.7. К задаче 1

Задача 2. Как изменится уравнение движения по условиям задачи 1, если учесть массу стержня m , расположенную в его середине?

Задача 3. Невесомый стержень длиной ℓ с точечной массой m на его конце шарнирно подведён в точке O . На расстоянии h от шарнира O стержень соединён с пружиной, имеющей линейную жёсткость k (рис.3.8). Пользуясь энергетическим методом, вывести уравнение вращательного движения массы относительно точки O .

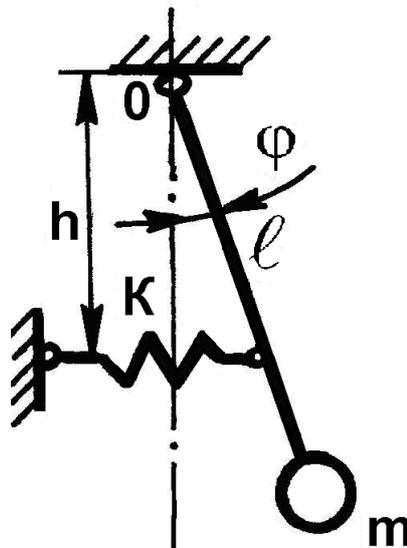


Рис. 3.8. К задаче 3

Задача 4. Решить задачу 3, пользуясь методом сил.

Задача 5. Невесомый, недеформируемый стержень длиной ℓ с точечной массой m на его конце шарнирно оперт в точке O . На расстоянии h от шарнира O стержень соединён с пружиной, имеющей линейную жёсткость k (рис. 3.9). Используя энергетический метод, вывести уравнение вращательного движения массы относительно точки O .

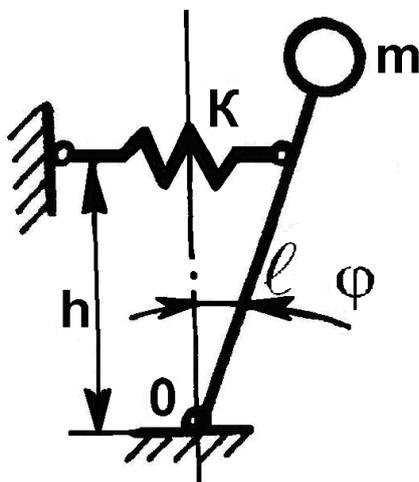


Рис. 3.9. К задаче 5

Задача 6. Решить задачу 5 методом сил.

Задача 7. Невесомый, недеформируемый горизонтальный стержень длиной ℓ шарнирно закреплён одним концом в точке O , а на противоположном закреплён с точечной массой m . На расстоянии h от шарнира O стержень соединён с пружиной жёсткостью k (рис. 3.10). Используя энергетический метод вывести уравнение вращательного движения массы m относительно точки O .

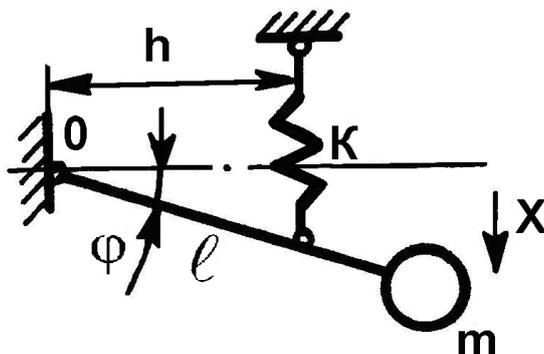


Рис. 3.10. К задаче 7

Задача 9. Для условий задачи 7 вывести уравнение вертикального движения массы m (координаты x).

Задача 10. Цилиндр массы m и радиуса R_1 катается без скольжения по цилиндрической поверхности радиуса R (рис. 3.11). Считая угол φ малым, пользуясь энергетическим методом, вывести уравнения движения массы.

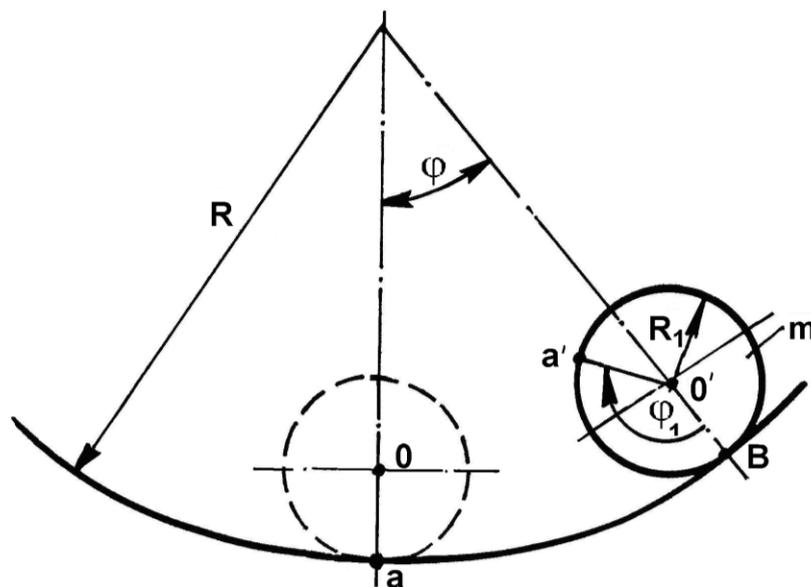


Рис. 3.11. К задаче 10

Задача 11. Решить задачу 3.3.10 методом сил.

Задача 12. Диск радиуса R и массой m перекачивается по горизонтальной поверхности. На расстоянии h от оси диска установлены две пружины с жёсткостями k (рис. 3.12). Вывести уравнение горизонтального перемещения диска (его центра O).

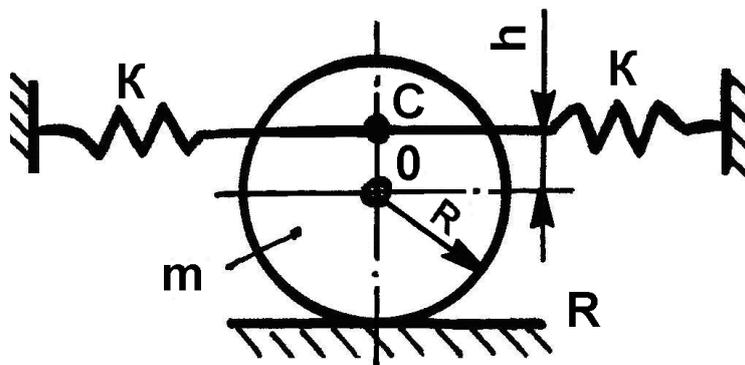


Рис. 3.12. К задаче 12

Задача 13. На барабане радиуса R и момента инерции I намотан стальной трос диаметром d . Вылет троса ℓ . К барабану на расстоянии h от его оси вращения прикреплена пружина с линейной жёсткостью k (рис. 3.13). Вывести уравнение вращательного движения системы (координата φ).

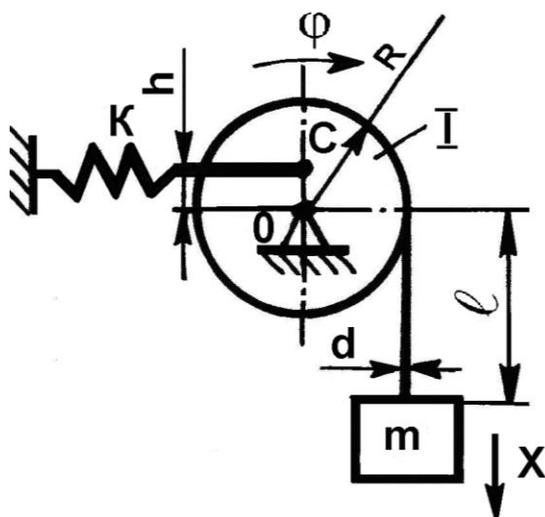


Рис. 3.13. К задаче 13

Задача 14. Для условий задачи 3.13 вывести уравнение вертикального движения массы m (координата X).

Задача 15. Ролик массой m и радиусом R может катиться по наклонной плоскости с углом наклона α . Ось ролика соединена с неподвижной поверхностью пружиной с жёсткостью k (рис. 3.14). Вывести уравнение движения ролика вдоль наклонной плоскости (координата X).

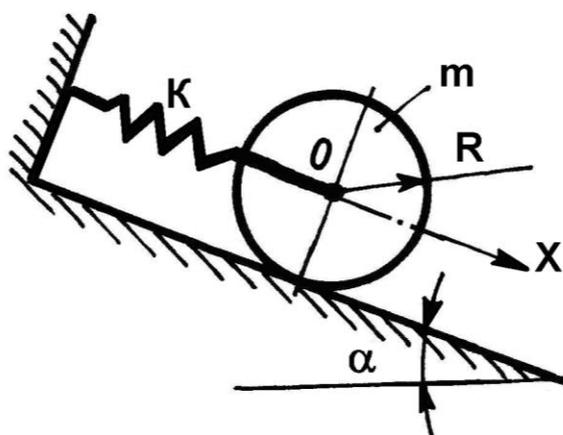


Рис. 3.14. К задаче 15

Задача 16. Диск с массой m и моментом инерции I насажен на ступицу диаметра d . Ступица опирается на круговую направляющую радиуса R (рис. 3.15).

Составить дифференциальное уравнение малых колебаний диска.

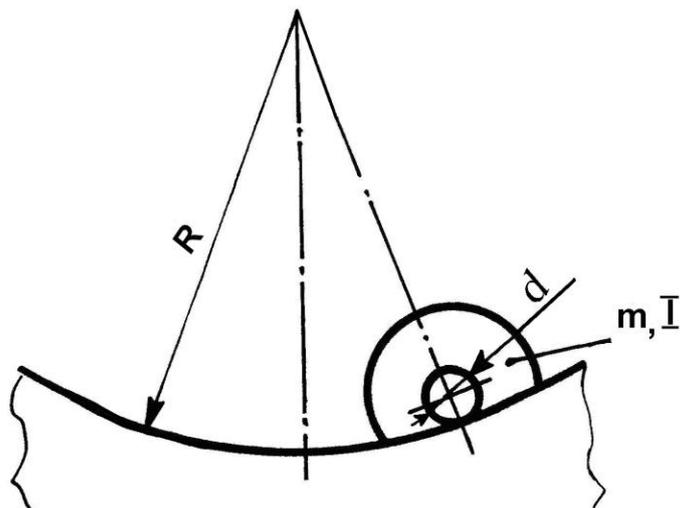


Рис. 3.15. К задаче 16

Задача 17. Зубчатое колесо (1) с жёстко скреплённым с ним водилом (2) лежит на зубчатой рейке (3) (рис 3.16). К свободному концу водила прикреплены две пружины жёсткостью k каждая.

Составить уравнение движения системы.

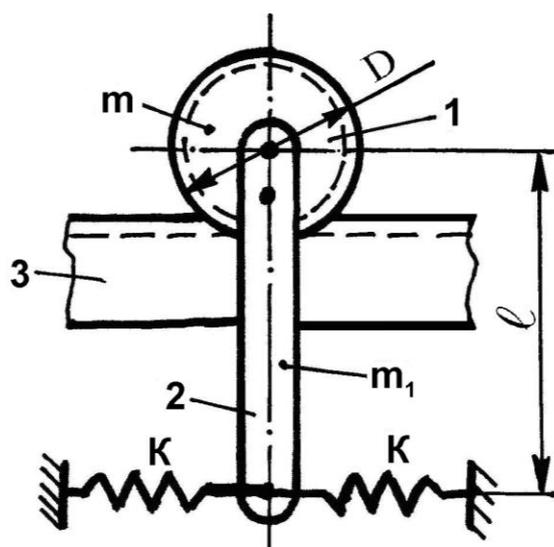


Рис. 3.16. К задаче 17

Задача 18. Груз массой m шарнирно закреплён на абсолютно жёстком невесомом стержне длиной 3ℓ . Стержень противоположным концом шарнирно закреплён на горизонтальной поверхности и подкреплён двумя одинаковыми пружинами жёсткостью k каждая (рис. 3.17).

Составить уравнение движения системы.

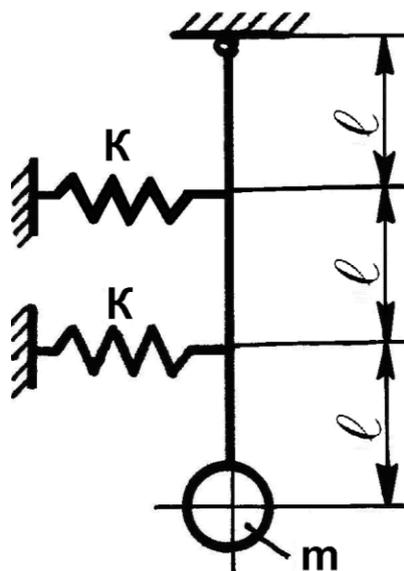


Рис. 3.17. К задаче 18

Задача 19. На наклонной поверхности установлена тележка массой m , удерживаемая пружиной жёсткостью k (рис. 3.18). Момент инерции каждой колёсной пары I , радиус колёс R .

Составить уравнение движения тележки.

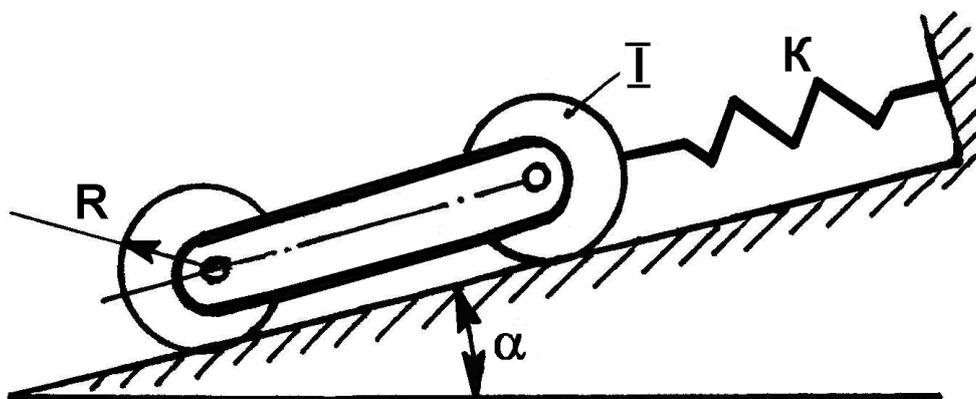


Рис. 3.18. К задаче 19

Задача 20. Груз массой m укреплен на абсолютно гибкой нерастяжимой и невесомой нити длиной 2ℓ (рис. 3.19). В нити создано постоянное натяжение T .

Вывести уравнение движения массы m по горизонтали.

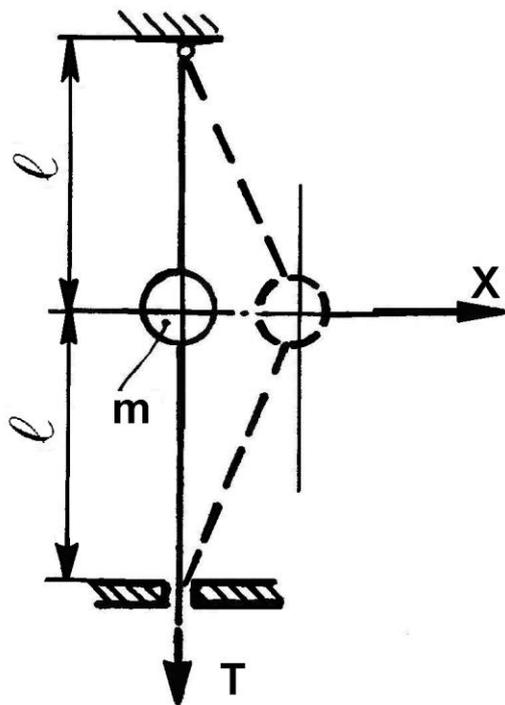


Рис 3.19. К задаче 20

Задача 21. Точечная масса m закреплена на струне длиной l имеющей предварительное натяжение T (рис. 3.20).

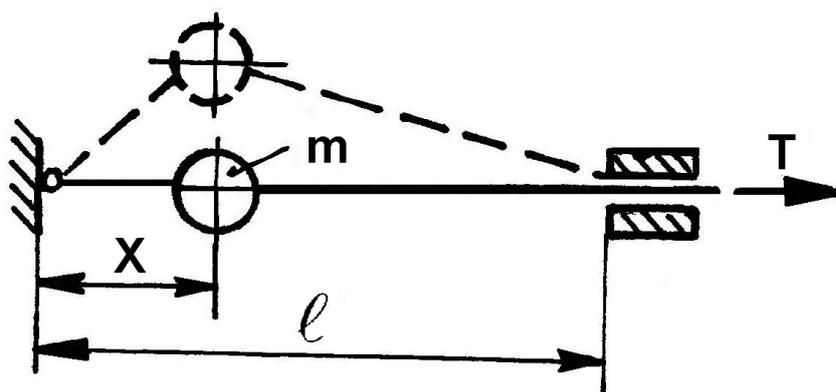


Рис 3.20. К задаче 3.3.21

Составить уравнение движения массы m по вертикали, считая натяжение струны постоянным.

4. Системы с одной степенью свободы

4.1. Свободные колебания систем с одной степенью свободы

4.1.1. Общие положения

Числом степеней свободы называют количество независимых координат, определяющих конфигурацию системы.

Системы с одной степенью свободы имеют одну независимую координату и в общем случае могут быть представлены физическими моделями поступательного (рис. 4.1, б) и вращательного (рис. 4.1, а) движения, характеризуемых одной независимой координатой (x и φ соответственно).

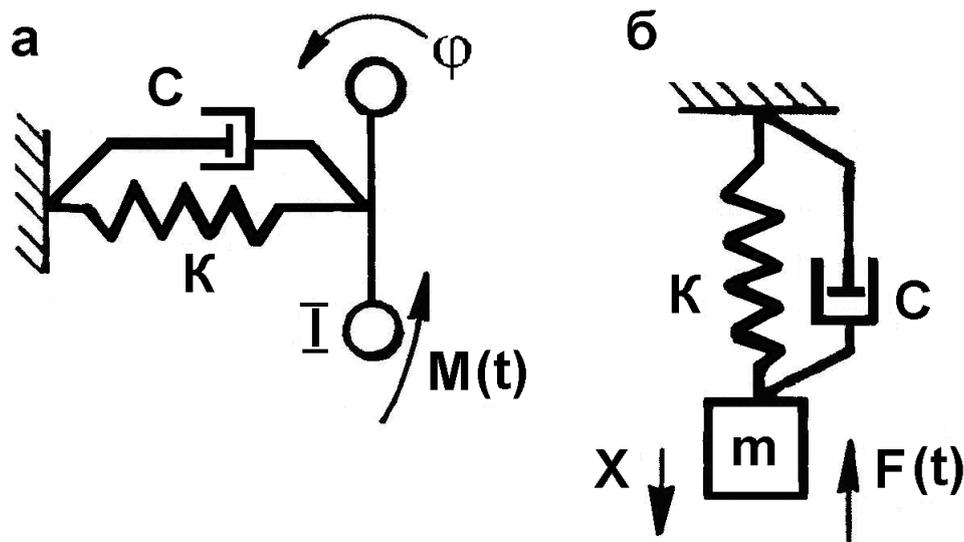


Рис. 4.1. Модели вращательной и поступательной динамических систем

Движение систем с одной степенью свободы описывается одним дифференциальным уравнением.

Для поступательной системы уравнение движения имеет вид:

$$m\ddot{X} + c\dot{X} + kX = F(t)$$

или

$$\ddot{X} + \frac{c}{m} \dot{X} + \frac{k}{m} X = \frac{1}{m} F(t).$$

Вводя обозначения:

$$\frac{c}{m} = 2\eta\omega_c; \quad \frac{k}{m} = \omega_c^2,$$

где m – масса;

c – коэффициент демпфирования;

k – коэффициент жёсткости (линейной);

η – безразмерный коэффициент затухания;

ω_c – собственная частота системы,

получим:

$$\ddot{X} + 2\eta\omega_c \dot{X} + \omega_c^2 X = \frac{1}{m} F(t). \quad (4.1)$$

Аналогично для вращательной системы:

$$\ddot{\varphi} + 2\eta\omega_c \dot{\varphi} + \omega_c^2 \varphi = \frac{1}{I} M(t), \quad (4.2)$$

где I – момент инерции;

k – коэффициент жёсткости (крутильный);

$$\frac{c}{I} = 2\eta\omega_c; \quad \frac{k}{I} = \omega_c^2.$$

Уравнения (1) и (2) математически одинаковы и представляют собой неоднородные линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Решение этих уравнений, функция $X(t)$, складывается из двух частей: общего решения однородного дифференциального уравнения $X_0(t)$ и частного решения $X^*(t)$ полного уравнения (1) (или 2), т. е.:

$$X(t) = X_0(t) + X^*(t).$$

Общее решение однородного дифференциального уравнения $X_0(t)$ имеет вид:

$$X(t) = Ae^{rt}. \quad (4.3)$$

Подставляя (3) и её производные $\dot{X}(t)$ и $\ddot{X}(t)$ в (1), получим:

$$Ae^{rt}(r^2 + 2\eta\omega_c r + \omega_c^2) = 0$$

Так как Ae^{rt} при любых t не равно нулю, то:

$$r^2 + 2\eta\omega_c r + \omega_c^2 = 0$$

Решение этого квадратного уравнения даёт два корня:

$$r_{1,2} = -\eta\omega_c \pm \sqrt{\eta^2\omega_c^2 - \omega_c^2} = -\eta\omega_c \pm \omega_c\sqrt{\eta^2 - 1}.$$

и тогда общее решение

$$X_0(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t}.$$

При $\eta^2 \geq 1$ общее решение $X_0(t)$ представляет собой апериодическую функцию.

При $\eta^2 \leq 1$ (случай малого затухания) корни $r_{1,2}$ комплексные:

$$r_{1,2} = -\eta\omega_c \pm i\omega_c\sqrt{1 - \eta^2} = -\eta\omega_c \pm i\omega_3,$$

где $\omega_3 = \omega_c\sqrt{1 - \eta^2}$ называют эквивалентной частотой;

$i^2 = -1$ - мнимая единица.

