

МАШИНОСТРОЕНИЕ

ЭНЦИКЛОПЕДИЯ



МАШИНОСТРОЕНИЕ

ЭНЦИКЛОПЕДИЯ



МАШИНОСТРОЕНИЕ

ЭНЦИКЛОПЕДИЯ В Сорока томах

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

ФРОЛОВ К.В.

Председатель редакционного совета,
главный редактор

КОЛЕСНИКОВ К.С.

зам. Председателя редакционного совета
и главного редактора

ГУСЕНКОВ А.П.

зам. Председателя редакционного совета
и главного редактора

ЧЛЕНЫ СОВЕТА

Авдуевский В.С., Адамов Е.О., Белянин П.Н.,
Березовский Б.А., Бессонов А.П., Васильев В.В.,
Глебов И.А., Долбенко Е.Т., Ишлинский А.Ю.,
Коптев Ю.Н., Кузнецов Н.Д., Михайлов В.Н.,
Новожилов Г.В., Образцов И.Ф., Панин В.Е.,
Паничев Н.А., Патон Б.Е., Пугин Н.А., Салтыков Б.Г.,
Свищев Г.П., Соломенко Н.С., Туполев А.А.,
Усков М.К., Федосов Е.А., Фокин А.В., Черный Г.Г.,
Шемякин Е.И.

Раздел I
ИНЖЕНЕРНЫЕ
МЕТОДЫ РАСЧЕТОВ

Том I-3. Книга 2
ДИНАМИКА И ПРОЧНОСТЬ
МАШИН
ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ
И МАШИН

Редактор-составитель и ответственный редактор
академик РАН К.С. Колесников

Редакторы тома: А.В. Александров
(Стержни и стержневые системы),
А.П. Бессонов (Теория механизмов и
машин), И.А. Биргер (Толстостенные цилиндры
и диски), Г.С. Писаренко (Экспериментальные
методы исследования динамики и прочности
конструкций), В.И. Усюкин (Пластины и оболочки)

Авторы: А. В. Александров, Н. А. Алфутов, В. В. Астанин, А. П. Бессонов, В. Л. Бидерман, И. А. Биргер, В. В. Васильев, Б. А. Грязнов, У. А. Джолдасбеков, П. А. Зиновьев, В. Б. Зылев, П. В. Коротков, Л. В. Кравчук, А. Ф. Крайнев, Г. В. Крейнин, В. В. Кривенюк, Н. М. Кульчицкий, Б. Я. Лщеников, В. П. Мальцев, В. В. Матвеев, Г. Н. Микишев, В. П. Науменко, Э. Е. Пейсах, В. А. Постнов, В. Д. Потапов, Л. Н. Решетов, Ю. Л. Саркисян, В. А. Светлицкий, В. И. Сергеев, А. А. Смердов, В. А. Стрижало, Г. Н. Третьяченко, Н. В. Умнов, В. И. Усюкин, В. К. Харченко, Л. А. Шаповалов, Н. Н. Шапошников, В. П. Шмаков, В. А. Щепетильников, А. П. Яковлев

Рецензенты: Н. И. Левитский, Н. Н. Леонтьев, А. Ф. Селихов, Г. Н. Чернышев

Бюро редакционного совета: К. В. Фролов, К. С. Колесников, Б. И. Антонов, П. Н. Белянин, А. П. Бессонов, В. В. Васильев, А. П. Гусенков, Е. Т. Долбенко, И. Н. Жесткова, М. К. Усков, Н. Н. Боброва

Ученый секретарь тома В. И. Дронг

Машиностроение. Энциклопедия. Ред. совет: К.В. Фролов (пред.) и др. -М.: Машиностроение.
М 38 Динамика и прочность машин. Теория механизмов и машин. Т. 1-3. В 2-х кн. Кн. 2 /
А. В. Александров, Н. А. Алфутов, В. В. Астанин и др.; Под общ. ред. К. С. Колесникова.
1995.-624 с. ил.
ISBN 5-217-01949-2 (Общ.)
ISBN 5-217-01952-2 (Т. 1-3)

Изложены теория и методы расчета типовых расчетных схем механики: стержней и стержневых систем, пластин и оболочек, толстостенных цилиндров и дисков в упругом и упругопластическом состояниях, в линейной и нелинейной постановках; сообщаются методы экспериментального исследования динамики и прочности конструкций.

Теория механизмов и машин включает структурный анализ и методы синтеза механизмов, динамику машин, усовершенствование механизмов, балансировку роторов.

М 2702000000 - 083 Без объявл.
038 (01) - 95

ББК 34.44

ISBN 5-217-01949-2 (Общ.)
ISBN 5-217-01952-2 (Т. 1-3)

© Издательство "Машиностроение", 1995
© Бюро редакционного совета
энциклопедии "Машиностроение", 1995

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЧАСТЬ I. ДИНАМИКА И ПРОЧНОСТЬ МАШИН	15		
Раздел 8. СТЕРЖНИ И СТЕРЖНЕВЫЕ СИСТЕМЫ	15		
Глава 8.1. РАСТЯЖЕНИЕ И ИЗГИБ ПРЯМЫХ СТЕРЖНЕЙ (<i>А.В. Александров</i>)	15		
8.1.1. Нормальные напряжения в стержне при растяжении и изгибе	15		
8.1.2. Касательные напряжения в стержне при изгибе	17		
8.1.3. Перемещения при малых прогибах	18		
8.1.4. Сжато-изогнутые и растянуто-изогнутые стержни	20		
8.1.5. Балки на упругом основании	21		
8.1.6. Гибкая нить	23		
Глава 8.2. СВОБОДНОЕ КРУЧЕНИЕ СТЕРЖНЕЙ (<i>В.Д. Потанов</i>)	24		
8.2.1. Прямой стержень круглого поперечного сечения	24		
8.2.2. Стержень некруглого поперечного сечения	25		
8.2.3. Тонкостенный стержень замкнутого профиля	27		
Глава 8.3. СТЕСНЕННОЕ КРУЧЕНИЕ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ (<i>А.В. Александров</i>)	28		
8.3.1. Особенности стесненного кручения стержней открытого профиля	28		
8.3.2. Нормальные и касательные напряжения в сечениях стержня	35		
8.3.3. Геометрические характеристики тонкостенных сечений	36		
		8.3.4. Углы закручивания	39
		8.3.5. Стесненное кручение стержней замкнутого профиля	42
		Глава 8.4. КРИВЫЕ СТЕРЖНИ (<i>В.П. Мальцев</i>)	43
		8.4.1. Основные положения	43
		8.4.2. Внутренние силовые факторы, возникающие в поперечных сечениях	44
		8.4.3. Напряжения в поперечных сечениях	44
		8.4.4. Потенциальная энергия кривых стержней	46
		8.4.5. Перемещения в кривых стержнях	46
		Глава 8.5. ПРОСТРАНСТВЕННО-КРИВОЛИНЕЙНЫЕ СТЕРЖНИ (<i>В.А. Светлицкий</i>)	46
		8.5.1. Нелинейные уравнения равновесия стержней	46
		8.5.2. Линейные уравнения равновесия стержней	49
		8.5.3. Численные решения уравнений равновесия стержня	52
		Глава 8.6. СОСТАВНЫЕ И МНОГОСЛОЙНЫЕ СТЕРЖНИ (<i>В.П. Мальцев</i>)	54
		8.6.1. Составные стержни	54
		8.6.2. Трехслойные стержни с заполнителем	55
		Глава 8.7. УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИЕ ДЕФОРМАЦИИ СТЕРЖНЕЙ (<i>В.Д. Потанов</i>)	58
		8.7.1. Кривая деформирования материала при одноосном растяжении и сжатии	58

	8.7.2. Изгиб балок	58		8.10.3. Определение перемещений в статически определимых системах	77
	8.7.3. Напряженно-деформированное состояние стержней при изгибе с одновременным растяжением или сжатием	60		8.10.4. Матрицы податливости и жесткости упругой стержневой системы	79
	8.7.4. Предельная нагрузка	61		8.10.5. Энергия деформации стержневой системы, преобразование матриц жесткостей и податливостей	80
	8.7.5. Кручение упругопластических стержней	62			
Глава	8.8. ДЕФОРМИРОВАНИЕ СТЕРЖНЕЙ В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ (В.Д. Потапов)	64	Глава	8.11. СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СТЕРЖНЕВЫЕ СИСТЕМЫ. КЛАССИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА (Н.Н. Шапошников)	81
	8.8.1. Изгиб линейно-вязкоупругой балки	64		8.11.1. Метод сил	81
	8.8.2. Изгиб стержней при установившейся ползучести	65		8.11.2. Метод перемещений	84
	8.8.3. Приближенные методы решения задач об изгибе балок при ползучести	67		8.11.3. Смешанный метод	87
	8.8.4. Кручение прямого стержня при ползучести	68	Глава	8.12. УРАВНЕНИЯ МЕХАНИКИ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ И ИХ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДЛЯ РАСЧЕТОВ НА ПЕРСОНАЛЬНЫХ КОМПЬЮТЕРАХ (Н.Н. Шапошников)	89
Глава	8.9. СТЕРЖНИ ИЗ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ (В.В. Васильев)	69		8.12.1. Статические уравнения	89
	8.9.1. Изгиб балок	69		8.12.2. Геометрические уравнения	91
	8.9.2. Устойчивость	70		8.12.3. Физические уравнения	91
	8.9.3. Продольные и изгибные колебания	71		8.12.4. Смешанный метод и метод перемещений	92
	8.9.4. Кручение слоистых стержней с прямоугольным сечением	72		8.12.5. Построение матриц жесткости для стержня, описываемого дифференциальным уравнением четвертого порядка	94
	8.9.5. Растяжение, сжатие, изгиб и кручение тонкостенных стержней с замкнутым контуром сечения	72	Глава	8.13. УСТОЙЧИВОСТЬ И ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ (Б.Я. Лазеников)	95
	8.9.6. Изгиб и кручение тонкостенных стержней с открытым контуром сечения	74		8.13.1. Устойчивость сжатых стержней	95
Глава	8.10. СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЕ СТЕРЖНЕВЫЕ СИСТЕМЫ (Б.Я. Лазеников)	75		8.13.2. Метод перемещений в исследовании устойчивости стержневых систем	96
	8.10.1. Понятие статической определенности и геометрической неизменяемости	75		8.13.3. Исследование устойчивости стержней переменного сечения энергетическим методом	98
	8.10.2. Методы определения внутренних сил в статически определимых системах	76			

8.13.4. Гармонические колебания стержней	100	9.3.3. Напряжения в эквидистантном слое оболочки, силы и моменты. Энергия деформации	130
8.13.5. Метод перемещений в задачах о гармонических колебаниях стержневых систем	102	9.3.4. Уравнения равновесия и граничные условия	132
Глава 8.14. МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В РАСЧЕТАХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ (Б.Я.Лащеников)	104	Глава 9.4. НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ ОБОЛОЧЕК (Л.А.Шаповалов)	134
Глава 8.15. НЕЛИНЕЙНО ДЕФОРМИРУЕМЫЕ СТЕРЖНЕВЫЕ СИСТЕМЫ (ПЛАСТИЧНОСТЬ, ПОЛЗУЧЕСТЬ, СИСТЕМЫ ГИБКИХ СТЕРЖНЕЙ И НИТЕЙ) (В.Д. Потапов, В.Б. Зылев)	110	9.4.1. Деформации оболочек с учетом геометрической нелинейности	134
8.15.1. Упругопластическая стадия	110	9.4.2. Классификация нелинейных задач. Упрощение геометрических соотношений	137
8.15.2. Ползучесть	112	9.4.3. Уравнения эластики оболочки. Теория Э. Рейснера	139
8.15.3. Особенности расчета при конечных перемещениях	112	9.4.4. Геометрически нелинейная теория непологих оболочек в квадратичном приближении. Пологие оболочки	142
8.15.4. Гибкие нити	114	Глава 9.5. ОБОЛОЧКИ ВРАЩЕНИЯ (В.И. Усюкин)	144
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	115	9.5.1. Уравнения моментной теории	144
Раздел 9. ПЛАСТИНЫ И ОБОЛОЧКИ	117	9.5.2. Осесимметричная деформация	145
Глава 9.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ (В.И. Усюкин)	117	9.5.3. Цилиндрическая, коническая и сферическая оболочки	147
9.1.1. Определения и гипотезы	117	9.5.4. Оболочки при неосесимметричной деформации	150
9.1.2. Геометрия оболочек	117	Глава 9.6. ПРИКЛАДНЫЕ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК (В.И. Усюкин)	151
Глава 9.2. ТЕОРИЯ ПЛАСТИН (В.А. Постнов)	119	9.6.1. Безмоментная теория	151
9.2.1. Уравнения теории изотропных и ортотропных пластин Кармана	120	9.6.2. Краевой эффект	153
9.2.2. Граничные условия	124	9.6.3. Полубезмоментная теория цилиндрических оболочек	154
9.2.3. Классификация пластин	125	9.6.4. Расчет пологих оболочек	155
9.2.4. Некоторые решения задач изгиба пластин	126	Глава 9.7. СОСТАВНЫЕ И ПОДКРЕПЛЕННЫЕ ОБОЛОЧКИ (Л.А. Шаповалов)	157
Глава 9.3. ЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ ОБОЛОЧЕК (В.Л. Бидерман)	128	9.7.1. Граничные условия в контактных задачах упругих оболочек и колец	157
9.3.1. Деформация срединной поверхности оболочки	128		
9.3.2. Деформация эквидистантного слоя	129		

	9.7.2. Изгиб шпангоутов цилиндрического бака со сферическими днищами	160		9.11.2. Общие алгоритмы расчета при учете деформаций пластичности и ползучести	202
	9.7.3. Расчет оболочек, подкрепленных продольными ребрами	163		9.11.3. Расчетные соотношения для пластин и оболочек при учете пластичности и ползучести	203
	9.7.4. Комбинированное нагружение оболочки, подкрепленной гофром	166	Глава 9.12. УСТОЙЧИВОСТЬ УПРУГИХ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК (Н.А. Алфуртов)	208	
Глава 9.8.	ОСНОВЫ РАСЧЕТА ОБОЛОЧЕК ЧИСЛЕННЫМИ МЕТОДАМИ (В.И. Усюкин)	168	9.12.1. Особенности поведения тонких упругих пластин и оболочек при потере устойчивости	208	
	9.8.1. Матричный метод начальных параметров	168	9.12.2. Критические нагрузки тонких упругих пластин	209	
	9.8.2. Метод конечных разностей	172	9.12.3. Критические нагрузки тонких упругих оболочек	211	
	9.8.3. Метод конечных элементов	177	9.12.4. О практическом расчете на устойчивость конструкций, состоящих из пластин и оболочек	214	
Глава 9.9.	МЯГКИЕ ОБОЛОЧКИ И МЕМБРАНЫ (В.И. Усюкин)	180	Глава 9.13. СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОБОЛОЧЕК (В.П. Шамаков)	214	
	9.9.1. Теория больших деформаций мягких оболочек	180	9.13.1. Уравнения динамики оболочек	215	
	9.9.2. Нелинейно-упругие материалы	182	9.13.2. Собственные колебания оболочек	216	
	9.9.3. Одноосные области	184	9.13.3. Методы определения собственных частот и форм колебаний оболочек	217	
	9.9.4. Плоские мембраны	185	9.13.4. Собственные колебания цилиндрических оболочек	220	
	9.9.5. Техническая теория мягких оболочек	188	9.13.5. Собственные колебания сферических оболочек	221	
Глава 9.10.	ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ПЛАСТИНАХ И ОБОЛОЧКАХ (И.А. Биргер)	190	Глава 9.14. ПЛАСТИНЫ И ОБОЛОЧКИ ИЗ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ (В.В. Васильев)	223	
	9.10.1. Основные уравнения термоупругости	190	9.14.1. Уравнения прикладной теории композитных оболочек	223	
	9.10.2. Температурные напряжения в пластинах	192	9.14.2. Оболочки переменной толщины	227	
	9.10.3. Температурные напряжения в оболочках	196	9.14.3. Уравнения термоупругости	227	
Глава 9.11.	РАСЧЕТ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК С УЧЕТОМ ДЕФОРМАЦИЙ ПЛАСТИЧНОСТИ И ПОЛЗУЧЕСТИ (И.А. Биргер)	197	9.14.4. Нелинейные уравнения	228	
	9.11.1. Основные уравнения теории пластичности и ползучести	197			

	9.14.5. Уравнения устойчивости	229		10.2.2. Составные цилиндры . . .	249
	9.14.6. Уравнения динамики . . .	229	Глава 10.3. ЦИЛИНДРЫ, ИСПЫТЫВАЮЩИЕ ДЕФОРМАЦИИ ПЛАСТИЧНОСТИ И ПОЛЗУЧЕСТИ		250
Глава	9.15. ОПТИМАЛЬНЫЕ ОБОЛОЧКИ (П.А. Зиновьев)	230		10.3.1. Учет деформаций пластичности	250
	9.15.1. Проектирование оболочек минимальной массы (П.А. Зиновьев)	230		10.3.2. Учет деформации пластичности по неизотермической теории пластического течения	251
	9.15.2. Равнонапряженные оболочки (П.А. Зиновьев)	231		10.3.3. Учет деформации ползучести	254
	9.15.3. Армированные оболочки сосудов давления (П.А. Зиновьев)	232	Глава 10.4. ЦИЛИНДРЫ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПО ДЛИНЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫМИ НАГРУЗКАМИ		254
	9.15.4. Оптимальное проектирование оболочек как задача математического программирования (А.А. Смердов)	233		10.4.1. Основные уравнения . . .	254
	СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	240		10.4.2. Уравнения метода конечных элементов	255
Раздел 10. ТОЛСТОСТЕННЫЕ ЦИЛИНДРЫ И ДИСКИ (И.А. Биргер)		242		10.4.3. Разрешающая система линейных алгебраических уравнений МКЭ	256
Глава 10.1. ЦИЛИНДРЫ С ПОСТОЯННЫМИ ПО ДЛИНЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫМИ НАГРУЗКАМИ		242		10.4.4. Контактная задача расчета	257
	10.1.1. Основные уравнения . . .	242	Глава 10.5. ЦИЛИНДРЫ С НЕОСЕСИММЕТРИЧНЫМИ НАГРУЗКАМИ		258
	10.1.2. Изотропные цилиндры под действием давления на цилиндрических поверхностях и осевой силы	243		10.5.1. Основные уравнения . . .	258
	10.1.3. Температурные напряжения в изотропном цилиндре	244		10.5.2. Переход к двумерной задаче	258
	10.1.4. Напряжения во вращающемся изотропном цилиндре	244		10.5.3. Решение двумерной задачи о расчете цилиндра МКЭ	259
	10.1.5. Цилиндр с дополнительными деформациями	244	Глава 10.6. РАСТЯЖЕНИЕ ДИСКОВ		260
	10.1.6. Цилиндры с переменными параметрами упругости	245		10.6.1. Основные уравнения	260
	10.1.7. Биметаллические цилиндры	246		10.6.2. Диски постоянной толщины с постоянными параметрами упругости	261
	10.1.8. Длинные ортотропные цилиндры	247		10.6.3. Диски переменной толщины	263
Глава 10.2. ПРЕССОВЫЕ СОЕДИНЕНИЯ И СОСТАВНЫЕ ЦИЛИНДРЫ		248		10.6.4. Расчет разрушающей частоты вращения	263
	10.2.1. Прессовые соединения . . .	248	СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ		264

Раздел 11. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ДИНАМИКИ И ПРОЧНОСТИ КОНСТРУКЦИЙ	266	11.5.2. Ускоренные методы определения предела выносливости	290
Глава 11.1. ИЗМЕРИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА (Г.Н. Третьяченко)	266	11.5.3. Влияние конструктивных, технологических и эксплуатационных факторов на усталость конструкционных материалов	291
11.1.1. Датчики и методы измерения деформаций, напряжений и перемещений	266	11.5.4. Периоды усталости и диаграмма усталостного разрушения	293
11.1.2. Средства для измерений при испытаниях на прочность	271	11.5.5. Методы и установки испытаний на усталость конструкционных элементов	295
Глава 11.2. СТАТИЧЕСКИЕ ИСПЫТАНИЯ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ ВЫСОКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ (В.К. Харченко)	278	Глава 11.6. ИСПЫТАНИЯ ПРИ УДАРНЫХ НАГРУЗКАХ (В.В. Астанин)	303
11.2.1. Особенности высокотемпературных испытаний	278	Глава 11.7. МЕТОДЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛОВ ПРИ СЛОЖНОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ (Н.М. Кульчицкий)	308
11.2.2. Специализированные испытательные установки и стенды	279	11.7.1. Испытания тонкостенных трубчатых образцов при сложном напряженном состоянии	309
Глава 11.3. ИСПЫТАНИЯ НА ПОЛЗУЧЕСТЬ И ДЛИТЕЛЬНОУ ПРОЧНОСТЬ ПРИ ВЫСОКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ (В.В. Кривенюк)	281	11.7.2. Испытания плоских образцов при сложном напряженном состоянии	310
Глава 11.4. МЕТОДЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ ТРЕЩИНСТОЙКОСТИ КОНСТРУКЦИЙ (В.П. Науменко)	283	11.7.3. Испытания материалов в обоймах и камерах высокого давления	312
11.4.1. Общие положения, назначение и область применения	283	11.7.4. Испытания образцов с плоскими гранями	312
11.4.2. Конструкции со стандартными трещинами	285	11.7.5. Автоматизация исследований механических свойств материалов при сложном напряженном состоянии	313
11.4.3. Конструкции с развивающимися трещинами	286	Глава 11.8. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДЕМПФИРОВАНИЯ КОЛЕБАНИЙ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ	314
11.4.4. Торможение и остановка трещин в конструкциях	287	11.8.1. Определение характеристик демпфирования колебаний (А.П. Яковлев)	314
Глава 11.5. ИСПЫТАНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ НА УСТАЛОСТЬ ПРИ МЕХАНИЧЕСКИХ ПОВТОРНО-ПЕРЕМЕННЫХ НАГРУЗКАХ (Б.А. Грязнов)	289	11.8.2. Схемы экспериментальных установок (А.П. Яковлев)	319
11.5.1. Представление результатов испытаний на усталость	289		

	11.8.3. Факторы, влияющие на демпфирующие свойства материалов (А.П. Яковлев)	325		11.12.5. Эквивалентные испытания, испытания конструктивно подобных изделий	357
	11.8.4. Особенности исследования конструкционного демпфирования колебаний (В.В. Матвеев)	329		11.12.6. Вибрационные испытания изделий при случайных нагрузках	363
Глава 11.9.	СТЕНДЫ ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ ПРОЧНОСТИ И НАДЕЖНОСТИ ДЕТАЛЕЙ, РАБОТАЮЩИХ В ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ УСЛОВИЯХ (Г.Н. Третьяченко Л.В. Кравчук)	330	Глава 11.13.	ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК КОНСТРУКЦИЙ С ЖИДКОСТЬЮ (Г.Н. Микишев)	367
	11.9.1. Испытания в газовых потоках	330		11.13.1. Условия подобия при моделировании динамических свойств конструкций с жидкостью	367
	11.9.2. Группы методик стендовых испытаний	334		11.13.2. Определение гидродинамических параметров	370
Глава 11.10	ИССЛЕДОВАНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК МАТЕРИАЛОВ И НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ ПРИ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ (В.А. Стрижало)	334		11.13.3. Определение динамических характеристик упругих конструкций	375
	11.10.1. Криопродукты и способы захлаживания объектов исследования	334		СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	381
	11.10.2. Холодильные камеры	335	ЧАСТЬ II.	ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН	384
	11.10.3. Стенды для испытания несущей способности элементов конструкций при низких температурах	340	Глава 1.	ОСНОВЫ ТЕОРИИ САМОУСТАНОВЛИВАЮЩИХСЯ МЕХАНИЗМОВ И ВЫБОР КИНЕМАТИЧЕСКИХ ПАР (Л.Н. Решетов)	384
Глава 11.11.	ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ИЗУЧЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ ТЕПЛОВОЙ ЗАЩИТЫ (Г.Н. Третьяченко)	342		СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	394
Глава 11.12.	ВИБРАЦИОННЫЕ ИСПЫТАНИЯ (Г.Н. Микишев)	344	Глава 2.	КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ (Э.Е. Лейсах)	395
	11.12.1. Общая характеристика	344		2.1. Основные понятия и определения	395
	11.12.2. Виброиспытательное оборудование	344		2.2. Сборки рычажных механизмов	398
	11.12.3. Приборы для измерения параметров вибрации	351		2.3. Признаки вариантов сборки групп Ассура	399
	11.12.4. Экспериментальное определение частот и форм собственных колебаний изделий	353		2.4. Признаки сборки рычажных механизмов	400
				2.5. Критерии качества передачи движения	400

2.6. Задачи кинематического анализа	402	Глава 4. МЕХАНИЗМЫ ВЫСОКИХ КЛАССОВ (У.А. Джалдакбеков)	450
2.7. Погруппный способ анализа рычажных механизмов	403	4.1. Структурный анализ	451
2.8. Анализ механизмов методом проектирования замкнутых векторных контуров на оси координат	403	4.2. Анализ кинематики	452
2.9. Анализ двухзвенных плоских групп Ассура	405	4.2.1. Анализ положений МВК	452
2.10. Анализ четырехзвенных плоских рычажных механизмов	409	4.2.2. Графоаналитическое определение скоростей и ускорений МВК второго и третьего видов	454
2.11. Анализ плоских рычажных механизмов второго класса (единый алгоритм)	411	4.2.3. Анализ перемещений, скоростей и ускорений МВК со многими степенями свободы	456
2.12. Анализ четырехзвенных плоских групп Ассура	413	4.3. Анализ динамики	457
2.13. Анализ шестизвенных плоских рычажных механизмов, содержащих четырехзвенную группу Ассура	415	4.3.1. Графоаналитическая кинестатика МВК второго и третьего видов	457
2.14. Система параметризации одноконтурных пространственных рычажных механизмов	417	4.3.2. Аналитическая кинестатика МВК второго и третьего видов	458
2.15. Определение положений звеньев пространственных рычажных механизмов	419	4.3.3. Уравнения динамики МВК	458
2.16. Определение скоростей звеньев пространственных рычажных механизмов	427	4.4. Синтез механизмов высокого класса на основе исходных кинематических цепей	459
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	430	4.4.1. Синтез ИКЦ	460
Глава 3. ОСНОВЫ КИНЕМАТИЧЕСКОГО СИНТЕЗА РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ (Ю.Л. Саркисян)	430	4.4.2. Структурно-кинематический синтез МВК на основе ИКЦ	462
3.1. Постановка и классификация задач кинематического синтеза механизмов	430	4.4.3. Градиентные методы нахождения круговых квадратических точек	463
3.2. Синтез механизмов для воспроизведения заданного движения	432	4.5. Манипуляционные устройства высоких классов	464
3.3. Синтез направляющих механизмов	440	СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	467
3.4. Синтез передаточных механизмов	443	Глава 5. ТОЧНОСТЬ МЕХАНИЗМОВ (В.И. Сергеев)	468
3.5. Синтез двухподвижных механизмов	445	5.1. Общие замечания	468
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	450	5.2. Ошибки положения механизмов	468
		5.3. Ошибки скорости и ускорения механизмов	471
		5.4. Ошибки механизмов, движение звеньев которых описывается дифференциальными уравнениями	471

5.5. Вероятностные характеристики ошибок механизмов	472	7.8. Принципы динамического уравнивания механизмов	516
5.6. Точность и параметрическая надежность механизмов	477	7.9. Влияние сил, действующих в механизме, на характер относительного движения звеньев в кинематических парах	521
5.7. Вопросы нелинейной теории точности механизмов (вероятностное моделирование в задачах точности механизмов)	478	7.9.1. Силы, действующие на звенья механизма	521
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	485	7.9.2. Режимы работы подшипников ротора при различных коэффициентах дисбаланса	521
Глава 6. ДИНАМИКА МАШИН (<i>А.П. Бессонов</i>)	485	7.9.3. Особенности работы подшипников ротора в космических аппаратах	526
6.1. Динамические модели	485	СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	528
6.2. Силы, действующие в машинах	485	Глава 8. БАЛАНСИРОВКА В МАШИНОСТРОЕНИИ (<i>П.В. Коротков</i>)	529
6.3. Силовой расчет механизмов	488	8.1. Общие сведения	529
6.4. Уравнения движения механизмов с одной степенью свободы	489	8.2. Балансировка жесткого ротора	530
6.5. Динамика механизмов с несколькими степенями свободы	491	8.3. Балансировочные станки	531
6.6. Динамика механизмов с переменной массой звеньев	494	8.4. Балансировка гибкого ротора	533
6.7. Учет упругости звеньев и диссипативных свойств системы	497	8.5. Точность балансировки	536
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	498	СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	538
Глава 7. УРАВНОВЕШИВАНИЕ МЕХАНИЗМОВ (<i>В.А. Шетельников</i>)	499	Глава 9. ПРИВОДЫ МАШИН (<i>Г.В. Крейнин</i>)	538
7.1. Силы и моменты, вызывающие колебания станины механизма	499	9.1. Общие сведения. Элементы приводов	538
7.2. Основные понятия и определения	500	9.2. Уравнения динамики приводов	541
7.3. Статические и динамические модели шатуна	501	9.3. Статические характеристики приводов	542
7.4. Методы статического уравнивания механизмов	502	9.4. Примеры статических характеристик приводов разных типов	545
7.5. Примеры уравнивания механизмов	507	9.5. Переходные процессы в приводах	552
7.6. Уравнивание манипуляторов промышленных роботов	511	9.6. Линейная модель переходного процесса	554
7.7. Уравнивание механизмов многоцилиндровых машин	512	9.7. Управление приводами	556
		9.8. Сравнение приводов разных типов	559

Глава 10.	ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ МЕХАНИЗМОВ (А.Ф. Крайнев)	562	10.3.4. Общие решения задач манипулирования	590
10.1.	Задачи, решаемые с помощью механизмов	562	10.4. Зажимающие и деформирующие механизмы	594
10.2.	Передаточные механизмы	564	10.4.1. Механизмы относительного перемещения зажимающих элементов	594
10.2.1.	Механизмы циклического движения	564	10.4.2. Механизмы распорного действия	595
10.2.2.	Механизмы прерывистого движения	567	10.4.3. Механизмы винтового прессования	596
10.2.3.	Механизмы преобразования параметров поступательного движения	573	10.4.4. Самозажимные механизмы	596
10.2.4.	Механизмы преобразования поступательного движения во вращательное и вращательного в поступательное	573	10.4.5. Механизмы, приспособляющиеся к положению и форме зажимаемого предмета	598
10.2.5.	Механизмы преобразования параметров вращательного движения	576	СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	599
10.3.	Манипулирующие механизмы	583	Глава 11. ОСОБЕННОСТИ МЕХАНИЗМОВ ШАГАЮЩЕГО ТИПА ДЛЯ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ИХ В НЕТРАДИЦИОННОМ ТРАНСПОРТА (Н.В. Умнов)	600
10.3.1.	Копирующие механизмы	584	СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	605
10.3.2.	Направляющие механизмы	585	ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ К КНИГЕ 1	606
10.3.3.	Ориентирующие механизмы	586	ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ К КНИГЕ 2	616

Раздел 8

СТЕРЖНИ И СТЕРЖНЕВЫЕ СИСТЕМЫ

Глава 8.1

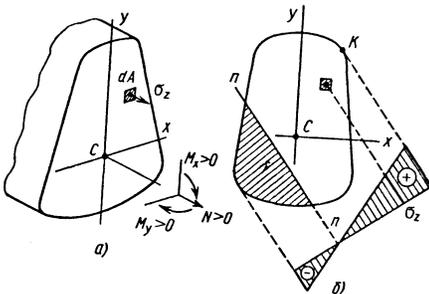
РАСТЯЖЕНИЕ И ИЗГИБ ПРЯМЫХ СТЕРЖНЕЙ

8.1.1. НОРМАЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В СТЕРЖНЕ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ И ИЗГИБЕ

В поперечных сечениях стержня нормальные напряжения (рис. 8.1.1)

$$\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{J_x}y + \frac{M_y}{J_y}x, \quad (8.1.1)$$

где N, M_x, M_y - внутренние силовые факторы в сечении, соответственно продольная сила и изгибающие моменты относительно осей x и y ; A - площадь поперечного сечения; $J_x = \int_A y^2 dA$ и $J_y = \int_A x^2 dA$ - осевые моменты инерции сечения относительно осей x и y . Линию nn , где $\sigma_z=0$, называют нулевой или нейтральной линией.



8.1.1. Эпюра нормальных напряжений в сечении прямого стержня в общем случае

Формула (8.1.1) получена для изотропно-го линейно-упругого материала на основе двух допущений: 1) равенства нулю поперечных

напряжений $\sigma_x=0, \sigma_y=0$; 2) справедливости гипотезы плоских сечений, согласно которой поперечные сечения плоские и нормальные к оси бруса до деформации остаются такими же после деформации.

Три независимых перемещения произвольного поперечного сечения - перемещение w вдоль оси z и углы φ_x и φ_y поворота относительно осей x и y - связаны с внутренними усилиями следующими равенствами:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{N}{EA}; \quad \frac{d\varphi_x}{dz} = -\frac{M_x}{EJ_x}; \quad \frac{d\varphi_y}{dz} = -\frac{M_y}{EJ_y}, \quad (8.1.2)$$

где E - модуль упругости при растяжении - сжатии материала стержня; EA и EJ_x, EJ_y - жесткости стержня соответственно при растяжении - сжатии и изгибе.

Формула (8.1.1) справедлива только в том случае, если оси x, y удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} S_x &= \int_A y dA = 0; & S_y &= \int_A x dA = 0; \\ J_{xy} &= \int_A xy dA = 0, \end{aligned} \quad (8.1.3)$$

т.е. оси x, y проходят через центр тяжести сечения (первые два условия) и ориентированы так, что центробежный момент инерции $J_{xy}=0$. Это главные центральные оси сечения. Оси x, y являются главными, если хотя бы одна из них является осью симметрии сечения.

Несимметричное сечение сложной формы разбивают на простейшие геометрические фигуры и находят координаты центра S тяжести (рис. 8.1.2)

$$\begin{aligned} a &= S_{y_1} / A = \sum_i a_i A_i / A; \\ b &= S_{x_1} / A = \sum_i b_i A_i / A. \end{aligned} \quad (8.1.4)$$

После проведения произвольных центральных осей x_0y_0 для них суммированием по отдельным фигурам находят величины

$$J_{x_0} = \sum_i J_{x_i} + (b_i - b)^2 A_i;$$

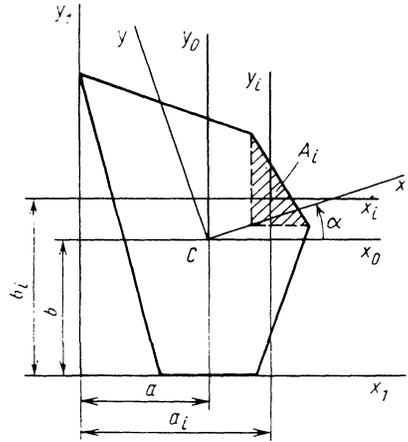
$$J_{y_0} = \sum_i J_{y_i} + (a_i - a)^2 A_i; \quad (8.1.5)$$

$$J_{x_0y_0} = \sum_i J_{x_iy_i} + (b_i - b)(a_i - a)A_i.$$

В табл 8.1.1 приведены моменты инерции относительно собственных центральных осей некоторых геометрических фигур. Для перехода от центральных осей x_0y_0 к главным используют формулы

$$J = 0,5 \left[(J_{x_0} + J_{y_0}) + \sqrt{(J_{x_0} - J_{y_0})^2 + 4J_{x_0y_0}^2} \right];$$

$$\operatorname{tg} \alpha = -J_{x_0y_0} / (J_{\max} - J_{y_0}), \quad (8.1.6)$$

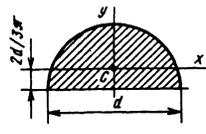
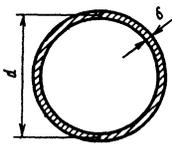
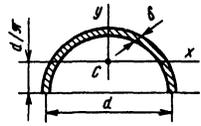


8.1.2. Схема определения положения главных центральных осей несимметричного сечения

8.1.1. Геометрические характеристики простейших фигур

Сечение	J_x	J_y	J_{xy}	A
	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{hb^3}{12}$	0	bh
	$\frac{bh^3}{36}$	$\frac{hb^3}{36}$	$\frac{b^2h^2}{72}$	$\frac{bh}{2}$
	$\frac{\pi d^4}{64}$	$\frac{\pi d^4}{64}$	0	$\frac{\pi d^2}{4}$

Продолжение табл. 8.1.1

	$\frac{9\pi^2 - 64}{1152\pi} d^4$	$\frac{\pi d^4 \delta}{128}$	0	$\frac{\pi d^2}{8}$
	$\frac{\pi d^3 \delta}{4}$	$\frac{\pi d^3 \delta}{4}$	0	$\pi d \delta$
	$\frac{\pi^2 - 4}{8\pi} d^3 \delta$	$\frac{\pi d^3 \delta}{8}$	0	$\frac{\pi d \delta}{2}$

где $J_{\max} = J_x$, $J_{\min} = J_y$ - главные центральные моменты инерции, являются экстремальными из всех центральных осей сечения; знак плюс соответствует J_{\max} , а знак минус - J_{\min} .

В частном случае плоского изгиба в одной из главных плоскостей максимальное напряжение в сечении (рис. 8.1.3)

$$\sigma_z \max = M_x / W_x, \quad (8.1.7)$$

где $W_x = J_x / y_{\max}$ - геометрическая характеристика сечения - момент сопротивления сечения при изгибе (m^3).

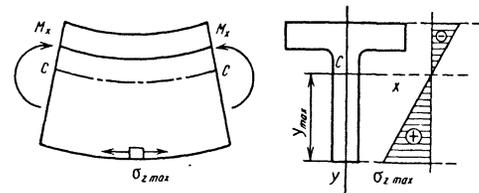


Рис.8.1.3. Эпюра нормальных напряжений в сечении прямого стержня при изгибе в главной плоскости

8.1.2. КАСАТЕЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В СТЕРЖНЕ ПРИ ИЗГИБЕ

Из условия равновесия элемента изгибаемой балки длиной dz и площадью A^0 поперечного сечения (часть поперечного сечения, отсеченная горизонтальной плоскостью на уровне $y = \text{const}$) следует, что разность про-

дольных сил dN , обусловленная приращением изгибающего момента dM_x уравновешивается сдвигающей силой Tdz (рис.8.1.4, а). Если принять, что нормальные напряжения σ_z определяются формулой (8.1.1) при $N=0$, $M_y=0$ и $M_x \neq 0$, интенсивность сдвигающей силы, возникающей в горизонтальном сечении балки на данном уровне,

$$T = \frac{dN}{dz} = \frac{dM_x}{dz} \frac{S_x^0}{J_x} = \frac{Q_y S_x^0}{J_x}, \quad (8.1.8)$$

где S_x^0 - статический момент отсечной площади A^0 относительно оси x ; Q_y - поперечная сила.

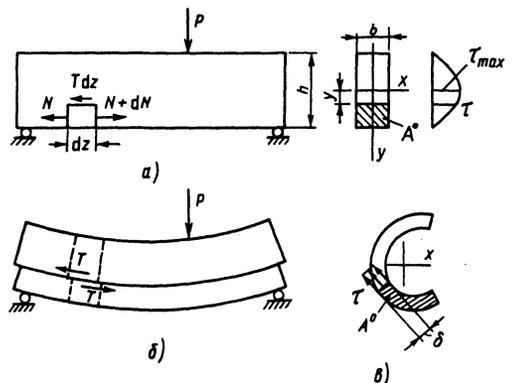


Рис. 8.1.4. Схемы действия сдвигающих сил и касательных напряжений при изгибе

Возникновение сдвигающих сил более очевидно в двуслойной балке, в которой по плоскости соприкосновения слоев при изгибе происходит их сдвиг (рис. 8.1.4, б). В сплошной балке сила T устраняет этот сдвиг и обеспечивает непрерывность перемещений на рассматриваемом уровне $y = \text{const}$. В составных балках связи сдвига (заклепки, болты, сварные и клеевые швы) рассчитывают на действие силы T по формуле (8.1.8).

Если предположить, что касательные напряжения $\tau = \tau_{zy} = \tau_{yz}$ распределены равномерно по ширине сечения b , то

$$\tau = \frac{T}{b} = \frac{Q_y S_x^0}{J_x b} \quad (8.1.9)$$

Для прямоугольного сечения статический момент $S_x^0 = 0,5b(0,25h^2 - y^2)$ и касательные напряжения τ распределены по высоте по квадратной параболе с экстремумом на уровне центра тяжести, $\tau_{\text{max}} = 1,5Q_y / (bh)$ (см. рис. 8.1.4, а) В тонкостенном сечении напряжения τ равномерно распределены по толщине δ и направлены по касательной к контуру сечения (рис. 8.1.4, в).

Для балки переменного сечения вместо зависимости (8.1.9) используют формулу

$$\tau = \frac{1}{b} \frac{dN}{dz} = \frac{1}{b} \frac{d}{dz} \left(\frac{M_x S_x^0}{J_x} \right) \quad (8.1.10)$$

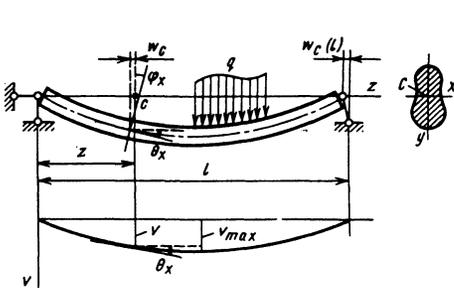


Рис. 8.1.5. Схема линейных и угловых перемещений сечений при изгибе стержня

8.1.3. ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ПРИ МАЛЫХ ПРОГИБАХ

При изгибе балки, нагруженной распределенными силами интенсивностью q , в главной плоскости yz характерными перемещениями произвольного сечения являются прогиб v и угол поворота φ_x (рис. 8.1.5). При малых прогибах, когда отношение v_{max} / l имеет порядок 10^{-2} и менее, продольными перемещениями w_C сечений пренебрегают ($w_C = 0$).

В общем случае элемент балки испытывает деформацию искривления под действием изгибающего момента M_x (рис. 8.1.6, а) и деформацию сдвига, вызванную поперечными силами Q_y (рис. 8.1.6, б):

$$\frac{d\varphi_x}{dz} = -\frac{M_x}{EJ_x}; \quad \gamma_{zy} = \frac{kQ_y}{GA} \quad (8.1.11)$$

где $k = \int \left(\frac{S_x^0}{bJ_x} \right)^2 dA$ - коэффициент, учи-

тывающий неравномерность распределения касательных напряжений в сечении; для прямоугольного сечения $k=1,2$; для двутавра $k \approx A/A_{\text{ст}}$; A - площадь всего сечения; $A_{\text{ст}}$ - площадь сечения вертикальной стенки.

Углы φ_x поворота сечения и θ_x касательной к искривленной оси балки отличаются между собой на угол γ_{zy} сдвига:

$$\theta_x = \varphi_x + \gamma_{zy} \quad (8.1.12)$$

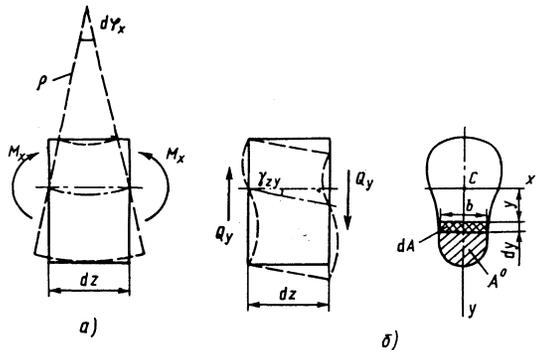


Рис. 8.1.6. Схемы нагружения и деформации элемента балки от изгибающего момента и поперечной силы

При малых углах $\text{tg}\theta_x \approx \theta_x$ и $v' = dv / dz = \theta_x$. Таким образом, из соотношений (8.1.11) и (8.1.12) следуют два равенства, которые образуют систему дифференциальных уравнений первого порядка для определения перемещений в балке с учетом деформаций искривления и сдвига:

$$\theta'_x = -(M_x / EJ_x) + (kQ_y / GA)';$$

$$v' = \theta_x. \quad (8.1.13)$$

Эта система может быть записана в виде одного уравнения второго порядка

$$v'' = \frac{M_x}{EJ_x} + \left(\frac{kQ_y}{GA} \right)'. \quad (8.1.14)$$

Во многих случаях деформациями сдвига пренебрегают, полагая $\theta_x = \varphi_x$, что приводит к решению одной из задач интегрирования: системы

$$\varphi'_x = -(M_x / EJ_x); \quad v' = -\varphi_x; \quad (8.1.15)$$

эквивалентного уравнения второго порядка

$$v'' = -\frac{M_x}{EJ_x}; \quad (8.1.16)$$

эквивалентного уравнения четвертого порядка

$$(EJ_x v''')' = q. \quad (8.1.17)$$

При $EJ_x = \text{const}$

$$EJ_x v^{IV} = q. \quad (8.1.18)$$

При интегрировании уравнения второго порядка (8.1.16) граничные условия выражаются через функцию прогибов v и ее первую производную $v' = \varphi_x$, т.е. являются кинематическими. При использовании уравнений четвертого порядка к приведенным кинематическим условиям могут добавляться силовые граничные условия, формулируемые с помощью равенств $M_x = -EJ_x v''$ и

$$Q_y = -(EJ_x v''').$$

При $EJ_x = EJ = \text{const}$ для частного вида нагрузок путем интегрирования уравнений (8.1.16) или (8.1.18) можно получить универсальную формулу для определения прогибов на n -м участке (рис. 8.1.7)

$$v_n = v_0 + \varphi_0 z - \frac{M_0 z^2}{2! EJ} - \frac{Q_0 z^3}{3! EJ} + \frac{q_0 z^4}{4! EJ} - \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{M_i (z - a_i)^2}{2! EJ} - \frac{P_i (z - a_i)^3}{3! EJ} - \frac{\Delta q_i (z - a_i)^4}{4! EJ} \right); \quad (8.1.19)$$

где v_0, φ_0, M_0 и Q_0 - начальные параметры.

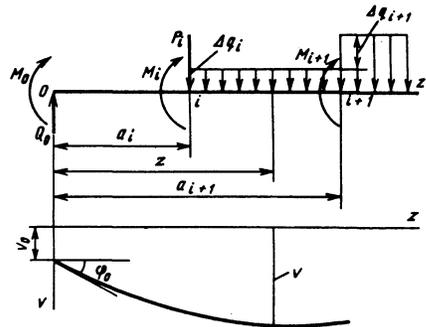


Рис. 8.1.7 Схема нагружения балки при определении прогибов по методу начальных параметров

Метод расчета перемещений по формуле (8.1.19) называется методом начальных параметров. Незвестные начальные параметры на левом конце балки находят из условий ее закрепления в промежуточных сечениях или на правом конце. Значения функций v и φ в отдельных сечениях целесообразно получать методом Максвелла - Мора (см. гл. 8.10).

Для больших прогибов упругого стержня используют первое соотношение (8.1.11), в котором левая часть представляет кривизну элемента $1/\rho$ (см. рис. 8.1.6, а). При этом получим нелинейное уравнение

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2 v}{dz^2} \frac{1}{\sqrt{1 + (dv / dz)^2}} = -\frac{M_x}{EJ_x}. \quad (8.1.20)$$

Для $(dv / dz)^2 \ll 1$ оно переходит в эквивалентное уравнение второго порядка (8.1.16). Аналогичные уравнения в другой форме и численное решение подобных задач см.гл. 8.15 [29].

8.1.4. СЖАТО-ИЗОГНУТЫЕ И РАСТЯЖУТО-ИЗОГНУТЫЕ СТЕРЖНИ

Особенность рассматриваемых стержней состоит в том, что в изогнутом состоянии продольная сила N создает добавочный изгибающий момент $\Delta M_x = N(v - v_0)$ (рис. 8.1.8). Если эти моменты значительны по сравнению с моментами M_q от поперечной нагрузки, то расчет таких стержней необходимо проводить по деформированному состоянию, т.е. уравнения равновесия и определение внутренних сил следует относить к изогнутому стержню. С учетом ΔM_x выражение (8.1.16) для сжато-изогнутого стержня имеет вид

$$EJ_x v'' = -[M_q + N(v - v_0)]. \quad (8.1.21)$$

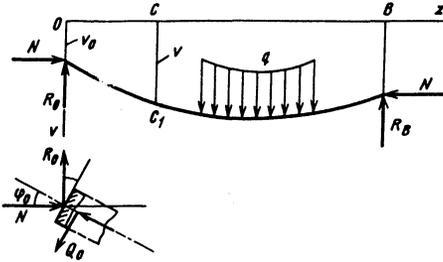


Рис. 8.1.8. Схема действия сил у опоры в деформированном состоянии сжато-изогнутого стержня

После двукратного дифференцирования при $EJ_x = \text{const}$ получается дифференциальное уравнение для определения прогибов при сжатии с изгибом

$$v^{IV} + \alpha^2 v'' = q / (EJ_x), \quad (8.1.22)$$

где $\alpha = \sqrt{N / (EJ_x)}$, m^{-1} .

Для стержня, нагруженного некоторой распределенной продольной нагрузкой так, что $N=N(z)$, а также $EJ_x=EJ(z)$, вместо уравнения (8.1.22) получается

$$(EJv'')'' + (Nv')' = q. \quad (8.1.23)$$

Вначале находят прогибы $v=v(z)$, решая уравнение (8.1.22) или (8.1.23), а затем вычисляют внутренние усилия

$$M_x = -EJ_x v''; \quad Q_y = -(EJ_x v''). \quad (8.1.24)$$

Следует отметить, что сила Q_y отнесена к деформированному состоянию (см. рис. 8.1.8). С учетом этого и принятия $\sin \phi_0 = \phi_0$ и $\cos \phi_0 = 1$ при решении уравнения (8.1.22) или

(8.1.23) получено силовое граничное условие по поперечной силе

$$Q_0 = R_0 - N\phi_0 = -(EJ_x v'')'_{z=0}, \quad (8.1.25)$$

где R_0 - поперечная реакция, ориентированная перпендикулярно к оси стержня в недеформированном состоянии.

Общий интеграл уравнения (8.1.22)

$$v = C_1 + C_2 z + C_3 \sin \alpha z + C_4 \cos \alpha z + v_r(q), \quad (8.1.26)$$

где v_r - частное решение.

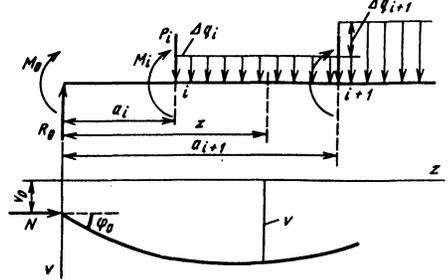


Рис. 8.1.9. Схема действия сил и моментов при определении прогибов по методу начальных параметров в сжато-изогнутом стержне

Если к условию (8.1.25) добавить условия $v(0)=v_0$; $v'(0)=\phi_0$; $-EJ_x v''(0) = M_0$, то решение (8.1.26) аналогично (8.1.19) можно представить через начальные параметры (рис. 8.1.9):

$$v = v_0 + \frac{\phi_0}{2} \sin \alpha z - \frac{M_0}{\alpha^2 EJ_x} (1 - \cos \alpha z) - \frac{R_0}{\alpha^3 EJ_x} (\alpha z - \sin \alpha z) + \sum_i \left\{ \frac{P_i}{\alpha^3 EJ_x} [\alpha(z - a_i) - \sin \alpha(z - a_i)] - \frac{M_i}{\alpha^2 EJ_x} [1 - \cos \alpha(z - a_i)] + \frac{\Delta q_i}{\alpha^4 EJ_x} \left[\frac{1}{2} \alpha^2 (z - a_i)^2 - 1 + \cos \alpha(z - a_i) \right] \right\}. \quad (8.1.27)$$

Суммирование производится для всех i , где $a_i < z$ [41].

Дифференциальное уравнение для растянуто-изогнутого стержня отличается от (8.1.22) только знаком второго слагаемого:

$$v^{IV} - \alpha^2 v'' = (q / EJ_x). \quad (8.1.28)$$

Общий интеграл при этом

$$v = C_1 + C_2 z + C_3 \operatorname{sh} z + C_4 \operatorname{ch} z + v_4(q). \quad (8.1.29)$$

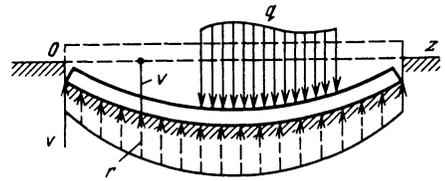


Рис. 8.1.10. Схема нагружения и деформации балки на упругом основании

Все выражения для растянуто-изогнутого стержня можно получить из соответствующих формул для сжато-изогнутых стержней путем замены величин αz ; $\sin \alpha z$; $\operatorname{tg} \alpha z$; $\cos \alpha z$; соответственно на $i \alpha z$; $i \operatorname{sh} \alpha z$; $i \operatorname{th} \alpha z$; $\operatorname{ch} \alpha z$, где $i = \sqrt{-1}$. Особенностью рассматриваемых стержней является нелинейная зависимость прогибов и внутренних усилий от продольной силы и линейная - от поперечных нагрузок P , q , M и т.д. В отношении последних справедлив принцип суперпозиции (см. гл. 8.13).

С возрастанием продольной силы N поведение сжато- и растянуто-изогнутых стержней различно. В первых прогибы, возрастая, стремятся к бесконечности с приближением N к критическому Эйлеровому значению $N_{кр} = N_{эмин}$, что свидетельствует о неустойчивости стержня, центрально сжатого силой $N_{кр}$. Для анализа прогибов непосредственно в докритическом и послекритическом состояниях необходимо использовать нелинейные уравнения типа (8.1.20). В растянуто-изогнутых стержнях с возрастанием силы N происходит монотонное убывание прогибов.

Для приближенного определения прогибов используется формула

$$v = \frac{v_q}{1 \pm (N / N_э)}, \quad (8.1.30)$$

где v_q - прогиб только от поперечной нагрузки; знак плюс для растянуто-, а минус для сжато-изогнутых стержней.

Ориентировочно эта формула справедлива для $0 \leq N \leq 0,8 N_э$.

8.1.5. БАЛКИ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Для балки на сплошном упругом основании принята простейшая, но наиболее часто используемая модель основания Винклера (рис. 8.1.10), согласно которой интенсивность упругого отпора (реакции) в данной точке зависит только от прогиба в этой точке:

$$r = kv, \quad (8.1.31)$$

где k - коэффициент жесткости упругого основания, H/m^2 .