Тогда

$$X_0(t) = e^{-\eta\omega_c t} (A_1 e^{i\omega_3 t} + A_2 e^{-i\omega_3 t}).$$

Используя формулу Эйлера

$$e^{\pm i\theta} = \cos \theta \pm i \sin \theta,$$

после преобразований получим:

$$X_0(t) = e^{-\eta\omega_c t} (A_1 \cos \omega_3 t + A_2 \sin \omega_3 t).$$

Произвольные постоянные A_1 и A_2 определяются из начальных условий, значений перемещения X_0 и скорости $\dot{X}_0(V_0)$ в начальный момент времени ($t = 0$).

$$t = 0 \quad X(t) = X_0 = e^{-\eta\omega_c t} (A_1 \cos \omega_3 t + A_2 \sin \omega_3 t) = A_1;$$

$$A_1 = X_0.$$

$$\begin{aligned} \dot{X}_0(t=0) &= \frac{dX(t)}{dt} = -\eta\omega_c e^{-\eta\omega_c t} (A_1 \cos \omega_3 t + A_2 \sin \omega_3 t) + \\ &+ e^{-\eta\omega_c t} (-A_1 \omega_3 \sin \omega_3 t + A_2 \omega_3 \cos \omega_3 t) = -\eta\omega_c X_0 + A_2 \omega_3 = V_0 ; \end{aligned}$$

$$A_2 = \frac{V_0 + \eta\omega_c X_0}{\omega_3}.$$

Тогда:

$$X(t) = e^{-\eta\omega_c t} \left(X_0 \cos \omega_3 t + \frac{V_0 + \eta\omega_c X_0}{\omega_3} \sin \omega_3 t \right).$$

Иначе:

$$X_0(t) = A e^{-\eta\omega_c t} \sin(\omega_3 t - \alpha), \quad (4.4)$$

где $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$, $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{A_1}{A_2}$.

$$A = \sqrt{X_0^2 + \left(\frac{V_0 + \eta\omega_c X_0}{\omega_3} \right)^2};$$

$$\alpha = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{X_0 \omega_3}{V_0 + \eta\omega_c X_0}.$$

Полученные результаты справедливы и для динамической системы вращательного движения при соответствующих динамических параметрах:

$$\varphi_0(t) = A e^{-\eta\omega_c t} \sin(\omega_3 t + \alpha), \quad (4.5)$$

$$A = \sqrt{\varphi_0^2 + \left(\frac{\omega_0 + \eta\omega_c \varphi_0}{\omega_3} \right)^2}; \quad \alpha = \operatorname{arctg} \frac{\varphi_0 \omega_3}{\omega_0 + \eta\omega_c \varphi_0},$$

где $\omega_c^2 = \frac{k}{I}$; $2\eta\omega_c = \frac{c}{I}$.

Физический смысл выражений (4.4), (4.5) заключается в том, что они описывают движение динамической системы в том случае, когда на неё не действуют внешние возмущения, а в момент начала движения ($t = 0$) она была выведена из состояния статического равновесия (имела начальное смещение и или начальную скорость). Такой колебательный процесс называют свободными колебаниями.

График свободных колебаний системы с одной степенью свободы приведён на рис. 4.2 и представляет собой гармонический процесс с экспоненциально убывающей амплитудой $Ae^{-\eta\omega_c t}$ и частотой ω_3 .

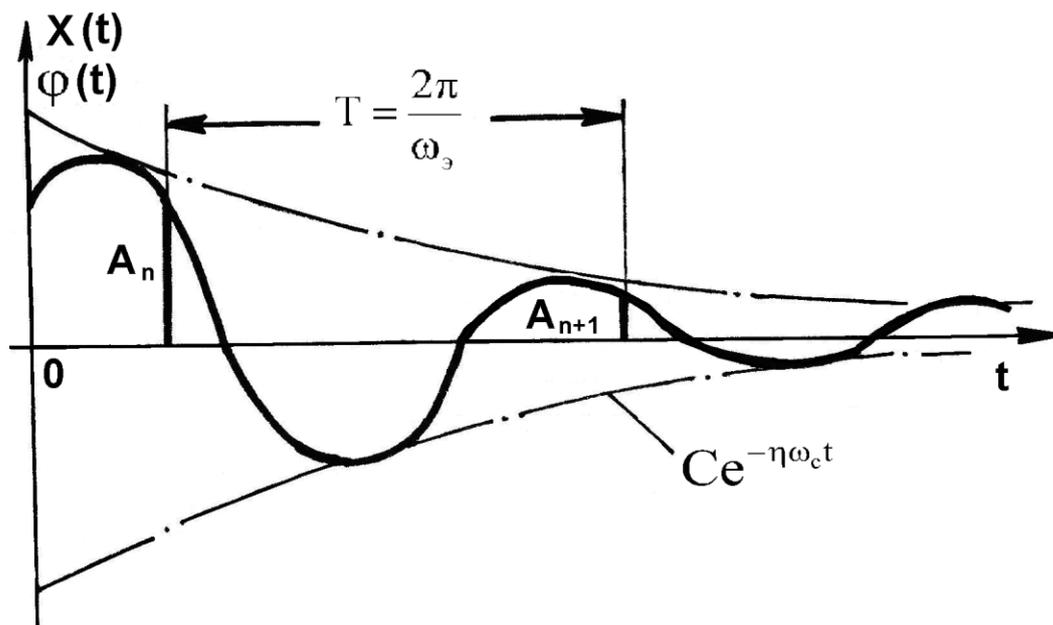


Рис. 4.2. График свободных колебаний системы с одной степенью свободы

Интенсивность затухания колебаний характеризуется логарифмическим декрементом δ :

$$\delta = \ln \frac{A_n}{A_{n+1}} = \ln \frac{e^{-\eta\omega_c t}}{e^{-\eta\omega_c (t+T)}} = \ln e^{\eta\omega_c T} = \eta\omega_c \frac{2\pi}{\omega_c \sqrt{1-\eta^2}} \approx 2\pi\eta.$$

Если за n последовательных циклов амплитуда уменьшается в Q раз, то:

$$\frac{A_i}{A_{i+n}} = Q = e^{n\delta}, \quad n\delta = \ln Q \quad \text{и}$$

$$\delta = \frac{1}{n} \ln Q.$$

Графики зависимости количества циклов колебаний n , необходимых для уменьшения амплитуд в Q раз, от безразмерного коэффициента колебаний η приведены на рис. 4.3.

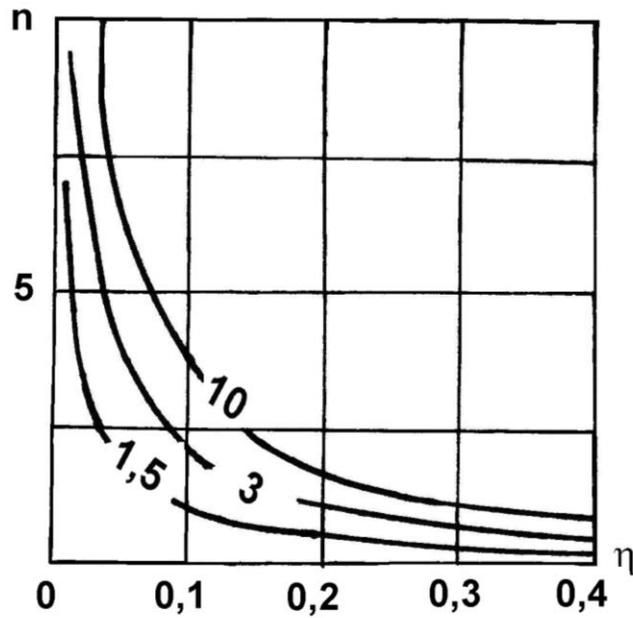


Рис. 4.3. Зависимость количества циклов n от безразмерного коэффициента затухания η (числа на кривых соответствуют значению Q)

4.1.2. Примеры решения задач

Пример 1. На конец консоли консольной балки с изгибной жёсткостью k с высотой H падает груз массой m (рис. 4.4, а). Определить амплитуды, частоту и упругую силу в балке. Как изменятся эти параметры, если свободный конец консоли подпереть пружиной с жёсткостью k_1 (рис. 4.4, б) или между грузом и балкой установить пружину жёсткостью k_1 ?

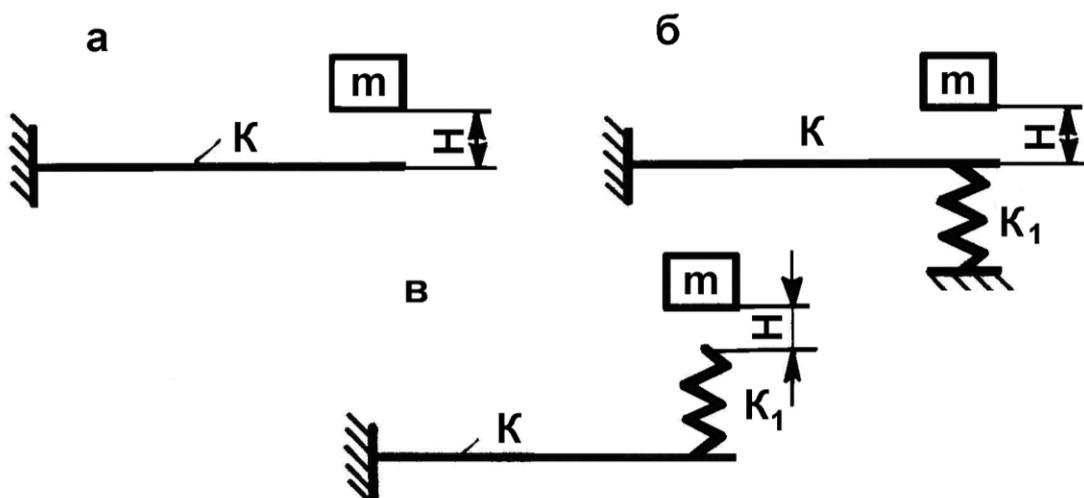


Рис. 4.4. К примеру 1

Решение

В момент касания груз и балка образуют одномассовую динамическую систему.

Уравнение вертикального движения системы:

$$X(t) = A \sin(\omega_c t + \varphi),$$

где A - амплитуда свободных колебаний

$$A = \sqrt{X_0^2 + \frac{V_0^2}{\omega_c^2}};$$

ω_c - собственная частота;

$$\omega_c^2 = \frac{k}{m};$$

X_0, V_0 - начальные перемещения и скорость.

В начальный момент времени (касание груза балки) $V_0^2 = 2gH$,

$X_0 = \delta = \frac{mg}{k}$. Здесь δ - статический прогиб балки (рис. 4.5).

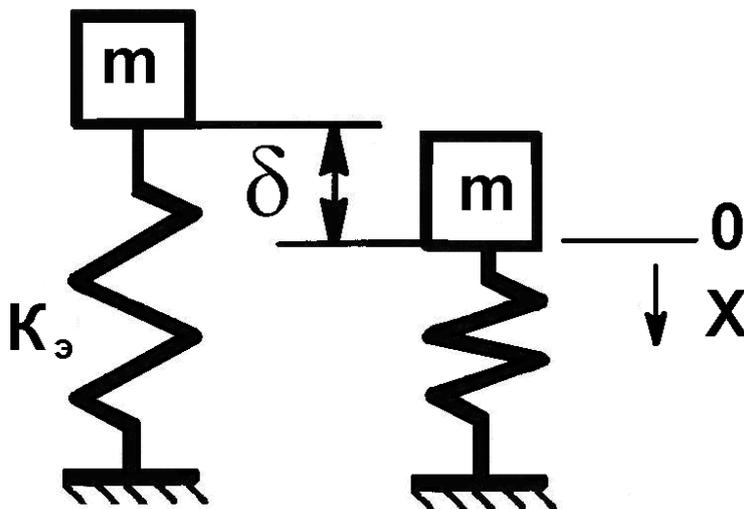


Рис. 4.5. Начальные условия по перемещению

$$A = \sqrt{\delta^2 + \frac{2gHm}{k}} = \sqrt{\delta^2 + 2H\delta} = \delta \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta}}.$$

Упругая сила в балке

$$F = kA = k \frac{mg}{k} \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta}} = G \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta}},$$

где $G = mg$ - вес груза.

Система с подпружиненной балкой (рис. 4.4, б). Эквивалентная жёсткость при параллельном соединении упругих элементов:

$$k_3 = k + k = 2k;$$

$$\text{собственная частота } \omega_c^2 = \frac{k_3}{m} = \frac{2k}{m};$$

$$\text{статический прогиб } \delta_c = \frac{mg}{k_3} = \frac{mg}{2k}.$$

Тогда амплитуда

$$A = \delta_3 \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_3}} = \frac{mg}{2k} \sqrt{1 + \frac{2H \cdot 2k}{mg}} = \frac{\delta}{2} \sqrt{1 + \frac{2H}{\frac{1}{2}\delta}} = \frac{\delta}{2} \sqrt{1 + \frac{4H}{\delta}}.$$

Упругая сила

$$F = kA = \frac{G}{2} \sqrt{1 + \frac{4H}{\delta}}.$$

Для случая с подпружиненной массой (рис. 4.4, в):

Эквивалентная жёсткость при последовательном соединении упругих элементов:

$$k_3 = \frac{k}{2};$$

$$\text{собственная частота } \omega_c^2 = \frac{k}{2m};$$

$$\text{статический прогиб } \delta_3 = \frac{2mg}{k}.$$

Тогда амплитуда колебаний:

$$A = \delta_3 \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_3}} = \frac{2mg}{k} \sqrt{1 + \frac{2H \cdot k}{2mg}} = 2\delta \sqrt{1 + \frac{2H}{2\delta}} = 2\delta \sqrt{1 + \frac{H}{\delta}}.$$

Упругая сила:

$$F = k_3 A = G \sqrt{1 + \frac{H}{\delta}}$$

Пример 2. На конец платформы, шарнирно прикрепленной одним концом к стене и удерживаемой в горизонтальном положении пружиной с жёсткостью k , с высоты h падает груз массой m . Длина платформы l , расстояние от шарнира до пружины - l_2 . На расстоянии l_1 от шарнира установлен линейный демпфер с коэффициентом демпфирования c (рис. 4.6, а).

Считая платформу безинерционным, недеформированным стержнем, определить амплитуду и частоту возникающих свободных вертикальных колебаний.

Как изменятся результаты, если учесть вес платформы G_1 , приложенной по середине её длины?

Данные для расчёта:

$$m = 100 \text{ кг}; \quad k = 5,88 \cdot 10^5 \frac{\text{Н}}{\text{м}}; \quad c = 1,37 \cdot 10^4 \frac{\text{Нс}}{\text{м}}; \quad h = 25 \text{ мм}$$

$$l = 2 \text{ м}; \quad l_1 = 0,4 \text{ м}; \quad l_2 = 0,8 \text{ м}; \quad G_1 = 500 \text{ Н}.$$

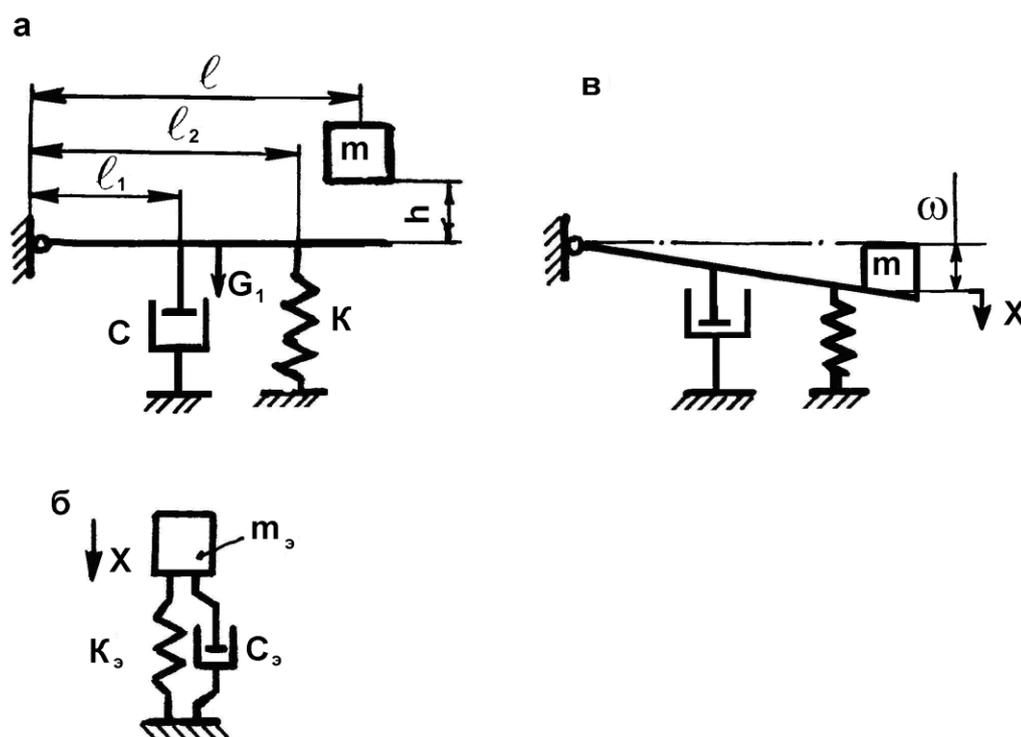


Рис. 4.6. К примеру 2

Решение

Динамическая модель системы представлена на рис. 4.6, б. Параметры

$$\text{модели: } m_3 = m; k_3 = k \frac{\ell_2}{\ell} = 5,85 \cdot 10^5 \cdot 0,8 = 4,7 \cdot 10^5 \frac{\text{Н}}{\text{м}};$$

$$c_3 = c \frac{\ell_1}{\ell} = 1,37 \cdot 10^4 \cdot 0,4 = 5,49 \cdot 10^3 \frac{\text{Нс}}{\text{м}}.$$

Уравнение движения системы:

$$m_3 \ddot{X} + c_3 \dot{X} + k_3 X = 0$$

или:

$$\ddot{X} + 2\eta\omega_c \dot{X} + \omega_c^2 X = 0,$$

$$\text{где } \omega_c^2 = \frac{k_3}{m_3} = \frac{4,7 \cdot 10^5}{100} = 4700 \text{ 1/с}^2; \omega_c = 68,6 \text{ 1/с};$$

$$2\eta\omega_c = \frac{c_3}{m_3}; \eta = \frac{c_3}{2m_3\omega_c} = \frac{5,49 \cdot 10^3}{2 \cdot 100 \cdot 68,6} = 0,4.$$

Решение $X(t)$:

$$X(t) = A \sin(\omega_3 t - \alpha);$$

$$\text{где } \omega_3 = \omega_c \sqrt{1 - \eta^2} = 68,6 \sqrt{1 - 0,4^2} = 62,8 \text{ 1/с}.$$

Произвольные постоянные A_1 и A_2 определяются из начальных условий.

В момент начала движения масса m соприкоснулась с платформой, находящейся в горизонтальном положении. При этом скорость массы m была

$$V_0 = \sqrt{2gH} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 2,5 \cdot 10^{-2}} = 0,7 \text{ м/с}.$$

Принимая за начало отсчёта положения статического равновесия (рис.4.6, в), начальное смещение

$$X_0 = -\frac{mg}{k_3} = -\frac{100 \cdot 10}{4,7 \cdot 10^5} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Тогда амплитуда A :

$$A = \sqrt{X_0^2 + \left(\frac{V_0 + \eta \omega_c X_0}{\omega_3} \right)^2} = \sqrt{(2 \cdot 10^{-3})^2 + \left(\frac{0,7 - 0,4 \cdot 68,6 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{62,8} \right)^2} = 10,5 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

С учётом массы самой платформы $m_1 = \frac{G_1}{g} = \frac{500}{10} = 50 \text{ кг}$ значение

эквивалентной массы m_3 определяется из равенства кинетических энергий:

$$\frac{m\dot{X}^2}{2} + \frac{m_1(0,5\dot{X})^2}{2} = \frac{m_3\dot{X}^2}{2},$$

$$m_3 = m + \frac{1}{4}m_1 = 100 + \frac{1}{4}50 = 112,5 \text{ кг.}$$

Тогда:

$$\omega_c^2 = \frac{k_3}{m_3} = \frac{4,7 \cdot 10^5}{112,5} = 4177 \text{ 1/с}^2; \quad \omega_c = 64,6 \text{ 1/с;}$$

$$\eta = \frac{c_3}{2m_3\omega_c} = \frac{5,49 \cdot 10^3}{2 \cdot 112,5 \cdot 64,6} = 0,38;$$

$$\omega_3 = \omega_c \sqrt{1 - \eta^2} = 64,6 \sqrt{1 - 0,38^2} = 59,8 \text{ 1/с;}$$

$$A = \sqrt{X_0^2 + \left(\frac{V_0 + \eta \omega_c X_0}{\omega_3} \right)^2} = \sqrt{(2 \cdot 10^{-3})^2 + \left(\frac{0,7 - 0,38 \cdot 64,6 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{59,8} \right)^2} = 11 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

4.1.3. Задачи

Задача 1. На конец консоли консольной балки с выносом консоли $\ell = 1 \text{ м}$ и параметрами: момент сопротивления площади поперечного сечения $W_x = 20 \text{ см}^3$ и моментом инерции площади поперечного сечения $I_x = 100 \text{ см}^4$ установлен без начальной скорости груз массой $m = 100 \text{ кг}$ и система предоставлена сама себе (рис. 4.7).

Определить частоту и амплитуду колебаний массы, а также максимальные напряжения в балке.

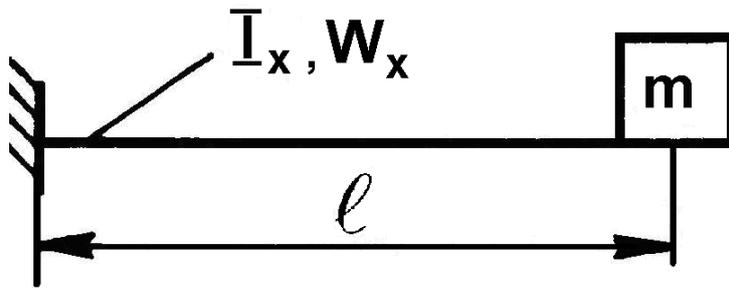


Рис. 4.7. К задаче 1

Задача 2. В системе, описанной в задаче 1, груз опускается на балку с начальной скоростью $V_0 = 0,1$ м/с.

Определить амплитуду колебаний и максимальные напряжения в балке.

Задача 3. В системе по задаче 1 груз падает на балку с высоты $h = 0,05$ м (рис. 4.8).

Определить амплитуду колебаний и максимальные напряжения в балке.

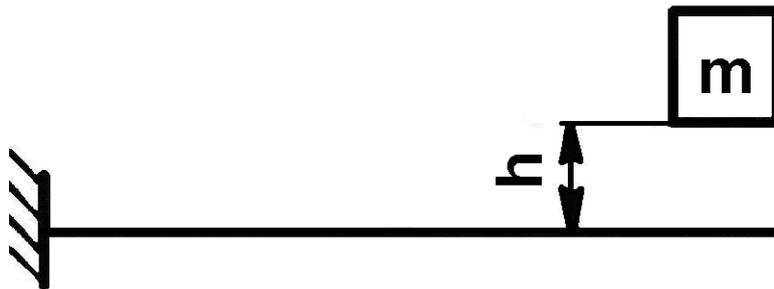


Рис. 4.8. К задаче 3

Задача 4. Определить амплитуду колебаний и максимальные напряжения в балке по условиям задачи 1, если груз с высоты $h = 0,05$ м падает по середине вылета консоли (рис. 4.9).

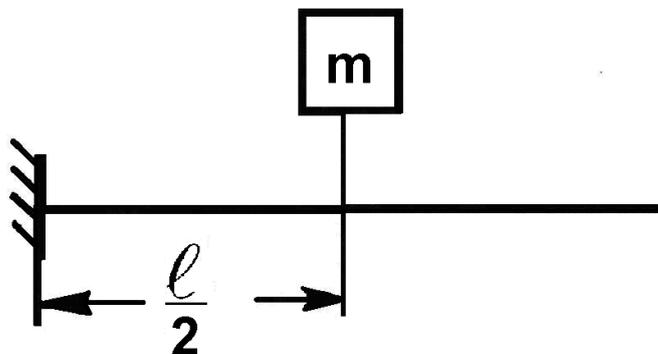


Рис. 4.9. К задаче 4

Задача 5. На консольный конец однопролётной балки с параметрами: $\ell = 2\text{ м}$; $I_x = 100\text{ см}^4$; $W_x = 20\text{ см}^3$ без начальной скорости устанавливают груз массой $m = 100\text{ кг}$ и систему предоставляют самой себе (рис. 4.10). Определить амплитуду возникающих колебаний и максимальные напряжения в балке.