Связь балки с основанием считается двусторонней, т.е. основание упруго сопротивляется прогибу балки как вниз, так и вверх, без отрыва от основания. В более сложных моделях основания его реактивное воздействие на балку представляют в виде нагрузки и моментов, интенсивность которых связана с прогибом, углом поворота, кривизной и другими функциями изгиба балки. В качестве модели основания используется упругое полупространство, упругий слой [8, 9]. Для балки на Виклеровом основании уравнение изгиба

$$(EJ_x v'')'' + kv = q \quad (8.1.32)$$

или при $EJ = \text{const}$

$$v^{IV} + 4\beta^4 v = (q / EJ),$$

где $\beta = \sqrt[4]{k / (4EJ)}$, m^{-1}

Общий интеграл уравнения (8.1.32)

$$v = e^{-\beta z} (C_1 \cos \beta z + C_2 \sin \beta z) + e^{\beta z} (C_3 \cos \beta z + C_4 \sin \beta z) + v_4(q). \quad (8.1.33)$$

Используя граничные условия $v(0) = v_0$; $v'(0) = \varphi_0$; $-EJv''(0) = M_0$; $-EJv'''(0) = Q_0$, решение (8.1.33) можно представить через начальные параметры (рис. 8.1.11)

$$v = v_0 K_1(\beta z) + \frac{\varphi_0}{\beta} K_2(\beta z) - \frac{M_0}{\beta^2 EJ} K_3(\beta z) - \frac{Q_0}{\beta^3 EJ} K_4(\beta z) + \sum_i \left(-\frac{M_i}{\beta^2 EJ} K_3(\beta z_i) + \frac{P_i}{\beta^3 EJ} K_4(\beta z_i) + \frac{\Delta q_i}{4\beta^4 EJ} [1 - K_1(\beta z_i)] \right), \quad (8.1.34)$$

где $K_j(\beta z)$ - функции Крылова; функции и их производные по координате z приведены в табл. 8.1.2; $z_i = z - a_i$.

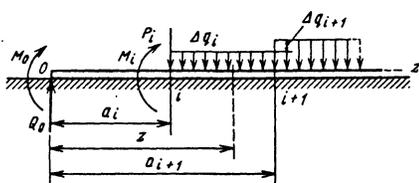


Рис. 8.1.11. Схема определения прогибов балки на Винклеровом упругом основании по методу начальных параметров

Суммирование в (8.1.34) выполняется для всех i , где $a_i < z$. Для произвольной нагрузки $q(z)$ частное решение в (8.1.34)

$$v_4 = \frac{1}{\beta^3 EJ} \int_0^z q(\tilde{z}) K_4[\beta(z - \tilde{z})] d\tilde{z}. \quad (8.1.35)$$

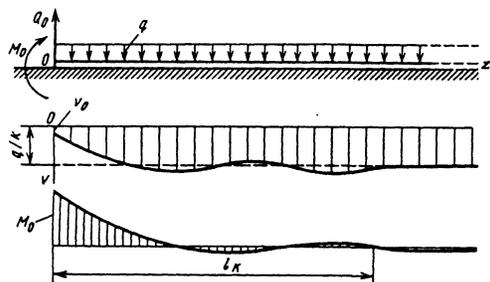


Рис. 8.1.12. Характеристика краевого эффекта в полубесконечной балке на упругом основании

После получения прогибов v находят момент и силы $M_x = -EJv''$ и $Q_y = -EJv'''$.

8.1.2. Функции Крылова и их производные

j	$k_j(\beta z)$	K'_j	K''_j	K'''_j	K^{IV}_j
1	$\text{ch}\beta z \cos\beta z$	$-4\beta K_4$	$-4\beta^2 K_3$	$-4\beta^3 K_2$	$-4\beta K_1$
2	$0,5(\text{ch} \sin\beta z + \text{sh}\beta z \cos\beta z)$	βK_1	$-4\beta^2 K_4$	$-4\beta^3 K_3$	$-4\beta^4 K_2$
3	$0,5\text{sh}\beta z \sin\beta z$	βK_2	$\beta^2 K_1$	$-4\beta^3 K_4$	$-4\beta^4 K_3$
4	$0,25(\text{ch}\beta z \sin\beta z - \text{sh} \cos\beta z)$	βK_3	$\beta^2 K_2$	$\beta^3 K_1$	$-4\beta K_4$

Для полубесконечной балки (рис. 8.1.12) в решении (8.1.33) следует положить $C_3=C_4=0$, так как множитель $e^{\beta z} \rightarrow \infty$ при $z \rightarrow \infty$, что не согласуется со смыслом задачи. Для $q=\text{const}$

$$v = e^{-\beta z} (C_1 \cos\beta z + C_2 \sin\beta z) + \frac{q}{k}. \quad (8.1.36)$$

На основании (8.1.36) и граничных условий $-EJv''(0) = M_0$ и $-EJv'''(0) = Q_0$ получены формулы:

$$v = -\frac{1}{2\beta^3 EJ} (\beta M_0 \Phi_2 + Q_0 \Phi) + q/k;$$

$$v' = \frac{1}{2\beta^2 EJ} (2\beta M_0 \Phi_3 + Q_0 \Phi_1);$$

$$M_x = M_0 \Phi_1 + \frac{1}{\beta} Q_0 \Phi_4;$$

$$Q_y = -2\beta M_0 \Phi_4 + Q_0 \Phi_2.$$

$$(8.1.37)$$

Здесь

$$\Phi_1 = \Phi_3 + \Phi_4; \quad \Phi_2 = \Phi_3 - \Phi_4;$$

$$\Phi_3 = e^{-\beta z} \cos\beta z; \quad \Phi_4 = e^{-\beta z} \sin\beta z.$$

$$(8.1.38)$$

Множитель $e^{-\beta z}$ убывает с возрастанием z . Так, $e^{-\beta z} = 0,046$ при $\beta z = \pi$. На длине $l_k = \pi / \beta$ можно считать, что все изгибные деформации балки затухают. (см. рис. 8.1.12). Это явление называют краевым эффектом, а длину l_k - длиной краевого эффекта

Балка конечной длины $L \geq l_k$ (длинная балка) практически работает на краевые воздействия как бесконечная, в ней почти не сказывается влияние одного конца на другой. При $L < l_k$ (короткая балка) расчет ведется с удержанием в решении (8.1.33) четырех произвольных постоянных, например, в виде (8.1.34).

8.1.6. ГИБКАЯ НИТЬ

Идеально гибкая нить - расчетная модель в виде тонкого стержня, обладающего нулевой жесткостью на изгиб и способного работать на растяжение (рис. 8.1.13). Формула для определения кривой провисания нити, нагруженной вертикальной нагрузкой q , получена из условия равенства нулю изгибающего момента в произвольной точке K нити:

$$Y = y + xtg\beta = M / H, \quad (8.1.39)$$

где $M = \Phi(x)$ - функция, выражающая изгибающий момент в условной шарнирно-опертой балке BC от нагрузки q ; H - распор - горизонтальная составляющая нити; при вертикальной нагрузке распор H постоянен по длине нити.

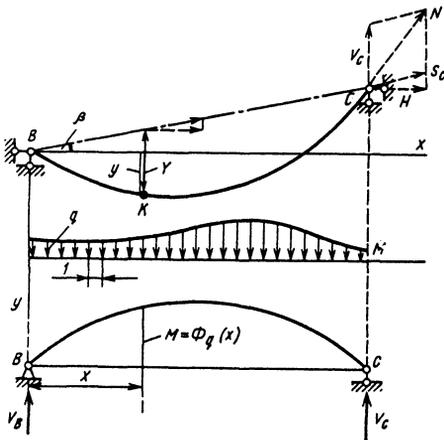


Рис. 8.1.13. Схема определения ординат Y провисания гибкой нити с помощью эпюры изгибающих моментов M

Нагрузка q известна и отнесена к единице длины проекции нити на ось x . Двукратным дифференцированием (8.1.39) по x получено эквивалентное уравнение в дифференциальной форме

$$y'' = -q / H. \quad (8.1.40)$$

Если нагрузка q отнесена к единице длины дуги, элемент которой $ds = dx\sqrt{1 + (y')^2}$, то вместо (8.1.40)

$$Hy'' + q\sqrt{1 + (y')^2} = 0. \quad (8.1.41)$$

Пусть $q = \text{const}$ и $\beta = 0$, тогда решением уравнения (8.1.40) является парабола

$$y = \frac{q}{2H}(l - x)x, \quad (8.1.42)$$

а уравнения (8.1.41) - цепная линия

$$y = \frac{H}{q} \left[\text{ch} \frac{ql}{2H} - \text{ch} \frac{q}{H} \left(x - \frac{l}{2} \right) \right]. \quad (8.1.43)$$

Для пологих нитей, когда $(y')^2 \ll 1$, кривые по (8.1.42) и (8.1.43) практически совпадают. В дальнейшем нагрузка относится к единице длины проекции нити на ось x . Для пологой нити ее длина L и длина проекции связаны приближенным соотношением

$$L - l = 0,5 \int_0^l (y')^2 dx. \quad (8.1.44)$$

Если распор H у нити известен и фиксирован, как, например, показано на рис. 8.1.14 (нить постоянного тяжения), то уравнения (8.1.39) или (8.1.40) и (8.1.44) вполне решают задачу нахождения ее равновесного состояния при заданной нагрузке.

Пусть нить, закрепленная на концах, под некоторой нагрузкой q_0 имеет провисание, определяемое по (8.1.39),

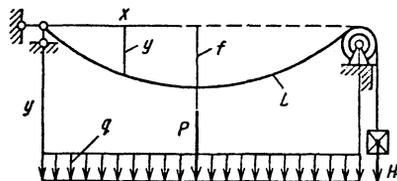


Рис.8.1.14. Схема расчета гибкой нити с фиксированным распором

$$Y = y + xtg\beta = M_0/H_0 \quad (8.1.45)$$

Прикладывается добавочная нагрузка p и температура нити возрастает на величину $\Delta t > 0$. В результате суммарная нагрузка $q = q_0 + p$, распор $H = H_0 + \Delta H$ и провисание нити

$$Y = y + xtg\beta = M_q / H. \quad (8.1.46)$$

Для определения нового провисания нити, как следует из (8.1.46) находится распор $H = H_0 + \Delta H$ из условия отсутствия взаимного горизонтального перемещения концевых точек нити, что дает кубическое уравнение [1]

$$aH^3 + bH^2 - c = 0. \quad (8.1.47)$$

Здесь

$$a = \mu \frac{l}{EA}; \quad c = \frac{1}{2} \int_0^b (M'_q)^2 dx;$$

$$b = \frac{1}{2H_0^2} \int_0^b (M'_{q_0})^2 dx - \mu \frac{H_0 l}{EA} + \nu \alpha \Delta t^0 l =$$

$$= L_0 - l - \mu \frac{H_0 l}{EA} + \nu \alpha \Delta t^0 l;$$

$$\mu = \frac{1}{l} \int_0^l \frac{dx}{\cos^3 \varphi}; \quad \nu = \frac{1}{l} \int_0^l \frac{dx}{\cos^2 \varphi}. \quad (8.1.48)$$

Для квадратной параболы [40]

$$\begin{aligned} \mu &= 1 + 8m^2 + \frac{96}{5} m^4 + \\ &+ \frac{3}{2} \left(1 + 8m^2 + \frac{1}{4} \text{tg}^2 \beta \right) \text{tg}^2 \beta; \\ \nu &= 1 + \frac{16}{3} m^2 + \text{tg}^2 \beta, \end{aligned}$$

где $m = f/l$ - пологость нити.

Так, $\mu \approx 1,08$ и $\nu \approx 1,05$ для $\beta = 0$ и $m = 0,1$

Часто полагают μ, ν и $\cos \varphi$ равным единице.

Так как $M'_{q_0} = Q_{q_0}$ и $M'_q = Q_q$, то интегралы в (8.1.48) можно вычислять путем "перемножения" эпюр поперечных сил в шарнирной балке от нагрузок q_0 и q . Для нерастяжимой нити $EA = \infty, a = 0$ и из (8.1.47)

$$H = \sqrt{c/b}. \quad (8.1.49)$$

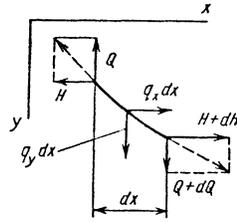


Рис. 8.1.15. Схема действия сил на элемент гибкой нити

В случае загрузки нити вертикальной q_y и горизонтальной q_x нагрузками статическое уравнение (8.1.39) несправедливо. Распор H является переменной величиной и условия равновесия элемента нити в этом случае (рис. 8.1.15) с учетом того, что $Q = Hy'$, выражаются равенствами

$$q_x + H' = 0; \quad q_y + (Hy')' = 0. \quad (8.1.50)$$

О численном решении задачи расчета системы нитей см. гл. 8.15.

Глава 8.2

СВОБОДНОЕ КРУЧЕНИЕ СТЕРЖНЕЙ

8.2.1. ПРЯМОЙ СТЕРЖЕНЬ КРУГЛОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

Расчет стержней круглого поперечного сечения (валов) основан на гипотезе плоских сечений, в соответствии с которой при действии внешних моментов каждое поперечное сечение поворачивается в своей плоскости на некоторый угол как жесткое целое (рис. 8.2.1). Относительный угол закручивания сечения (угол, приходящийся на единицу длины стержня)

$$\theta = M_{кр} / (GJ_p),$$

где $M_{кр}$ - крутящий момент, действующий в сечении; G - модуль сдвига; GJ_p - жесткость стержня при кручении; J_p - полярный момент инерции поперечного сечения.

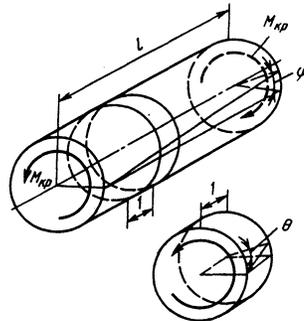


Рис. 8.2.1. Схема кручения стержня круглого поперечного сечения

Взаимный угол поворота концевых сечений стержня

$$\varphi = \int_0^l \frac{M_{кр}}{GJ_p} dz,$$

где l - длина стержня.

Для постоянного по длине стержня крутящего момента

$$\varphi = M_{кр} l / (GJ_p).$$

В поперечном сечении с внешним радиусом R действуют только касательные напряжения, распределенные вдоль радиуса по линейному закону (рис. 8.2.2),

$$\tau = M_{кр} r / J_p \text{ при } 0 \leq r \leq R.$$

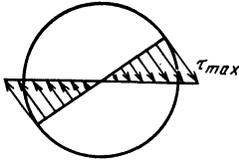


Рис. 8.2.2. Эпюра касательных напряжений при кручении стержня круглого поперечного сечения

В точках, наиболее удаленных от оси, имеют место наибольшие значения

$$\tau_{max} = M_{кр} R / J_p \text{ или } \tau_{max} = M_{кр} / W_p.$$

Полярный момент сопротивления $W_p = J_p / R$.

Для стержня сплошного кругового сечения диаметром D .

$$J_p = \frac{\pi D^4}{32}; \quad W_p = \frac{\pi D^3}{16} \approx 0,2 D^3,$$

а кольцевого сечения с внутренним диаметром d

$$J_p = \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4);$$

$$W_p = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{16D} \approx 0,2 D^3 \left(1 - \frac{d^4}{D^4} \right).$$

Касательные напряжения в каждой точке поперечного сечения направлены перпендикулярно к радиусу. Из условия парности касательных напряжений следует, что такие же

касательные напряжения действуют и в продольных сечениях стержня (рис. 8.2.3).

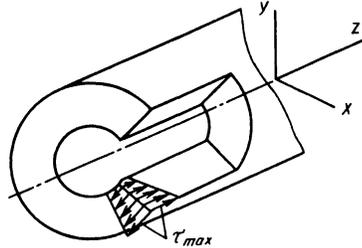


Рис. 8.2.3. Эпюра касательных напряжений в точках стержня круглого поперечного сечения при кручении

Напряженное состояние в произвольной точке закручиваемого стержня в осях xuz (рис. 8.2.3) характеризуется следующими компонентами тензора напряжений: $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{yz} = 0$; $\tau_{xz} = \tau$.

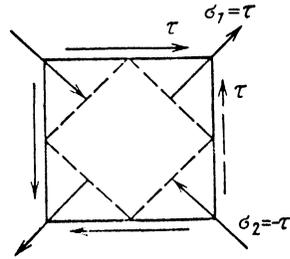


Рис. 8.2.4. Расположение площадок главных напряжений при кручении стержня круглого поперечного сечения

Итак, при кручении круглого стержня возникает плоское напряженное состояние чистого сдвига. Главные площадки повернуты в плоскости сдвига по отношению к выбранным площадкам на 45° и главные напряжения (растягивающие и сжимающие) на них равны по модулю τ (рис. 8.2.4).

8.2.2. СТЕРЖЕНЬ НЕКРУГЛОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

Определение напряжений и перемещений в стержне некруглого поперечного сечения значительно сложнее, чем в стержне круглого сечения. Гипотеза плоских сечений в общем случае решения оказывается неприемлемой, поскольку в результате кручения поперечное сечение заметно искривляется (рис. 8.2.5), появляются перемещения (депланации), перпендикулярные к плоскости поперечного сечения. В связи с этим при определении перемещений необходимо учиты-

вать не только взаимный поворот сечений, но и местный перекося, вызванный искривлением сечения.

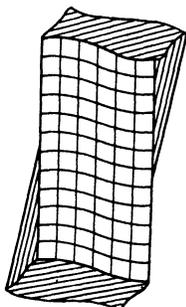


Рис. 8.2.5. Деформация некруглого поперечного сечения стержня

В системе координат xzy (рис. 8.2.6.) отличными от нуля оказываются касательные напряжения τ_{zx} и τ_{zy} , все остальные компоненты тензора напряжений равны нулю.

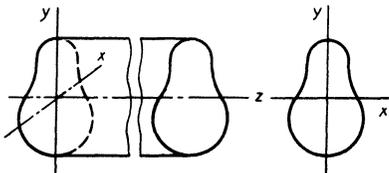


Рис. 8.2.6. Система координат для закручивания стержня

Для отыскания указанных касательных напряжений вводят функцию напряжений $\Phi(x, y)$, зависящую только от координат x, y , - функцию Прандтля. Эта функция аналогична функции напряжений в плоской задаче. Напряжения

$$\tau_{zx} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}; \quad \tau_{zy} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}. \quad (8.2.1)$$

При таком способе решения уравнение равновесия

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0$$

удовлетворяется тождественно.

Функцию Φ определяют из уравнения

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -2G\theta.$$

На боковой поверхности стержня она должна удовлетворять условию

$$\Phi = c \text{ при } c = \text{const}. \quad (8.2.2)$$

Если поперечное сечение представляет собой односвязную область (внутренние полости отсутствуют), то граничное условие (8.2.2) имеет вид $\Phi = 0$. Если поперечное сечение является многосвязным (рис. 8.2.7), функция Φ является постоянной для каждого контура Γ_i : $\Phi = c_i$ ($i=0, 1, 2, \dots, m$). Из всех постоянных c_i произвольно можно выбрать только одну константу, например $c_0 = 0$. Остальные константы определяют из соотношений

$$\oint_{\Gamma_i} \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds = -2G\theta \Omega_i,$$

где $\partial \Phi / \partial n$ - производная по нормали к рассматриваемому контуру; Ω_i - площадь области, ограниченной контуром Γ_i .

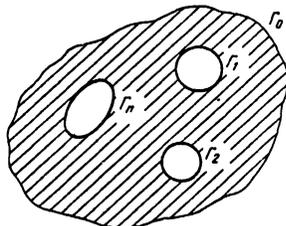


Рис. 8.2.7. Поперечное сечение стержня в виде многосвязной области

Крутящий момент

$$M_{кр} = 2 \int_A \Phi dA + 2 \sum_{i=1}^m \Phi_i \Omega_i. \quad (8.2.3)$$

Для стержня, поперечное сечение которого является односвязной областью,

$$M_{кр} = 2 \int_A \Phi dA. \quad (8.2.4)$$

Интегралы в соотношениях (8.2.3) и (8.2.4) берутся по площади поперечного сечения.

Максимальные касательные напряжения, представляющие собой геометрическую сумму напряжений τ_{xz} и τ_{yz} , $\tau_{\max} = M_{кр} / W_{кр}$. Момент сопротивления при кручении $W_{кр}$ (м^3) зависит от размеров и форм поперечного сечения.

В табл. 8.2.2 приведены выражения для определения моментов $W_{кр}$ и максимальных

касательных напряжений τ_{\max} для некоторых типов поперечных сечений.

8.2.1. Коэффициенты k_1 и k_2 для прямоугольного сечения

a/b	k_1	k_2
1,0	0,1406	0,2082
1,2	0,1661	0,2189
1,4	0,1869	0,2272
1,5	0,1960	0,2312
1,6	0,2037	0,2345
1,8	0,2174	0,2405
2,0	0,2287	0,2455
2,3	0,2422	0,2532
2,5	0,2494	0,2575
3,0	0,2633	0,2670
3,5	0,2735	0,2754
4,0	0,2810	0,2818
4,5	0,2868	0,2872
5,0	0,2914	0,2916
5,5	0,2952	0,2953
6,0	0,2984	0,2984
7,0	0,3035	0,3035
8,0	0,3071	0,3071
10,0	0,3124	0,3124

В некоторых случаях задачу о кручении призматических стержней некруглого сечения целесообразно решать в перемещениях.

В направлении координатных осей x , y (см. рис. 8.2.6) перемещения $u = -\theta zy$; $v = \theta zx$; вдоль оси стержня $w = \theta U(x, y)$.

Функция перемещения U , или функция кручения Сен-Венана, является решением гармонического уравнения

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0.$$

На контуре поперечного сечения она удовлетворяет условию

$$\frac{\partial U}{\partial n} = y \cos \alpha - x \sin \alpha,$$

где $\partial U / \partial n$ - производная функции U по нормали к контуру.

Угол закручивания θ находят из равенства

$$M_{кр} = G\theta \int_A \left(x^2 + y^2 + x \frac{\partial U}{\partial y} - y \frac{\partial U}{\partial x} \right) dA.$$

Геометрическая жесткость стержня при кручении

$$J_{кр} = \int_A \left(x^2 + y^2 + x \frac{\partial U}{\partial y} - y \frac{\partial U}{\partial x} \right) dA.$$

После некоторых преобразований эта формула принимает вид

$$J_{кр} = J_p - \int_A \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 \right] dA,$$

где $J_p = \int_A (x^2 + y^2) dA$ - полярный момент

инерции поперечного сечения относительно центра тяжести сечения.

Отсюда $J_{кр} \leq J_p$. Равенство справедливо только для круга или кольцевого сечения. Таким образом, из всех сплошных призматических стержней, имеющих одинаковый полярный момент инерции, стержень кругового сечения имеет наибольшую жесткость при кручении, а из всех полых стержней при условии равенства J_p наибольшую жесткость при кручении имеет стержень кольцевого поперечного сечения.

Известна оценка для $J_{кр} \leq \frac{4J_x J_y}{J_p}$,

причем

$$J_x = \int_A y^2 dA; \quad J_y = \int_A x^2 dA.$$

Знак равенства имеет место только для эллиптического сечения. Следовательно, из всех стержней с одинаковыми жесткостями при изгибе в главных плоскостях стержень эллиптического поперечного сечения имеет наибольшую жесткость при кручении.

В табл. 8.2.2 приведены выражения для определения $J_{кр}$ наиболее характерных типов поперечных сечений.

8.2.3. ТОНКОСТЕННЫЙ СТЕРЖЕНЬ ЗАМКНУТОГО ПРОФИЛЯ

В тонкостенном стержне один из размеров поперечного сечения (толщина) значительно меньше других размеров. Тонкостенные стержни могут быть замкнутого профиля (рис. 8.2.8, а) и открытого (рис. 8.2.8, б). Рассматриваются только стержни замкнутого профиля.

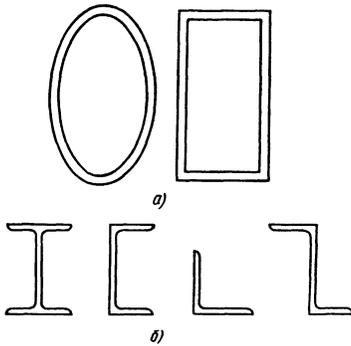


Рис. 8.2.8. Поперечные сечения тонкостенных стержней

Распределение касательных напряжений легко получить из гидродинамической аналогии представления касательных напряжений как скорости циркулирующей внутри сечения жидкости. Очевидно, что по толщине стенки напряжения распределяются почти равномерно и направлены по касательной к средней линии профиля. Справедливо равенство

$$\tau(s)h(s) = \text{const},$$

где $\tau(s)$ и $h(s)$ - соответственно касательные напряжения и толщина стенки в точке средней линии профиля с координатой s , отсчитываемой от некоторой точки O (рис.8.2.9).

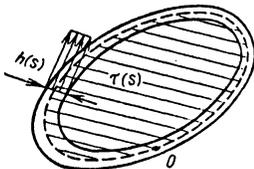


Рис. 8.2.9. Распределение касательных напряжений по толщине стенки замкнутого профиля

Касательные напряжения связаны с крутящим моментом соотношением

$$\tau(s) = M_{кп} / (2h(s)\Omega),$$

где Ω - площадь фигуры, ограниченной средней линией профиля (заштрихованная область).

При кручении стержня замкнутого профиля максимальные касательные напряжения

возникают в наиболее тонком месте. Угол закручивания стержня постоянного сечения длиной l

$$\varphi = \frac{M_{кп}l}{4G\Omega^2} \int_s \frac{ds}{h(s)}.$$

Интегрирование выполняют по длине осевой линии замкнутого профиля. Если толщина стенки постоянна, то

$$\varphi = \frac{M_{кп}lL}{4G\Omega^2h},$$

где L - длина осевой линии замкнутого профиля.

Глава 8.3

СТЕСНЕННОЕ КРУЧЕНИЕ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ

8.3.1. ОСОБЕННОСТИ СТЕСНЕННОГО КРУЧЕНИЯ СТЕРЖНЕЙ ОТКРЫТОГО ПРОФИЛЯ

В тонкостенном стержне произвольного незамкнутого сечения (рис. 8.3.1), испытывающего свободное кручение, все размеры сечения относят к срединной линии s , делящей стенку толщиной δ пополам. Например, площадь сечения

$$A = \int_s \delta ds. \quad (8.3.1)$$

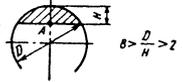
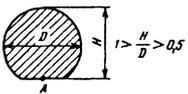
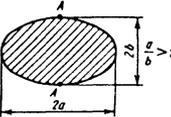
На рис. 8.3.1 показана срединная поверхность стержня. При свободном кручении (см. гл. 8.2) все сечения стержня испытывают одинаковые деформации w . Так как перемещения w не зависят от оси z , то $\varepsilon_z = dw/dz = 0$ и по закону Гука $\sigma_z = 0$. В поперечном сечении возникают только касательные напряжения, распределенные по толщине δ стенки в виде треугольника (рис. 8.3.2). В крайних точках у поверхности стержня касательные напряжения

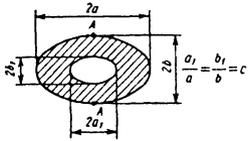
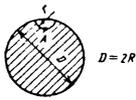
$$\tau_{св} = \frac{M_{св}}{J_d} \frac{\delta}{2}. \quad (8.3.2)$$

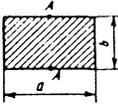
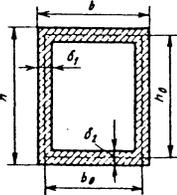
Здесь

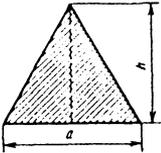
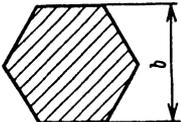
$$J_d = \frac{1}{3} \int_s \delta^3 ds \quad (8.3.3)$$

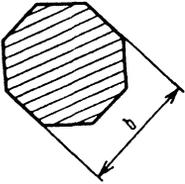
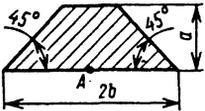
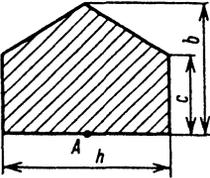
8.2.2. Приближенные расчетно-теоретические формулы

Поперечное сечение стержня	Геометрическая жесткость $J_{кр}$ при кручении, см ⁴	Момент сопротивления $W_{кр}$ при кручении, см ³	Место возникновения τ_{max}
Круговой сегмент 	$4,74D^4 \left(\frac{2H}{D} \right)^{3,35}$	$\frac{D^3}{22,9} \left(\frac{2H}{D} \right)^{2,82}$	Точка А
Круглое с лыской 	$\left(2,6 \frac{H}{D} - 1 \right) \frac{D^4}{16}$		То же
Эллиптическое 	$\pi \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2}$	$0,5\pi a b^2$	"

Поперечное сечение стержня	Геометрическая жесткость $J_{кр}$ при кручении, см ⁴	Момент сопротивления $W_{кр}$ при кручении, см ³	Место возникновения τ_{max}												
<p>Эллиптическое с эллиптическим вырезом</p> 	$\pi(1-c^4) \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2}$	$0,5\pi(1-c^4)ab^2$	Точка А												
<p>Круглое с круговым вырезом</p> 	$\frac{\pi}{2} R^4 \left[1 - 2 \frac{r^2}{R^2} \left(1 - \frac{8a}{3\pi R} + \frac{1}{4} \frac{r^2}{R^2} \right) \right]$	$\frac{J_{кр}}{2R-r}$	“												
<p>Сектор круга</p> 	$R^4 K(\alpha)$ <table border="1" data-bbox="529 940 1434 1111"> <thead> <tr> <th>α</th> <th>$\frac{\pi}{4}$</th> <th>$\frac{\pi}{2}$</th> <th>$\frac{3\pi}{4}$</th> <th>$\frac{3\pi}{2}$</th> <th>2π</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>$K(\alpha)$</td> <td>0,0181</td> <td>0,0823</td> <td>0,2976</td> <td>0,5725</td> <td>0,8781</td> </tr> </tbody> </table>	α	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$K(\alpha)$	0,0181	0,0823	0,2976	0,5725	0,8781	—	Точка В, в зависимости от α в некоторых других точках на радиальных сторонах
α	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π										
$K(\alpha)$	0,0181	0,0823	0,2976	0,5725	0,8781										

<p>Прямоугольник</p> 	$k_1 ab^3$ <p>Коэффициенты k_1 и k_2 приведены в табл. 8.2.1</p>	$k_2 ab^2$	<p>Точка A, (в середине длинных сторон)</p>
<p>Прямоугольник с прямоугольным вырезом</p> 	$\frac{2h_0^2 b_0^2 \delta_1 \delta_2}{h \delta_2 - b \delta_1 - \delta_1^2 - \delta_2^2}$	$W_{кр 1} = 2h_0 b_0 \delta_1;$ $W_{кр 2} = 2h_0 b_0 \delta_2$	<p>В середине длинной стороны $\tau_1 = M_{кр} / W_{кр 1};$ в середине короткой стороны $\tau_2 = M_{кр} / W_{кр 2},$ во внутренних углах имеет место концентрация напряжений; коэффициент концен- трации при наличии закруглений радиусом r $\alpha_{кр} = 1,743 \sqrt{\delta_{max} / r}$</p>

Поперечное сечение стержня	Геометрическая жесткость $J_{кр}$ при кручении, см ⁴	Момент сопротивления $W_{кр}$ при кручении, см ³	Место возникновения τ_{max}
<p data-bbox="269 192 423 239">Равносторонний треугольник</p> 	$\frac{ah^3}{30}$	$\frac{a^3}{20}$	<p data-bbox="1356 322 1550 345">В середине сторон</p>
<p data-bbox="276 677 416 724">Правильный шестиугольник</p> 	$0,115b^4$	$0,189b^3$	<p data-bbox="1424 757 1492 780">То же</p>

<p>Правильный восьмиугольник</p> 	$0,108b^4$	$0,185b^3$	<p>В середине сторон</p>
<p>Равнобекая трапеция</p> 	$\left(\frac{2b}{3a} - 0,610\right)a^4$ <p>при $b/a \geq 2$</p>	$\approx J_{кр} / a$	<p>Точка A</p>
	$\frac{1}{12} \frac{h(b^4 - c^4)}{b - c} - 0,21c^4$	$J_{кр} / b$	<p>То же</p>

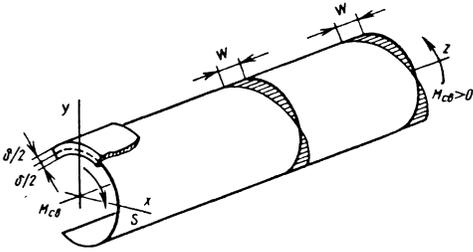


Рис. 8.3.1. Расчетная схема свободного кручения тонкостенного стержня открытого профиля

Жесткость GJ_d стержня при свободном кручении определяет относительный угол закручивания:

$$\varphi' = \frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_{св}}{GJ_d} \quad (8.3.4)$$

где φ - угол закручивания сечения.

Угол φ положителен при повороте сечения против часовой стрелки, если смотреть на него в положительном направлении оси z . Крутящий момент положителен, если он со стороны внешней нормали сечения момент действует по часовой стрелке (см. рис. 8.3.1)

Предполагается, что по длине стержня размещены диафрагмы, абсолютно гибкие (не сопротивляющиеся деформации сечений) и жесткие в своей плоскости так, что каждое сечение вокруг оси z поворачивается как жесткое целое (без искривления контура сечения). При соблюдении этих условий перемещение произвольной точки срединной линии сечения

$$w = -\varphi' \omega, \quad (8.3.5)$$

где $\omega = \int r ds$ - специальная координата точки, секториальная площадь точки (рис. 8.3.3), $см^2$.

Для точки K величина ω равна удвоенной площади сектора BM_0K , описанной подвижным радиусом при движении из начальной точки M_0 в точку K . Секториальная площадь $\omega > 0$, если образующий радиус вращается против часовой стрелки (смотреть на сечение в положительном направлении оси z). Через точку B - центр кручения - проходит ось, вокруг которой происходит закручивание стержня, в рассматриваемом случае она выбрана произвольно.

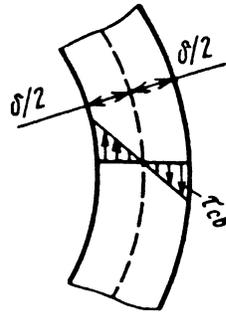


Рис. 8.3.2. Эпюра касательных напряжений по толщине стенки при свободном кручении

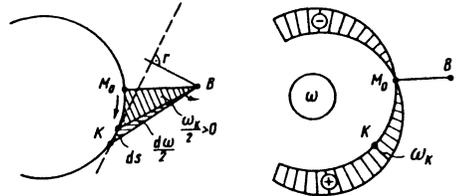


Рис. 8.3.3. Эпюра секториальных площадей

Из (8.3.5) следует, что показанная на рис. 8.3.3 эпюра ω в определенном масштабе дает картину деформации сечения, т.е. при свободном кручении деформация сечений происходит по закону секториальных площадей.

При стесненном кручении деформация сечений по длине переменна, т.е. $w = w(s, z)$. В этом случае продольные волокна стержня получают деформацию растяжения-сжатия и в сечении возникают нормальные напряжения σ_z , которые обозначают σ_ω . В теории стесненного кручения В.З. Власова принято, что деформация происходит по тому же закону (8.3.5), что и при свободном кручении. Изменение деформации по длине в (8.3.5) определяется функцией $\varphi'(z)$. Согласно закону Гука

$$\sigma_\omega = E \frac{dw}{dz} = -E\varphi'' \omega. \quad (8.3.6)$$

В общем случае стесненного кручения центр кручения или полюс B и начальная точка M_0 будут определены ниже. Для двутавра (рис. 8.3.4) ввиду двойной симметрии обе эти точки совпадают с центром сечения, что дает возможность построить эпюру ω и согласно (8.3.6) - эпюру напряжений σ_ω . По существу,

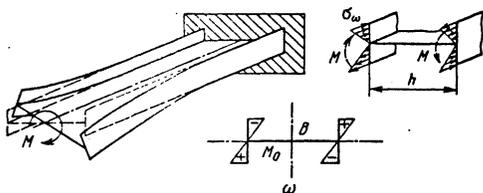


Рис. 8.3.4. Расчетная схема стесненного кручения двутавра

напряжения σ_ω возникают как результат изгиба полок двутавра моментом M . Этот изгиб происходит при повороте сечений в целом вокруг оси z . Поэтому стесненное кручение иногда называют изгибным кручением.

При стесненном кручении в каждом сечении суммарный крутящий момент (рис. 8.3.5)

$$M_{кр} = M_{св} + M_\omega = GJ_d \varphi' + M_\omega, \quad (8.3.7)$$

где $M_{св}$ - момент свободного кручения, определяемый из (8.3.4); M_ω - крутящий момент, создаваемый касательными напряжениями τ_ω , возникающими при изгибе полок, изгибно-крутящий момент.

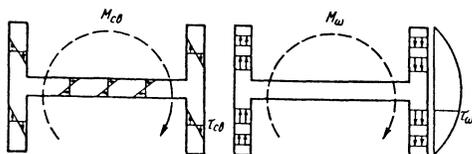


Рис. 8.3.5. Эпюры составляющих суммарного крутящего момента в сечении

Из (8.3.7) следует, что задача о стесненном кручении статически неопределима, так как распределение полного крутящего момента $M_{кр}$ на две части, равно как и определение напряжений σ_ω по (8.3.6), может быть выполнено только после нахождения функции $\varphi(z)$ углов закручивания. Ниже это делается путем решения соответствующего дифференциального уравнения.

8.3.2. НОРМАЛЬНЫЕ И КАСАТЕЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В СЕЧЕНИЯХ СТЕРЖНЯ

Приняв φ' в качестве обобщенного перемещения и вычислив работу сил $\sigma_\omega dA$ на деформации сечения (8.3.5) при $(-\varphi') = 1$, можно получить силовой фактор в сечении,

соответствующий напряжениям σ_ω (8.3.6), Н·см²:

$$B_\omega = \int_A \sigma_\omega \omega dA = -EJ_\omega \varphi', \quad (8.3.8)$$

где $J_\omega = \int_A \omega^2 dA$, см⁶ - геометрическая характеристика тонкостенного сечения, секториальный момент инерции; EJ_ω - секториальная жесткость сечения.

Подставив из (8.3.8) - $E\varphi' = B_\omega / J_\omega$ в (8.3.6), получим формулу для определения σ_ω в окончательном виде:

$$\sigma_\omega = \frac{B_\omega}{J_\omega} \omega, \quad (8.3.9)$$

где B_ω - силовой фактор в сечении - бимомент, Н·см²; для сечения в виде двутавра (см. рис. 8.3.4) бимомент $B_\omega = Mh$.

При кручении из условий равновесия отсеченной части стержня

$$M_x = \int_A \sigma_\omega y dA; \quad M_y = \int_A \sigma_\omega x dA;$$

$$N = \int_A \sigma_\omega dA = 0. \quad (8.3.10)$$

Поэтому в общем случае бимомент образует в сечении некоторую самоуравновешенную систему нормальных усилий $\sigma_\omega dA$ и найти B_ω статическим путем невозможно. Вычислить B_ω можно только по формуле (8.3.8), для чего надо знать функцию $\varphi(z)$.

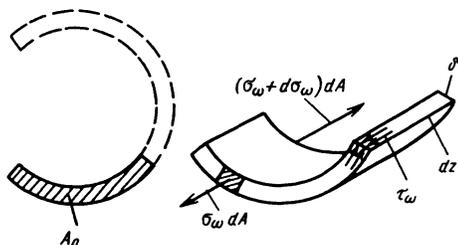


Рис. 8.3.6. Схема сил, действующих на отсеченную часть тонкостенного стержня

Из условия равновесия $\sum Z = 0$ отсеченной части тонкостенного стержня (рис. 8.3.6) получена формула для касательных на-

пряжений, реализующих изгибно-крутящий момент в сечении M_ω :

$$\tau_\omega = \frac{M_\omega S_\omega^0}{J_\omega \delta} \quad (8.3.11)$$

Здесь

$$M_\omega = B'_\omega = -EJ_\omega \varphi'''. \quad (8.3.12)$$

Секториальный статический момент отсечной площади сечения, см^4 ,

$$S_\omega^0 = \int_A \omega dA. \quad (8.3.13)$$

Следует обратить внимание на аналогию в зависимостях, существующую в теории поперечного изгиба и стесненного кручения (табл. 8.3.1). Напряжения σ_ω и τ_ω в излагаемой теории приняты равномерно распределенными по толщине δ листа, образующего стержень (рис. 8.3.7).

8.3.1. Расчетные зависимости при изгибе и стесненном кручении

Изгиб	Стесненное кручение
$\sigma_z = \frac{M_x}{J_x} y$	$\sigma_\omega = \frac{B_\omega}{J_\omega} \omega$
$J_x = \int_A y^2 dA$	$J_\omega = \int_A \omega^2 dA$
$M_x = \int_A \sigma_z dAy$	$B_\omega = \int_A \sigma_\omega dA \omega$
$M_x = -EJ_x v''$	$B_\omega = -EJ_\omega \varphi''$
$\tau = \frac{Q_y S_x^0}{J_x b}$	$\tau_\omega = \frac{M_\omega S_\omega^0}{J_\omega \delta}$
$Q_y = M'_x = -EJ_x v'''$	$M_\omega = B'_\omega = -EJ_\omega \varphi'''$

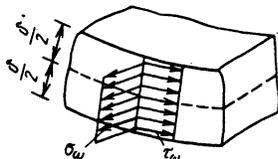


Рис. 8.3.7. Эпюры напряжений σ_ω и τ_ω по толщине стенки стержня

8.3.3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТОНКОСТЕННЫХ СЕЧЕНИЙ

Из статических условий (8.3.10) с учетом (8.3.9) следует

$$\begin{aligned} S_{x\omega} = \int_A y\omega dA = 0; \quad S_{y\omega} = \int_A x\omega dA = 0; \\ S_\omega = \int_A \omega dA = 0, \end{aligned} \quad (8.3.14)$$

где $S_{x\omega}$, $S_{y\omega}$ - секториально-линейные статические моменты площади сечения стержня, см^5 ; S_ω - секториальный статический момент площади сечения стержня, см^4 .

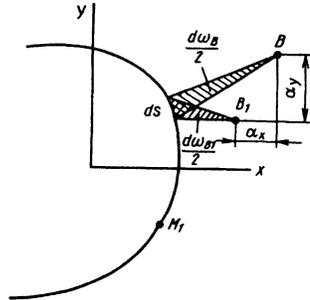


Рис. 8.3.8. Положение координат α_x и α_y центра кручения B относительно вспомогательной точки B_1

Эпора ω , удовлетворяющая условиям (8.3.14), - эпюра главных секториальных площадей. Для ее построения необходимо найти координаты истинного центра B кручения и положение начальной точки M_0 отсчета. Для этого при произвольно выбранных начале отсчета M_1 и полюсе B_1 строят эпюру ω_{B_1} . Из первых двух условий (8.3.14) получают следующие координаты α_x и α_y истинной точки B , отсчитываемые от вспомогательной точки B_1 (рис. 8.3.8):

$$\begin{aligned} \alpha_x &= \frac{S_{x\omega_{B_1}}}{J_x} = \frac{\int_A y\omega_{B_1} dA}{J_x}; \\ \alpha_y &= -\frac{S_{y\omega_{B_1}}}{J_y} = -\frac{\int_A x\omega_{B_1} dA}{J_y}, \end{aligned} \quad (8.3.15)$$

где J_x, J_y - осевые моменты инерции для главных центральных осей сечения.

Можно показать, что найденный поллю или центр кручения B совпадает с центром изгиба, т.е. центром положения касательных сил в сечении при поперечном изгибе (см. п. 8.1.2). Ось центров изгиба называют осью жесткости. Поперечная нагрузка, пересекающая эту ось, вызывает изгиб без кручения. При найденном центре изгиба B и произвольном начале отсчета M_1 строят эпюру ω_B . Из третьего условия (8.3.14) получают величину

$$D = \frac{S_{\omega_B}}{A} = \frac{\int \omega_B dA}{A} \quad (8.3.16)$$

От эпюры ω_B к искомой эпюре главных секториальных площадей ω переходят по формуле

$$\omega = \omega_B - D \cdot \quad (8.3.17)$$

Любая нулевая точка на этой эпюре может быть принята за начало отсчета M_0 . Вели-

чины J_ω и S_ω^0 , входящие в формулы для напряжений σ_ω и τ_ω , вычисляются по эпюре главных секториальных площадей.

Пример (рис. 8.3.9). Площадь сечения $A=4b\delta$. Осевой момент инерции

$$J_x = \int_A y^2 dA = \sum_i \delta_i \int_{S_i} y^2 ds = 2\delta \left(\frac{b^2}{2} \frac{2}{3} b + b^2 b \right) = \frac{8}{3} b^3 \delta$$

Интеграл $\int y^2 ds$ вдоль каждой прямой, составляющей сечение, удобно вычислять путем "умножения" эпюры y самой на себя по правилу Верещагина (см. п. 8.10.2). Точки B_1 и M_1 выбраны на оси симметрии. Эпюру ω_{B_1} умножают на эпюру y и находят

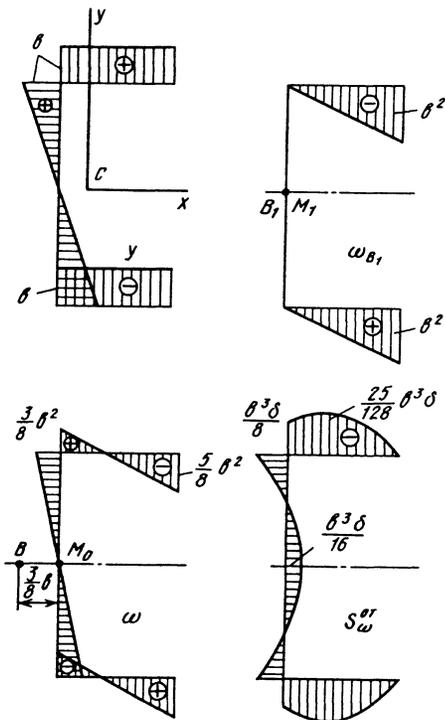
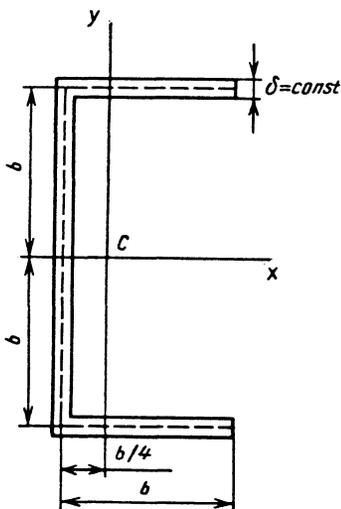


Рис. 8.3.9. Расчетная схема поперечного сечения тонкостенного швеллера

$$S_{x\omega_{B_1}} = \int_A y\omega_{B_1} dA = \sum_i \delta_i \int_{S_i} y\omega_{B_1} ds =$$

$$= -2 \frac{b^2 b}{2} b\delta = -b^4 \delta.$$

По формуле (8.3.15)

$$\alpha_x = \frac{S_{x\omega_{B_1}}}{J_x} = -\frac{3}{8} b.$$

В виду симметрии $\alpha_y = 0$. Эпюра $\omega_B = \omega$ показана на рис. 8.3.9. Точка M_1 , лежащая на оси симметрии, может быть принята за M_0 , поскольку для нее $\omega_{M_0} = 0$, а величина $D=0$ по (8.3.16). Эпюра S_{ω}^0 построена по формуле

$$S_{\omega}^0 = \int_{A^0} \omega dA = \int_0^{\omega} \delta \omega ds.$$

Ее характерные ординаты - результат умножения площади эпюры ω на длине соответствующего контура s на толщину δ . Эпюры ω

и S_{ω}^0 дают закон распределения напряжений σ_{ω} и τ_{ω} в сечении. Секториальный момент инерции по эпюре ω

$$J_{\omega} = \int_A \omega^2 dA = \sum_i \delta_i \int_{S_i} \omega^2 dS = 2\delta \left\{ \frac{1}{2} \frac{3b^2 b}{8 \cdot 2} \times \right.$$

$$\times \frac{2}{3} \frac{3}{8} b^2 + \frac{b}{6} \left[2 \left(\frac{5}{8} b^2 \right)^2 + 2 \left(\frac{3}{8} b^2 \right)^2 - \right.$$

$$\left. \left. - 2 \frac{3}{8} \frac{5}{8} b^4 \right] \right\} = \frac{47}{192} b^5 \delta.$$

Из (8.3.3) $J_d = \frac{4}{3} b\delta^3$, а следовательно,

соответствующие жесткости:

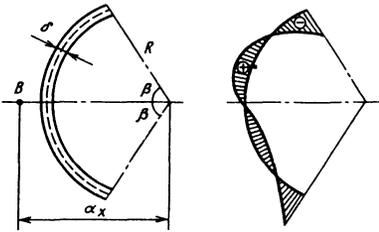
$$EJ_{\omega} = \left(\frac{47}{192} \right) Eb^5 \delta \quad \text{и} \quad GJ_d = \left(\frac{4}{3} \right) Gb\delta^3.$$

В табл. 8.3.2 приведены некоторые геометрические величины для характерных типов сечений тонкостенных стержней.

8.3.2. Геометрические параметры для характерных типов сечений тонкостенных стержней

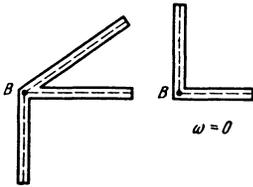
Сечение и эпюра ω	Геометрические величины
	$\alpha_x = \frac{J_{x_1}}{J_{x_1} + J_{x_2}} h;$ $J_{x_1} = \frac{\delta_1 b_1^3}{12}; \quad J_{x_2} = \frac{\delta_2 b_2^3}{12};$ $J_{\omega} = \alpha_x^2 J_{x_1} + (h - \alpha_x)^2 J_{x_2}$
	$\alpha_x = \frac{1}{2 + \left(\frac{A_1}{3A_2} \right)} b;$ $A_1 = h\delta_1; \quad A_2 = b\delta_2$

Продолжение табл. 8.3.2



$$\alpha_x = 2R \frac{\sin \beta - \beta \cos \beta}{\beta - \sin \beta \cos \beta};$$

$$J_\omega = \frac{2}{3} \left[\beta^3 - \frac{6(\sin \beta - \beta \cos \beta)^2}{\beta - \sin \beta \cos \beta} \right] R^5 \delta$$



Центр изгиба в точке пересечения средних линий пластин;

$$J_\omega = 0$$

8.3.4. УГЛЫ ЗАКРУЧИВАНИЯ

Если все поперечные сосредоточенные или распределенные нагрузки перенести на ось центров изгиба тонкосенного стержня, то необходимо добавить соответствующие скручивающие сосредоточенные или распределенные моменты. При этом поперечная нагрузка вызовет только изгиб, скручивающие моменты - стесненное кручение стержня. На рис. 8.3.10 ось Z совмещена с осью центров изгиба стержня. На основании равенства (8.3.7) с учетом (8.3.12) получено дифференциальное уравнение для углов закручивания

$$GJ_d \varphi' - EJ_\omega \varphi'' = M_{кр}. \quad (8.3.18)$$

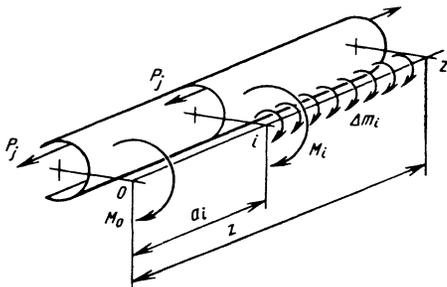


Рис. 8.3.10. Схема нагружения тонкосенного стержня при определении углов закручивания по методу начальных параметров

После дифференцирования с учетом того, что $(dM_{кр} / dz) = m$, а жесткости GJ_d и $EJ_\omega = \text{const}$, окончательно

$$\varphi^{IV} - k^2 \varphi'' = -\frac{m}{EJ_\omega}, \quad (8.3.19)$$

где $k = \sqrt{\frac{GJ_d}{EJ_\omega}}$, см⁻¹.

Общий интеграл

$$\varphi = C_1 + C_2 z + C_3 \operatorname{ch} k z + C_4 \operatorname{sh} k z + \varphi_4(m).$$

Приняты граничные условия $\varphi(0) = \varphi_0$; $\varphi'(0) = \varphi'_0$; $M_{кр}(0) = M_0 = (GJ_d \varphi' - EJ_\omega \varphi'')_{z=0}$ и $B_\omega(0) = B_{\omega_0} = -EJ_\omega \varphi'''(0)$, общий интеграл представлен в форме метода начальных параметров для некоторых видов скручивающей нагрузки (рис. 8.3.11):

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{\varphi'_0}{k} \operatorname{sh} k z + \frac{B_{\omega_0}}{GJ_d} (1 - \operatorname{ch} k z) + \frac{M'_0}{kGJ_d} (kz - \operatorname{sh} k z) + \sum_i \left\{ \frac{\Delta B_{\omega i}}{GJ_d} [1 - \operatorname{ch} k(z - a_i)] + \frac{M_i}{kGJ_d} [k(z - a_i) - \operatorname{sh} k(z - a_i)] + \frac{\Delta m_i}{k^2 GJ_d} \left[1 + \frac{1}{2} k^2 (z - a_i)^2 - \operatorname{ch} k(z - a_i) \right] \right\}. \quad (8.3.20)$$

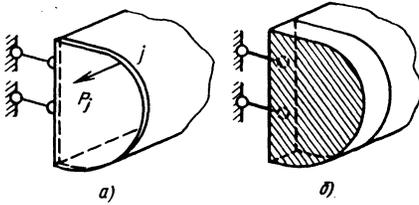


Рис. 8.3.11. Схемы с гибкой и жесткой диафрагмой на торце стержня

Суммирование проводится по всем границам участков, где $a_i < z$. В (8.3.20) принято $m_i = \text{const}$. На рис. 8.3.11 показаны особенности формулировки граничных условий при использовании (8.3.20), связанные с деформацией граничных сечений. Можно предположить наличие на торце идеально гибкой диафрагмы не стесняющей деформации (рис.8.3.11, а). Нормальные усилия в сечении $z = 0$ могут быть представлены лишь в виде внешних сил P_j . Поскольку диафрагма закреплена от поворота вокруг оси z , то граничные условия при $z = 0$ следующие: $\varphi_0 = 0$; $B_{\omega 0} = P_j \omega_j$. Последняя формула написана как аналог (8.3.8). При наличии в сечении нескольких внешних продольно ориентированных сил P_j по j проводится их суммирование. Следует отметить, что существенной особенностью тонкостенных стержней является то, что стесненное кручение могут вызывать не только скручивающие нагрузки, но и внешние продольные силы (рис. 8.3.12). Сила P_j , создавая изгиб полки за счет ее внецентренного растяжения, приводит к закручиванию всего стержня.