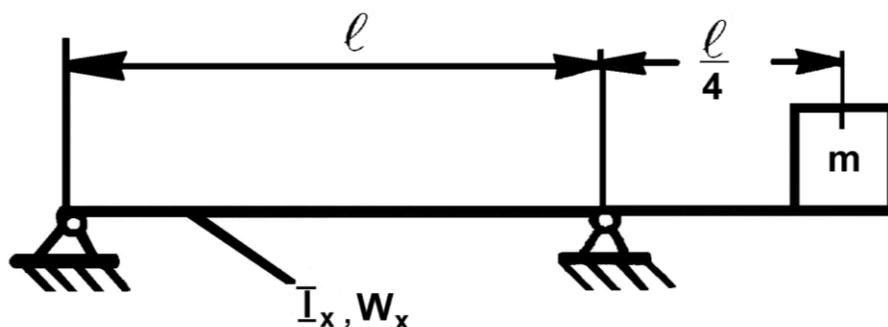


Рис. 4.10. К задаче 5

Задача 6. Определить амплитуду колебаний и максимальные напряжения в балке по условиям задачи 4.1.5, если груз падает на конец консоли с высоты $h = 0,05\text{ м}$ (рис. 4.11).

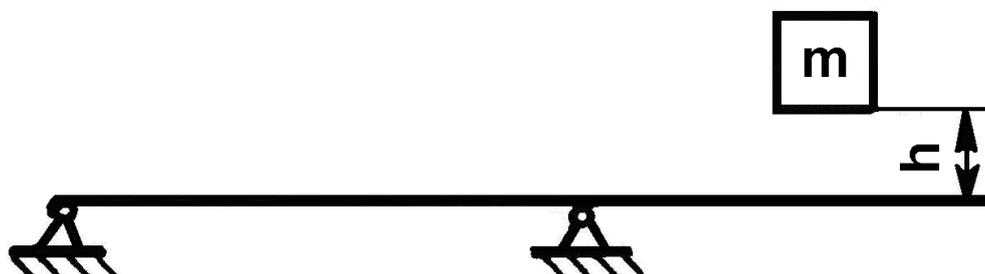


Рис. 4.11. К задаче 6

Задача 7. Определить амплитуду колебаний и максимальные напряжения балки по условиям задачи 4.1.5, если посередине её пролёта установлен груз с массой m и система предоставлена сама себе.

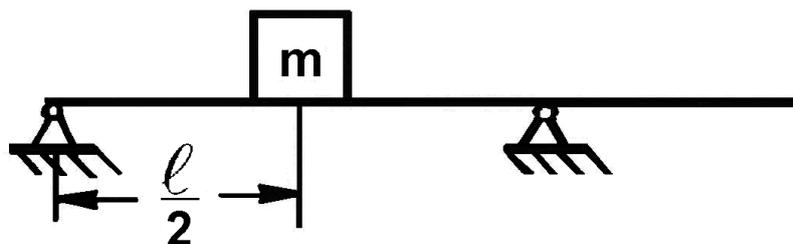


Рис. 4.12. К задаче 7

Задача 8. Определить амплитуду колебаний и максимальные напряжения в балке по условиям задачи 4.1.5, если груз массой m падает на балку в середине пролёта с высоты $h = 0,2$ м (рис. 4.13).

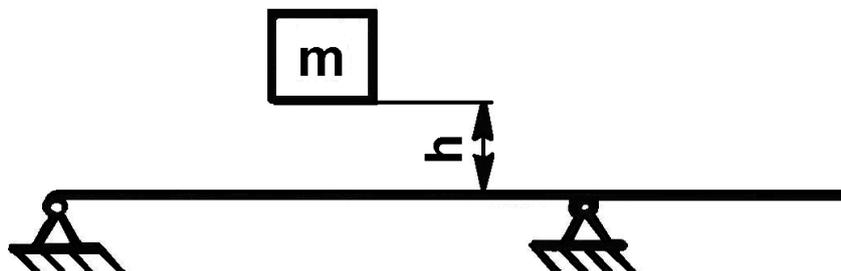


Рис.4.13. К задаче 8.

Задача 9. Определить амплитуду колебаний и максимальные напряжения в балке по условиям задачи 4.1.5, если груз устанавливают на балку на расстоянии $\frac{2}{3}l$ от левой опоры (рис.4.14).

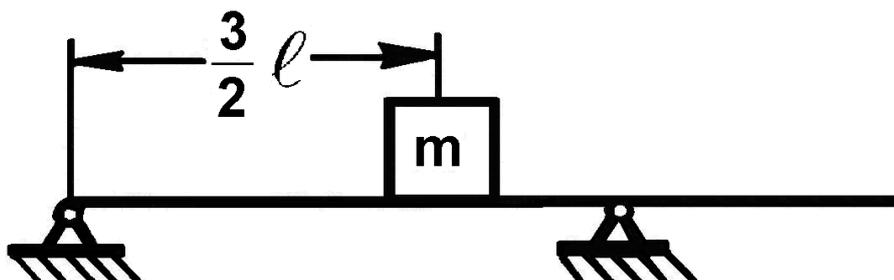


Рис. 4.14. К задаче 9

Задача 10. Определить амплитуду колебаний и максимальные напряжения в балке по условиям задачи 4.1.5, если груз массой m падает на балку с высоты $h = 0,2$ м на расстоянии $\frac{2}{3}l$ от левой опоры (рис. 4.15).

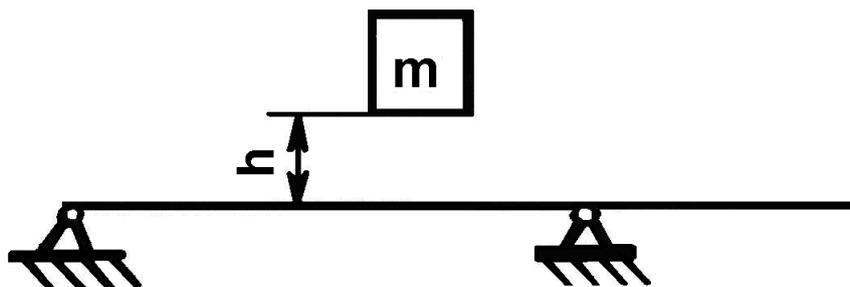


Рис. 4.15. К задаче 10

Задача 11. Груз массой $m = 1000$ кг опускается лебёдкой крана. Угловая скорость барабана лебёдки $n = 5$ об/мин, радиус $R = 400$ мм. Диаметр стального троса $d = 2$ см. В момент, когда выбег троса $\ell = 1$ м срабатывает тормоз и барабан мгновенно останавливается (рис. 4.16).

Определить максимальные напряжения в тросе.

Как изменятся эти напряжения, если торможение происходит при выбеге троса $\ell = 5$ м?

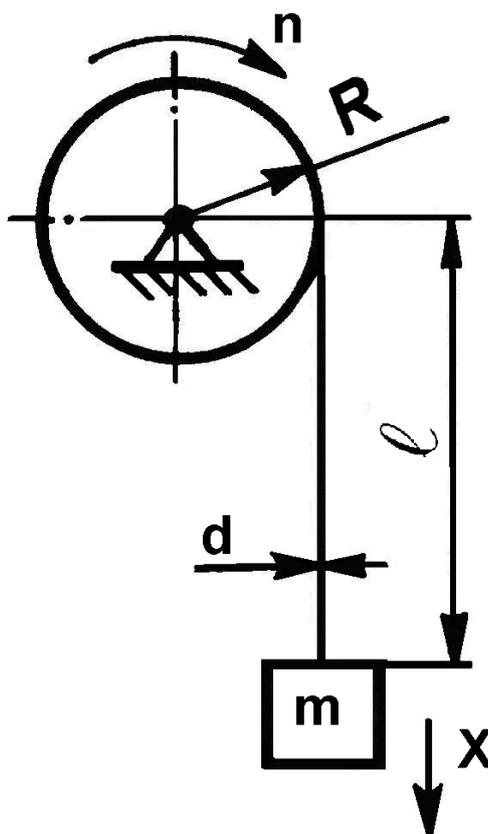


Рис. 4.16. К задаче 11

Задача 12. В механической системе по условиям задачи 11 груз отрывается от неподвижной поверхности. Выбег троса $\ell = 5$ м. Определить максимальные напряжения в тросе (рис. 4.17).

При какой скорости барабана n трос обрывается (предел прочности материала троса $\sigma_B = 400$ МПа)?

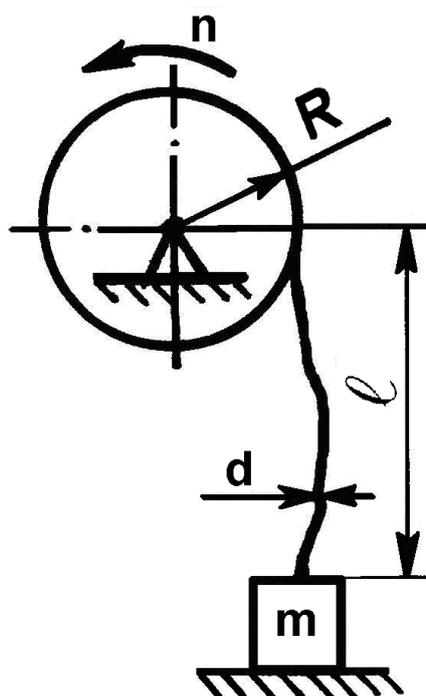


Рис. 4.17. К задаче 12

Задача 13. Барабан лебёдки поднимает груз массой $m = 1$ т. Угловая скорость барабана $n = 20$ об/мин, наружный диаметр - 800 мм. В произвольный момент времени привод барабана П мгновенно останавливается (срабатывает тормоз) (рис. 4.18). Определить максимальные напряжения в приводном валу барабана. Трос принять жёстким, безинерционным.

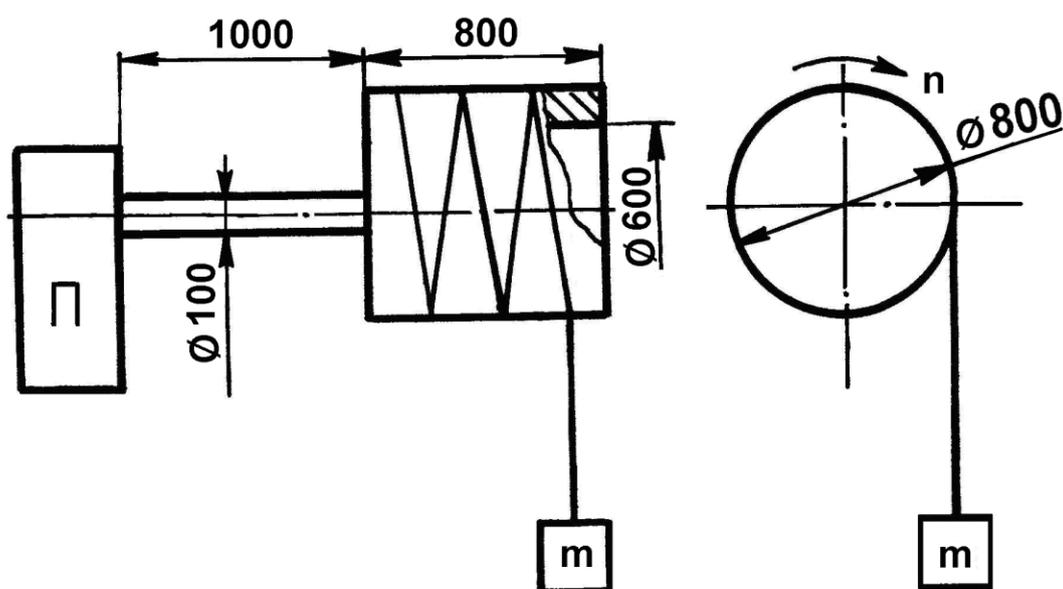


Рис. 4.18. К задаче 13

Задача 14. Заготовка массой $m = 2$ т и длиной $\ell = 2$ м выходит из нагревательной печи и по склизу, наклонённому к горизонту под углом $\alpha = 30^\circ$, соскальзывает на середину рольганга. Рольганг состоит из пустотелых роликов с наружным диаметром $D = 200$ мм и внутренним $d = 180$ мм. Расстояние между опорами роликов рольгангов $\ell = 1,2$ м, шаг роликов - 500 мм. Коэффициент трения скольжения заготовки по склизу $\mu = 0,3$ (рис. 4.19). Под печи находится на высоте $H = 0,3$ м над верхней образующей роликов рольганга.

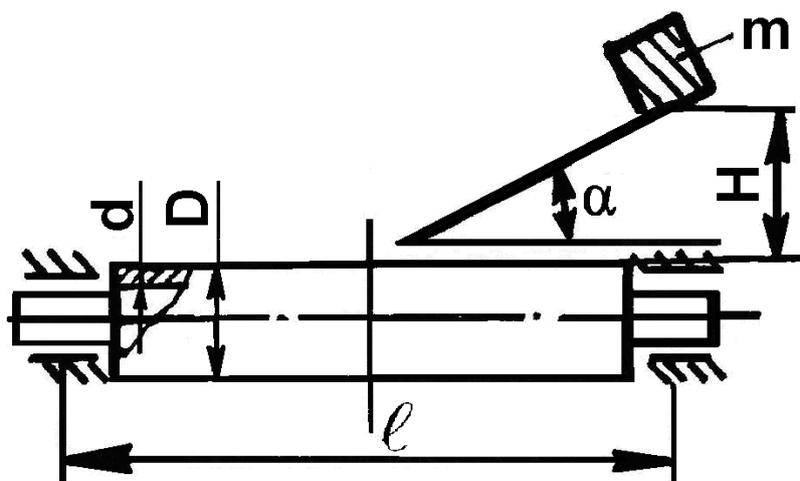


Рис. 4.19. К задаче 14

Определить максимальные напряжения в теле ролика и динамические реакции в опорах ролика.

Задача 15. Машина весом 25 кг смонтирована на пружинах и демпферах. Эквивалентная жёсткость пружины $k = 2 \cdot 10^4$ Н/м, эквивалентный коэффициент демпфирования $c = 300$ нс/м.

Определить амплитуду, частоту и фазу свободных колебаний при следующих начальных условиях:

- | | |
|--------------------|-------------------------|
| а) $X(0) = 0$ мм; | $\dot{X}(0) = 0$; |
| б) $X(0) = 20$ мм; | $\dot{X}(0) = 0$; |
| в) $X(0) = 0$ мм; | $\dot{X}(0) = 0,2$ м/с; |

г) $X(0) = 20 \text{ мм};$

$\dot{X}(0) = 0,2 \text{ м/с}.$

Задача 16. Лопастной ротор смесителя погружен в вязкую жидкость с коэффициентом демпфирования $c = 1 \text{ Нм}\cdot\text{с}$ и вращается в ней с угловой скоростью $n = 10 \text{ об/мин}$. Момент инерции лопастей ротора $I = 0,5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$, диаметр приводного вала $d = 8 \text{ мм}$, а его длина $\ell = 0,5 \text{ м}$ (рис. 4.20).

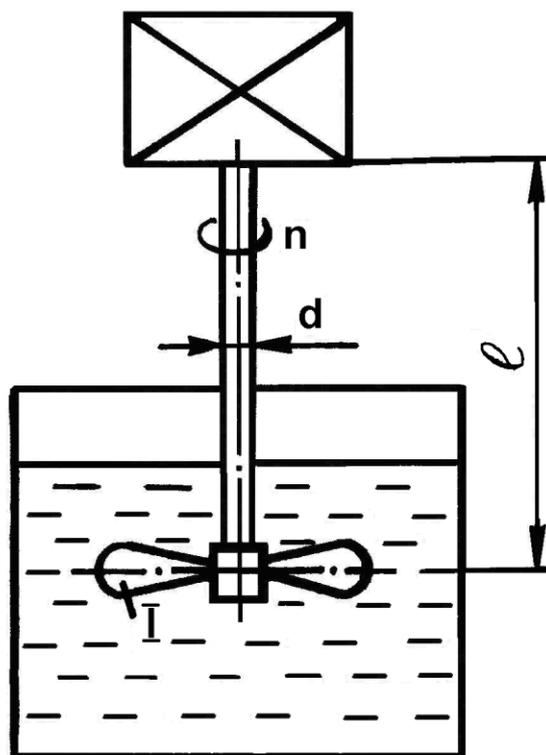


Рис. 4.20. К задаче 16

Определить время, в течение которого амплитуда колебаний лопастного ротора уменьшается в 10 раз после мгновенной остановки двигателя.

Задача 17. Определить коэффициент демпфирования механической системы, представленной на рис. 4.21, если вес груза $G = 10 \text{ Н}$, длина стержня $2\ell = 0,4 \text{ м}$, жёсткость пружины $k = 450 \text{ Н/м}$, период свободных колебаний $T_0 = 1 \text{ с}$. Стержень считать недеформируемым.

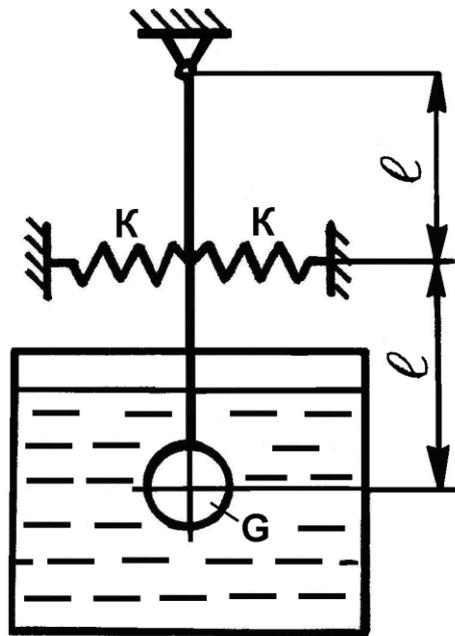


Рис.4.21. К задаче 17

Задача 18. Прибор для измерения вязкости (рис. 4.22) представляет собой трубку, закрытую с обоих торцов крышками и заполненную жидкостью. В трубке помещён груз массой $m = 50$ грамм, укрепленный на двух пружинах жёсткостью $k = 25$ Н/м каждая. Свободные колебания груза в трубке возбуждают выведением груза из положения статического равновесия.

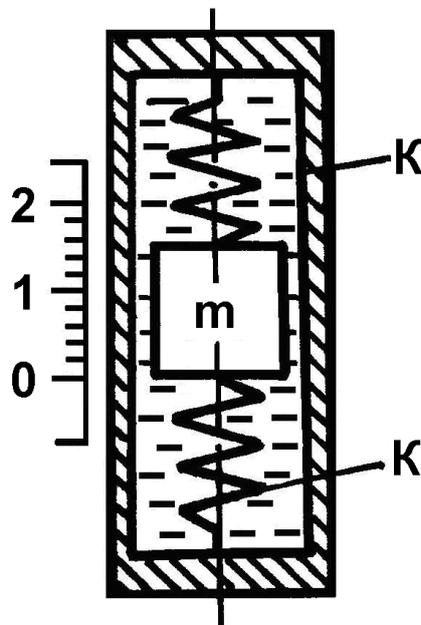


Рис. 4.22. К задаче 18.

Определить вязкость жидкости, если за 1,5 сек. амплитуда колебаний уменьшилась в 10 раз.

4.2. Вынужденные колебания систем с одной степенью свободы

4.2.1. Общие положения

В случае движения динамической системы под действием внешнего возмущения $F(f)$ или $M(f)$ дифференциальное уравнение движения становится неоднородным, и необходимо находить частное решение $X^*(f)$.

Для получения частного решения $X^*(f)$ применяют метод пробных или подходящих функций, в соответствии с которым пробная функция $X^*(f)$ представляет собой линейную комбинацию функции $F(f)$ и всех ее независимых производных с постоянными неопределенными коэффициентами. И, собственно, поиск частного решения сводится к определению этих коэффициентов.

Так, например, если $F(f)=A \sin bt$, то первая производная $Ab \cos bt$, вторая $Ab^2 \sin bt$ и т.д. Т.е. независимых функций только две: $\sin bt$ и $\cos bt$. Вид пробной функции $X^*(f)$:

$$X^*(f)=B \sin bt+C \cos bt.$$

Если $F(f)=Ae^{at}$, то первая производная - Aae^{at} ; вторая - $Aa^2 e^{at}$ и т.д. Тогда $X^* = Ae^{at} + Aae^{at} + Aa^2 e^{at} + \dots$, и пробная функция $X^*(f)=Be^{at}$.

Так как вид подходящей функции определяется видом функции внешнего возмущения, то принято анализировать движение динамической системы для каждого характерного вида внешнего возмущения в отдельности.

4.2.2. Гармоническое возмущение

При гармоническом возмущении $F(f)$ представляет синусоиду с постоянной амплитудой F_0 и частотой ω :

$$F(f)= F_0 \sin \omega t.$$

Пробная функция $X^*(f)_{B_2}$ составлена в виде:

$$X^*(f) = B_1 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t \quad (4.2)$$

Первая производная этой функции

$$\dot{X}^*(f) = -B_1 \omega \sin \omega t + B_2 \omega \cos \omega t,$$

вторая производная

$$\ddot{X}^*(f) = -B_1 \omega^2 \cos \omega t - B_2 \omega^2 \sin \omega t,$$

Подставляя полученные выражения в (4.1) и приравнявая коэффициенты при \sin и \cos в обеих частях полученного уравнения, получаем систему двух алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} B_1(-2\eta\omega\omega_c) + B_2(\omega_c^2 - \omega^2) = \frac{F_0}{m}; \\ B_1(\omega_c^2 - \omega^2) + B_2 2\eta\omega\omega_c = 0. \end{cases}$$

Решая, получим:

$$B_1 = \frac{F_0}{m} \left(-\frac{2\eta\omega\omega_c}{(\omega_c^2 - \omega^2)^2 + 4\eta^2\omega^2\omega_c^2} \right);$$

$$B_2 = \frac{F_0}{m} \frac{(\omega_c^2 - \omega^2)}{(\omega_c^2 - \omega^2)^2 + 4\eta^2\omega^2\omega_c^2}.$$

Подставляя выражения для B_1 и B_2 в (4.2), заменяя $m = \frac{k}{\omega_c^2}$ и сворачивая

\sin и \cos в одну функцию, получим:

$$X^*(f) = \frac{F_0}{k} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_c^2}\right)^2 + 4\eta^2 \frac{\omega^2}{\omega_c^2}}} \sin(\omega t - \gamma) = \ddot{X} \sin(\omega_c t - \gamma), \quad (4.3)$$

где γ - отставание относительно внешнего возмущения:

$$\gamma = \arctg \frac{2\eta\omega\omega_c}{\omega_c^2 - \omega^2} = \arctg \frac{2\eta \frac{\omega}{\omega_c}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_c^2}}. \quad (4.4)$$

Анализ выражения (4.3) показывает следующее.

1. Движение системы в соответствии с выражением (4.3) представляет собой гармонический процесс с частотой, равной частоте внешнего возмущения. Амплитуда реакции системы также постоянна и не зависит от начальных условий (не содержит произвольных постоянных).

Поэтому движение системы в соответствии с выражением (4.3) (частное решение дифференциального уравнения) называют установившейся реакцией системы или установившимися колебаниями.