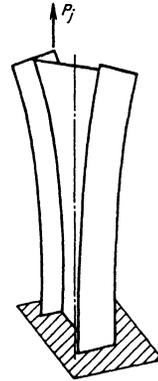


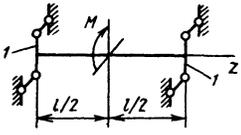
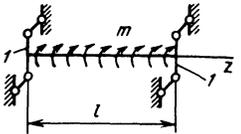
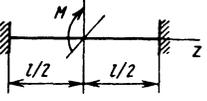
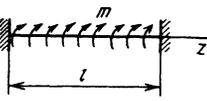
Рис. 8.3.12. Вариант стесненного кручения стержня, вызываемого внецентренным растяжением полки двутавра

Если продольные силы P_j приложены в промежуточном сечении стержня $z = a_i$, то это приводит к скачку в бимоменте $\Delta B_{\omega i} = P_j \omega_j$, фигурирующем в частном решении (8.3.20).

Если предположить наличие жесткой диафрагмы (см. рис. 8.3.11, б), полностью устраняющей деформацию сечения $w = 0$, на основании (8.3.5) $\varphi_0 = 0$ и $\varphi'_0 = 0$ при $z = 0$. В таком сечении $M_{\text{св}} = \varphi' G J_d = 0$ и, следовательно, $M_{\omega} = M_{\text{кр}}$. Аналогичные условия создаются при глухой заделке.

8.3.3. Выражения для определения величин φ и B_{ω} для ряда случаев закрепления стержней

Схема	Угол закручивания φ	Бимомент B_{ω}
	$\frac{M}{rGJ_d \text{chkl}} [kz \text{chkl} - \text{shkl} + \text{shk}(l - z)]$	$\frac{M \text{shk}(l - z)}{k \text{chkl}}$
	$\frac{m}{k^2 G J_d \text{chkl}} \left[k^2 z \left(l - \frac{z}{2} \right) \text{chkl} + \text{chkl}z - 1 - kl(\text{shkl} - \text{shk}(l - z)) \right]$	$-\frac{m}{k^2 \text{chkl}} [k \text{shk}(l - z) - \text{chkl} + \text{chkl}z]$

	$\frac{M}{2kGJ_d} \left(kz - \frac{\operatorname{sh} kz}{\operatorname{ch} \frac{kl}{2}} \right)^*$	$\frac{M \operatorname{sh} kz}{2k \operatorname{ch} \frac{kl}{2}}; z \leq \frac{l}{2}$
	$\frac{m}{k^2 GJ_d} \left[1 + \frac{1}{2} k^2 z(l-z) + \frac{\operatorname{ch} k \left(\frac{l}{2} - z \right)}{\operatorname{ch} \frac{kl}{2}} \right]^*$	$\frac{m}{k^2} \left[1 - \frac{\operatorname{ch} k \left(\frac{l}{2} - z \right)}{\operatorname{ch} \frac{kl}{2}} \right]^*$
	$\frac{M}{kGJ_d \operatorname{sh} \frac{kl}{2}} \left[\frac{kz}{2} \operatorname{sh} \frac{kl}{2} - \operatorname{sh}^2 \frac{kz}{2} - \operatorname{sh} \frac{kz}{2} \operatorname{sh} \frac{k(l-z)}{2} \right]$	$\frac{M}{2k \operatorname{sh} \frac{kl}{2}} \left[\operatorname{ch} kz - \operatorname{ch} k \left(\frac{l}{2} - z \right) \right]; z \leq \frac{l}{2}$
	$\frac{m}{k^2 GJ_d} \left[\frac{1}{2} k^2 z(l-z) - \frac{k \operatorname{sh} \frac{kz}{2} \operatorname{sh} \frac{k(l-z)}{2}}{\operatorname{sh} \frac{kl}{2}} \right]$	$\frac{m}{k^2} \left[1 - \frac{k \operatorname{ch} k \left(\frac{l}{2} - z \right)}{2 \operatorname{sh} \frac{kl}{2}} \right]$

* На торцах гибкие диафрагмы.

В табл. 8.3.3 для ряда случаев закрепления стержней и их нагружений приведены выражения для определения φ и B_ω . Следует отметить, что дифференциальное уравнение стесненного кручения (8.3.19) аналогично уравнению (8.1.38) для растянуто-изогнутого стержня: при замене GJ_d на N и EJ_ω на EJ_ω эти уравнения одинаковы.

Если тонкостенный стержень кроме кручения испытывает также деформации растяжения и изгиба, то с учетом формулы (8.1.3) общее выражение для суммарных нормальных напряжений в сечении

$$G_z = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{J_x} y + \frac{M_y}{J_y} x + \frac{B_\omega}{J_\omega} \omega. \quad (8.3.21)$$

8.3.5. СТЕСНЕННОЕ КРУЧЕНИЕ СТЕРЖНЕЙ ЗАМКНУТОГО ПРОФИЛЯ

В стержнях открытого профиля предполагалось, что при стесненном кручении деформация происходит по тому же закону, что и при свободном кручении, при этом деформации сдвига в срединной поверхности равны нулю. В замкнутом сечении касательные напряжения τ_ω , которые приняты равномерно распределенными по толщине δ стенки, вызывая сдвиги, существенно влияют на деформацию сечения. С учетом этих сдвигов получено выражение для деформации (рис. 8.3.13)

$$w = -\beta'(z)\bar{\omega}. \quad (8.3.22)$$

Обобщенная секториальная координата точки

$$\bar{\omega} = \omega - \rho\bar{s}, \quad (8.3.23)$$

где $\omega = \int_0^S r ds$ - обычная секториальная координата, аналогичная используемой в стержнях открытого профиля (см. п. 8.3.4); r - длина перпендикуляра, опущенного из центра кручения B на касательную к контуру.

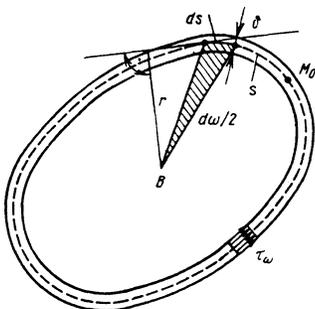


Рис. 8.3.13. Схема определения деформации сечения замкнутого профиля

Средний радиус замкнутого контура

$$\rho = \frac{\Omega}{\oint \frac{ds}{\delta}}. \quad (8.3.24)$$

где Ω - удвоенная площадь, охватываемая средней линией контура.

Приведенная длина дуги данной точки контура

$$\bar{s} = \int_0^s \frac{ds}{\delta}. \quad (8.3.25)$$

Функция $\beta'(z) = d\beta / dz$ неизвестна, ее находят вместе с неизвестной функцией углов закручивания $\varphi(z)$ на основании двух условий А.А. Уманского. Из первого условия, состоящего в том, что напряжения τ_ω приводят в сечении к суммарному моменту $M_{кр}$, получается соотношение

$$\varphi' - \mu\beta' = \frac{M_{кр}}{GJ_d}. \quad (8.3.26)$$

Здесь геометрическая характеристика замкнутого сечения, характеризующая жесткость при свободном кручении,

$$J_d = \frac{\Omega^2}{\oint \frac{ds}{\delta}}; \quad (8.3.27)$$

коэффициент деформации сечения

$$\mu = 1 - \frac{J_d}{J_p}; \quad (8.3.28)$$

направленный момент инерции

$$J_p = \oint r^2 dA. \quad (8.3.29)$$

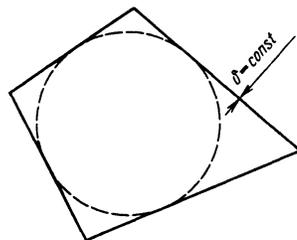


Рис. 8.3.14. Замкнутое сечение, не деформирующее при кручении

Если $J_p = J_d$, то $\mu = 0$ и из (8.3.26) следует, что φ' и $M_{кр}$ связаны как при свободном кручении, т.е. депланации и стесненное кручение в таком сечении отсутствуют. В частности, при $\delta = \text{const}$ это - многоугольник, все стороны которого касаются окружности (рис. 8.3.14). При $\mu \neq 0$ возникают депланации (8.3.22) и имеет место стесненное кручение. От коэффициента μ зависит степень развития депланации сечения.

Из второго условия, выражающего периодичность функции депланации (8.3.22) при обходе контура, т.е. отсутствие разрывов в перемещениях w в срединной поверхности стержня, следует дифференциальное уравнение для определения углов закручивания:

$$\varphi^{IV} - k^2 \varphi'' = -\frac{\mu m}{EJ_{\bar{\omega}}}. \quad (8.3.30)$$

Здесь главный обобщенный секториальный момент инерции сечения

$$J_{\bar{\omega}} = \int_A \bar{\omega}^2 dA;$$

$$k = \sqrt{\mu \frac{GJ_d}{EJ_{\bar{\omega}}}}. \quad (8.3.31)$$

Напряжения :

$$\sigma_{\omega} = \frac{B_{\bar{\omega}}}{J_{\bar{\omega}}} \bar{\omega}; \quad (8.3.32)$$

$$\tau_{\omega} = \frac{M_{кр}}{\Omega \delta} - \frac{M_{\bar{\omega}} \bar{S}_{\bar{\omega}}}{J_{\bar{\omega}}}. \quad (8.3.33)$$

Бимомент и изгибно-крутящий моменты находят через φ с помощью выражений

$$B_{\omega} = -\frac{1}{\mu} EJ_{\bar{\omega}} \varphi''; \quad M_{\bar{\omega}} = dM_{кр} / dz;$$

$$\bar{S}_{\bar{\omega}} = S_{\bar{\omega}} - D. \text{ Здесь}$$

$$S_{\bar{\omega}} = \int_0^s \bar{\omega} \delta ds; \quad (8.3.34)$$

$$D = \frac{\int S_{\bar{\omega}} r ds}{\Omega}. \quad (8.3.35)$$

Ввиду аналогии дифференциального уравнения (8.3.30) и формул для определения напряжений σ_{ω} и τ_{ω} аналогичным зависимостям для тонкостенных стержней открытого профиля все решения рассматриваемой задачи проводят, как в п. 8.3.4. Координаты точек B и M_0 находят, как в п. 8.3.4; заменив $\bar{\omega}$ на $\bar{\omega}$. Следует отметить, что длина участка стесненного кручения (например, у заделки) стержня замкнутого профиля меньше чем стержня открытого профиля. Эффект стесненного кручения у стержней с замкнутым сечением носит локальный характер.

Глава 8.4

КРИВЫЕ СТЕРЖНИ

8.4.1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Кривым стержнем называют стержень с криволинейной осью. Кривизна стержня характеризуется соотношением радиуса R кривизны оси к высоте h поперечного сечения. Принято различать стержни малой кривизны, если соотношение $h/R \leq 0,2$, и большой кривизны, если $h/R > 0,2$. Практические расчеты показали, что при изгибе брусьев малой кривизны нормальные напряжения с достаточной степенью точности можно определять по формулам, полученным для прямых стержней (при $h/R = 0,2$ погрешность не превышает 7%, при $h/R = 1/15$ - не превышает 2%).

При исследовании напряжений и деформаций стержней большой кривизны предполагается следующее:

поперечные сечения стержня имеют ось симметрии;

ось стержня представляет собой плоскую кривую, лежащую в плоскости, проходящей через ось симметрии поперечного сечения;

все внешние силы расположены в этой же плоскости;

справедлива гипотеза плоских сечений; продольные волокна не оказывают давления друг на друга, и напряжениями в радиальном направлении можно пренебречь.

Гипотеза плоских сечений предполагает линейный закон изменения абсолютных удлинений продольных волокон стержня. Для прямого стержня начальная длина всех продольных волокон одинакова, поэтому ϵ и σ изменяются линейно по высоте стержня. Для кривого стержня начальная длина продольных волокон различная и закон изменения ϵ и σ по высоте сечения криволинейный (гиперболический).

8.4.2. ВНУТРЕННИЕ СИЛОВЫЕ ФАКТОРЫ, ВОЗНИКАЮЩИЕ В ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЯХ

Так как рассматриваемый кривой стержень представляет собой плоскую систему, то все внутренние силы в произвольном сечении приводятся к трем компонентам: продольной силе N , приложенной в центре тяжести поперечного сечения, поперечной силе Q и изгибающему моменту M . Положительные направления внутренних силовых факторов показаны на рис. 8.4.1. Построение эпюр внутренних силовых факторов проводят, как и в случае прямых стержней, с помощью метода сечений.

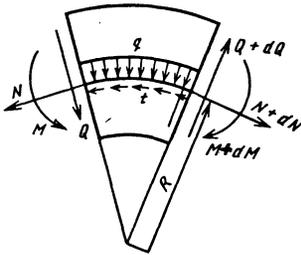


Рис. 8.4.1. Схема действия внутренних силовых факторов положительного направления

Между внутренними силовыми факторами и нагрузкой для кривого стержня имеют место следующие зависимости:

$$\frac{dM}{ds} = Q; \quad \frac{dQ}{ds} = q + \frac{N}{R}; \quad \frac{dN}{ds} = t - \frac{Q}{R}. \quad (8.4.1)$$

8.4.3. НАПРЯЖЕНИЯ В ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЯХ

Продольная сила N , которая приложена в центре тяжести поперечного сечения стержня, вызывает равномерно распределенные по сечению нормальные напряжения

$$\sigma_N = N / A. \quad (8.4.2)$$

Следует отметить, что для кривого бруса продольная сила N вызывает не только удлинения продольных волокон, но и взаимный поворот поперечных сечений.

Поперечная сила Q вызывает касательные напряжения. Обычно при практических расчетах закон их распределения по высоте принимают аналогичным для прямого стержня, а для расчета касательных напряжений используют формулу Журавского:

$$\tau = QS_x^0 / (J_x b_y). \quad (8.4.3)$$

Нормальные напряжения от изгибающего момента в любом продольном волокне поперечного сечения (рис. 8.4.2)

$$\sigma_M = My / (Sp), \quad (8.4.4)$$

где $S = Ae$ - статический момент площади поперечного сечения относительно нейтральной оси; e - расстояние от центра C тяжести сечения до нейтральной оси; $\rho = r + y$ - расстояние от центра O кривизны до точки, в которой определяется напряжение.

В кривом стержне нейтральная ось проходит не через центр тяжести поперечного сечения C , а между центром тяжести и центром кривизны оси стержня. Эюра нормальных напряжений σ по высоте стержня приведена на рис. 8.4.2.

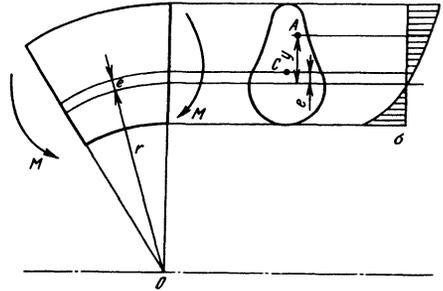


Рис. 8.4.2. Эюра нормальных напряжений

На основании принципа независимости действия сил при совместном действии продольной силы и изгибающего момента нормальные напряжения

$$\sigma = \sigma_N + \sigma_M = N / A + My / (Sp). \quad (8.4.5)$$

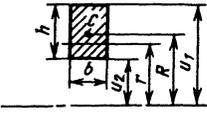
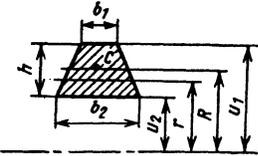
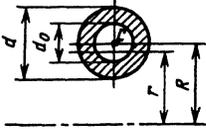
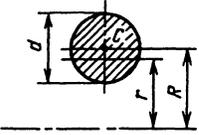
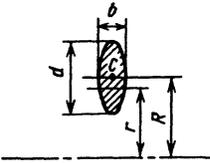
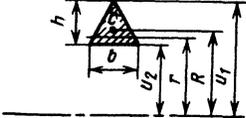
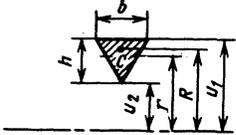
При определении напряжений по этой формуле должно быть известно положение нейтральной оси. Радиус кривизны нейтральной оси для любого сечения

$$r = A / \int_A \frac{dA}{\rho}. \quad (8.4.6)$$

Очевидно, что величина r существенно зависит от формы сечения. Для наиболее распространенных сечений значения радиуса r кривизны нейтральной оси приведены в табл. 8.4.1. Так как расчет часто сопряжен с громоздкими вычислениями, можно воспользоваться одной приближенной формулой для определения положения нейтральной оси, например, наиболее простой, полученной Н.Н. Давиденковым. Она позволяет определять эксцентриситет нейтральной оси для кривых стержней, поперечные сечения которых имеют две оси симметрии

$$e = J_x / (AR). \quad (8.4.7)$$

8.4.1. Радиусы кривизны r нейтральной оси некоторых сечений

Форма сечения	Радиусы кривизны нейтральной оси
	$\frac{h}{\ln \frac{u_1}{u_2}}$
	$\frac{h(b_1 + b_2)}{2 \left[\frac{b_2 u_1 - b_1 u_2}{h} \ln \frac{u_1}{u_2} - (b_2 - b_1) \right]}$
	$\frac{d^2}{4 \left[2R - \sqrt{4R^2 - d^2} \right]}$
	$\frac{d^2 - d_0^2}{4 \left[\sqrt{4R^2 - d_0^2} - \sqrt{4R^2 - d^2} \right]}$
	$\frac{d^2}{4 \left[2R - \sqrt{4R^2 - d^2} \right]}$
	$\frac{h}{2 \left[\frac{u_1}{h} \ln \frac{u_1}{u_2} - 1 \right]}$
	$\frac{h}{2 \left[1 - \frac{u_2}{u_1} \ln \frac{u_1}{u_2} \right]}$

8.4.4. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ КРИВЫХ СТЕРЖНЕЙ

При совместном действии внутренних сил ($M \neq 0, N \neq 0, Q \neq 0$) потенциальная энергия кривого стержня, ось которого представляет собой плоскую кривую,

$$U = \int_s \frac{M^2 ds}{2EAeR} + \int_s \frac{N^2 ds}{2EA} + \int_s \frac{MN ds}{EAR} + k \int_s \frac{Q^2 ds}{2GA}, \tag{8.4.8}$$

где k - безразмерный параметр, учитывающий неравномерное распределения касательных напряжений по высоте сечения стержня; для прямоугольного сечения $k=1,2$, для круглого - $k=1,185$; для двутавра $k = A / A_{CT}$; A - площадь сечения двутавра; A_{CT} - площадь стенки.

Для стержней малой кривизны $AeR=J_x$. Интегрирование ведется вдоль оси по всей длине стержня. Как показывают практические расчеты, часто без большой погрешности можно пренебречь последними тремя слагаемыми в формуле (8.4.8).

8.4.5. ПЕРЕМЕЩЕНИЯ В КРИВЫХ СТЕРЖНЯХ

Для определения перемещений в кривых стержнях удобно воспользоваться интегралом Мора. Для плоского кривого стержня большой кривизны перемещение точки оси

$$\Delta = \int_s \frac{MM_1}{EAeR} ds + \int_s \frac{NN_1}{EA} ds + \int_s \frac{MN_1 + NM_1}{EAR} ds + k \int_s \frac{QQ_1}{GA} ds, \tag{8.4.9}$$

где M, N, Q - функции, определяющие внутренние силовые факторы от заданной нагрузки; M_1, N_1, Q_1 - функции, определяющие внутренние силовые факторы от единичной нагрузки, приложенной в направлении искомого перемещения в заданной точке.

Для стержней малой кривизны используют упрощенную формулу (8.4.9):

$$\Delta = \int_s \frac{MM_1}{EJ_x} ds. \tag{8.4.10}$$

Глава 8.5

ПРОСТРАНСТВЕННО-КРИВОЛИНЕЙНЫЕ СТЕРЖНИ

8.5.1. НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ СТЕРЖНЕЙ

Для элемента стержня (рис. 8.5.1) можно получить следующие уравнения равновесия в векторной форме [38]:

$$\frac{d\bar{Q}}{ds} + \bar{q}H(s - s_q) + \bar{p}\delta(s - s_p) = 0; \tag{8.5.1}$$

$$\frac{d\bar{M}}{ds} + e_1 x \bar{Q} + \bar{\mu}H(s - s_\mu) + \bar{\omega}\delta(s - s_m) = 0, \tag{8.5.2}$$

где \bar{Q} - вектор внутренних сил; \bar{q} и $\bar{\mu}$ - распределенные нагрузка и момент; \bar{p} и $\bar{\omega}$ - сосредоточенные сила и момент; H и δ - функции Хевисайда и Дирака; \bar{M} - внутренний момент.

При исследовании равновесия стержней используют три системы ортогональных координат: 1) декартовую систему с базисом $\{\bar{i}_j\}$; 2) систему осей, связанных с осевой линией стержня в недеформированном состоянии, с базисом $\{\bar{e}_{j0}\}$; 3) систему связанных осей,

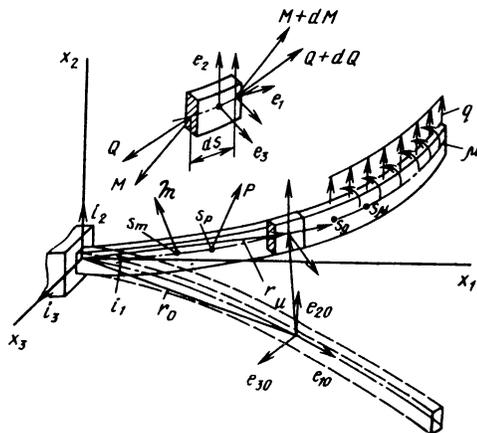


Рис. 8.5.1. Пространственный криволинейный стержень до деформации (пунктир) и в деформированном состоянии

характеризующую деформированное состояние стержня, с базисом $\{\bar{e}_j\}$. Единичные векторы \bar{e}_{20} , \bar{e}_2 , \bar{e}_{30} и \bar{e}_3 направлены по главным осям сечения стержня. В этом отличие подвижных осей, используемых в механике стержней, от естественных осей. Матрицы преобразования следующие:

$$\begin{aligned} L^0(I_{ij}^0) & \text{ базиса } \{\bar{i}_j\} \text{ к базису } \{\bar{e}_{j0}\}; \\ L(I_{ij}) & \text{ базиса } \{\bar{e}_{j0}\} \text{ к базису } \{\bar{e}_j\}; \\ L^{(1)} = LL^0 & \text{ базиса } \{\bar{i}_j\} \text{ к базису } \{\bar{e}_j\}. \end{aligned}$$

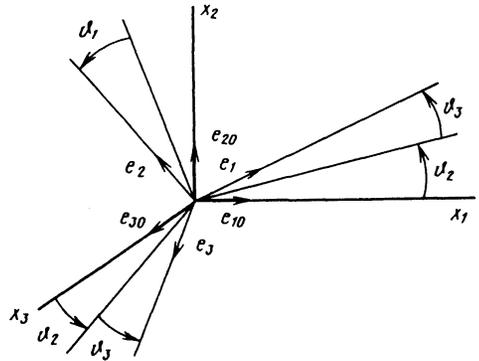


Рис. 8.5.2. Преобразование базисных векторов при повороте осей координат

Например, матрица

$$L = \begin{matrix} \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2 \\ \bar{e}_3 \end{matrix} \left\| \begin{array}{ccc} \bar{e}_{10} & \bar{e}_{20} & \bar{e}_{30} \\ \cos \vartheta_2 \cos \vartheta_3 & \cos \vartheta_2 \sin \vartheta_3 \cos \vartheta_2 + \sin \vartheta_2 \sin \vartheta_1 & \cos \vartheta_2 \sin \vartheta_3 \sin \vartheta_1 - \sin \vartheta_2 \cos \vartheta_1 \\ -\sin \vartheta_3 & \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_3 & \cos \vartheta_3 \sin \vartheta_1 \\ \sin \vartheta_2 \cos \vartheta_3 & \sin \vartheta_2 \sin \vartheta_3 - \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_3 \cos \vartheta_2 & \cos \vartheta_2 \cos \vartheta_1 \end{array} \right\|, \quad (8.5.3)$$

где ϑ_j - углы поворота связанных осей (рис.8.5.2).

При малых углах поворота матрица

$$L = \begin{matrix} \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2 \\ \bar{e}_3 \end{matrix} \left\| \begin{array}{ccc} 1 & \vartheta_3 & -\vartheta_2 \\ -\vartheta_3 & 1 & \vartheta_1 \\ \vartheta_2 & -\vartheta_1 & 1 \end{array} \right\|. \quad (8.5.4)$$

Векторное уравнение перемещений точек осевой линии стержня получено с помощью вектора

$$\bar{u} = \bar{r} - r_0. \quad (8.5.5)$$

Дифференцируя, получим

$$\frac{d\bar{u}}{ds} = \bar{e}_1 - \bar{e}_{10}. \quad (8.5.6)$$

Компоненты момента \bar{M} связаны с кручением осевой линии стержня и изменением кривизны проекций осевой линии на плоскости "физическими" соотношениями [38]:

$$M_1 = A_{11}(\varpi_1 - \varpi_{01}); \quad M_2 = A_{22}(\varpi_2 - \varpi_{02}); \quad \text{где}$$

$$M_3 = A_{33}(\varpi_3 - \varpi_{03}), \quad (8.5.7)$$

где A_{11} - жесткость стержня на кручение; ϖ_i - компоненты вектора $\bar{\varpi}$, характеризующего геометрию осевой линии стержня в нагруженном состоянии; ϖ_{i0} - компоненты вектора $\bar{\varpi}_0$, характеризующего геометрию осевой линии стержня в ненагруженном состоянии; A_{22} , A_{33} - жесткости стержня на изгиб в двух взаимно перпендикулярных плоскостях.

Соотношения (8.5.7) справедливы только в пределах закона Гука, т.е. для физически линейных задач.

Система (8.5.7) в векторной форме (в базисе $\{\bar{e}_j\}$) имеет вид

$$\bar{M} = A(\bar{\varpi} - \bar{\varpi}_0); \quad \left(\bar{\varpi}_0^1 = \sum_{j=1}^3 \varpi_{0j} \bar{e}_j \right), \quad (8.5.8)$$

$$A = \begin{vmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{vmatrix}.$$

Уравнение (8.5.8) связывают углы поворота ϑ_j с компонентами векторов $\bar{\omega}$ и $\bar{\omega}_0$. В тензорной форме векторы

$$\bar{e}_i = l_{iv} \bar{e}_{v0}; \quad \bar{e}_{v0} = l_{kv} \bar{e}_k, \quad (8.5.9)$$

где l_{ij} - элементы матрицы L .

Производные единичных векторов по дуговой координате s

$$\dot{\bar{e}}_i = \bar{\omega} \times \bar{e}_i = l'_{iv} \bar{e}_{v0} + l_{iv} \dot{\bar{e}}_{v0}; \quad (8.5.10)$$

$$\dot{\bar{e}}_{v0} = \bar{\omega}_0 \times \bar{e}_{v0}. \quad (8.5.11)$$

Последовательным исключением из (8.5.10) $\dot{\bar{e}}_{v0}$ и \bar{e}_{v0} с помощью уравнений (8.5.11) и (8.5.9) получено [38]

$$\varepsilon_{kji} \omega_j \bar{e}_k = \left(\frac{dl_{in}}{ds} l_{kn} + \varepsilon_{npv} l'_{iv} \bar{\omega}_0 l'_{kn} \right) \bar{e}_k. \quad (8.5.12)$$

Для матрицы (8.5.3) из (8.5.12)

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \left(\frac{d\vartheta_1}{ds} + \omega_{01} \right) \cos \vartheta_2 \cos \vartheta_3 - \frac{d\vartheta_3}{ds} \sin \vartheta_2 + \\ &+ (\sin \vartheta_2 \sin \vartheta_1 + \cos \vartheta_2 \sin \vartheta_3 \cos \vartheta_1) \omega_{02} + \\ &+ (\cos \vartheta_2 \sin \vartheta_3 \sin \vartheta_1 - \sin \vartheta_2 \cos \vartheta_1) \omega_{03}; \\ \omega_2 &= \frac{d\vartheta_2}{ds} - \left(\frac{d\vartheta_1}{ds} + \omega_{01} \right) \sin \vartheta_3 + \cos \vartheta_3 \times \\ &\times \cos \vartheta_1 \omega_{02} + \cos \vartheta_3 \sin \vartheta_1 \omega_{03}; \\ \omega_3 &= \frac{d\vartheta_3}{ds} \cos \vartheta_2 + \left(\frac{d\vartheta_1}{ds} + \omega_{01} \right) \sin \vartheta_2 \cos \vartheta_3 + \\ &+ (\sin \vartheta_2 \sin \vartheta_3 \cos \vartheta_1 - \cos \vartheta_2 \sin \vartheta_1) \omega_{02} + \\ &+ (\cos \vartheta_2 \cos \vartheta_1 + \sin \vartheta_2 \sin \vartheta_3 \sin \vartheta_1) \omega_{03}. \end{aligned} \quad (8.5.13)$$

Уравнения (8.5.13) в векторной форме

$$L_1 \frac{d\bar{\omega}}{ds} + L \bar{\omega}_0^1 - \bar{\omega} = 0, \quad (8.5.14)$$

где

$$\bar{\vartheta} = \begin{vmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \\ \vartheta_3 \end{vmatrix}; \quad L_1 = \begin{vmatrix} -\cos \vartheta_2 \cos \vartheta_3 & 0 & -\sin \vartheta_2 \\ -\sin \vartheta_3 & 1 & 0 \\ \sin \vartheta_2 \cos \vartheta_3 & 0 & \cos \vartheta_2 \end{vmatrix}.$$

Система пяти векторных уравнений (8.5.1), (8.5.2), (8.5.6), (8.5.8) и (8.5.14) или система пятнадцати скалярных уравнений содержит пятнадцать неизвестных: $Q_j, M_j, \vartheta_j, u_j, \omega_j$ ($j = 1, 2, 3$).

Уравнения равновесия в связанной системе координат. Уравнения (8.5.1), (8.5.2), (8.5.6), (8.5.8), (8.5.14) можно привести к безразмерному виду, полагая $s = \varepsilon l$ (l - длина стержня):

$$q = q_6 \frac{A_{33}(0)}{l^3}; \quad \bar{\mu} = \bar{\mu}_6 \frac{A_{33}(0)}{l^2};$$

$$\bar{Q} = \bar{Q}_6 \frac{A_{33}(0)}{l^2}; \quad \bar{\omega} = \bar{\omega}_6 \frac{1}{l};$$

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_6 \frac{A_{33}(0)}{l}; \quad \bar{u} = \bar{u}_6 l;$$

$$A_{ii}(\varepsilon) = A_{ii}(0) A_{33}(0).$$

Переходом в уравнениях (8.5.1), (8.5.2) к (8.5.6), (8.5.8) и (8.5.14) к безразмерной форме записи и локальным производным, получены уравнения в связанных осях (опущен индекс b в безразмерных величинах):

$$\frac{d\bar{Q}}{d\varepsilon} + \bar{\omega} \times \bar{Q} + \bar{q} H(\varepsilon - \varepsilon_q) + \bar{P} \delta(\varepsilon - \varepsilon_p) = 0; \quad (8.5.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{M}}{d\varepsilon} + \bar{\omega} \times \bar{M} + \bar{e}_1 \times \bar{Q} + \bar{\mu} H(\varepsilon - \varepsilon_\mu) + \\ + \bar{\omega} \delta(\varepsilon - \varepsilon_m) = 0; \end{aligned} \quad (8.5.16)$$

$$L_1 \frac{d\bar{\omega}}{d\varepsilon} + L \bar{\omega}_0^{(1)} - \bar{\omega} = 0; \quad (8.5.17)$$

$$\frac{du}{d\varepsilon} + \bar{\omega} \times \bar{u} + (l_{11} - 1) \bar{e}_1 + l_{21} \bar{e}_2 + l_{31} \bar{e}_3 = 0; \quad (8.5.18)$$

$$\bar{M} = A \left(\bar{\omega} - \bar{\omega}_0^{(1)} \right). \quad (8.5.19)$$

Уравнения равновесия (8.5.15), (8.5.16) в проекциях на связанные оси:

$$\begin{aligned} \frac{dQ_k}{d\varepsilon} + \varepsilon_{kij} \omega_j Q_i + q_k H_q + P_k \delta_p = 0 \\ (\text{при } k=1, 2, 3); \end{aligned} \quad (8.5.20)$$

$$\frac{dM_k}{d\varepsilon} + \varepsilon_{xj} \varpi_j M_l + \varepsilon_{xl} Q_l + \mu_k H_\mu + \frac{dQ_1}{d\varepsilon} - Q_2 \varpi_3 + q_1 H_q + P_1 \delta_P = 0;$$

$$+ \overline{\mathfrak{M}}_k \delta_m = 0; \quad (8.5.21)$$

$$l_{1kj} \frac{d\vartheta_j}{d\varepsilon} + l_{kj} \varpi_{0j} - \varpi_k = 0; \quad (8.5.22)$$

$$\frac{dM_3}{d\varepsilon} + Q_2 + \mu_3 H_\mu + m_3 \delta_m = 0;$$

$$\frac{du_k}{d\varepsilon} + \varepsilon_{xj} \varpi_j u_l + l_{1k} - \delta_{1k} = 0; \quad (8.5.23)$$

$$\frac{d\vartheta_3}{d\varepsilon} - \frac{M_3}{A_{33}} = 0; \quad \frac{du_1}{d\varepsilon} - u_2 \varpi_3 + l_{11} - 1 = 0;$$

$$M_k = A_{(k\kappa)} (\varpi_k - \varpi_{0\kappa}), \quad (8.5.24)$$

$$\frac{du_2}{d\varepsilon} + u_1 \varpi_3 + l_{21} = 0; \quad M_3 = A_{33} (\varpi_3 - \varpi_{03});$$

$$\left(\varpi_3 = \frac{d\vartheta_3}{d\varepsilon} \right), \quad (8.5.26)$$

где ε_{xji} и δ_{1k} - символы соответственно Леви-Чивита и Кронекера.

Определение компонент векторов \overline{q} , $\overline{\mu}$, \overline{P} и $\overline{\mathfrak{M}}$ в связанных осях. При следящей нагрузке компоненты векторов \overline{q} , $\overline{\mu}$, \overline{P} и $\overline{\mathfrak{M}}$ известны в базе $\{e_j\}$:

$$\overline{q} = q_j \overline{e}_j; \quad \overline{\mu} = \mu_j \overline{e}_j; \quad \overline{P} = P_j \overline{e}_j; \quad \overline{\mathfrak{M}} = \overline{\mathfrak{M}}_j \overline{e}_j.$$

При мертвой нагрузке компоненты векторов \overline{q} , $\overline{\mu}$, \overline{P} и $\overline{\mathfrak{M}}$ известны в декартовых осях:

$$\overline{q} = q_{x_j} \overline{i}_j; \quad \overline{\mu} = \mu_{x_j} \overline{i}_j; \quad \overline{P} = P_{x_j} \overline{i}_j;$$

$$\overline{\mathfrak{M}} = \overline{\mathfrak{M}}_{x_j} \overline{i}_j.$$

С помощью матрицы преобразования L получено $\overline{i}_j = l_{ij}^{(1)} \overline{e}_i$. Тогда, например, проекция вектора \overline{q} в связанных осях

$$q_j = q_{x_k} l_{jk}^{(1)}. \quad (8.5.25)$$

Частные случаи нелинейных уравнений равновесия:

а) до нагружения стержень прямолинейный. В уравнениях (8.5.17) и (8.5.19) принимают $\varpi_0 = 0$;

б) осевая линия стержня до нагружения и после него является плоской кривой [в плоскости $x_1 0 x_2$ (рис. 8.5.3)]. В этом случае $Q_3 = M_1 = M_2 = 0$; $\varpi_1 = \varpi_2 = \varpi_{01} = \varpi_{02} = 0$; $\vartheta_1 = \vartheta_2 = 0$; $u_3 = 0$. Из уравнений (8.5.20) - (8.5.24)

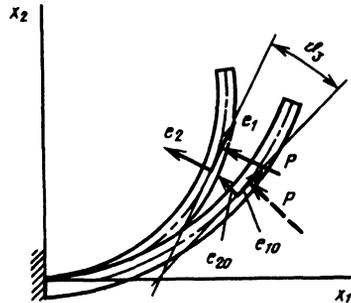


Рис. 8.5.3. Схема деформации плоского криволинейного стержня в плоскости кривизны

Если стержень перед нагружением прямолинейный, то в уравнениях (8.5.26) следует положить $\varpi_{03} = 0$.

8.5.2. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ СТЕРЖНЕЙ

Если при нагружении стержня компоненты векторов \overline{u} и $\overline{\vartheta}$, а также приращения $(\Delta \varpi_j)$ компонент вектора $\overline{\varpi}$ можно считать малыми, то из уравнений (8.5.15) - (8.5.19), пренебрегая в (8.5.15) и (8.5.16) слагаемыми $\frac{\Delta \overline{\varpi} \times \overline{Q}}{\Delta \overline{\varpi} \times \overline{M}}$ и приращением величин $\Delta \overline{q}$, $\Delta \overline{P}$, $\Delta \overline{\mu}$, $\Delta \overline{\mathfrak{M}}$, можно получить линейные уравнения нулевого приближения [32]:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{Q}}{d\varepsilon} + \mathbf{A}_\infty \bar{Q}^{(0)} + \bar{q}_0 H_q + \bar{P}_0 \delta_P &= 0; \\ \frac{d\bar{M}_0}{d\varepsilon} + \mathbf{A}_\infty \bar{M}^{(0)} + \mathbf{A}_1 \bar{Q}^{(0)} + \bar{\mu}_0 H_\mu + \\ &+ \bar{\boldsymbol{\eta}}_0 \delta_m = 0; \\ \frac{d\bar{\mathfrak{S}}}{d\varepsilon} + \mathbf{A}_\infty \bar{\mathfrak{S}}^{(0)} - \mathbf{A}^{-1} \bar{M}^{(0)} &= 0; \\ \frac{d\bar{u}}{d\varepsilon} + \mathbf{A}_\infty \bar{u}^{(0)} + \mathbf{A}_1 \bar{\mathfrak{S}}^{(0)} = 0; \bar{M}^{(0)} = \mathbf{A} \Delta \bar{\mathfrak{z}}^{(0)} \end{aligned} \quad (8.5.27)$$

Здесь

$$\mathbf{A}_\infty = \begin{vmatrix} 0 & -\mathfrak{z}_{03} & \mathfrak{z}_{02} \\ \mathfrak{z}_{03} & 0 & -\mathfrak{z}_{01} \\ -\mathfrak{z}_{02} & \mathfrak{z}_{01} & 0 \end{vmatrix};$$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Система уравнений (8.5.27) нулевого приближения [32]

$$\bar{\mathbf{Z}}^{(0)} + \mathbf{B}^{(0)} \bar{\mathbf{Z}}^{(0)} = \bar{\mathbf{b}}^{(0)}, \quad (8.5.28)$$

где

$$\bar{\mathbf{Z}}^{(0)} = \begin{vmatrix} \bar{Q}^{(0)} \\ \bar{M}^{(0)} \\ \bar{\mathfrak{S}}^{(0)} \\ \bar{u}^{(0)} \end{vmatrix}; \quad \bar{\mathbf{b}}^{(0)} = \begin{vmatrix} -\bar{q}_0 H_q - \bar{P}_0 \delta_P \\ -\bar{\mu}_0 H_\mu - \bar{\boldsymbol{\eta}}_0 \delta_m \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix};$$

$$\mathbf{B}^{(0)} = \begin{vmatrix} \mathbf{A}_\infty & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_\infty & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbf{A}^{-1} & \mathbf{A}_\infty & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_\infty \end{vmatrix}.$$

Для уточнения решения, полученного из системы (8.5.27), или уравнения (8.5.28), нулевого приближения, можно из (8.5.15) - (8.5.19) получить линейные уравнения первого и последующего приближений, полагая

$$\begin{aligned} \bar{Q} &= \bar{Q}^{(0)} + \bar{Q}^{(1)} + \bar{Q}^{(2)} + \dots; \\ \bar{M} &= \bar{M}^{(0)} + \bar{M}^{(1)} + \bar{M}^{(2)} + \dots; \\ \bar{\mathfrak{S}} &= \bar{\mathfrak{S}}^{(0)} + \bar{\mathfrak{S}}^{(1)} + \bar{\mathfrak{S}}^{(2)} + \dots; \\ \bar{u} &= \bar{u}^{(0)} + \bar{u}^{(1)} + \bar{u}^{(2)} + \dots; \\ \bar{\mathfrak{z}} &= \bar{\mathfrak{z}}_0^{(1)} + \Delta \bar{\mathfrak{z}}^{(0)} + \Delta \bar{\mathfrak{z}}^{(1)} + \Delta \bar{\mathfrak{z}}^{(2)} + \dots, \end{aligned} \quad (8.5.29)$$

где векторы с индексами 1, 2, ... считаются малыми

После подстановки (8.5.29) в уравнения (8.5.15) - (8.5.19), преобразования и исключения уравнений нулевого приближения получены уравнения первого приближения. Например, система уравнений первого приближения (вектора с индексом единица) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \bar{Q}^{(1)} + \mathbf{A}_\infty^{(0)} \bar{Q}^{(1)} + \mathbf{A}_Q^{(0)} \Delta \bar{\mathfrak{z}}^{(1)} + \Delta q^{(1)} \mathbf{H}_q + \\ + \Delta \bar{P}^{(1)} \delta_P = -\Delta q^{(0)} \mathbf{H}_q - \Delta P^{(0)} \delta_P - \mathbf{A}_\infty^{(0)} \Delta \bar{\mathfrak{z}}^{(0)}; \\ \bar{M}^{(1)} + \mathbf{A}_\infty^{(0)} \bar{M}^{(1)} + \mathbf{A}_M^{(0)} \Delta \bar{\mathfrak{z}}^{(1)} + \mathbf{A}_1 \bar{Q}^{(1)} + \\ + \Delta \bar{\mu}^{(1)} \mathbf{H}_\mu + \Delta \bar{\boldsymbol{\eta}}^{(1)} \delta_m = \\ = \Delta \bar{\mu}^{(0)} \mathbf{H}_\mu - \Delta \bar{\boldsymbol{\eta}}^{(0)} \delta_m - \mathbf{A}_M^{(0)} \Delta \bar{\mathfrak{z}}^{(0)}; \end{aligned} \quad (8.5.30)$$

$$\bar{\mathfrak{S}}^{(1)} = \mathbf{A}_\infty^{(0)} \bar{\mathfrak{S}}^{(1)} - \mathbf{A}^{-1} \bar{M}^{(1)} = 0; \quad \bar{M}^{(1)} = \mathbf{A} \Delta \bar{\mathfrak{z}}^{(1)};$$

$$\bar{u}^{(1)} + \mathbf{A}_\infty^{(0)} \bar{u}^{(1)} + \mathbf{A}_1 \bar{\mathfrak{S}}^{(1)},$$

где

$$\mathbf{A}_\infty^{(0)} = \begin{vmatrix} 0 & -(\mathfrak{z}_{03} + \Delta \mathfrak{z}_3^{(0)}) & \mathfrak{z}_{02} + \Delta \mathfrak{z}_2^{(0)} \\ \mathfrak{z}_{03} + \Delta \mathfrak{z}_3^{(0)} & 0 & -(\mathfrak{z}_{01} + \Delta \mathfrak{z}_1^{(0)}) \\ -(\mathfrak{z}_{02} + \Delta \mathfrak{z}_2^{(0)}) & \mathfrak{z}_{01} + \Delta \mathfrak{z}_1^{(0)} & 0 \end{vmatrix};$$

$$\mathbf{A}_Q^{(0)} = \begin{vmatrix} 0 & Q_3^{(0)} & -Q_2^{(0)} \\ -Q_3^{(0)} & 0 & Q_1^{(0)} \\ Q_2^{(0)} & -Q_1^{(0)} & 0 \end{vmatrix};$$

$$\mathbf{A}_M^{(0)} = \begin{vmatrix} 0 & M_3^{(0)} & -M_2^{(0)} \\ -M_3^{(0)} & 0 & M_1^{(0)} \\ M_2^{(0)} & -M_1^{(0)} & 0 \end{vmatrix};$$

$$\begin{aligned} \Delta \bar{q}^{(\rho)} &= C^{(1)} \bar{\mathfrak{g}}^{(\rho)} + C^{(2)} \bar{U}^{(\rho)}; \\ \Delta \bar{P} &= C^{(3)} \bar{\mathfrak{g}}^{(\rho)} + C^{(4)} \bar{U}^{(\rho)} \quad (\rho = 0, 1); \\ \Delta \bar{\mu}^{(\rho)} &+ D^{(1)} \bar{\mathfrak{g}}^{(\rho)} + D^{(2)} \bar{U}^{(\rho)}; \\ \Delta \bar{\mathfrak{m}}^{(\rho)} &= D^{(3)} \bar{\mathfrak{g}}^{(\rho)} + D^{(4)} \bar{U}^{(\rho)}. \end{aligned}$$

Пример. Определение приращения нагрузок $\Delta \bar{P}$ и $\Delta \bar{q}$ (см. рис. 8.5.1), считая \bar{P} и \bar{q} "мертвыми", т.е.

$$\bar{P} = \sum_{j=1}^3 P_{x_j} \bar{i}_j; \quad \bar{q} = \sum_{j=1}^3 q_{x_j} \bar{i}_j.$$

Так как $\bar{i}_j = \sum_{\rho=1}^3 l_{j\rho}^{(1)} \bar{e}_\rho$, после подстановки выражения для \bar{i}_j в выражения для \bar{P} и \bar{q} и преобразования при малых углах \mathfrak{g}_j

$$\bar{P} = \bar{P}_0 + \Delta \bar{P}; \quad \bar{q} = \bar{q}_0 + \Delta \bar{q},$$

где

$$\bar{P}_0 = \sum_{v=1}^3 P_{0v} \bar{e}_v;$$

$$\left(P_{0v} = \sum_{j=1}^3 P_{x_j} l_{vj}^{(0)} \right);$$

$$\bar{q}_0 = \sum_{v=1}^3 q_{0v} \bar{e}_v;$$

$$\left(q_{0v} = \sum_{j=1}^3 q_{x_j} l_{vj}^{(0)} \right),$$

$$\Delta \bar{q} = C^{(1)} \bar{\mathfrak{g}}; \quad \Delta \bar{P} = C^{(3)} \bar{\mathfrak{g}}. \quad (8.5.31)$$

Элементы матриц:

$$c_{ii}^{(1)} = 0; \quad c_{21}^{(1)} = - \sum_{j=1}^3 q_{x_j} l_{3j}^{(0)};$$

$$c_{31}^{(1)} = -c_{13}^{(1)} = \sum_{j=1}^3 q_{x_j} l_{2j}^{(0)};$$

$$c_{23}^{(1)} = -c_{32}^{(1)} = \sum_{j=1}^3 q_{x_j} l_{1j}^{(0)};$$

$$c_{ii}^{(3)} = 0; \quad c_{21}^{(3)} = -c_{12}^{(3)} = \sum_{j=1}^3 P_{x_j} l_{3j}^{(0)};$$

$$c_{31}^{(3)} = -c_{13}^{(3)} = - \sum_{j=1}^3 P_{x_j} l_{2j}^{(0)};$$

$$c_{23}^{(3)} = -c_{32}^{(3)} = \sum_{j=1}^3 P_{x_j} l_{1j}^{(0)}.$$

Аналогично определяют $\bar{\mathfrak{m}}_0, \bar{\mu}_0, \Delta \bar{\mathfrak{m}}$ и $\Delta \bar{\mu}$. Для следящих сил их приращения равны нулю.

Система уравнений первого приближения (8.5.30) в виде

$$\mathbf{Z}^{(1)} + \mathbf{B}^{(1)} \bar{\mathbf{Z}}^{(1)} = \bar{\mathbf{b}}^{(1)}, \quad (8.5.32)$$

где

$$\bar{\mathbf{Z}}^{(1)} = \begin{vmatrix} \bar{Q}^{(1)} \\ \bar{M}^{(1)} \\ \bar{\mathfrak{g}}^{(1)} \\ \bar{u}^{(1)} \end{vmatrix}; \quad \mathbf{B}^{(1)} = \begin{vmatrix} A_{\infty}^{(0)} & A_Q^{(0)} A^{-1} & C^{(1)} H_q & C^{(2)} H_q \\ A_1 & A_{\infty}^{(0)} + A_M^{(0)} A^{-1} & D^{(1)} H_{\mu} & D^{(2)} H_{\mu} \\ 0 & -A^{-1} & A_{\infty}^{(0)} & 0 \\ 0 & 0 & A_1 & A_{\infty}^{(0)} \end{vmatrix};$$

$$\bar{b}^{(1)} = \begin{pmatrix} -C^{(3)}\bar{\vartheta}^{(0)}\delta_P - C^{(4)}\bar{u}^{(0)}\delta_P - A_Q^{(0)}\Delta\bar{\omega}^{(0)} \\ -D^{(3)}\bar{\vartheta}^{(0)}\delta_m - D^{(4)}\bar{u}^{(0)}\delta_m - A_M^{(0)}\Delta\bar{\omega}^{(0)} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Аналогично можно получить уравнения второго и последующих приближений.

8.5.3. ЧИСЛЕННЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ СТЕРЖНЯ

Одним из возможных вариантов численного решения уравнений (8.5.28) и (8.5.31) является использование метода начальных параметров. Решение линейного дифференциального уравнения (8.5.28) можно представить в виде

$$\bar{Z}^{(0)} = K(\varepsilon)\bar{C} + \bar{Z}_N^{(0)}, \quad (8.5.33)$$

где $K(\varepsilon)$ - фундаментальная матрица решений (12×12) однородного уравнения (8.5.28); $\bar{Z}_N^{(0)}$ - частное решение неоднородного уравнения. Матрица $K(\varepsilon)$ удовлетворяет однородному уравнению

$$K(\varepsilon) + B^{(0)}(\varepsilon)K(\varepsilon) = 0. \quad (8.5.34)$$

Вектор $\bar{Z}_N^{(0)}$ может быть получен двумя способами: 1) решением неоднородного уравнения (8.5.28) при нулевых начальных данных; 2) с помощью матрицы Грина, когда

$$\bar{Z}_N^{(0)} = \int_0^\varepsilon G(\varepsilon, h)\bar{b}^{(0)} dh \quad \left(G(\varepsilon, h) = K(\varepsilon)K^{-1}(h) \right), \quad (8.5.35)$$

где $G(\varepsilon, h)$ - матрица Грина, если $b_{ij}^{(0)} = \text{const}$, то $G(\varepsilon, h) = K(\varepsilon - h)$.

Матрица $K(\varepsilon)$ получается из решения однородного уравнения

$$\bar{\mathbf{k}} + \mathbf{B}^{(0)}\bar{\mathbf{k}} = 0 \quad (8.5.36)$$

при следующих начальных условиях:

$$\bar{\mathbf{k}}_1 = (1, 0, \dots, 0)^T, \quad \bar{\mathbf{k}}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)^T, \dots,$$

$$\bar{\mathbf{k}}_{12} = (0, 0, \dots, 1)^T.$$

Каждое из решений $\bar{\mathbf{k}}_j$ уравнения (8.5.36) есть столбец матрицы $\mathbf{K}(\varepsilon)$.

Полученную матрицу можно уточнить, воспользовавшись методом итераций. Из (8.5.24)

$$\mathbf{K}^{(k+1)}(\varepsilon) = - \int_0^\varepsilon \bar{B}^{(0)} \mathbf{K}^{(k)} dh + E. \quad (8.5.37)$$

В качестве первого приближения ($k=1$) берется матрица $\mathbf{K}(\varepsilon)$, полученная методом начальных параметров. Число итераций зависит от требуемой точности Δ :

$$\max_{(0 \leq \varepsilon \leq 1)} \left| \frac{k_{ij}^{(k+1)} - k_{ij}^{(k)}}{k_{ij}^{(k)}} \right| 100\% \leq \Delta.$$

Рассмотрим вектор $\bar{Z}_N^{(0)}$ в уравнении (8.5.35). Представим вектор $\bar{b}^{(0)}$ в виде

$$\bar{b}^{(0)} = \bar{b}_q^{(0)} + \bar{b}_P^{(0)} + \bar{b}_\mu^{(0)} + b_m^{(0)}.$$

Тогда

$$\bar{Z}^{(0)} = \bar{Z}_{Nq}^{(0)} + \bar{Z}_{NP}^{(0)} + \bar{Z}_{N\mu}^{(0)} + \bar{Z}_{Nm}^{(0)}. \quad (8.5.38)$$

Здесь

$$\bar{Z}_{Nq}^{(0)} = \int_{\varepsilon_q}^\varepsilon G \begin{pmatrix} -\bar{q}_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dh;$$

$$\bar{Z}_{N\mu}^{(0)} = \int_{\varepsilon_\mu}^\varepsilon G \begin{pmatrix} 0 \\ -\bar{\mu}_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dh;$$

$$\bar{Z}_{nP}^{(0)} = \int_0^\varepsilon G \begin{vmatrix} -\bar{P}_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \delta(h - \varepsilon_p) dh = G(\varepsilon, \varepsilon_p) \begin{vmatrix} -\bar{P}_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} H(\varepsilon - \varepsilon_p);$$

$$\bar{Z}_{nm}^{(0)} = \int_0^\varepsilon G \begin{vmatrix} 0 \\ -\bar{m}_0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \delta(h - \varepsilon_m) dh = G(\varepsilon, \varepsilon_m) \begin{vmatrix} 0 \\ -\bar{m}_0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} H(\varepsilon - \varepsilon_m).$$

(8.5.39)

Аналогично получают частные решения неоднородных уравнений первого и последующих приближений. Изложенный алгоритм численного решения линейных уравнений с последующим уточнением может быть использован и при решении нелинейных уравнений равновесия (метод последовательного нагружения).

Уравнения первого приближения:

$$\begin{aligned} \bar{Q}_1^{(1)} - \varkappa_{03}^{(0)} \bar{Q}_2^{(1)} - \bar{Q}_2^{(0)} \Delta \varkappa_3^{(1)} &= \bar{Q}_2^{(0)} \Delta \varkappa_3^{(0)}; \\ \bar{Q}_2^{(1)} + \varkappa_{03}^{(0)} \bar{Q}_1^{(1)} + \bar{Q}_1^{(0)} \Delta \varkappa_3^{(1)} &= -\bar{Q}_1^{(0)} \Delta \varkappa_3^{(0)}; \\ \bar{M}_3^{(1)} + \bar{Q}_2^{(1)} &= 0; \quad \bar{S}_3^{(1)} - \bar{M}_3^{(1)} = 0; \\ \bar{u}_1^{(1)} - \varkappa_{03}^{(0)} \bar{U}_2^{(1)} &= 0; \quad \bar{U}_2^{(1)} + \varkappa_{03}^{(0)} \bar{U}_1^{(1)} - \bar{S}_3^{(1)} = 0, \end{aligned}$$

где $\varkappa_{03}^{(0)} = \varkappa_{03} + \Delta \varkappa_3^{(0)}$.