2. Амплитуда установившейся реакции зависит от амплитуды и частоты внешнего возмущения. Отношение амплитуды установившейся реакции X к амплитуде статической реакции $X_c = \frac{F_0}{k}$ называют коэффициентом усиления K_y :

$$K_y = \frac{X}{X_c} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_c^2}\right)^2 + 4\eta^2 \frac{\omega^2}{\omega_c^2}}}, \quad (4.6)$$

Коэффициент усиления зависит от динамических свойств системы (собственная частота ω_c и безразмерный коэффициент затухания η) и частоты внешнего возмущения ω . Зависимость коэффициента усиления от отношения частоты внешнего возмущения к собственной частоте системы называют амплитудно-частотной характеристикой АЧХ (рис. 4.23).

3. При резонансе, когда $\omega = \omega_c$, коэффициент усиления зависит только от безразмерного коэффициента затухания η . При отсутствии демпфирования коэффициент усиления теоретически равен бесконечности.

4. Реакция системы $X^* = X \sin(\omega t - \gamma)$ и внешнее возмущение $F_0 \sin \omega t$ сдвинуты друг относительно друга на угол $-\gamma$ (отставание) и поэтому достигает максимума в разное время (время сдвига $\Delta t = \frac{\gamma}{\omega}$).

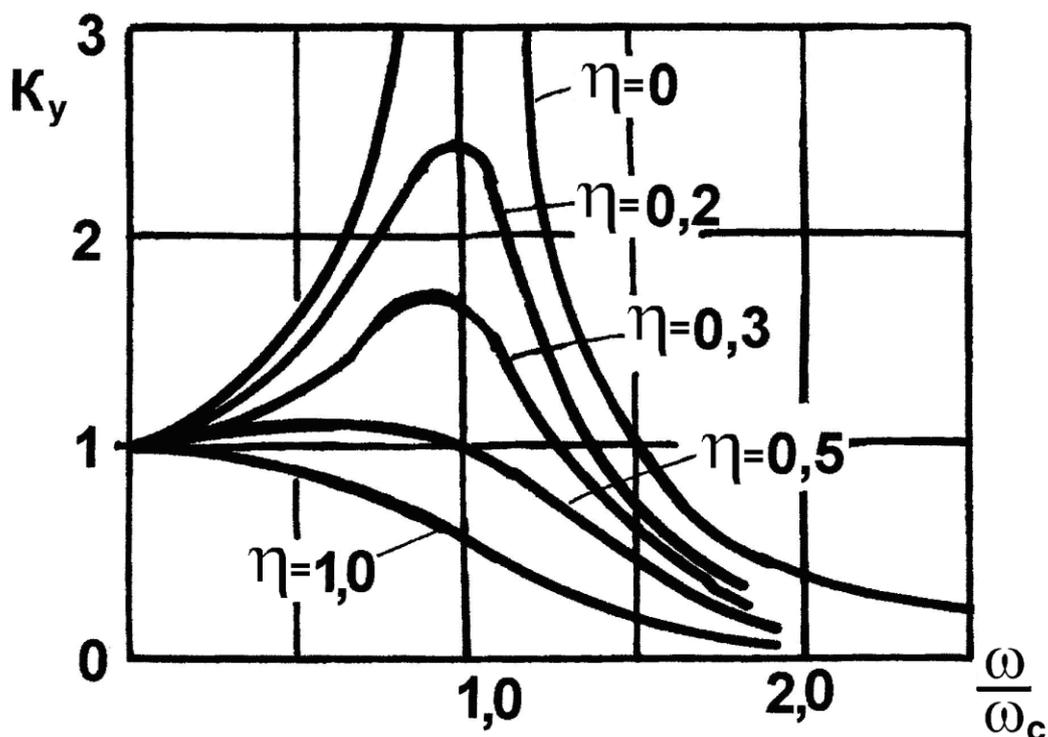


Рис. 4.23. Амплитудно-частотная характеристика системы с одной степенью свободы

Значения фазового угла γ зависят от η и отношения частот $\frac{\omega}{\omega_c}$

(рис. 4.24) и называется фазо-частотой характеристикой (ФЧХ) системы.

Для заданных η и $\frac{\omega}{\omega_c}$ фазовый угол величина постоянная и для

различных значений η и $\frac{\omega}{\omega_c}$ может находиться в диапазоне от 0° до 180° .

При резонансе γ всегда равен 90° .

Общее решение уравнения (4.1):

$$X(t) = X_0(t) + X^*(t) = Ae^{-\eta\omega_c t} \sin(\omega_s t + \alpha) + \frac{F_0}{k} K_y \sin(\omega t - \gamma)$$

представляет реакцию на гармоническое возмущение $X^*(t)$ и заданные начальные условия $X_0(t)$.

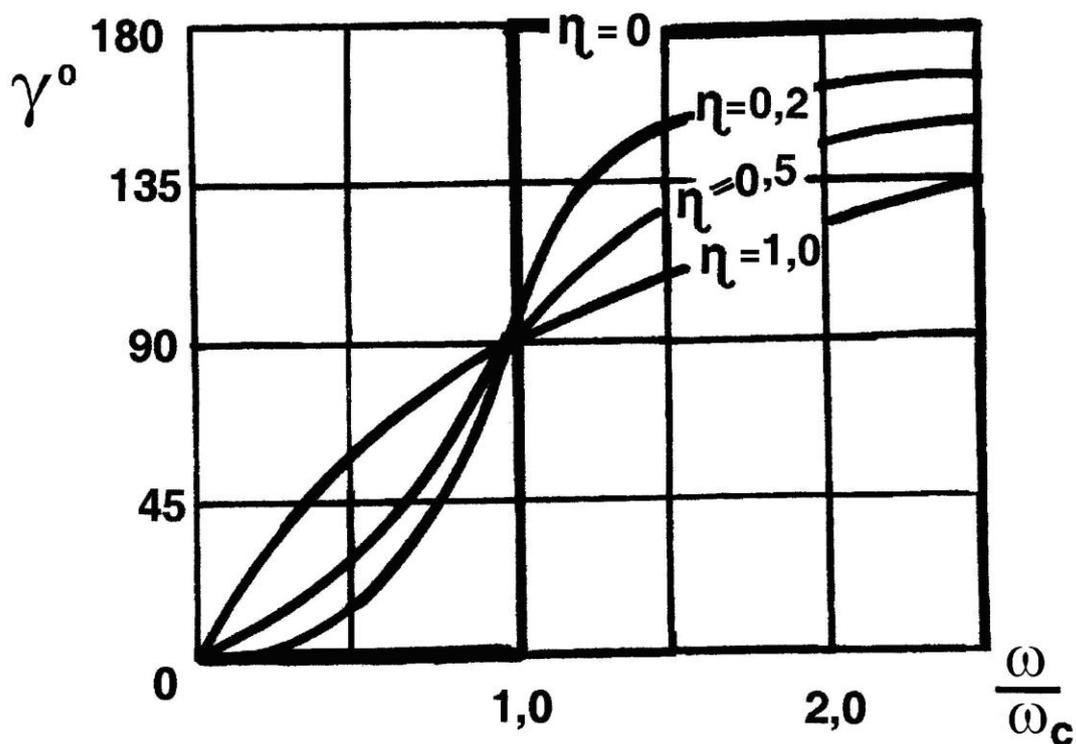


Рис. 4.24. Фазо-частотная характеристика системы с одной степенью свободы

В общем случае движение системы состоит из переходного движения и установившихся колебаний (рис. 4.25).

Переходное движение соответствует переходу из состояния, заданного начальными условиями к состоянию, заданному внешним возмущением и характеризуется значимыми величинами свободных колебаний.

Продолжительность переходного движения определяется демпфированием в системе.

Выражения (4.4), (4.5), (4.6) получены для случая, когда амплитуда внешнего возмущения постоянна.

Общие результаты несколько изменяются в частных случаях гармонического возмущения, амплитуда которого зависит от частоты.

Важные для технических приложений частные случаи гармонического возмущения приведены ниже.

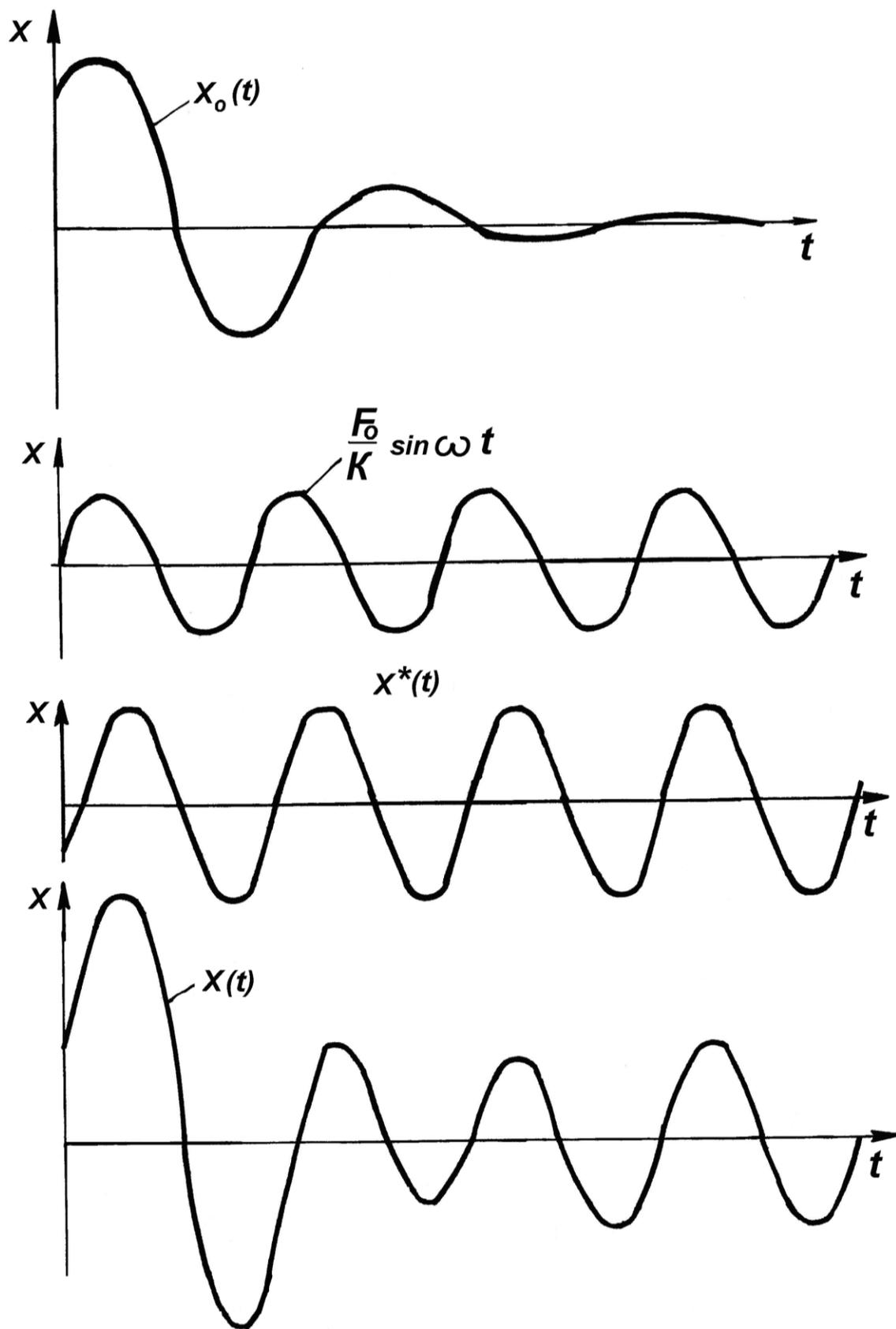


Рис. 4.25. Переходный процесс и установившиеся колебания системы

4.2.2.1. Неуравновешенность вращательного движения

Машины, имеющие составной частью ротор (электродвигатели, турбины, компрессоры, воздуходувки, эксгаустеры) называют роторными машинами.

В большинстве случаев эти машины в той или иной степени неуравновешенны, т.е. центр тяжести ротора не совпадает с осью его вращения. Неуравновешенность измеряется произведением эквивалентной неуравновешенной массы m на эксцентриситет e .

Схема роторной машины приведена на рис. 4.26, а: машина полной массой m_1 установлена на фундаменте через упругие элементы с жесткостями $\frac{k}{2}$ и демпфер с коэффициентом демпфирования c . В машине с угловой скоростью ω вращается ротор с неуравновешенностью $m\epsilon$ (m - часть m_1). Если машина зафиксирована в горизонтальной плоскости, то она движется по вертикали. Одномассовая динамическая модель машины приведена на рис. 4.26, б. При этом неуравновешенная масса перемещается на величину $X + e \sin \omega t$, а машина (массой $m_1 - m$) перемещается на величину $X(t)$.

Уравнение движения (по методу Ньютона):

$$(m_1 - m)\ddot{X} + m \frac{d^2}{dt^2}(X + e \sin \omega t) + c\dot{X} + kX = 0$$

или

$$m_1\ddot{X} + c\dot{X} + kX = me\omega^2 \sin \omega t = F_0 \sin \omega t .$$

Решение этого уравнения в соответствии с (4.5):

$$X(t) = K_y \cdot \frac{F_0}{k} \sin(\omega t - \gamma) = K_y \frac{me\omega^2}{k} \sin(\omega t - \gamma)$$

или умножив и разделив правую часть на m_1 :

$$X(t) = \frac{me\omega^2}{m_1\omega_c^2} K_y \sin(\omega t - \gamma). \quad (4.6)$$

Введя понятие неуравновешенности машины $m_1 X$, для отношения неуравновешенностей машины $m_1 X$ и ротора $m e$ получим выражение:

$$\frac{m_1 X}{m e} = \frac{\omega^2}{\omega_c^2} K_y.$$

Амплитудно-частотная характеристика этого отношения приведена на рис. 4.27.

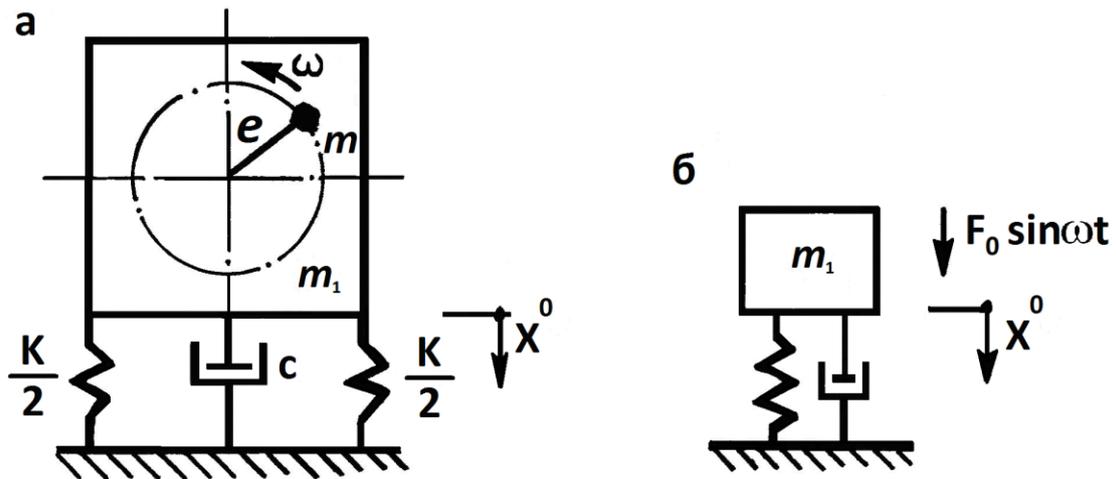


Рис. 4.26. Механическая модель роторной машины (а) и ее динамическая модель (б)

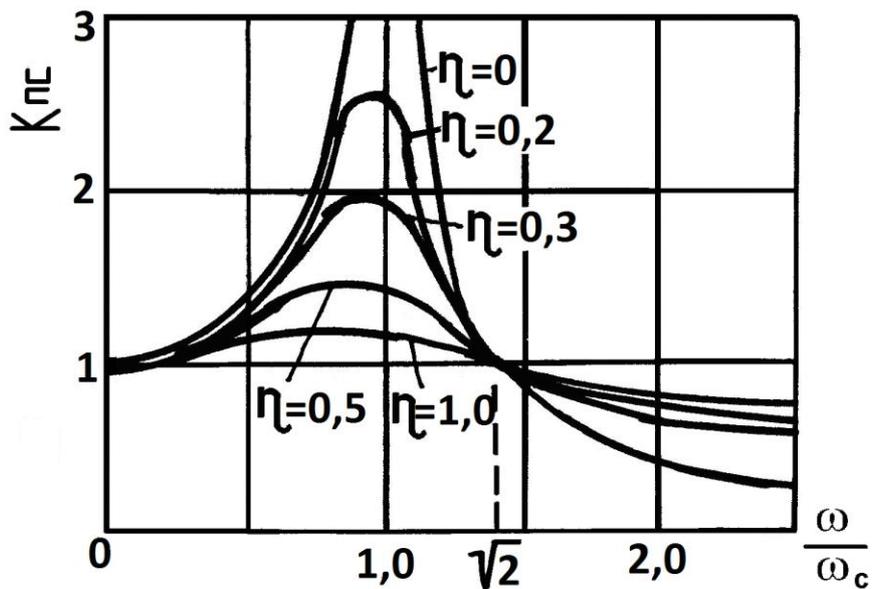


Рис. 4.27. Амплитудно-частотная характеристика роторной машины

4.2.2.2. Неуравновешенность возвратно-поступательного движения

На рис. 4.28 приведена схема машины, совершающей возвратно-поступательное движение (например, кривошипно-шатунный механизм).

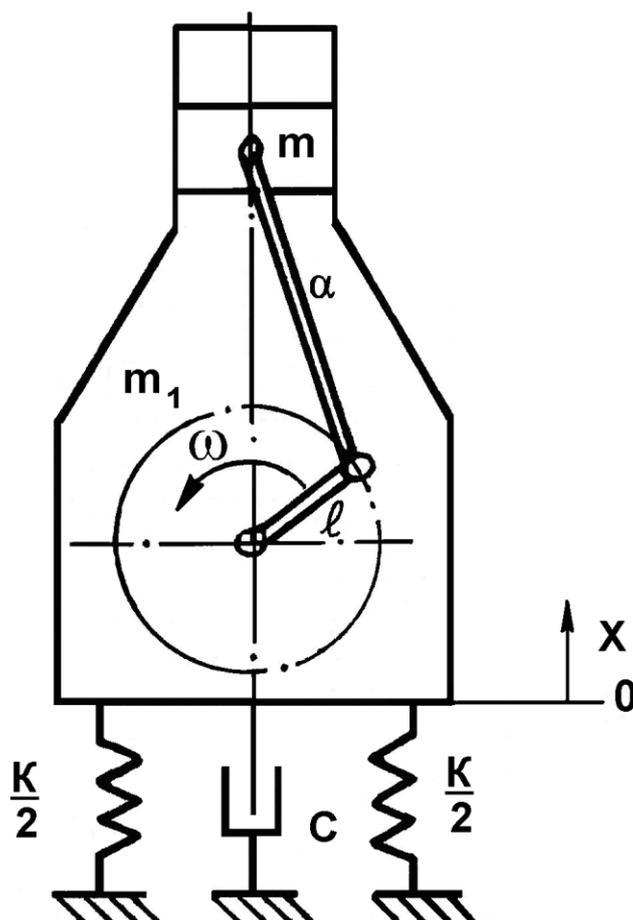


Рис. 4.28. Схема возвратно-поступательной машины

Возвратно-поступательно движущаяся масса m складывается из массы поршня (поршня) и некоторой части массы шатуна.

$$\text{Инерционная сила } F_{\text{и}} = m e \omega^2 \left(\sin \omega t + \frac{e}{a} \sin 2\omega t \right),$$

где e - радиус кривошипа;

a - длина шатуна.

При малых отношениях e/a , вторым слагаемым можно пренебречь и тогда

$$F_{И} = m e \omega^2 \sin \omega t = F_0 \sin \omega t .$$

Эта сила аналогична возмущающей силе при неуравновешенном вращательном движении, и движение машины m_1 аналогично описывается выражением (4.6).

4.2.2.3. Критическая скорость вращающихся валов

При вращении валов с насаженными на них несбалансированными дисками (маховиками) возникают поперечные колебания валов. При некоторых, так называемых, «критических» скоростях вращения поперечные колебания имеют недопустимо большие амплитуды.

Рассмотрим вертикальный вал с насаженным на него несбалансированным диском массой m (рис. 4.29). На рисунке: O - центр вращения вала, P - геометрический центр диска, M - центр тяжести диска.

Условия равновесия массы m по оси X :

$$m(X + e \cos(\omega t - \varphi)) = kX ,$$

по оси Y :

$$m(X + e \sin(\omega t - \gamma)) = kY ,$$

где e - эксцентриситет;

k - изгибная жесткость вала в точке закрепления диска.

Преобразуя и, обозначив $\omega_c = \frac{k}{m}$ - собственная частота изгибных колебаний массы m :

$$X = \frac{e \omega^2}{\omega_c^2 - \omega^2} \cos(\omega t - \varphi);$$

$$Y = \frac{e \omega^2}{\omega_c^2 - \omega^2} \sin(\omega t - \varphi).$$

Прогиб вала U :

$$U = \sqrt{X^2 + Y^2} = \frac{e}{\frac{\omega_c^2}{\omega^2} - 1}.$$

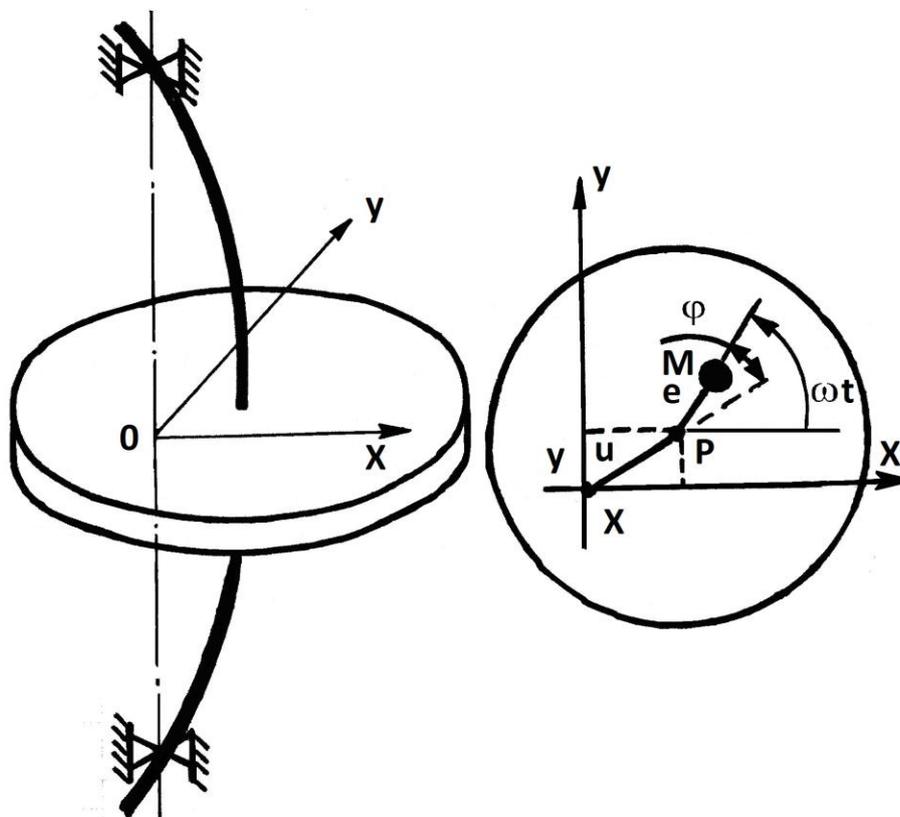


Рис. 4.29. Вращающийся вал с неуравновешенным диском (а)
и расчетная схема (б)

Зависимость относительного изгиба вала $\frac{u}{e}$ от отношения частот $\frac{\omega}{\omega_c}$

представлена на рис. 4.30.

На графике выделяются две характерные области.

В интервале $\omega < \omega_c$ (докритическая область) с ростом скорости вращения ω относительный прогиб вала растет до бесконечно больших значений (критическое состояние) при $\omega = \omega_c$.

Т.е. критическая скорость вала соответствует собственной частоте его изгибных колебаний.

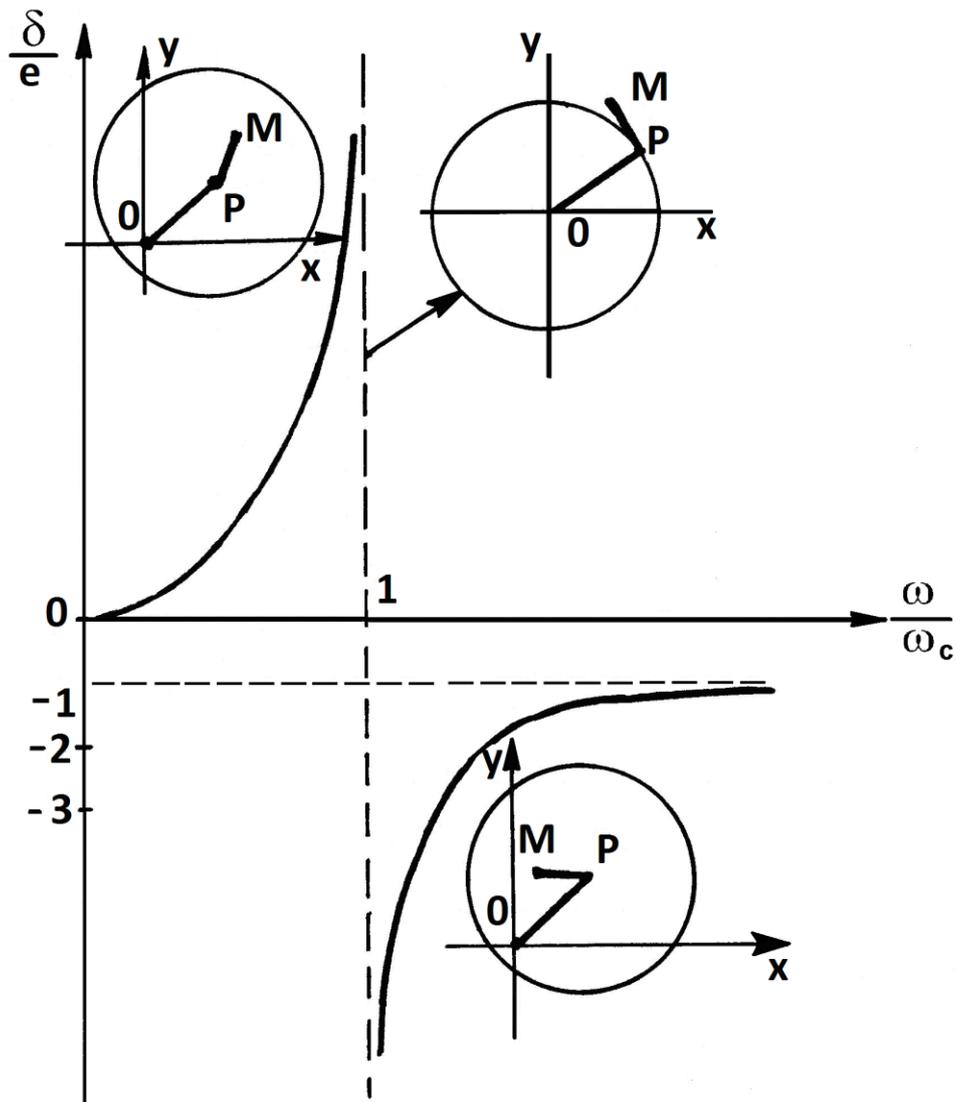


Рис. 4.30. Амплитудно-частотная характеристика вращающегося несбалансированного диска (без демпфирования)

В интервале $\omega > \omega_c$ (закритическая область) относительный прогиб с ростом частоты вращения вала стремится к значению -1.

Рассматривая прогиб вала и эксцентриситет диска как векторы, в докритической области они направлены в одну сторону и складываются. При этом центр тяжести M диска удаляется от оси O .

В закритической области U и e имеют разные знаки и вычитаются. При этом центр тяжести диска M стремится занять положение на оси O (эффект

«самоцентрирования» диска $\frac{U}{e} = -1$).

4.2.2.4. Виброизоляция машин

Виброизоляция машин - одно из наиболее действенных средств борьбы с колебаниями конструкций зданий и сооружений, вызванными работой машин. Виброизоляция применяется либо для уменьшения динамических воздействий, передаваемых машиной на поддерживающие конструкции, либо для снижения уровня вибраций приборов и прецизионных машин - вибраций, вызываемых колебаниями поддерживающих конструкций или основания (фундамента).

Технически виброизоляция представляет собой упругие и демпфирующие устройства, вводимые в структуру установки и обеспечивающие требуемые динамические свойства.

Если рассматривать динамическую модель машины с системой виброизоляции в вертикальной плоскости в виде, представленном на рис. 4.26, то передаваемая на фундамент сила F_{Π} равна:

$$F_{\Pi} = kX + c\dot{X},$$

в соответствии с (4.3) установившаяся реакция

$$\begin{aligned} X^*(t) &= \frac{F_0}{k} K_y \sin(\omega t - \gamma) = F_{\text{ЭКВ}} K_y \sin(\omega t - \gamma) = \\ &= F_{\text{ЭКВ}} K_y \sqrt{1 + 4\eta^2 \frac{\omega^2}{\omega_c^2}} \sin(\omega t - \gamma - \beta). \end{aligned}$$

Отношение амплитуды переданной силы F_{Π} к амплитуде приложенной (возмущающей) силы $F_{\text{ЭКВ}}$ называют коэффициентом передачи силы $K_{\text{ПС}}$.

$$K_{\text{ПС}} = \frac{F_{\Pi}}{F_{\text{ЭКВ}}} = \frac{F_{\text{ЭКВ}} K_y \sqrt{1 + 4\eta^2 \frac{\omega^2}{\omega_c^2}}}{F_{\text{ЭКВ}}}$$

или

$$K_{\text{ПС}} = K_y \sqrt{1 + 4\eta^2 \frac{\omega^2}{\omega_c^2}}; \quad F_{\Pi} = K_{\text{ПС}} F_{\text{ЭКВ}}. \quad (4.7)$$

Зависимости $K_{ПС}$ от отношения частот для различных значений демпфирования (η) проведены на рис. 4.31. При любом демпфировании кривые дают значение $K_{ПС} = 1$ при $\frac{\omega}{\omega_c} = 0$ и $\frac{\omega}{\omega_c} = \sqrt{2}$.

При этом, если машина работает в диапазоне частот $(0 \div \sqrt{2})\omega_c$, то увеличение демпфирования приводит к уменьшению коэффициента передачи сил. При рабочих частотах, превышающих $\omega_c \sqrt{2}$, увеличение демпфирования приводит к росту $K_{ПС}$.

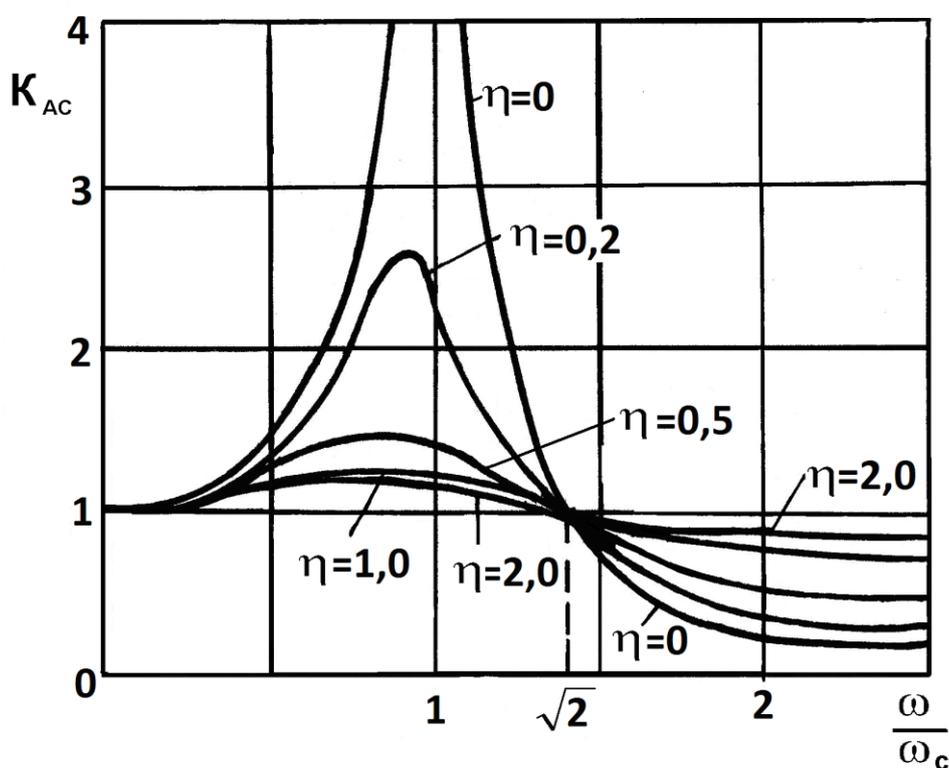


Рис. 4.31. Зависимость коэффициента передачи сил от отношения рабочей части к собственной

В случае, если машина работает с переменной скоростью, то $F_{ЭКВ}$, равная $m\epsilon\omega^2$, растет пропорционально квадрату скорости.

Тогда величина передаваемой силы $F_{П}$ равна

$$F_{П} = m\epsilon\omega^2 K_{ПС},$$

или, умножая и деля на ω_c^2

$$F_{II} = m e \omega_c^2 \frac{\omega^2}{\omega_c^2} K_y.$$

Произведение $m e \omega_c^2$ представляет собой возмущающуюся силу при рабочей частоте, равной собственной частоте системы ($\omega = \omega_c$) и для конкретной конструкции машины является постоянной величиной $F_c = m e \omega_c^2$. Тогда:

$$F_{II} = F_c \frac{\omega^2}{\omega_c^2} K_{ПС} \text{ и}$$

$$\frac{F_{II}}{F_c} = \frac{\omega^2}{\omega_c^2} K_{ПС}.$$

График этой зависимости приведен на рис. 4.32.

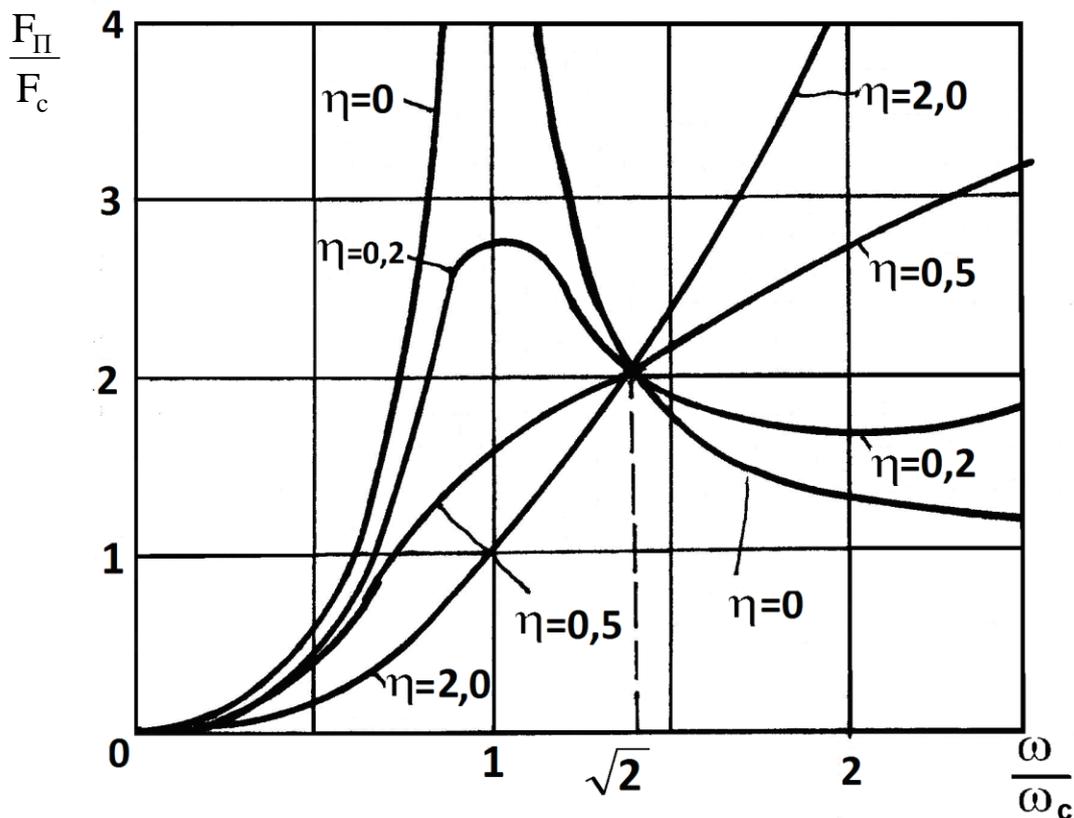


Рис. 4.32. Зависимость передаваемой силы от отношения частот для машин с переменной рабочей скоростью

Из графика следует, что при больших рабочих скоростях ($\omega \gg \omega_c$) и соответствующих малых значениях коэффициентах передачи сил (рис. 4.31) величины самих передаваемых сил могут быть существенно бóльшими.

4.2.2.5. Система на подвижной основе (кинематическое возмущение)

Возмущение динамической системы может быть приложено не только к массе, но и к опоре или основанию (рис. 4.33).

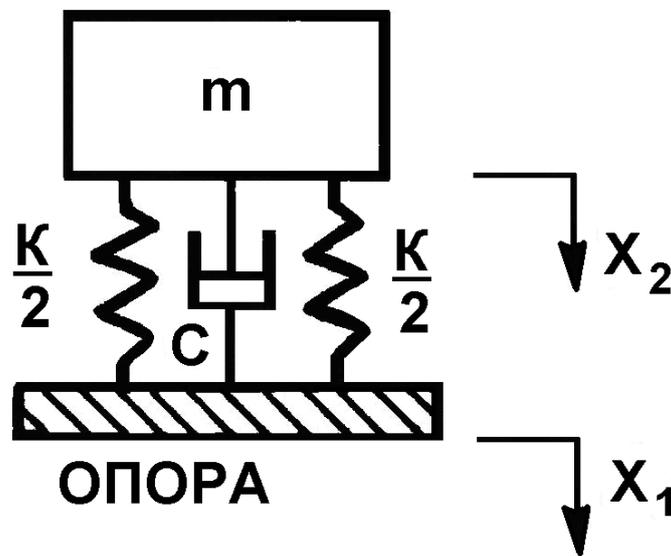


Рис. 4.33. Система на подвижной опоре

Уравнение движения такой системы, составленное по методу Ньютона:

$$m\ddot{X}_2 + k(X_2 - X_1) + c(\dot{X}_2 - \dot{X}_1) = 0, \quad (4.8)$$

или: $m\ddot{X}_2 + c\dot{X}_2 + kX_2 = c\dot{X}_1 + kX_1$.

При гармоническом движении опоры

$$X_1(t) = A_1 \sin \omega t,$$

тогда:

$$\begin{aligned} m\ddot{X}_2 + c\dot{X}_2 + kX_2 &= A_1(k \sin \omega t + c\omega \cos \omega t) = A_1 \sqrt{k^2 + c^2 \cdot \omega^2} \cdot \sin(\omega t + \gamma) = \\ &= F_{\text{экв}} \sin(\omega t + \gamma) \end{aligned} \quad (4.8)$$

Решение этого уравнения аналогично (4.3).

$$X_2(t) = K_y A_1 \sqrt{1 + 4\eta^2 \frac{\omega^2}{\omega_c^2}} \sin(\omega t + \gamma - \varphi).$$

Системы на подвижной опоре являются основной частью устройств для измерения движения тел (сейсмографов) (рис. 4.34).

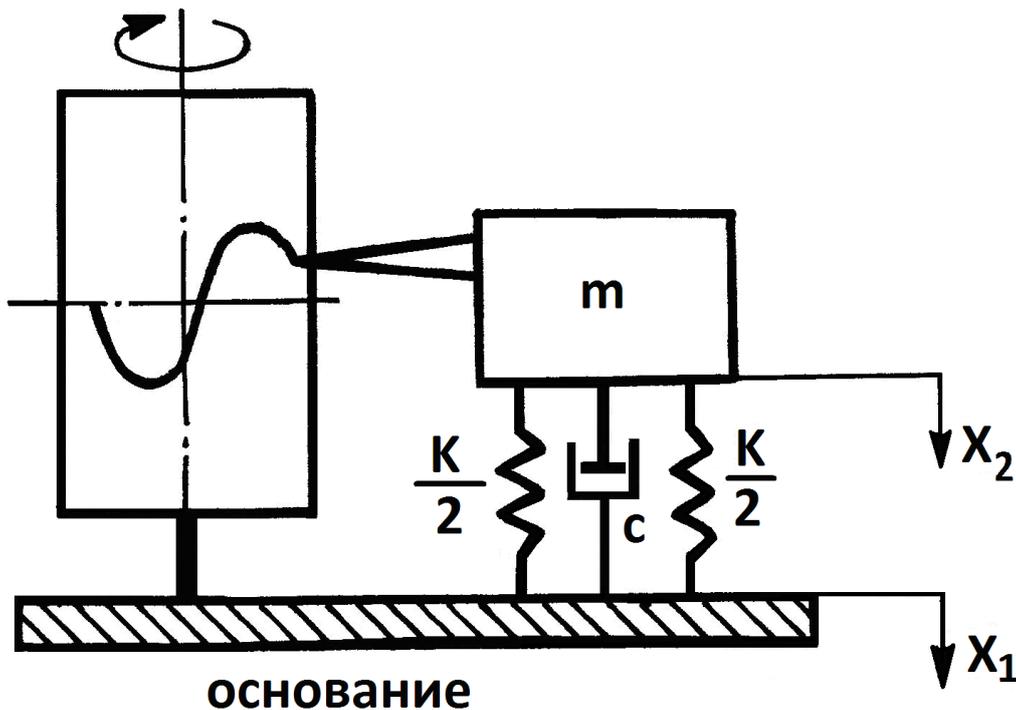


Рис. 4.34. Схема сейсмографа

Перемещение основания прибора равно $X_1(t)$, перемещение массы m равно $X_2(t)$, а относительное движение $X_2(t) - X_1(t)$ фиксируется пером на вращающемся барабане («разворачивается» во времени). Это относительное движение показывает движение основания.

Движение системы описывается уравнением (4.8). Представим относительное движение $X_2(t) - X_1(t)$ как $X(t) = X_2(t) - X_1(t)$.

Тогда $\ddot{X}_2(t) = \ddot{X}(t) + \ddot{X}_1(t)$ и, подставляя в (4.8),

$$m\ddot{X} + c\dot{X} + kX = -m\ddot{X}_1$$

При гармоническом движении основания:

$$X_1(t) = A_1 \sin \omega t, \quad \ddot{X}_1(t) = -A_1 \omega^2 \sin \omega t$$

и тогда:

$$m\ddot{X} + c\dot{X} + kX = mA_1\omega^2 \sin \omega t.$$

Решение этого уравнения аналогично (4.3):

$$X = \frac{m\omega^2 A_1}{k} K_y \sin(\omega t - \varphi) = \frac{\omega}{\omega_c^2} K_y A_1 \sin(\omega t - \varphi) = A \sin(\omega t - \varphi).$$

Отношение амплитуд:

$$\frac{A}{A_1} = \frac{\omega^2}{\omega_c^2} K_y. \quad (4.9)$$

График для выражения (4.9) приведен на рис. 4.35.

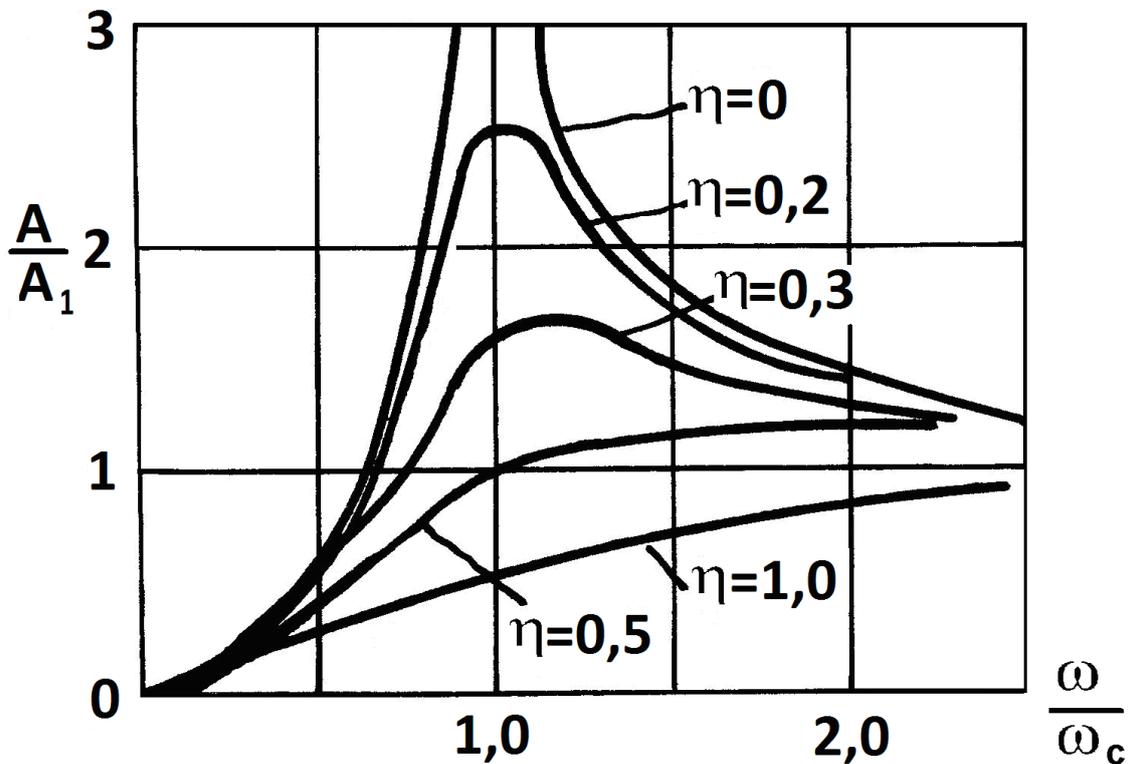


Рис. 4.35. Установившаяся реакция систематического прибора

В области высоких частот отношение амплитуд приближается к единице и тогда измеряемое (фиксируемое) относительное перемещение равно перемещению основания.