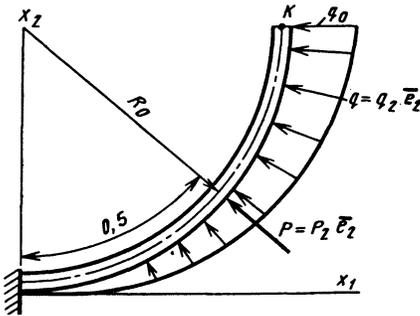


Рис.8.5.4. Схема нагружения кругового плоского стержня следящей нагрузкой

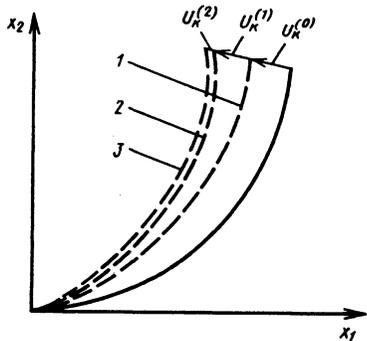


Рис. 8.5.5. Линии прогибов стержня, полученные путем интегрирования уравнений в различных приближениях: 1 - нулевого приближения; 2 - нулевого и первого приближений; 3 - нулевого, первого и второго приближений

Пример. Круговой плоский стержень (рис. 8.5.4) постоянного сечения (\$A_{33} = 1\$) нагружен следящими распределенной нагрузкой \$\bar{q}\$ и сосредоточенной силой \$\bar{P}\$. Уравнения нулевого приближения

$$\begin{aligned} \bar{Q}_1^{(0)} - \varkappa_{03}^{(0)} \bar{Q}_2^{(0)} &= 0; \quad \bar{S}_3^{(0)} - \bar{M}_3^{(0)} = 0; \\ \bar{Q}_2^{(0)} + \varkappa_{03}^{(0)} \bar{Q}_1^{(0)} &= -q_2 - P_2 \delta(\varepsilon - 0,5); \\ \bar{u}_1^{(1)} - \varkappa_{03}^{(0)} \bar{u}_2^{(0)} &= 0; \\ \bar{M}_3^0 + \bar{Q}_2^{(0)} &= 0; \quad \bar{u}_2^{(0)} + \varkappa_{03}^{(0)} \bar{u}_1^{(0)} - \bar{S}_3^0 = 0; \\ \bar{M}_3^{(0)} &= \Delta \varkappa_3^{(0)}. \end{aligned}$$

На рис. 8.5.5 показаны осевые линии стержня в нагруженном состоянии, полученные при решении уравнений. Безразмерная нагрузка \$P_2=1, q_2=2\$. При принятой точности решения с учетом только первого приближения, а также с учетом первого и второго приближения практически совпадают, в то время как решение уравнений нулевого приближения дает погрешность до 40%.

Глава 8.6

СОСТАВНЫЕ
И МНОГОСЛОЙНЫЕ СТЕРЖНИ

8.6.1. СОСТАВНЫЕ СТЕРЖНИ

Составной стержень состоит из нескольких стержней (слоев), соединенных между собой. Стержни, входящие в состав составного, могут быть изготовлены из различных материалов. Соединены они жесткими или упругими связями. При расчете различают два вида связей в составном стержне в зависимости от вида усилий, которые они могут передавать от одного стержня к другому. Поперечная связь передает поперечные нормальные силы, а связь сдвига - касательные силы. Предположим, что слои, имеющие постоянные по длине сечения, работают в упругой области. Пусть стержень имеет n связей и $n+1$ слоев; связи сдвига упругие, а поперечные связи жесткие (недеформируемые).

Рассматривают такие связи, для которых можно считать, что распределенные касательные силы τ_i в i -м шве и взаимный сдвиг двух соседних слоев пропорциональны (рис.8.6.1):

$$\tau_i = k_i \left(u_{i+1}^{(B)} - u_i^{(H)} \right), \quad (8.6.1)$$

где k_i - коэффициент жесткости связи на сдвиг; $u_{i+1}^{(B)}$ - перемещение точек верхней кромки $i+1$ -го слоя в направлении оси z ; $u_i^{(H)}$ - перемещение точек нижней кромки i -го слоя.

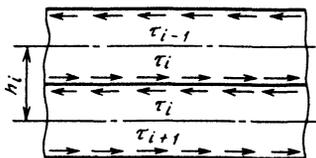


Рис. 8.6.1. Схема действия касательных сил в составном стержне

Составной стержень является статически неопределимой системой, для расчета которой часто используют метод сил. В качестве основной системы выбран стержень, освобожденный от связей сдвига, действие которых заменено неизвестными усилиями τ_i , где i - номер шва.

В основной системе жесткость составного стержня без связей сдвига равна сумме жесткостей отдельных стержней $\sum_{i=1}^{n+1} E_i J_i$. Изгибаю-

щий момент от внешней нагрузки $M^0(z)$ распределяется между слоями пропорционально их изгибным жесткостям:

$$M_i(x) = M^0(z) E_i J_i / \sum_{i=1}^{n+1} E_i J_i. \quad (8.6.2)$$

Пусть $T_i(z)$ - равнодействующая касательных сил, которые действуют по одну сторону от рассматриваемого сечения.

Тогда

$$T_i(z) = \int_0^z \tau_i dz \quad \text{или} \quad T_i'(z) = \tau_i(z). \quad (8.6.3)$$

Условие эквивалентности основной и заданной системы сводится к системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_1} T_1'' - \delta_{11} T_1 - \delta_{12} T_2 \dots - \delta_{1n} T_n &= \Delta_{1P}; \\ \frac{1}{k_2} T_2'' - \delta_{21} T_1 - \delta_{22} T_2 \dots - \delta_{2n} T_n &= \Delta_{2P}; \\ \dots &\dots \\ \frac{1}{k_n} T_n'' - \delta_{n1} T_1 - \delta_{n2} T_2 \dots - \delta_{nn} T_n &= \Delta_{nP}. \end{aligned} \quad (8.6.4)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Delta_{iP} &= -\frac{N_i^0(z)}{E_i A_i} + \frac{N_{i+1}^0(z)}{E_{i+1} A_{i+1}} - \frac{M^0(z) h_i}{\sum_{i=1}^{n+1} E_i J_i}; \\ \delta_{ii} &= \frac{1}{E_i A_i} + \frac{1}{E_{i+1} A_{i+1}} - \frac{h_i^2}{\sum_{i=1}^{n+1} E_i J_i}; \\ \delta_{i-1,i} &= -\frac{1}{E_i A_i} + \frac{h_i h_{i-1}}{\sum_{i=1}^{n+1} E_i J_i}; \\ \delta_{i+1,i} &= -\frac{1}{E_{i+1} A_{i+1}} - \frac{h_i h_{i+1}}{\sum_{i=1}^{n+1} E_i J_i}; \end{aligned}$$

$$\delta_{ik} = \frac{h_i h_k}{\sum_{i=1}^{n+1} E_i J_i} \text{ при } |i - k| > 1.$$

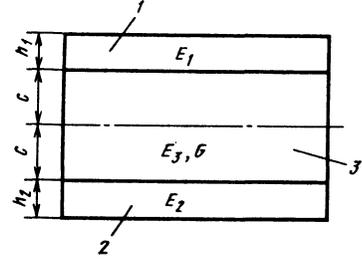


Рис. 8.6.2. Схема трехслойного стержня

Производные взяты по продольной координате z . Решение системы дифференциальных уравнений (8.6.4) содержит постоянные интегрирования, которые определяют из граничных условий на T_i на концах стержня.

После определения неизвестных $T_i(z)$ силы и моменты в каждом слое могут быть получены по формулам

$$N_i(z) = T_i(z) - T_{i-1}(z) + N_i^0;$$

$$M_i(z) = \frac{E_i J_i}{\sum_{i=1}^{n+1} E_i J_i} \left(M^0 - \sum_{i=1}^{n+1} T_i h_i \right),$$

где $N_i^{(0)}$ - продольные силы, вызываемые в i -м стержне только внешней нагрузкой.

Напряжения в продольных волокнах

$$\sigma = N_i / A_i + M_i y / J_i,$$

где y - расстояние от центра тяжести сечения i -го слоя до рассматриваемого волокна.

Изгибающий момент вызывает одинаковые прогибы $w(z)$ всех слоев. Дифференциальное уравнение для определения прогибов имеет вид

$$w''(z) = M / \sum_{i=1}^{n+1} E_i J_i.$$

8.6.2. ТРЕХСЛОЙНЫЕ СТЕРЖНИ С ЗАПОЛНИТЕЛЕМ

В простейшей модели трехслойного стержня принято, что упругий наполнитель, связывающий два несущих слоя, обладает конечной жесткостью на сдвиг и бесконечно большой жесткостью на поперечное сжатие. Легкий наполнитель не воспринимает продольных напряжений, а жесткий - воспринимает продольные напряжения. В отличие от гипотезы плоских сечений не требуется, чтобы поперечные сечения в процессе деформации оставались перпендикулярными к изогнутой оси балки. Принято, что несущие слои обладают бесконечной жесткостью на сдвиг [36].

В системе прямолинейных координат ось z направлена по срединной линии наполнителя (рис. 8.6.2). Несущий слой, расположенный со стороны положительного направления оси y , считается первым слоем, со стороны отрицательного направления - вторым, а наполнитель - третьим (рис. 8.6.2). Пусть h_k - толщина слоев, E_k - модули упругости слоев, G - модуль сдвига наполнителя, $h = \sum_{k=1}^3 h_k$,

$$E = \frac{1}{h} \sum_{k=1}^3 E_k h_k, \quad \nu_k = \frac{E_k h_k}{E h}, \quad t_k = \frac{h_k}{h},$$

$h_3 = 2c$, u - продольное перемещение и w - прогиб точки на срединной линии наполнителя, α - угол поворота поперечного сечения наполнителя.

В соответствии с законом Гука нормальные напряжения в продольных волокнах связаны с перемещениями следующими соотношениями:

для первого несущего слоя ($c \leq y \leq c + h_1$)

$$\sigma_1 = E_1 \left(\frac{\partial u}{\partial z} + c \frac{\partial \alpha}{\partial z} - y \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right);$$

для наполнителя ($-c \leq z \leq c$)

$$\sigma_3 = E_3 \left(\frac{\partial u}{\partial z} - y \frac{\partial \alpha}{\partial z} - y \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right);$$

для второго несущего слоя

$$\sigma_2 = E_2 \left(\frac{\partial u}{\partial z} - c \frac{\partial \alpha}{\partial z} - y \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right).$$

Касательные напряжения в наполнителе $\tau = G\alpha$. Из (8.6.1) - (8.6.3) следует, что в преде-

лах каждого слоя нормальные напряжения изменяются по линейному закону.

Для стержня постоянной по высоте ширины b в каждом слое действуют продольные силы N_1, N_2, N_3 , изгибающие моменты M_1, M_2, M_3 , а также поперечная сила Q_3 , в заполнителе. Для упрощения последующих соотношений в качестве линий приведения для заполнителя принята его центральная ось ($y=0$), для несущих слоев - линии сопряжения несущих слоев с заполнителем ($y = \pm c$). Тогда

$$N_1 = b \int_c^{c+h_1} \sigma_1 dy = B\gamma_1 \frac{\partial u}{\partial z} + K\gamma_1 \left[t_3 \frac{\partial \alpha}{\partial z} - (t_1 + t_3) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right];$$

$$M_1 = b \int_c^{c+h_1} \sigma_1 (z-c) dy = -cN_1 + K\gamma_1 t_1 \frac{\partial u}{\partial z} + D\gamma_1 t_1 \theta^{-1} \left[3t_3 \frac{\partial \alpha}{\partial z} - (4t_1 + 3t_3) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right];$$

$$N_2 = b \int_{-c-h_2}^{-c} \sigma_2 dy = B\gamma_2 \frac{\partial u}{\partial z} - K\gamma_2 \left[t_3 \frac{\partial \alpha}{\partial z} - (t_2 + t_3) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right];$$

$$M_2 = b \int_{-c-h_2}^{-c} \sigma_2 (z+c) dy = cN_2 - K\gamma_2 t_2 \frac{\partial u}{\partial z} + D\gamma_2 t_2 \theta^{-1} \left[3t_3 \frac{\partial u}{\partial z} - (4t_2 + 3t_3) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right];$$

$$N_3 = b \int_{-c}^c \sigma_3 dy = B\gamma_3 \frac{\partial u}{\partial z};$$

$$M_3 = b \int_{-c}^c \sigma_3 y dy = D\gamma_3 t_3^2 \theta^{-1} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right);$$

$$Q_3 = b \int_{-c}^c G \alpha dy = Ghbt_3 \alpha,$$

$$\text{Полная продольная сила } N = \sum_{k=1}^3 N_k$$

примет вид

$$N = B \frac{\partial u}{\partial z} + K \left[c_{12} \frac{\partial \alpha}{\partial z} - c_{13} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right].$$

Если

обозначить

$$v = u + 0,5h \left(c_{12} \alpha - c_{13} \frac{\partial w}{\partial z} \right), \text{ то } N = B \frac{\partial v}{\partial z}.$$

Суммарный изгибающий момент относительно срединной линии заполнителя

$$M^{\Delta} = D \left(\gamma \frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{h}{2} c_{12} N \right).$$

Момент, определяющий поперечный

сдвиг в заполнителе, $M^{\Delta} = M_3 + cN_1 - cN_2$. Через перемещения он может быть выражен в форме

$$M^{\Delta} = \frac{h}{2} c_{12} N + D\gamma \left[\frac{\gamma}{1-\vartheta} \frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right].$$

Выше были использованы обозначения:

$$\theta = c_{33} - 3c_{13}^2;$$

$$\gamma = (c_{33} - 3c_{12}c_{13})\theta^{-1};$$

$$\vartheta = 1 - \gamma \frac{c_{23} - 3c_{12}c_{13}}{c_{22} - 3c_{12}^2}$$

$$c_{12} = t_3(\gamma_1 - \gamma_2);$$

$$c_{13} = \gamma_1(t_1 + t_3) - \gamma_2(t_2 + t_3);$$

$$c_{22} = t_3^2(3\gamma_1 + 3\gamma_2 + \gamma_3);$$

$$c_{23} = 3\gamma_1 t_3(t_1 + t_3) + 3\gamma_2 t_3(t_2 + t_3) + \gamma_3 t_3^2;$$

$$c_{33} = \gamma_1(4t_1^2 + 6t_1 t_3 + t_3^2) + \gamma_2(4t_2^2 +$$

$$+ 6t_2 t_3 + 3t_3^2) + \gamma_3 t_3^2.$$

Нейтральная ось находится на расстоянии $e_0 = 0,5hc_{12}$ от средней линии заполнителя.

где $B = Ehb$; $K = Eh^2 b / 2$; $D = Eh^3 b \theta / 12$.

Усилия

$$H = \overset{\Lambda}{H} - \frac{1}{2} hc_{12} N = D\gamma \left[\frac{\gamma}{1-\nu} \frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right];$$

$$M = \overset{\Lambda}{M} - \frac{1}{2} hc_{13} N = D \left(\gamma \frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right).$$

Тогда уравнения равновесия

$$\frac{dN}{dz} = 0; \quad \frac{dH}{dz} - Q_3 = 0; \quad \frac{d^2 M}{dz^2} + q = 0, \quad (8.6.5)$$

где q - внешняя поперечная нагрузка.

Если в уравнениях (8.6.4) перейти к перемещениям, то

$$\frac{d^2 \nu}{dz^2} = 0;$$

$$D\gamma^2 \left[\gamma \frac{d^2 \alpha}{dz^2} - (1-\vartheta) \frac{d^3 w}{dz^3} \right] - (1-\vartheta) Ght_3 \gamma \alpha = 0;$$

$$D \left[\gamma \frac{d^3 \alpha}{dz^3} - \frac{d^4 w}{dz^4} \right] + q = 0. \quad (8.6.6)$$

Заметим, что система уравнений равновесия (8.6.6) распадается на две независимые системы относительно ν и функций $\alpha\gamma$ и w .

Если ввести функцию перемещений

$$w = \left[1 - \frac{h^2}{\beta} \frac{d^2}{dz^2} \right] \chi;$$

$$\alpha\gamma = -(1-\vartheta) \frac{h^2}{\beta} \frac{d^3 \chi}{dz^3} \quad (8.6.7)$$

и параметр

$$\beta = \frac{12Gt_3(1-\vartheta)}{E\gamma^2},$$

то система уравнений (8.6.6) сводится к одному разрешающему уравнению относительно функции перемещений

$$D \left(1 - \frac{\vartheta h^2}{\beta} \frac{d^2}{dz^2} \right) \frac{d^4 \chi}{dz^4} = q. \quad (8.6.8)$$

Через функцию перемещений $\chi(z)$ угол поворота и внутренние усилия выражаются следующим образом:

$$\psi = \alpha - \frac{dw}{dz} = - \left(1 + \frac{h^2}{\beta} \frac{1-\vartheta}{\gamma} \frac{d^2}{dz^2} \right) \frac{d\chi}{dz};$$

$$H = -D\gamma \frac{d^2 \chi}{dz^2}; \quad M = -D \left(1 - \frac{\vartheta h^2}{\beta} \frac{d^2}{dz^2} \right) \frac{d^2 \chi}{dz^2};$$

$$Q_3 = \frac{dH}{dz} = -D\gamma \frac{d^3 \chi}{dz^3};$$

$$Q = \frac{dM}{dz} = -D \left(1 - \frac{\vartheta h^2}{\beta} \frac{d^2}{dz^2} \right) \frac{d^3 \chi}{dz^3}.$$

Моменты M и H связаны соотношением

$$H - \frac{\vartheta h^2}{\beta} \frac{d^2 H}{dz^2} = \gamma M.$$

Решение дифференциальных уравнений (8.6.6), (8.6.8) должно удовлетворять граничным условиям. Если край свободен от продольных сил, то решение уравнения (8.6.6) должно удовлетворять условию $N=0$ или $\frac{d\nu}{dz} = 0$. Если продольное перемещение отсутствует, $\nu=0$.

Наиболее часто граничными условиями для уравнения (8.6.8) являются:

1) край свободно оперт, диафрагма, жесткость которой характеризуется силой $S = \frac{H}{\gamma} - M = D \frac{\vartheta}{1-\vartheta} \frac{d(\alpha\gamma)}{dz}$, отсутствует ($w = M = S = 0$);

$$\chi = \frac{d^2 \chi}{dz^2} = \frac{d^4 \chi}{dz^4} = 0;$$

2) край свободно оперт, имеется бесконечно жесткая диафрагма ($w = M = \alpha\gamma = 0$):

$$\left(1 - \frac{h^2}{\beta} \frac{d^2}{dz^2} \right) \chi = \left(1 - \frac{\vartheta h^2}{\beta} \frac{d^2}{dz^2} \right) \frac{d^2 \chi}{dz^2} = \frac{d^3 \chi}{dz^3} = 0;$$

3) край жестко заделан ($w = \varphi = \alpha\gamma = 0$):

$$\left(1 - \frac{h^2}{\beta} \frac{d^2}{dz^2} \right) \chi = \frac{d\chi}{dz} = \frac{d^3 \chi}{dz^3} = 0;$$

4) край свободен ($M = S = Q = 0$):

$$\frac{d^2 \chi}{dz^2} = \frac{d^4 \chi}{dz^4} = \left(1 - \frac{9h^2}{\beta} \frac{d^2}{dz^2} \right) \frac{d^3 \chi}{dz^3} = 0;$$

5) край свободен, но имеется бесконечно жесткая диафрагма ($M = s = Q = 0$):

$$\frac{d^2 \chi}{dz^2} = \frac{d^4 \chi}{dz^4} = \left(1 - \frac{9h^2}{\beta} \frac{d^2}{dz^2} \right) \frac{d^3 \chi}{dz^3} = 0.$$

Глава 8.7

УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИЕ ДЕФОРМАЦИИ СТЕРЖНЕЙ

8.7.1. КРИВАЯ ДЕФОРМИРОВАНИЯ МАТЕРИАЛА ПРИ ОДНООСНОМ РАСТЯЖЕНИИ И СЖАТИИ

Диаграмма деформирования материала при растяжении в общем случае описывается зависимостью (рис. 8.7.1, а)

$$\sigma = f(\epsilon). \quad (8.7.1)$$

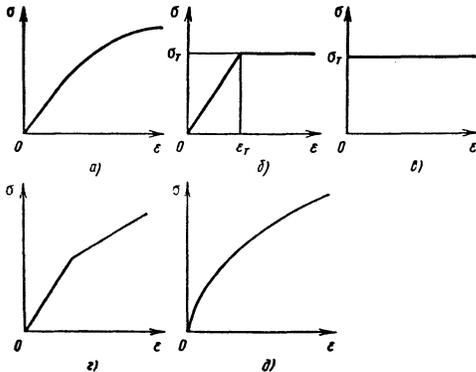


Рис. 8.7.1. Диаграммы деформирования материала

Для упрощения расчетов часто используют схематизированные диаграммы: идеального упругопластического материала (рис. 8.7.1, б) - диаграмма Прандтля; жесткопластического материала (рис. 8.7.1, в); линейно упрочняющегося материала (рис. 8.7.1, г); материала со степенным законом деформирования (рис. 8.7.1, д) $\sigma = B|\epsilon|^{\mu-1} \epsilon$ при $\mu < 1$.

Выбор схематизированной диаграммы зависит, во-первых, от заданной реальной кривой $\sigma \approx \epsilon$ и, во-вторых, от поставленной

задачи. Например, для определения предельной (разрушающей) нагрузки применяют диаграмму идеально упругопластического или жесткопластического материала. Как правило, кривые деформирования при растяжении и сжатии принимают одинаковыми.

8.7.2. ИЗГИБ БАЛОК

При расчете изгибаемых стержней в упругопластической стадии считают справедливой гипотезу плоских сечений. Для стержня, поперечное сечение которого имеет две оси симметрии, нейтральная ось совпадает с его центральной осью и деформация в точке $\epsilon = \omega y$, где ω - изменение кривизны оси балки.

С учетом (8.7.1) изгибающий момент

$$M = \int_{-0,5h}^{0,5h} b(y) y f(\omega y) dy, \quad (8.7.2)$$

где $b(y)$ и h - соответственно ширина поперечного сечения на расстоянии y от нейтральной оси и его высота.

В частном случае, когда в сечении возникают только упругие деформации,

$$M = E \int_{-0,5h}^{0,5h} b(y) y^2 dy = EI \omega.$$

Из уравнения (8.7.2) находят кривизну оси балки, деформации, а затем напряжения в точках поперечного сечения.

Для балки из идеального упругопластического материала распределение нормальных напряжений по высоте поперечного сечения (рис. 8.7.2, а)

$$\sigma = \begin{cases} \pm \sigma_T & \text{при } |y| \geq y_T; \\ \frac{\sigma_T}{y_T} y & \text{при } |y| \leq y_T. \end{cases}$$

Равенство (8.7.2) в этом случае принимает вид

$$M = \frac{\sigma_T}{y_T} J_e + \sigma_T S. \quad (8.7.3)$$

Момент инерции упругой части поперечного сечения

$$J_e = \int_{-y_T}^{y_T} b(y) y^2 dy,$$

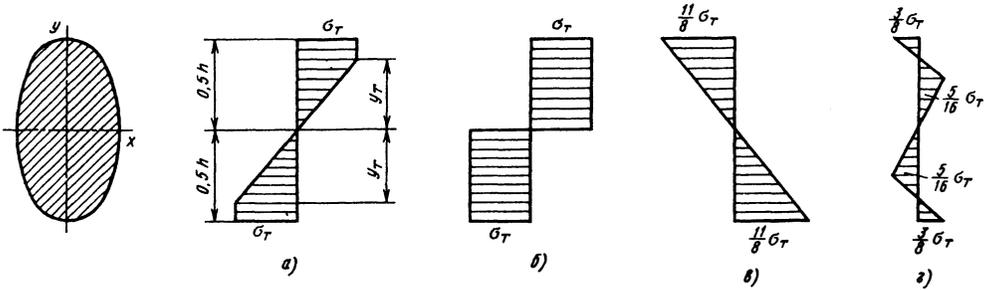


Рис. 8.7.2. Эпюра напряжений по высоте поперечного сечения балки:

a - для идеального упругопластического материала; *b* - при действии предельного изгибающего момента; *c* - для упругого материала; *г* - разность эпюр *a* и *b*

8.7.1. Предельные изгибающие моменты $M_{пр} = \sigma_T S_T$

Поперечное сечение	$M_{пр}$	Поперечное сечение	$M_{пр}$
	$2bh^2 \sigma_T$		$\frac{2}{3} bh^2 \sigma_T$
	$\frac{4}{3} R^3 \sigma_T$		$[2bh^2 - H^2(2b - d)] \sigma_T$
	$\frac{4}{3} ba^2 \sigma_T$		$2R^2 \delta \sigma_T$

удвоенный статический момент верхней пластической зоны поперечного сечения относительно нейтральной оси

$$S = 2 \int_{0,5h}^{y_T} b(y) y dy$$

С увеличением изгибающего момента величина y_T уменьшается. При $y_T \rightarrow 0$ момент

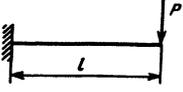
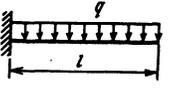
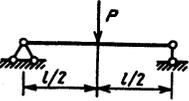
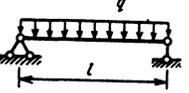
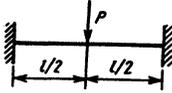
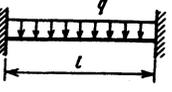
$M_{пр} = \sigma_T S_T$. Удвоенный статический момент верхней половины поперечного сечения относительно нейтральной оси называют пластическим моментом сопротивления.

При $M = M_{пр}$ исчерпывается несущая способность балки (большую нагрузку балка воспринять не может). Во всем сечении появляются пластические деформации и эпюра

напряжений имеет вид двух прямоугольников (рис. 8.7.2, б).

Предельный изгибающий момент зависит от формы поперечного сечения (табл. 8.7.1). В табл. 8.7.2 приведены выражения предельных нагрузок некоторых балок.

8.7.2. Предельные нагрузки для балки

Расчетная схема	Предельная нагрузка
	$P_{\text{п р}} = M_{\text{п р}}/l$
	$q_{\text{п р}} = 2M_{\text{п р}}/l^2$
	$P_{\text{п р}} = 4M_{\text{п р}}/l$
	$q_{\text{п р}} = 8M_{\text{п р}}/l^2$
	$P_{\text{п р}} = 8M_{\text{п р}}/l$
	$q_{\text{п р}} = 16M_{\text{п р}}/l^2$

Если при действии внешней нагрузки в стержне возникают пластические деформации, то после снятия нагрузки в нем появляются остаточные напряжения. При разгрузке материал деформируется упруго и поэтому остаточные напряжения

$$\sigma_0 = \sigma - \sigma_y,$$

где σ и σ_y - напряжения, возникающие при нагружении соответственно упругопластической и упругой балки; эти напряжения отвечают одной и той же нагрузке.

Пример. На балку, выполненную из идеально упругопластического материала и имеющую прямоугольное поперечное сечение с размерами bh , действует момент $M = \frac{11}{12} M_{\text{п р}}$, т.е. $M = \frac{11}{48} \sigma_T bh^2$. Определить распределение напряжений по высоте сечения и найти остаточные напряжения, возникающие после снятия момента.

Равенство (8.7.3) имеет вид

$$\frac{11}{48} h^2 = \frac{2}{3} y_T^2 + \left(\frac{h^2}{4} - y_T^2 \right).$$

Отсюда $y_T = h/4$. Для упругой балки эпюра напряжений имела бы вид, представленный на рис. 8.7.2, в. После снятия нагрузки появляются остаточные напряжения, определяемые как разность этих двух эпюр напряжений (рис. 8.7.2, з).