Прибор для измерения перемещения называют виброметром.

В области низких частот (высокая собственная частота прибора) такой инструмент может применяться для измерения ускорения и называется акселерометром.

Если $X_1(t) = A_1 \sin \omega t$, то ускорение $a_1 = \ddot{X}_1 = -A_1 \omega^2 \sin \omega t$.

Из (4.9):

$$\ddot{X}_1(t) = \frac{K_y}{\omega_c^2} \omega^2 A_1 \sin(\omega t - \varphi).$$

Измеренное $X(t)$ является мерилем ускорения, если считать K_y константой.

При измерении полигармонических возмущений наблюдаются амплитудные и фазовые искажения составляющих гармоник различной частоты.

Для получения одинаковых усилений ускорения на различных частотах необходимо, чтобы K_y имел одинаковые значения.

Амплитудным искажением АИ называют величину, определяемую выражением:

$$АИ = (K_y - 1) 100(\%).$$

График этой зависимости приведен на рис. 4.36. На практике для уменьшения амплитудных искажений акселерометры конструируются со значениями $\eta = (0,6 \div 0,7)$.

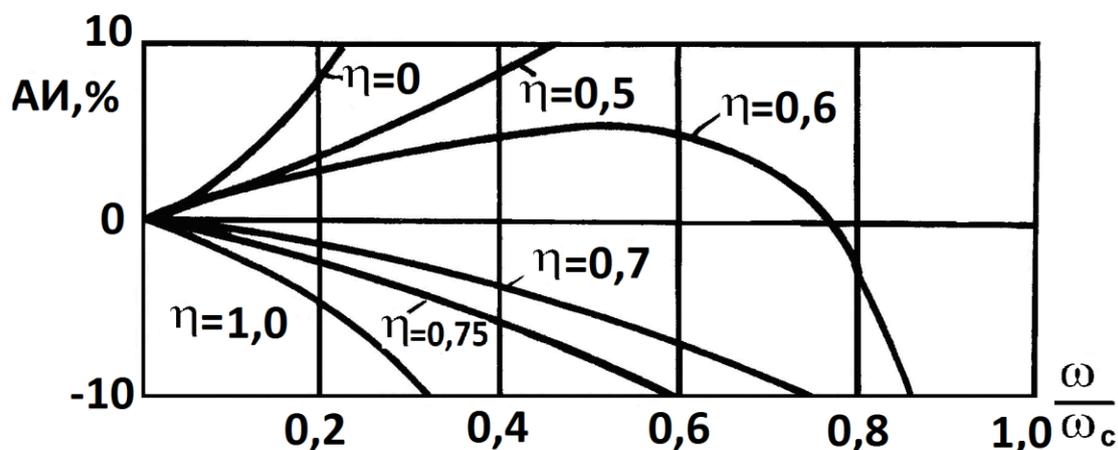


Рис. 4.36. Амплитудное искажение показаний акселерометра

Если фаза зарегистрированных относительных гармоник отличается от фазы измеряемых гармоник, то имеет место фазовое искажение. Сдвиг фаз φ увеличивается линейно при увеличении частоты гармонического движения при нулевом фазовом искажении. При $\frac{\omega}{\omega_c} = 1$ сдвиг фаз всегда равен 90° .

Для получения нулевого фазового искажения при частотах меньше собственной сдвиг фаз должен быть $\frac{\omega}{\omega_c} 90^\circ$.

Тогда фазовое искажение ФИ равно:

$$\text{ФИ} = \left(\varphi - \frac{\omega}{\omega_c} 90^\circ \right).$$

На рис. 4.37 показан график ФИ, из которого следует, что для снижения фазовых искажений требуется соответствующее демпфирование.

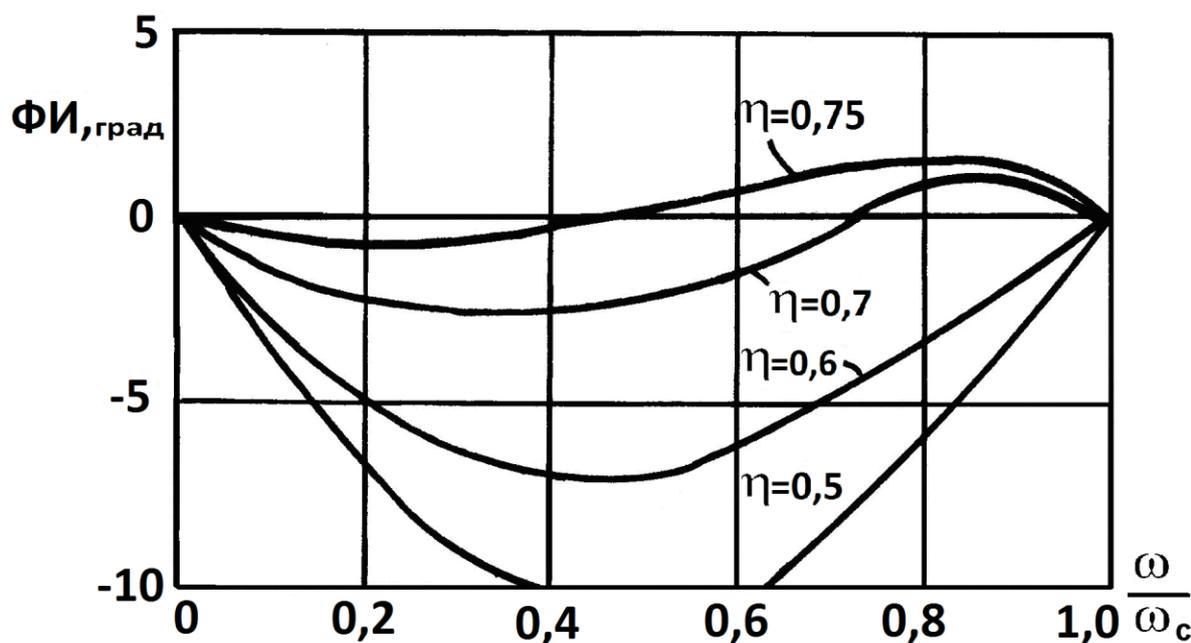


Рис. 4.37. Фазовое искажение показаний акселерометра

По сравнению с виброметром акселерометр может иметь очень малые размеры.

Интегрированием сигнала, снятого с акселерометра, можно получить соответствующую скорость и перемещение.

4.2.2.6. Периодическое возмущение

Действующие на машины силы чаще имеют периодический характер и редко чисто гармонический.

Периодическая сила $F(t)$ может быть разложена на гармонические составляющие при помощи ряда Фурье:

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t),$$

где ω - несущая (основная частота) $\omega = \frac{2\pi}{T}$;

T - период функции $F(t)$;

n - целое положительное число;

a_n, b_n - коэффициент бесконечного ряда.

Тогда уравнение движения имеет вид:

$$m\ddot{X} + c\dot{X} + kX = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t).$$

В соответствии с принципом суперпозиции реакция системы на сумму гармонических составляющих представляет собой сумму реакций системы на каждое гармоническое возмущение в отдельности.

Тогда установившаяся реакция системы

$$X(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_{yn}}{k} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \sin(n\omega t - \gamma_n),$$

где K_{yn} - коэффициент усиления на n -ной гармонической составляющей.

4.2.3. Примеры решения задач

Пример 1. Конгрессор весом $G = 4900\text{Н}$ установлен на демпферах, обеспечивающих безразмерный коэффициент затухания $\eta = 0,1$.

Вес неуравновешенных частей $G_1 = 490$ Н, радиус кривошипа 15 мм, угловая скорость 1450 об/мин.

Определить жесткость пружин, которые обеспечивали бы передачу на фундамент только 20% неуравновешенной силы, а также величину этой силы.

Решение

Коэффициент передачи сил при виброизоляции машин:

$$K_{\text{пс}} = K_y \sqrt{1 + 4\eta^2 \frac{\omega^2}{\omega_c^2}}$$

или:

$$K_{\text{пс}} = \frac{\sqrt{1 + 4\eta^2 \frac{\omega^2}{\omega_c^2}}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_c^2}\right)^2 + 4\eta^2 \frac{\omega^2}{\omega_c^2}}}$$

Обозначив $x = \frac{\omega^2}{\omega_c^2}$, возведя обе части уравнения в квадрат и группируя

слагаемые, получим:

$$K_{\text{пс}}^2 x^2 + (4\eta^2 K_{\text{пс}}^2 - 4\eta^2 - 2K_{\text{пс}}^2)x + (K_{\text{пс}}^2 - 1) = 0; \quad (\text{a})$$

обозначим:

$$a = K_{\text{пс}}^2 = 0,04;$$

$$b = (4\eta^2 K_{\text{пс}}^2 - 4\eta^2 - 2K_{\text{пс}}^2) = -0,104;$$

$$c = (K_{\text{пс}}^2 - 1) = -0,96,$$

находим положительный корень квадратного уравнения (a):

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2} = 6,35.$$

Таким образом, $\frac{\omega^2}{\omega_c^2} = 6,35$, $\frac{\omega}{\omega_c} = 2,52$.

При частоте возмущения

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{3,14 \cdot 1450}{30} = 145 \text{ 1/с}$$

требуемая собственная частота

$$\omega_c = \frac{\omega}{2,52} = \frac{145}{2,52} = 57,5 \text{ 1/с.}$$

и жесткость пружин k :

$$k = m\omega_c^2 = \frac{4900}{9,81} \cdot (57,5)^2 = 0,16 \cdot 10^7 \text{ Н/м.}$$

Амплитуда силы F_{Π} , действующей (переданной) на фундамент силы F_{Π} :

$$F_{\Pi} = K_{\text{пс}} F_{\text{эв}} = K_{\text{пс}} \cdot m_1 e \omega^2 = 0,2 \cdot \frac{490}{9,8} \cdot 10^{-2} 145^2 = 2,1 \text{ кН.}$$

Пример 2. Колесо с прикрепленным к нему с помощью пружины грузом G катится со скоростью $V = 18 \text{ км/час}$ по волнистой поверхности с полупериодом $\ell = 0,31 \text{ м}$ и амплитудой $a = 20 \text{ мм}$ (рис. 4.38). Статическая осадка пружины $\delta = 1 \text{ мм}$. Определить амплитуду вынужденных колебаний груза по вертикальной оси.

При какой скорости V амплитуда колебаний тележки максимальна?

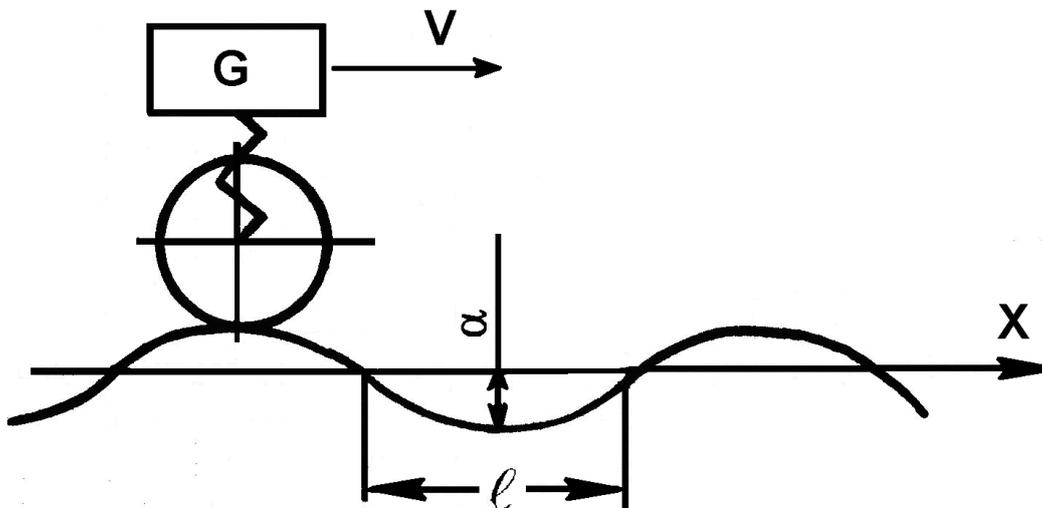


Рис. 4.38. К примеру 2

Решение

Амплитуда вынужденных колебаний Y связана с амплитудой внешнего возмущения Y_1 соотношением

$$Y = K_y Y_1 = Y_1 \frac{1}{\left|1 - \frac{\omega^2}{\omega_c^2}\right|}.$$

Функция внешнего возмущения

$$Y_1 = a \sin \frac{\pi X}{\ell}$$

или во временной области, учитывая, что $X = Vt$:

$$Y_1 = a \sin \frac{\pi V}{\ell} t,$$

где $\frac{\pi V}{\ell} = \omega$ - частота

$$\omega = \frac{\pi \cdot 18 \cdot 1000}{3600 \cdot \ell} = \frac{\pi \cdot 5}{\ell} = \frac{3,14 \cdot 5}{0,31} = 50 \text{ 1/с.}$$

$$\omega^2 = 2500$$

Собственная частота ω_c :

$$\omega_c^2 = \frac{k}{m} = \frac{G}{\delta m} = \frac{mg}{\delta m} = \frac{g}{\delta} = \frac{9,81}{0,001} = 9810 \text{ 1/с}^2.$$

$$\text{Тогда } K_y = \frac{1}{\left|1 - \frac{2500}{9810}\right|} = 1,35.$$

Амплитуда вынужденных колебаний:

$$Y = 20 \cdot 1,35 = 27 \text{ мм.}$$

Максимальная амплитуда при резонансе, когда

$$\omega = \omega_c = \frac{\pi V}{\ell} = 99 \text{ 1/с;}$$

$$V = \frac{99 \ell}{\pi} = \frac{99 \cdot 0,31}{3,14} = 9,9 \text{ м/с} = 35,6 \text{ км/час.}$$

Пример 3. Для системы, изображенной на рис. 4.33, определить ускорение массы m и действующую на нее силу, если основание движется по закону $X_1(t) = A_1 \sin \omega t$.

Определить числовые значения величин, если $k = 10^6 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$; $c = 4 \cdot 10^3 \frac{\text{Нс}}{\text{м}}$; $A_1 = 10^{-2} \text{ м}$; $\omega = 50 \text{ 1/с}$; $m = 100 \text{ кг}$.

Решение

Ускорение массы m определяется как вторая производная от функции перемещения массы $X_2(t) = A_1 K_y \sqrt{1 + 4\eta^2 \frac{\omega^2}{\omega_c^2}} \sin(\omega t - \varphi - \gamma)$.

Амплитуда ускорения

$$\ddot{X}_2 = \omega^2 A_1 K_y \sqrt{1 + 4 \frac{\omega^2}{\omega_c^2}};$$

$$\omega_c^2 = \frac{k}{m} = \frac{10^6}{10^2} = 10^4 \text{ 1/с}^2; \quad \eta = \frac{c}{2m\omega_c} = \frac{4 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^2 \cdot 10^2} = 0,2;$$

$$\frac{\omega^2}{\omega_c^2} = \left(\frac{50}{100} \right) \frac{50}{100} = 0,25.$$

$$K_y = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_c^2}\right)^2 + 4\eta^2 \frac{\omega^2}{\omega_c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{(0,75)^2 + 4 \cdot 0,2^2 \cdot 0,25}} = 1,29;$$

$$\ddot{X}_2 = 50^2 \cdot 10^{-2} \cdot 1,29 \cdot \sqrt{1 + 4 \cdot 0,04 \cdot 0,25} = 6,45 \text{ м/с}^2.$$

Максимальная сила $F = m\ddot{X}_2 = 100 \cdot 6,45 = 645 \text{ Н}$.

Пример 4. На гибкий стальной вал диаметром $d = 5 \text{ мм}$ (рис. 4.39) длиной $2\ell = 500 \text{ мм}$ насажен диск диаметром $D = 100 \text{ мм}$ и толщиной $h = 10 \text{ мм}$. Центр тяжести диска O_1 расположен на расстоянии $e = 1 \text{ мм}$ от оси вращения вала O .

Определить критическую скорость вала $\omega_{кр}$ и наибольшие напряжения в нем при $\omega = 100$ 1/с.

Массой вала пренебречь.

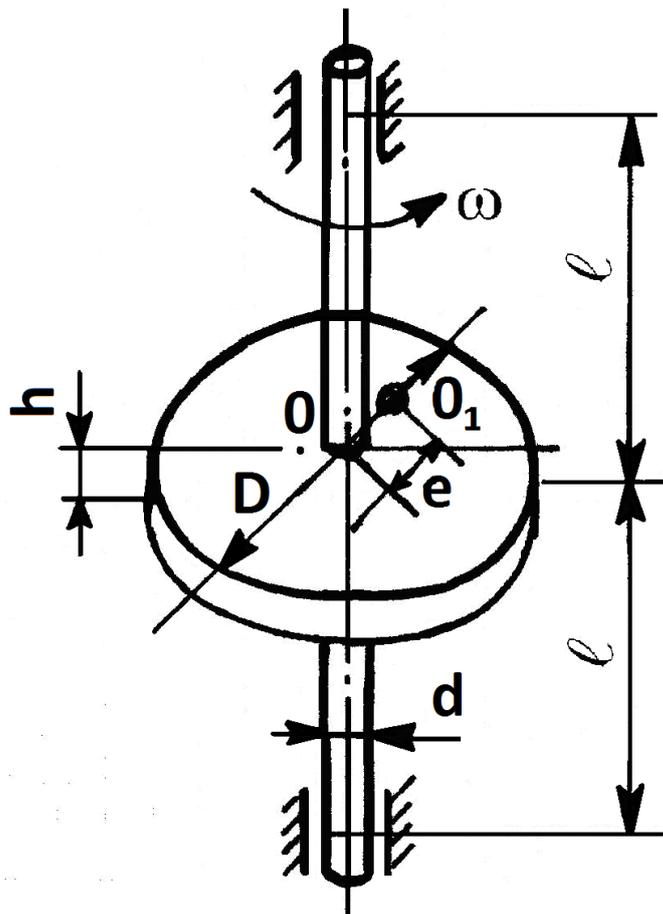


Рис. 4.39. К примеру 4

Решение

Критическая скорость вала $\omega_{кр}$ равна собственной частоте изгибных колебаний вала:

$$\omega_{кр} = \omega_c = \sqrt{\frac{k_{из}}{m}},$$

где $k_{из}$ - изгибная жесткость вала в сечении установки диска;

m - масса диска.

Масса диска:

$$m = \frac{\pi D^2}{4} \cdot h \cdot \rho = \frac{3,14 \cdot 0,1^2}{4} \cdot 10^{-2} \cdot 7800 = 0,6 \text{ кг.}$$

Изгибная жесткость $k_{и}$ равна:

$$k_{и} = \frac{P}{\delta},$$

где δ - прогиб в сечении приложения нагрузки P .

Для двухопорной балки с нагрузкой по середине пролета:

$$\delta = \frac{P\ell^3}{6EI_x},$$

тогда

$$k_{и} = \frac{6EI_x}{\ell^3}.$$

Для круглого поперечного сечения

$$I_x = 0,05d^4 = 0,05 \cdot (5 \cdot 10^{-3})^4 = 10^{-4} \cdot 5^{-5} = 3,1 \cdot 10^{-11} \text{ м}^4;$$

$$k_{и} = \frac{6 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 3,1 \cdot 10^{11}}{0,25^3} = 24 \cdot 10^3 \frac{\text{Н}}{\text{м}};$$

$$\omega_c = \sqrt{\frac{2,4 \cdot 10^3}{0,6}} = 63 \text{ 1/с.}$$

Прогиб вала

$$u = \frac{e}{\frac{\omega_c^2}{\omega^2} - 1} = \frac{10^{-3}}{\frac{63^2}{100^2} - 1} = 1,67 \text{ мм.}$$

Сила P , вызывающая такой прогиб:

$$P = k_{и} \cdot u = 2,4 \cdot 10^3 \cdot 10^{-3} \cdot 1,67 = 4 \text{ Н.}$$

Изгибающий момент в сечении диска:

$$M_{и} = \frac{P}{2} \cdot \ell = \frac{4}{2} \cdot 0,25 = 0,5 \text{ Нм.}$$

Момент сопротивления сечения вала:

$$W_x = 0,1 \cdot d^3 = 0,1(5 \cdot 10^{-3})^3 = 12,5 \cdot 10^{-9} \text{ м}^3.$$

Напряжение изгиба:

$$\sigma = \frac{M_{и}}{W_x} = \frac{0,5}{12,5} \cdot 10^9 = 40 \text{ МПа.}$$

Пример 5. На динамическую систему с одной степенью свободы действует периодическое возмущение $F(t)$, изменяющееся в соответствии с графиком, приведенным на рис. 4.40. Без учета демпфирования параметры системы обеспечивают значение отношения $\frac{\omega}{\omega_c} = 0,9$.

Определить амплитуду установившихся вынужденных колебаний.

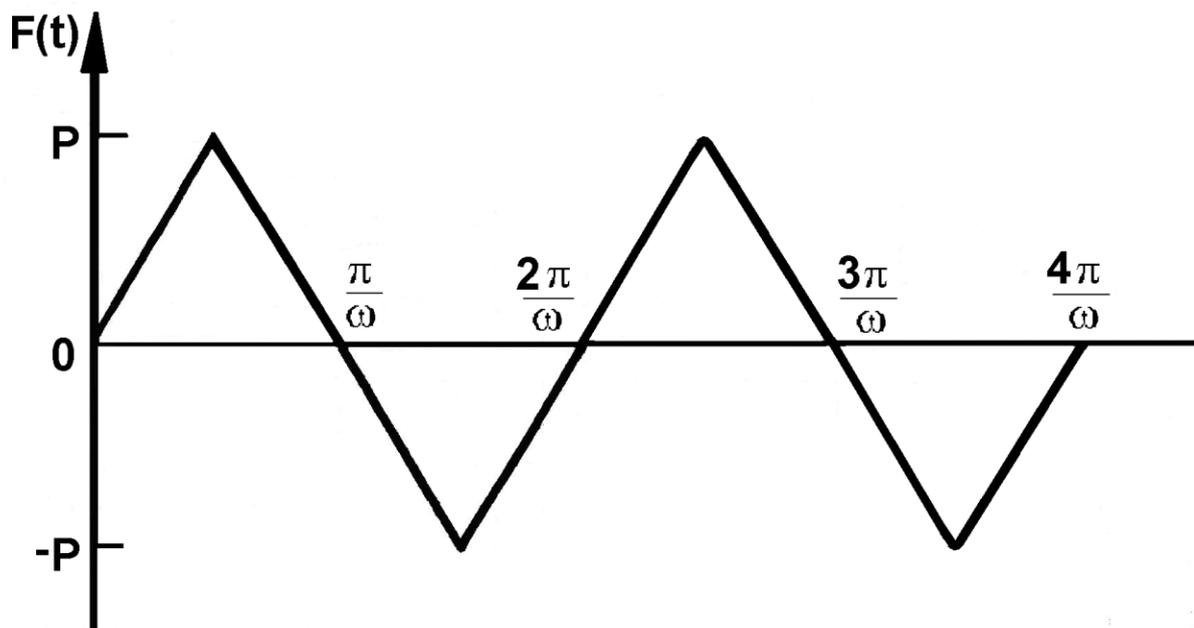


Рис. 4.40. Внешняя нагрузка $F(t)$ к примеру 5

Решение

Представим функцию $F(t)$ тригонометрическим рядом Фурье:

$$F(t) = \frac{8P}{\pi^2} \sin \omega t - \frac{8P}{3^2 \pi^2} \sin 3\omega t + \frac{8P}{5^2 \pi^2} \sin 5\omega t - \dots$$

$$0,81P \sin \omega t - 0,09P \sin 3\omega t + 0,03P \sin 5\omega t - \dots$$

Установившаяся реакция $X(t)$:

$$X(t) = \frac{1}{k} (0,81 \cdot P \cdot K_y^1 \sin \omega t - 0,09 \cdot P \cdot K_y^3 \sin 3\omega t + 0,03 \cdot P \cdot K_y^5 \sin 5\omega t - \dots),$$

где K_y^i - коэффициент усиления на i -той частоте:

$$K_y^1 = \frac{1}{(1 - 0,9^2)} = 5,26;$$

$$K_y^3 = \frac{1}{(1 - (3 \cdot 0,9)^2)} = 0,16;$$

$$K_y^5 = \frac{1}{(1 - (5 \cdot 0,9)^2)} = 0,052.$$

Тогда:

$$X(t) = \frac{1}{k} (4,26 \cdot P \cdot \sin \omega t - 0,014 \cdot P \cdot \sin 3\omega t + 0,0015 \cdot P \cdot K_y^5 \sin 5\omega t - \dots)^{29}.$$

Сравнивая амплитуды составляющих гармоник, можно определить, что существенно значимой является только первая гармоника, а доля гармонических составляющих более высоких частот (3ω , 5ω и т.д.) пренебрежимо мала (менее 0,3%) и тогда

$$X(t) = \frac{4,26P}{k} \sin \omega t.$$

4.2.4. Задачи

Задача 1. Вывести уравнение движения массы m для системы, представленной на рис. 4.41. Горизонтальный стержень считать абсолютно жестким, массой стержня пренебречь. Вертикальная возмущающая сила $F \sin \omega t$ приложена к массе m .

Как изменится уравнение движения, если возмущение приложено к свободному концу стержня A ?

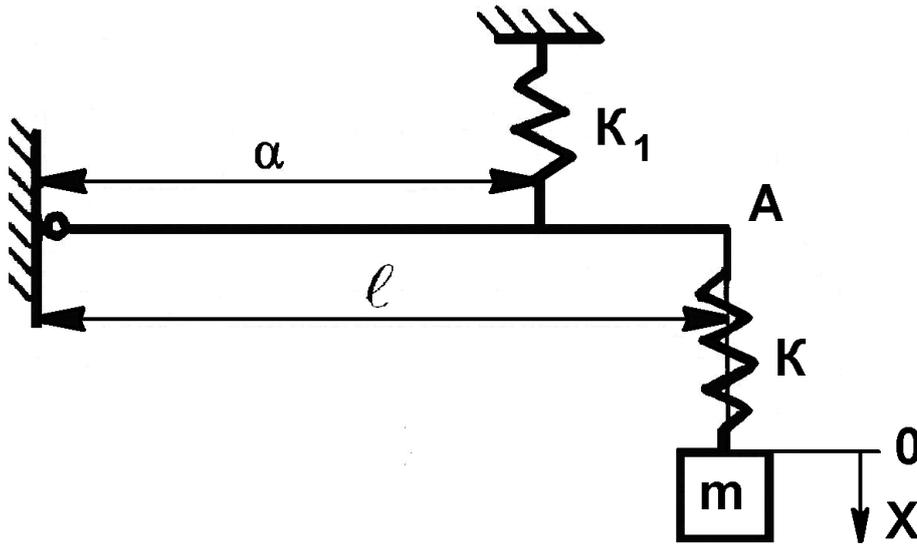


Рис. 4.41. Схема к задаче 1

Задача 2. В системе по рис. 4.42 точка опоры перемещается по закону $a \sin \omega t$. Горизонтальная балка абсолютно жесткая и имеет пренебрежимо малую массу. Составить уравнение вертикального перемещения массы m .

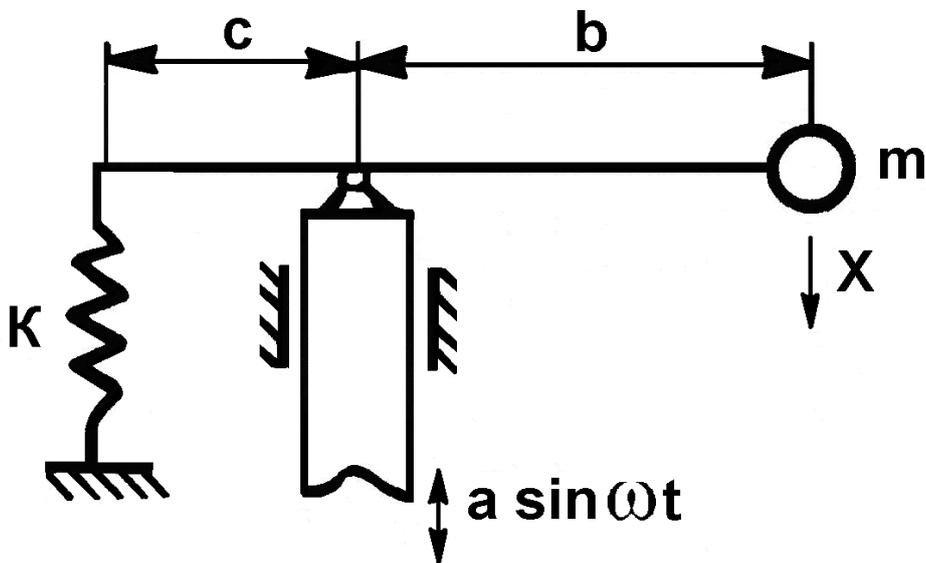


Рис. 4.42. Схема к задаче 2

Задача 3. Круглый диск массой $m = 15$ кг укреплен в середине пролета вала длиной 0,8 м и диаметром 20 мм. Центр тяжести диска смещен относительно оси вращения вала на 3 мм. Угловая скорость вращения вала 1000 об/мин.

- а. Сравнить напряжения вала в неподвижном состоянии и при вращении в рабочей скоростью.
- б. Как изменятся напряжения, если диаметр вала равен 30 мм?
- в. Как изменятся напряжения при рабочей скорости 2000 об/мин?

Задача 4. Машина вращательного движения установлена через систему пружин и демпферов (рис. 4.43). Масса машины 50 кг, неуравновешенность 0,06 кг м, угловая скорость 800 об/мин. Выбрать жесткости пружин k , и коэффициенты демпфирования демпферов c , если амплитуда колебаний машины не должна превышать 5 мм, а на фундамент передавалась бы минимальная сила.

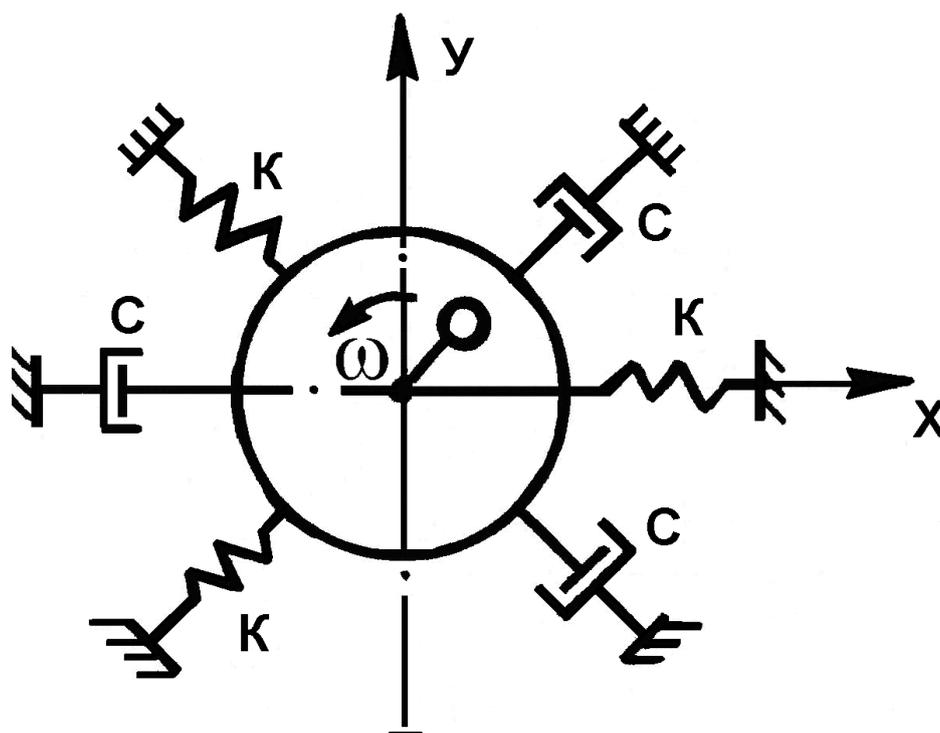


Рис. 4.43. Схема к задаче 4

Задача 5. Необходимо изолировать прибор массой 20 кг от вибраций, вызываемых работой двигателя, вращающегося со скоростью 1800-2400 об/мин. Пренебрегая демпфированием, подобрать жесткость пружин для монтажа прибора так, чтобы коэффициент передачи сил был меньше 0,2.

Задача 6. Чувствительный прибор жестко закреплен на столе массой 200 кг. Стол изолирован от пола системой пружин и демпферов. Жесткость пружин $2 \cdot 10^4$ Н/м, коэффициент затухания $4 \cdot 10^3 \frac{\text{Нс}}{\text{м}}$. Определить движение стола, если пол колеблется вертикально с частотой 10 колебаний в секунду и амплитудой ± 2 мм.

Задача 7. Прицеп с полной нагрузкой весит 1 т, без нагрузки - 200 кг. Жесткость рессор $1,2 \cdot 10^5$ Н/м, демпферы отсутствуют. Неровность дороги можно описать синусоидой с амплитудой 0,1 и периодом 5 м. Определить амплитуду колебаний кузова прицепа при полной нагрузке и без нагрузки при скорости 60 км/час. Как изменится амплитуда при скорости 30 км/час? 90 км/час? При какой скорости амплитуда колебаний прицепа максимальна?

Задача 8. Как изменятся результаты решения задачи 4.2.7 для полностью загруженной тележки, если в подвеску ввести демпфер с безразмерным коэффициентом затухания $\eta = 0,75$.

Задача 9. Сейсмограф (рис. 4.44) применяется для измерения колебаний основания машины, работающей со скоростью (500÷1500) об/мин. Необходимо обеспечить амплитудное искажение не более 4%. Вычислить собственную частоту сейсмографа для случаев: а. демпфирование отсутствует; б. безразмерный коэффициент затухания $\eta = 0,6$.

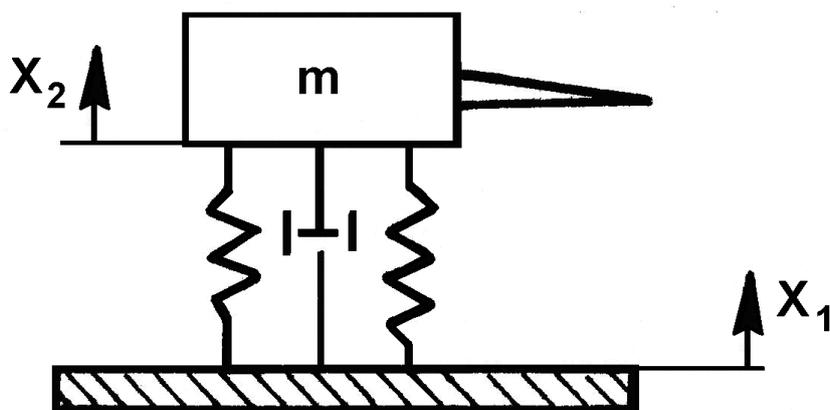


Рис. 4.44. Схема сейсмографа к задаче 9

Задача 10. Динамическая система (рис. 4.45) приводится в движение кулачком с профилем показанным на рис. 4.46, а.

Определить установившуюся реакцию системы, если $m = 18$ кг, $k_1 = k = 8 \cdot 10^3$ Н/м, $c = 2 \cdot 10^3$ Нс/м. Угловая скорость вращения кулачка 60 об/мин. Ход кулачкового механизма 50 мм.

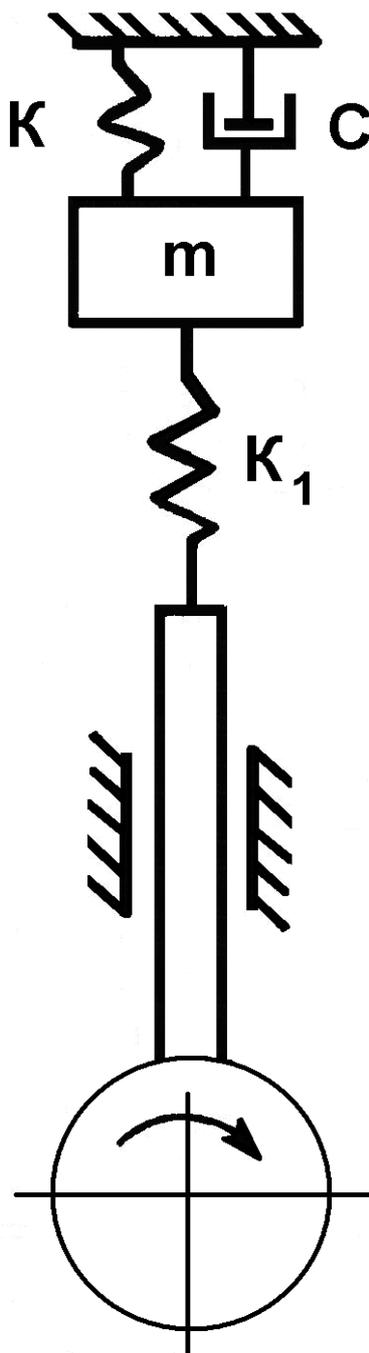


Рис. 4.45. Схема к задаче 10

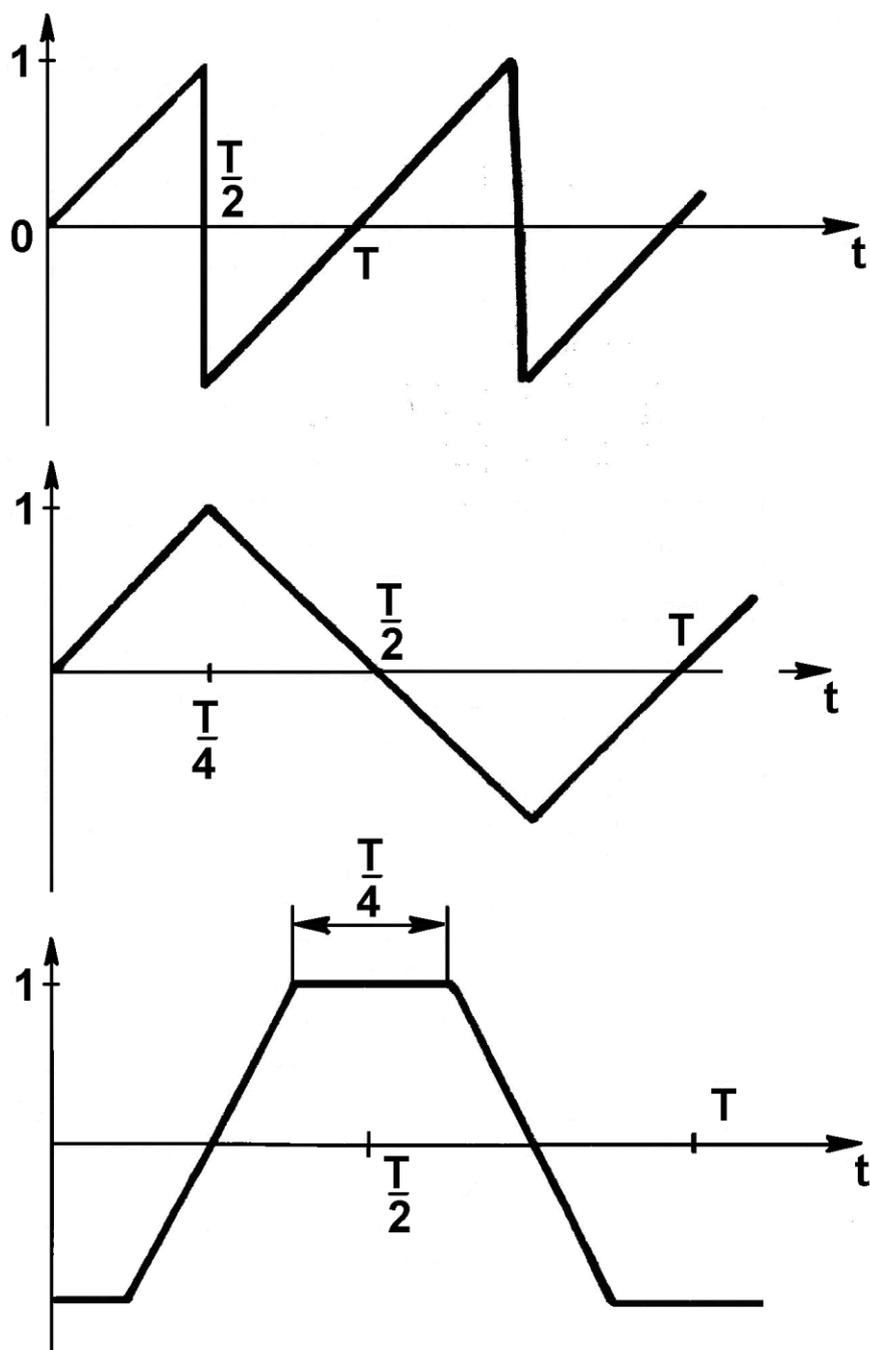


Рис. 4.46. Профиль кулачка к задачам 10 - 12

Задача 11. Решить задачу 10, если профиль кулачка задан кривой по рис. 4.46, б, а угловая скорость кулачка 80 об/мин.

Задача 12. Решить задачу 10, если профиль кулачка задан графиком по рис. 4.46, в, демпфирование отсутствует, а угловая скорость кулачка 100 об/мин.

Задача 13. Виброграф (рис. 4.47) состоит из жесткой станины 1, на которой закреплена катушка 2, сердечником которой является магнит 3, подвешенный к станине на пружине 4. При движении магнита внутри катушки в ней возникает электрический ток, который регулируется прибором.

При каких параметрах массы магнита m и жесткости пружины k амплитудные искажения записи гармонических колебаний основания ($X = X_0 \sin \omega t$) будут минимальны?

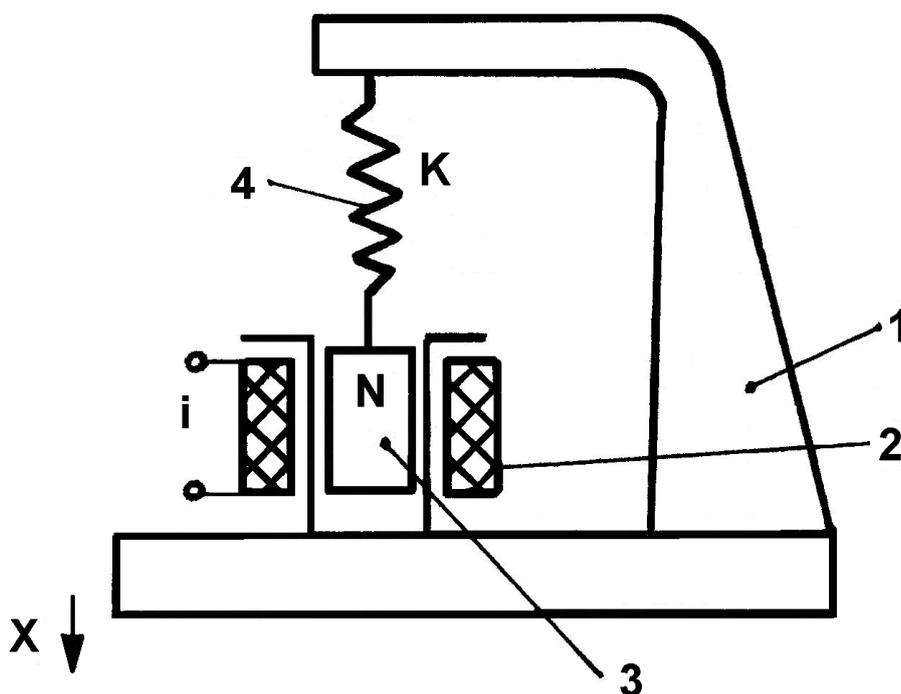


Рис. 4.47. Схема виброметра к задаче 13

Задача 14. Датчик контроля биения поверхности (рис. 4.48) состоит из измерительного стержня 1 массой m , закрепленного на двух плоских пружинах 2. Винтовая цилиндрическая пружина 3 прижимает измерительный стержень к измеряемой детали 4.

Определить усилие, с которым измерительный стержень прижимается к детали, если $m = 50$ г, $d = 50$ мм, $e = 0,1$ мм, $\ell = 3$ см, сечение плоской пружины $b \times h \times (5 \times 0,5)$ см², жесткость винтовой пружины $k = 10^3$ Н/м.

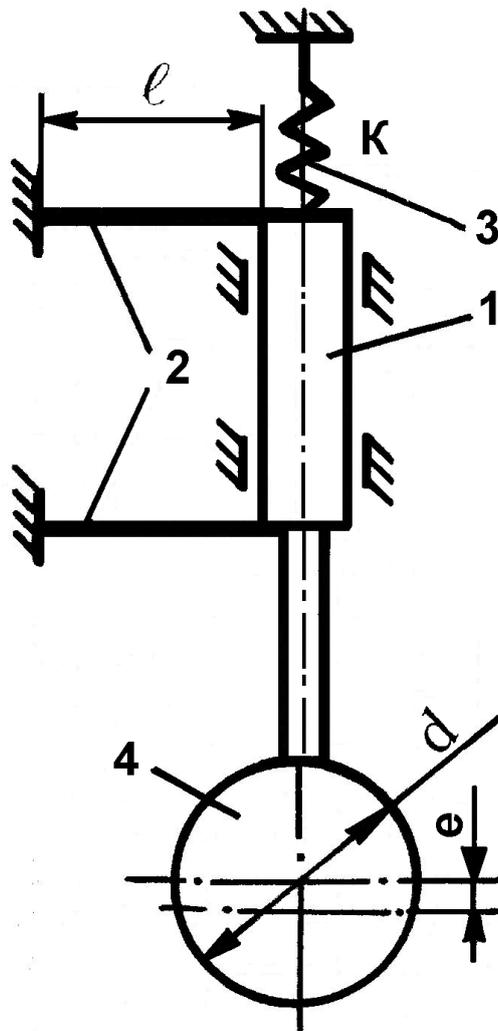


Рис. 4.48. Схема датчика биений к задаче 14

Задача 15. На свободном конце балки, шарнирно закрепленной противоположным концом и поддерживаемой пружиной с жесткостью k установлен двигатель массой m (рис. 4.49, а). При работе двигателя на него действует внешняя нагрузка $F(t) = F_0 \sin \omega t$.

Определить коэффициент передачи силы на фундамент (в месте крепления пружин) и величину этой силы, если $F_0 = 50 \text{ Н}$; $k = 10^6 \text{ Н/м}$; $\ell = 0,5 \text{ м}$; $\omega = 80 \text{ 1/с}$, $m = 100 \text{ кг}$.

Задача 16. Решить задачу 4.2.15 для схемы по рис. 4.49, б;

Задача 17. Решить задачу 4.2.15 для схемы по рис. 4.49, в;

Задача 18. Решить задачу 4.2.15 для схемы по рис. 4.49, г;

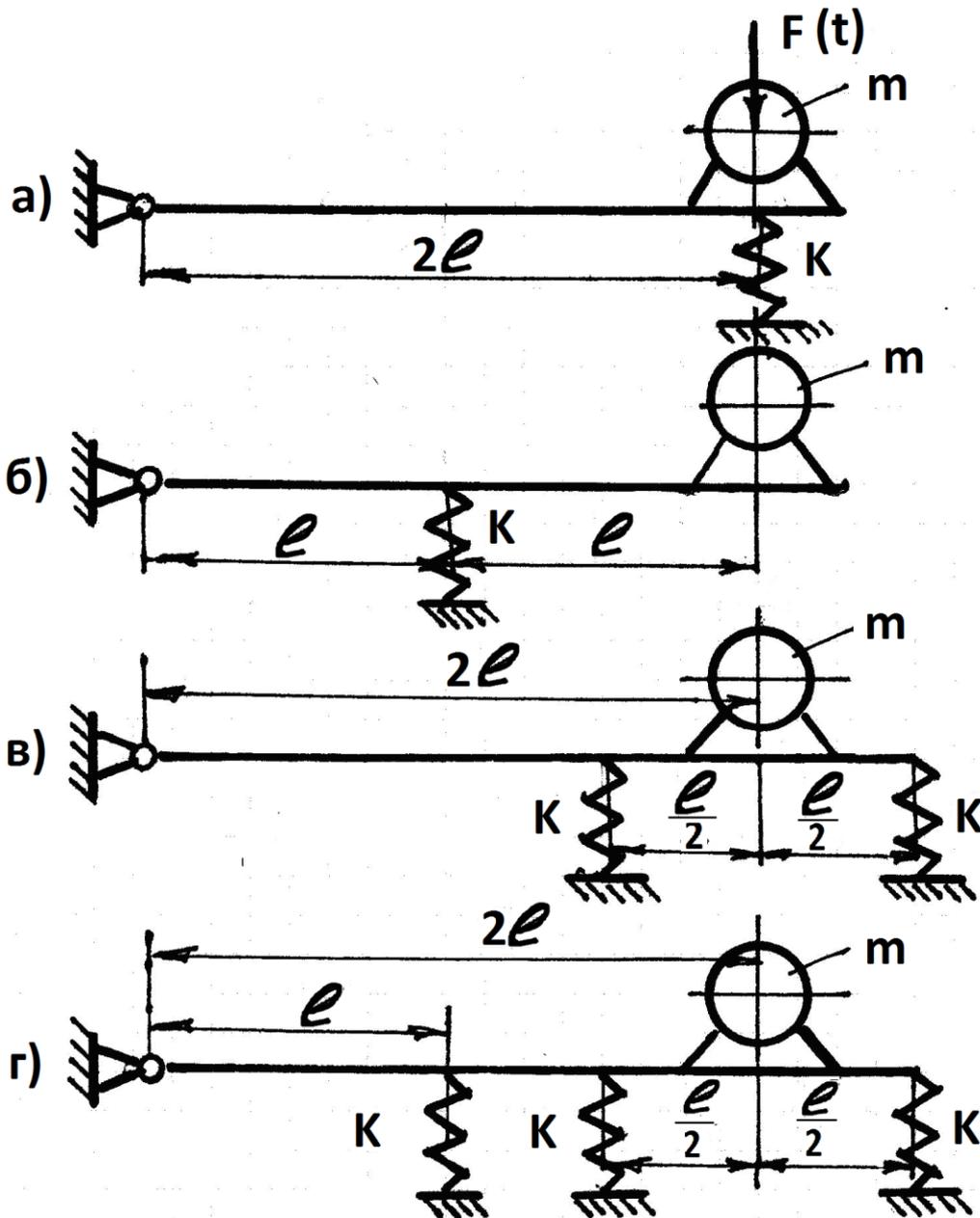


Рис. 4.49. Схемы к задачам 15÷18

Задача 19. На массу m , связанную с упором пружиной с жесткостью k и демпфером, с коэффициентом демпфирования c (рис. 4.50) действует внешнее возмущение $F(t) = F_0 \sin \omega t$. Определить силу, передаваемую упору, если $m = 100$ кг, $k = 3 \cdot 10^5$ Н/м, $c = 10^4$ Нс/м, $F_0 = 5$ Н, $\omega = 60$ 1/с

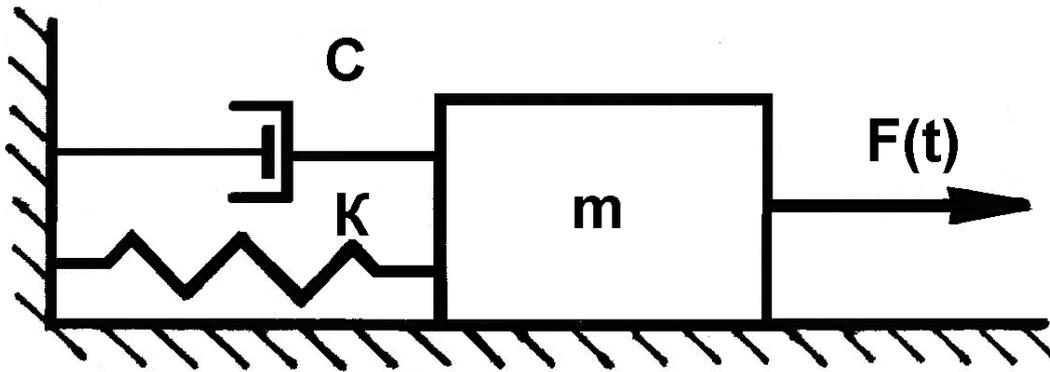


Рис. 4.50. Схемы к задаче 19

Задача 20. Машина массой m установлена на свободном конце консольной балки. Вылет консоли l , параметры сечения балки I_x , W_x . При работе на машину действует гармоническая сила $F(t) = F_0 \sin \omega t$ (рис. 4.51, а). Определить силу, передаваемую на фундамент и напряжение в опасном сечении балки. Принять $m = 100$ кг, $I = 2$ см⁴, $W_x = 4$ см³, $F_0 = 100$ Н, $\omega = 100$ 1/с.

Задача 21. Как изменятся результаты решения задачи 20, если конец консоли подпереть пружиной с жесткостью $k = 6 \cdot 10^5$ Н/м (рис. 4.51, б).

Задача 22. Как изменятся результаты решения задачи 20, если под свободный конец консоли установить демпфер с коэффициентом демпфирования $c = 3 \cdot 10^3$ Нс/м (рис. 4.51, в).

Задача 23. Как изменятся результаты решения задачи 20, если пружину жесткостью $k = 6 \cdot 10^5$ Н/м установить между массой и балкой (рис. 4.51, г).

Задача 24. Как изменятся результаты решения задачи 20, если между массой и балкой установить пружину жесткостью $k = 6 \cdot 10^5$ Н/м и параллельно ей - демпфер с коэффициентом демпфирования $c = 3 \cdot 10^3$ Нс/м (рис. 4.51, д).

Задача 25. Как изменятся результаты решения задачи 20, если пружину и демпфер по условиям задачи 4.2.24 установить под свободный конец балки (рис. 4.51, е).

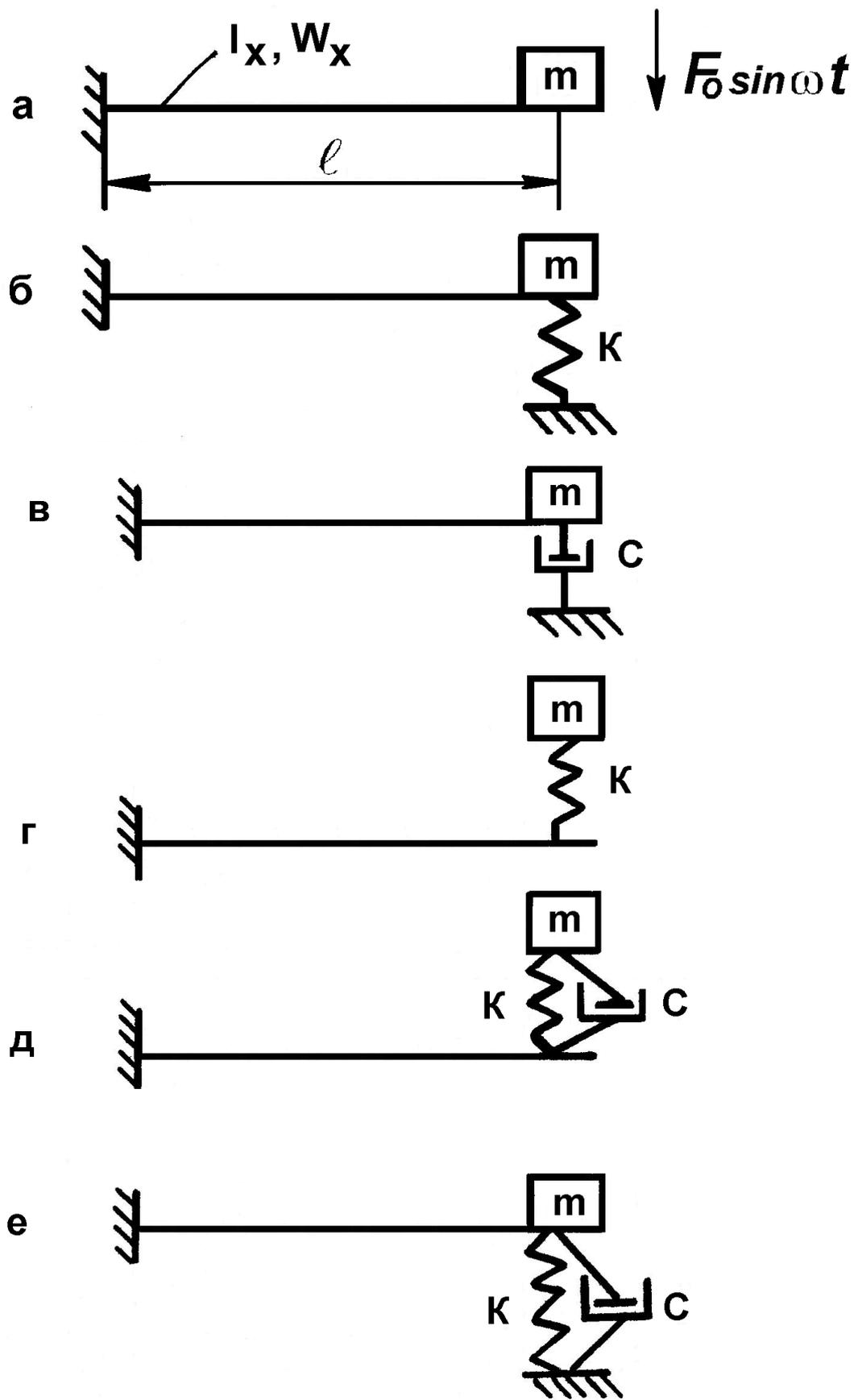


Рис. 4.51. Схемы к задачам 20÷23

Задача 26. Машина массой $m = 200$ кг установлена в середине пролета однопролетной балки с вылетом консоли (рис. 4.52, а). Параметры сечения балки $I_x = 3 \text{ см}^4$, $W_x = 4 \text{ см}^3$, $2\ell = 0,8$ м. На машину действует внешнее возмущение $F(t) = F_0 \sin \omega t$. Определить максимальные напряжения в опасном сечении балки, если $F_0 = 100 \text{ Н}$, а машина работает со скоростью 1500 об/мин.

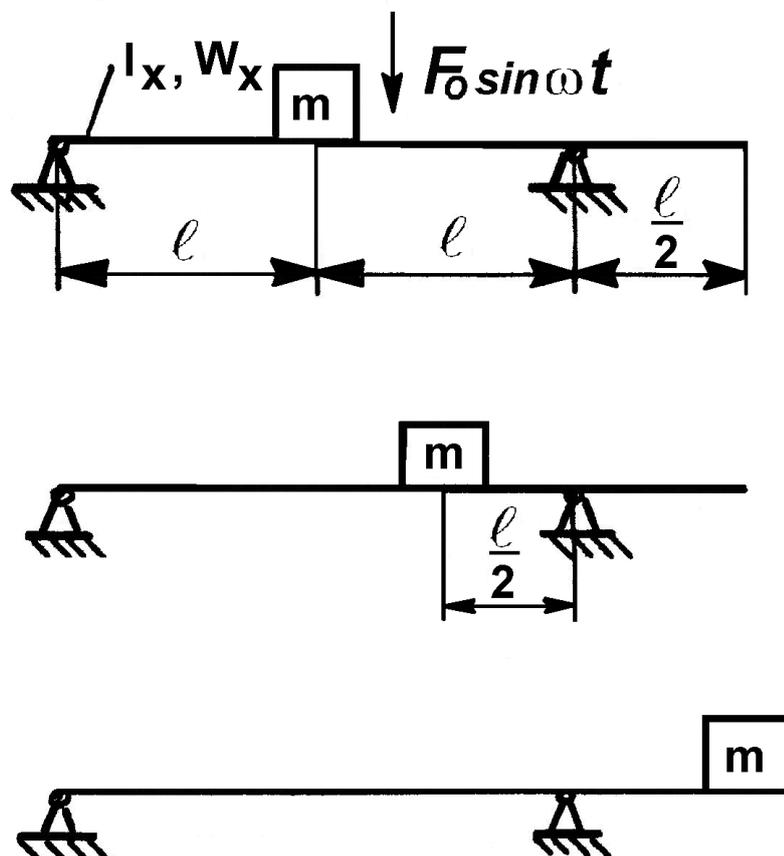


Рис. 4.52. Схемы к задачам 26÷28

Задача 27. Решить задачу 26 при условии, что машина сдвинута от середины пролета на величину $\frac{\ell}{2}$ (рис. 4.52, б).

Задача 28. Решить задачу 26 при условии, что машина установлена на консольном конце балки (рис. 4.52, в).

Задача 29. Вибратор для уплотнения бетона (рис. 4.53, а) состоит из тяжелой рамы массой m , на которой смонтированы два диска массой m_1 каждый. Диски вращаются в вертикальной плоскости в противоположных направлениях с

угловой скоростью ω . На дисках закреплены грузы массой m_0 с эксцентриситетом e относительно оси вращения. Реологические (упруго-диссипативные) свойства бетона соответствуют модели, представленной на рис. 4.53, б.

Определить амплитуду колебаний виброметра и усилие, передаваемое бетону, если $m = 100$ кг, $m_1 = 10$ кг, $m_0 = 0,5$ кг, $\omega = 500$ об/мин, $e = 1$ мм, $k = 10^6$ Н/м, $c = 2 \cdot 10^3$ Нс/м.

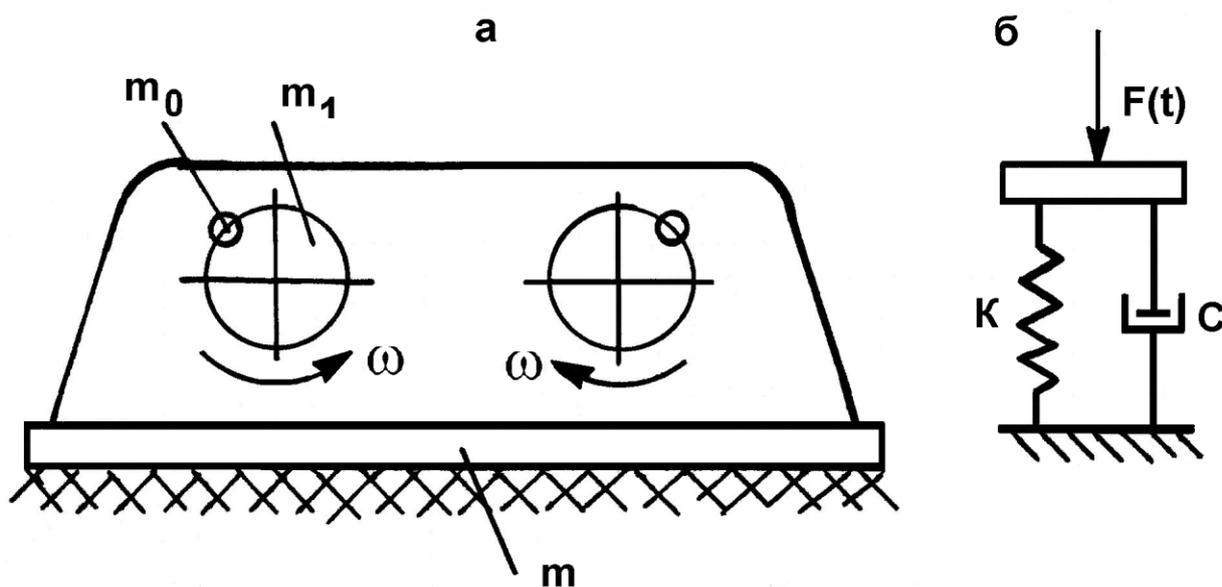


Рис. 4.53. Схема вибратора к задаче 29

Задача 30. На консольном конце вращающегося со скоростью n вала диаметром d и длиной ℓ установлен диск диаметром D и толщиной h . Эксцентриситет диска e (рис. 4.54, а).

Определить нагрузки на подшипник и напряжения в опасном сечении вала, если $d = 10$ мм, $\ell = 0,4$ м, $D = 200$ мм, $h = 10$ мм, $e = 1$ мм, $n = 500$ об/мин.

Задача 31. Решить задачу 30 для случая, когда вал удлиннили на величину $\frac{\ell}{2}$ и установили вторую опору (рис. 4.54, б).

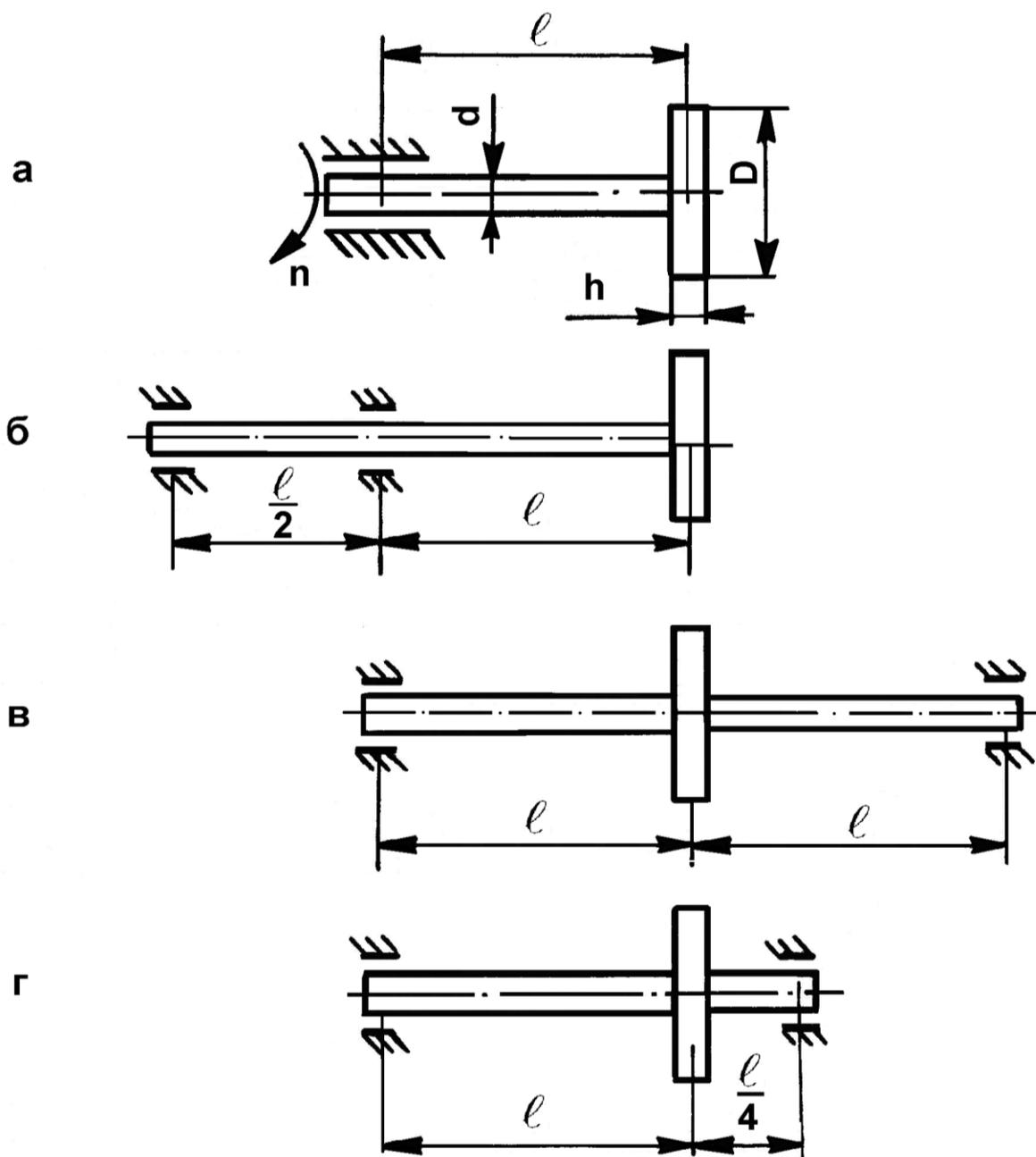


Рис. 4.54. Схемы к задачам 30÷33

Задача 32. Решить задачу 30 для случая, когда систему сделали однопролетной (рис. 4.54, в).

Задача 33. Решить задачу 32, если вторую опору установили на расстоянии $\frac{l}{4}$ справа от диска.

Библиографический список

1. Яблонский, А.А. Курс теории колебаний [Текст] / А.А. Яблонский, С.С. Норейко. - Москва: Высшая школа, 1966. – 255 с.
2. Светлицкий, В.А. Сборник задач по теории колебаний [Текст] : учеб. пособ. для вузов / В.А. Светлицкий, Н.В. Стасенко. – Москва: Высшая школа, 1973. – 452 с.
3. Цзе, Ф.С. Механические колебания [Текст] / Н.Е. Морзе, Р.Г. Хинкл. – Москва: Машиностроение, 1966. – 508 с.
4. Тимошенко, С.П. Колебания в инженерном деле [Текст] / Д.Х. Янг, У. Уивер. – Москва: Машиностроение, 1985. – 472 с.
5. Гребеник, В.Н. Расчет металлургических машин и механизмов [Текст]/ В.Н. Гребеник. [и др.]. – Киев: Вища школа, 1988. – 448 с.
6. Маслов, Г.С. Расчеты колебаний валов [Текст]: справочное пособие / Г.С. Маслов. – Москва: Машиностроение, 1908. – 271 с.

Учебное издание

Цупров Анатолий Николаевич

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ДИНАМИКЕ МАШИН

Учебное пособие

Редактор Е.Н. Черникова

Подписано в печать 22.12.2014. Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная.

Ризография. Объем 7,6 печ. л. Тираж 100 экз. Заказ № 758

Издательство Липецкого государственного технического университета.

Полиграфическое подразделение издательства ЛГТУ.

398600 Липецк, ул. Московская, 30.