8.7.3. НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ СТЕРЖНЕЙ ПРИ ИЗГИБЕ С ОДНОВРЕМЕННЫМ РАСТЯЖЕНИЕМ ИЛИ СЖАТИЕМ

Расчет стержней на изгиб заметно усложняется при наличии осевой силы и его целесообразно выполнять методом последовательных приближений (упругих решений). Следует отметить, что такой способ решения задачи позволяет учесть различие диаграмм при растяжении и сжатии материала стержня и различие материала слоев, входящих в поперечное сечение стержня.

Рассмотрим две формы метода упругих решений.

Метод переменных параметров упругости. Для поперечного сечения, имеющего одну ось симметрии, в качестве координатных осей выбраны, например, главные центральные оси x, y .

Из решения упругой задачи находят первое приближение осевой деформации ϵ_1^0 и кривизны κ_1 оси стержня. Для точки поперечного сечения с координатой y из соотношения (8.7.1) вычисляют приближенное значение секущего модуля упругости

$$E_1(y) = f(\epsilon_1) / \epsilon_1,$$

где $\epsilon_1 = \epsilon_1^0 + \kappa_1 y$.

Последующие приближения для величин ϵ_n^0 и κ_n находят из уравнений ($n > 0$);

$$EA_{\text{п.р.}}^{(n-1)} \varepsilon_n^0 + ES_{\text{п.р.}}^{(n-1)} \varkappa_n = N;$$

$$ES_{\text{п.р.}}^{(n-1)} \varepsilon_n^0 + EI_{\text{п.р.}}^{(n-1)} \varkappa_n = M.$$

Причем

$$EA_{\text{п.р.}}^{(n-1)} = \int_A E_{n-1}(y) dA;$$

$$ES_{\text{п.р.}}^{(n-1)} = \int_A E_{n-1}(y) y dA;$$

$$EI_{\text{п.р.}}^{(n-1)} = \int_A E_{n-1}(y) y^2 dA; \quad E_{n-1} = \frac{f(\varepsilon_{n-1})}{\varepsilon_{n-1}};$$

$$\varepsilon_{n-1} = \varepsilon_{n-1}^0 + \varkappa_{n-1} y; \quad \sigma_{n-1} = f(\varepsilon_{n-1}).$$

Интегралы вида $\int_A E_{n-1}(y) dA,$

$\int_A E_{n-1}(y) y dA$ вычисляют с помощью квадрата

турных формул, для чего поперечное сечение стержня разбивают по высоте на достаточно большое число горизонтальных полосок. В зависимости от применяемой квадратурной формулы подынтегральное выражение находят либо на границе полосок (например, при использовании формулы трапеций), либо в центре полосок (например, при использовании формулы прямоугольников).

Процесс последовательных приближений закончен, если соблюдается условие

$$|\sigma_n(y) - \sigma_{n-1}(y)| < \Delta.$$

Метод дополнительных нагрузок. Если представить зависимость (8.7.10) в виде $\sigma = E[\varepsilon - \omega(\varepsilon)],$ то осевая деформация ε^0 и кривизна оси балки могут быть выражены из уравнений равновесия следующим образом:

$$\varepsilon^0 = \frac{N}{EA} + \frac{1}{A} \int_A \omega(\varepsilon) dA;$$

$$\varkappa = \frac{M}{EI} + \frac{1}{I} \int_A \omega(\varepsilon) y dA.$$

В первом приближении интегральные слагаемые считают равными нулю:

$$\varepsilon_1^0 = \frac{N}{EA}; \quad \varkappa_1 = \frac{M}{EI}$$

и

$$\sigma_1 = E\varepsilon_1; \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_1^0 + \varkappa_1 y.$$

В последующих приближениях

$$\varepsilon_n^0 = \frac{N}{EA} + \frac{1}{A} \int_A \omega(\varepsilon_{n-1}) dA;$$

$$\varkappa_n = \frac{M}{EI} + \frac{1}{I} \int_A \omega(\varepsilon_{n-1}) y dA;$$

$$\varepsilon_n = \varepsilon_n^0 + \varkappa_n y; \quad \sigma_n = E[\varepsilon_n - \omega(\varepsilon_n)].$$

Для определения перемещения какой-либо точки оси стержня используют формулу Мора:

$$\Delta_m = \int_l \overline{M}_m \varkappa dx,$$

где \overline{M}_m - изгибающий момент, вызванный единичной силой, приложенной по направлению искомого перемещения; \varkappa - кривизна оси стержня, соответствующая заданной нагрузке; l - длина стержня.

Интеграл в последнем равенстве вновь вычисляется, например, с помощью квадратурных формул, что предполагает определение кривизны \varkappa для нескольких сечений по длине стержня.

8.7.4. ПРЕДЕЛЬНАЯ НАГРУЗКА

В п. 8.7.2 находили предельный момент для изгибаемой балки, при котором во всех точках поперечного сечения напряжения достигают предела текучести, в результате чего в сечении образуется пластический шарнир.

Предельная нагрузка может быть найдена путем предельного перехода из решения задачи для идеальной упругопластической системы. Иногда более простым оказывается решение, получаемое с помощью схематизированной диаграммы жесткопластического тела. В последнем случае эффективными оказываются статическая и кинематическая теоремы (см. п. 2.4.1), которые дают двустороннюю оценку предельной нагрузки.

Как известно, из рассмотрения различных статически возможных состояний находят несколько значений внешней нагрузки. Наибольшая из них ближе всего к предельной. А из рассмотрения нескольких кинематически возможных состояний определяют несколько значений нагрузки, меньшая из которых ближе к предельной нагрузке. Таким образом, статическая теорема дает оценку предельной нагрузки снизу, а кинематическая - сверху. Если оценки совпадают, то следовательно, найдена предельная нагрузка.

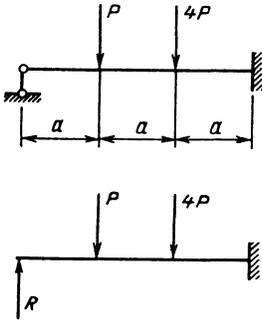


Рис. 8.7.3. Схема действия сил на статически неопределимую балку

Пример. Определить предельную нагрузку для балки, показанной на рис. 8.7.3. Из рассмотрения трех статически возможных состояний следуют неравенства

$$M_1 = Ra \leq M_{пр}; \quad M_2 = (2R - P)a \leq M_{пр};$$

$$M_3 = (6P - 3R)a \leq M_{пр}$$

Эти соотношения ограничивают на плоскости RP треугольную область ABC (рис. 8.7.4, $c = M_{пр}/a$). Таким образом, в соответствии со статической теоремой предельное значение силы $P_{пр} = 5M_{пр}/(9a)$.

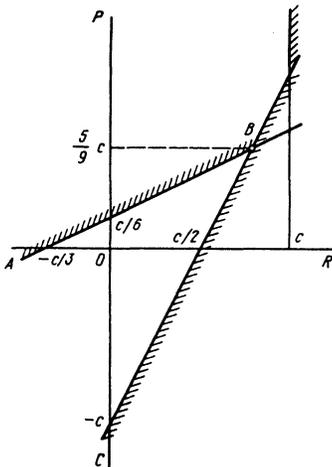


Рис. 8.7.4. Область допустимых значений сосредоточенных сил и реакций в балке

На рис. 8.7.5 представлены три схемы образования пластических шарниров и соответствующие им кинематически возможные состояния балки. Нагрузка, отвечающая каждому из них, определяется с помощью принципа Лагранжа:

рис. 8.7.5, а

$$-3M_{пр}\varphi + Pa\varphi = 0, \quad \text{т.е.} \quad P = 3M_{пр}/a;$$

рис. 8.7.5, б

$$-2M_{пр}\varphi + 3Pa\varphi = 0, \quad \text{т.е.} \quad P_2 = 2M_{пр}/(3a);$$

рис. 8.7.5, в

$$-\frac{5}{2}M_{пр}\varphi + \frac{9}{2}Pa\varphi = 0, \quad \text{т.е.} \quad P_3 = 5M_{пр}/(9a).$$

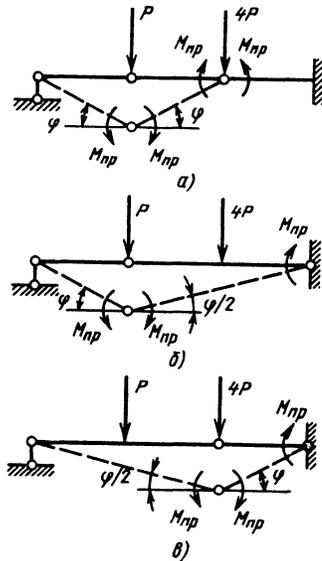


Рис. 8.7.5. Схемы образования пластических шарниров в балке

Итак, на основании кинематической теоремы $P_{пр} = 5M_{пр}/(9a)$. Следовательно, оценки предельной нагрузки, определяемые двумя указанными теоремами, совпадают.

8.7.5. КРУЧЕНИЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ

При кручении стержня круглого или кольцевого поперечного сечения в упругопластической стадии справедлива гипотеза плоских сечений. В соответствии с ней деформация сдвига в точке, находящейся на расстоянии r от центра тяжести поперечного сечения,

$\gamma = \theta r$, где θ - относительный угол закручивания стержня.

Если касательные напряжения τ и деформации γ связаны с зависимостью

$$\tau = f(\gamma) = f(\theta r),$$

то для определения величины θ используют уравнение

$$M_{кр} = \int_A \tau r dA = \int_A f(\theta r) r dA.$$

В общем случае решение этого нелинейного уравнения может быть найдено методом упругих решений, после чего определяют напряжения τ . Алгоритм метода упругих решений строится так, как в задаче изгиба балок (см. п. 8.7.3).

Если диаграмма деформирования материала является диаграммой Прандтля, то распределение напряжений по диаметру круглого сечения определяется соотношением

$$\tau = \begin{cases} \tau_T & \text{при } r_T \leq r \leq R; \\ \frac{\tau_T}{r_T} r & \text{при } 0 \leq r \leq r_T. \end{cases}$$

Граница r_T области пластических деформаций находится из уравнения

$$M_{кр} = \frac{\pi \tau_T}{6} (4R^3 - r_T^3).$$

По мере увеличения момента $M_{кр}$ величина r_T уменьшается. При $r_T \rightarrow 0$ наступает предельное состояние с распределением напряжений аналогичным показанному на рис. 8.7.2, б, которому соответствует предельный крутящий момент

$$M_{пр} = \frac{2}{3} \pi \tau_T R^3.$$

Для стержня произвольного поперечного сечения отыскание предельного крутящего момента сводится к решению уравнения относительно функций напряжений

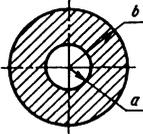
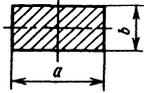
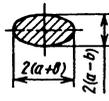
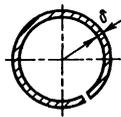
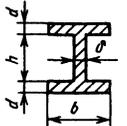
$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = k^2,$$

где $k = \sigma_T / \sqrt{3}$ при использовании критерия текучести Мизеса и $k = \sigma_T / 2$ при использовании критерия Сен-Венана.

Напряжения τ_{zx}, τ_{zy} связаны с функцией ϕ следующим образом:

$$\tau_{zx} = \frac{\partial \phi}{\partial y}; \quad \tau_{zy} = -\frac{\partial \phi}{\partial x}.$$

8.7.3. Предельные крутящие моменты $M_{пр}$

Поперечное сечение	$M_{пр}$
	$\frac{2}{3} k\pi (b^3 - a^3).$ Для сплошного вала $a=0$
	$\frac{kb^2}{6} (3b - a)$
	Овальное сечение $a \geq 3b,$ $\frac{2}{3} k\pi \left(a^3 - \frac{9}{2} ab^2 + 4b^3 \right)$
	$\frac{ka^3}{12}$
	Тонкостенная труба, $2\pi kc^2 \delta;$ c - средний радиус
	Тонкостенная труба с разрезом, $\pi kc \delta^2;$ c - средний радиус
	$0,5k(\delta^2 h + 2d^2 b)$
	Тонкостенный открытый профиль с медленно изменяющейся толщиной $\delta(s),$ $0,5k \int_0^l \delta^2(s) ds$

На контуре поперечного сечения функция ϕ принимает постоянное значение. Для односвязной области эту константу можно принять равной нулю. Предельный крутящий момент (табл. 8.7.3)

$$M_{np} = 2 \int_A \phi dA.$$

В общем случае при кручении призматического стержня перемещения в направлении координатных осей определяются так же, как для упругих стержней:

$$u = -\theta zy; \quad v = \theta zx; \quad w = \theta U(x, y).$$

Предполагается, что ось z совпадает с продольной осью стержня, а оси x и y расположены произвольно в плоскости поперечного сечения.

Таким образом, среди компонент тензора деформаций отличными от нуля являются только γ_{zx} и γ_{zy} . В случае упрочняющегося материала они связаны с касательными напряжениями τ_{zx} и τ_{zy} следующими соотношениями теории малых упругопластических деформаций:

$$\gamma_{zx} = \psi(\sigma_i) \tau_{zx}; \quad \gamma_{zy} = \psi(\sigma_i) \tau_{zy}.$$

Интенсивность напряжений

$$\sigma_i = \sqrt{3} \sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2},$$

или через функцию напряжений

$$\sigma_i = \sqrt{3} \sqrt{\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2}.$$

Функцию напряжений находят из уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\psi(\sigma_i) \frac{\partial \phi}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\psi(\sigma_i) \frac{\partial \phi}{\partial y} \right] = -2\theta. \quad (8.7.4)$$

На контуре поперечного сечения $\phi = \text{const}$. Если поперечное сечение представляет собой односвязную область, то эта константа может быть равна нулю.

Крутящий момент $M_{кр}$ выражается через функцию напряжений в случае односвязного поперечного сечения следующим образом:

$$M_{кр} = 2 \int_A \phi dA. \quad (8.7.5)$$

Для совместного решения нелинейных уравнений (8.7.4), (8.7.5) целесообразно использовать метод упругих решений, например, метод переменных параметров упругости. Следует отметить, что для стержней, поперечное сечение которых имеет сложную форму, более эффективным может оказаться метод конечных элементов, который в сочетании с методом упругих решений позволяет получить искомое решение с требуемой точностью.

Глава 8.8

ДЕФОРМИРОВАНИЕ СТЕРЖНЕЙ В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ

8.8.1. ИЗГИБ ЛИНЕЙНО-ВЯЗКОУПРУГОЙ БАЛКИ

Если для деформирования материала справедливо соотношение $E\dot{\epsilon} + nH\dot{\epsilon} = \dot{\sigma} + n\sigma$, то при соблюдении гипотезы плоских сечений между кривизной оси балки, поперечное сечение которой имеет одну ось симметрии, и изгибающим моментом M имеется зависимость

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= \frac{M(t)}{EJ} + \frac{n}{EJ} \left(1 - \frac{H}{E}\right) \times \\ &\times \int_0^t \exp\left[-n \frac{H}{E}(t - \tau)\right] M(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Эпюра нормальных напряжений σ в поперечном сечении вязкоупругой балки в момент времени t совпадает с эпюрой для линейно-упругой балки.

Для отыскания перемещения какой-либо точки оси балки используют формулу Мора в виде:

$$\begin{aligned} \Delta_m(t) &= \int_1 \frac{\bar{M}_m}{EJ} \left\{ M(t) + n \left(1 - \frac{H}{E}\right) \int_0^t \exp\left[-n \frac{H}{E} \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times (t - \tau)\right] M(\tau) d\tau \right\} dx, \end{aligned}$$

где \overline{M}_m - изгибающий момент от единичного воздействия, приложенного по направлению искомого перемещения; l - длина балки.

Моменты \overline{M}_m, M являются функциями координаты x вдоль оси балки.

Если момент $M = \text{const}$ во времени, то

$$\Delta_m(t) = \Delta_m^y \left\{ 1 + \left(\frac{E}{H} - 1 \right) \left[1 - \exp \left(-n \frac{H}{E} t \right) \right] \right\},$$

где Δ_m^y - прогиб в упругой балке.

Наименьшее значение прогиба в начальный момент времени $t=0$ и совпадает с Δ_m^y . Со временем прогиб увеличивается и при $t \rightarrow \infty$

$$\Delta_m(\infty) = \frac{E}{H} \Delta_m^y.$$

Для определения прогиба при $t \rightarrow \infty$ можно рассмотреть линейно-упругую балку, но с длительным модулем H упругости ($H \leq E$).

8.8.2. ИЗГИБ СТЕРЖНЕЙ ПРИ УСТАНОВИВШЕЙСЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

Расчет изгибаемых стержней (балок) в условиях ползучести проводят с использованием гипотезы плоских сечений. В случае поперечного сечения, имеющего две оси симметрии,

$$\dot{\epsilon} = \dot{\omega}y,$$

где $\dot{\epsilon}$ и $\dot{\omega}$ - скорости изменения соответственно деформации и кривизны балки;

$$\dot{\omega} = - \frac{\partial^3 v}{\partial t \partial x^2}; \quad v(t, x) - \text{прогиб балки}$$

Плоскость изгиба балки совпадает с координатной плоскостью xu и ось y является осью симметрии поперечного сечения.

Если деформирование материала подчиняется степенному закону установившейся ползучести, соотношение между $\dot{\epsilon}$ и напряжением σ имеет вид

$$\sigma = B_1 |\dot{\epsilon}|^{\mu-1} \dot{\epsilon} \quad \text{при } \mu < 1.$$

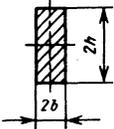
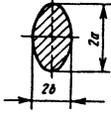
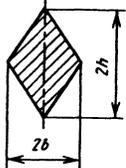
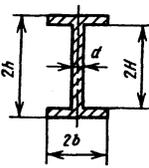
Изгибающий момент

$$M = B_1 J_m |\dot{\omega}|^{\mu-1} \dot{\omega}. \quad (8.8.1)$$

Здесь

$$J_m = \int_{-h/2}^{h/2} b(y) |y|^{\mu+1} dy;$$

8.8.1. Обобщенные моменты инерции J_m

Поперечное сечение	J_m
	$\frac{2bh^{2+\mu}}{1 + \frac{\mu}{2}}$
	$q(\mu)a^{3+\mu}$
	$q(\mu)ba^{2+\mu}$
	$\frac{4bh^{2+\mu}}{(2+\mu)(3+\mu)}$
	$\frac{1}{1 + \frac{\mu}{2}} \left[dH^{2+\mu} + 2b \times \left(h^{2+\mu} - H^{2+\mu} \right) \right]$
	$q(\mu)(3+\mu)a^{2+\mu}\delta$

Примечание:

$$q(\mu) = \frac{2^{2+\mu} \left[\Gamma \left(1 + \frac{\mu}{2} \right) \right]^2}{3+\mu \Gamma(2+\mu)};$$

$\Gamma()$ - гамма-функция.

$b(y), h$ - ширина поперечного сечения балки на расстоянии y от нейтральной оси и его высота.

Выражения для обобщенного момента инерции некоторых поперечных сечений приведены в табл. 8.8.1.

Нормальные напряжения распределены по высоте сечения по закону

$$\sigma = \frac{M}{J_m} |y|^{\mu-1} y.$$

На рис. 8.8.1 показаны эпюры σ для разных $m = \mu^{-1}$. Из (8.8.1) находят величину

$$\varpi = -\frac{1}{B_1^m J_m^m} |M|^{m-1} M,$$

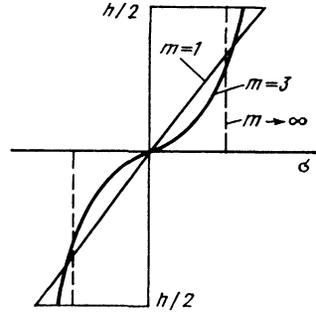


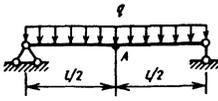
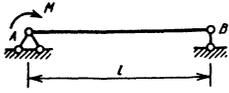
Рис. 8.8.1. Распределение нормальных напряжений в изгибаемой балке при ползучести

Путем интегрирования этого уравнения определяют скорость \dot{v} изменения прогиба балки, а затем прогиб. В табл. 8.8.2 приведены выражения для скоростей изменения прогиба и угла поворота балок при некоторых нагружениях.

8.8.2. Скорости прогиба и поворота для простых балок

Расчетная схема	Скорость изменения прогиба \dot{v} в точке A	Скорость угла поворота $\dot{\phi}$
	$\frac{M^m l^2}{8D}$	На опоре $\frac{M^m l}{2D}$
	$\frac{P^m l^{m+2}}{(m+2)D}$	$\frac{P^m l^{m+1}}{(m+1)D}$
	$\frac{P^m l^{m+2}}{(m+2)4^{m+1} D}$	$\frac{2P^m l^{m+1}}{(m+1)4^{m+1} D}$
	$\frac{1}{2(m+1)D} \left(\frac{q}{2}\right)^m l^{2m+2}$	$\frac{1}{(2m+1)D} \left(\frac{q}{2}\right)^m l^{2m+1}$

Продолжение табл. 8.8.2

	$\left(\frac{m! 2^m}{1 \cdot 3 \dots (2m+1)} - \frac{1}{m+1} \right) \frac{l^2}{4D} \times$ $\times \left(\frac{ql^2}{8} \right)^m,$ <p>где m - целое число</p>	$\frac{m! 2^m}{1 \cdot 3 \dots (2m+1)} \frac{l}{2D} \times$ $\times \left(\frac{ql^2}{8} \right)^m$
	<p style="text-align: center;">—</p>	<p>На опоре A $\frac{M^m l}{(m+2)D}$</p> <p>На опоре B $\frac{M^m l}{(m+1)(m+2)D}$</p>

Примечание: $D = B_1^{-1} J_m^m$.

8.8.3. ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОБ ИЗГИБЕ БАЛОК ПРИ ПОЛЗУЧЕСТИ

Если зависимость $\dot{\epsilon} = f(\sigma)$ более сложная (отличная от степенной), то точное решение задачи в аналитической форме затруднительно. В этом случае используют методы последовательных приближений, которые совпадают с различными модификациями метода упругих решений в теории пластичности при замене в ее соотношениях деформации ϵ ее скоростью $\dot{\epsilon}$ (см. п. 8.7.3). Тогда при установившейся ползучести распределение напряжений в поперечном сечении балки совпадает с распределением напряжений в упругопластической балке при законе деформирования $\epsilon = f(\sigma)$.

Если упругие деформации сопоставимы с деформациями ползучести, то задача об изгибе балки может быть решена шаговым методом, согласно которому рассматриваемый промежуток времени разбивается на n малых, как правило, равных интервалов времени продолжительностью Δt . Дифференциальная зависимость

$$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + f(\sigma) \tag{8.8.2}$$

заменяется разностным соотношением

$$\Delta \epsilon = \frac{\Delta \sigma}{E} + f(\sigma) \Delta t, \tag{8.8.3}$$

где $\Delta \epsilon = \epsilon(t_{i+1}) - \epsilon(t_i)$; $0 \leq i < n$;

$$\Delta \sigma = \sigma(t_{i+1}) - \sigma(t_i); \quad f(\sigma) = f[\sigma(t_i)].$$

Из уравнения равновесия для изгибаемой балки следует выражение для приращения кривизны ее оси

$$\Delta \varpi = \frac{\Delta M}{EJ} + \frac{1}{J} \int_A f(\sigma) y dA \Delta t.$$

Тогда

$$\Delta \sigma = E [\Delta \varpi y - f(\sigma) \Delta t].$$

В итоге, для кривизны и нормального напряжения справедливы рекуррентные соотношения

$$\varpi(t_{i+1}) = \varpi(t_i) + \Delta \varpi; \quad \sigma(t_{i+1}) = \sigma(t_i) + \Delta \sigma.$$

Если в равенстве (8.8.3) положить $f(\sigma) = f[\sigma(\xi)]$, причем $t_i \leq \xi \leq t_{i+1}$, на каждом шаге последовательными приближениями можно уточнять значения $\varpi(t_{i+1})$ и $\sigma(t_{i+1})$. В первом приближении принимается $\sigma(\xi) = \sigma(t_i)$, а в n -м

$$\sigma(\xi) = 0,5 [\sigma(t_i) + \sigma^{n-1}(t_{i+1})],$$

где $\sigma^{n-1}(t_{i+1})$ - напряжения в момент времени t_{i+1} , найденные в предыдущем $n-1$ -м приближении.

Шаговый метод в совокупности с методом последовательных приближений позволяет получить искомые величины с достаточной степенью точности.

Другой формой шагового метода является численный метод, основанный на представлении зависимости (8.8.2) в виде

$$\dot{\epsilon}(t) = \frac{\sigma(t)}{E} + \int_0^t f[\sigma(\tau)] d\tau. \tag{8.8.4}$$

Для вычисления интеграла в правой части применяют квадратурные формулы. Например, при использовании формулы трапеций для момента времени t_i соотношение (8.8.4) имеет вид

$$\varepsilon(t_i) = \frac{\sigma(t_i)}{E} + f[\sigma(t_i)]0,5\Delta t + f[\sigma(t_0)]0,5\Delta t + \sum_{k=1}^{i-1} f[\sigma(t_k)]\Delta t.$$

Все последующие вычисления могут быть проведены точно так же, как при расчете изгиба стержней в упругопластической стадии методом упругих решений в форме метода дополнительных нагрузок. Такой метод численного решения оказывается особенно эффективным при использовании квадратурных формул более высокого порядка точности.

Перемещения по формуле Мора

$$\Delta_m(t) = \int_I \bar{M}_m \varepsilon(t) dx.$$

Интеграл вычисляется с помощью квадратурных формул, для чего предварительно определяют кривизну ε для нескольких сечений по длине балки.

Следует отметить, что изложенный метод решения применим и в тех случаях, когда для описания неустановившейся ползучести применяют более общие зависимости.

8.8.4. КРУЧЕНИЕ ПРЯМОГО СТЕРЖНЯ ПРИ ПОЛЗУЧЕСТИ

Для стержня круглого поперечного сечения в случае установившейся ползучести, описываемой степенным законом, справедливо следующее соотношение между скоростью изменения деформации $\dot{\gamma}$ сдвига и касательным напряжением τ :

$$\dot{\gamma} = 3B\sigma_i^{(m-1)}\tau,$$

где $\sigma_i = \sqrt{3}\tau$ - интенсивность напряжений.

При соблюдении гипотезы плоских сечений

$$\tau = (3 + \mu) \frac{M_{кр}}{2\pi R^{3+\mu}} r^\mu,$$

где R - радиус поперечного сечения; $\mu = 1/m$.

Скорость изменения относительного угла закручивания стержня

$$\dot{\theta} = B \left(\frac{3 + \frac{1}{m}}{2\pi} \right)^m \frac{3^{\frac{m+1}{2}}}{R^{1+3m}} M_{кр}^m.$$

Если закон деформирования материала оказывается более сложным, то задача о кручении может быть решена методом последовательных приближений (методом упругих решений) точно так же, как задача о кручении упругопластического стержня, выполненного из упругопрочного материала. В соотношениях теории пластичности деформации заменяют их скоростями.

При кручении стержня некруглого поперечного сечения в условиях ползучести скорости изменения перемещений в направлении координатных осей (ось z направлена вдоль оси стержня, а оси x, y произвольно располагаются в плоскости поперечного сечения)

$$\dot{u} = -\dot{\theta}zy; \quad \dot{v} = \dot{\theta}zx; \quad \dot{w} = \dot{\theta}U(x, y).$$

Отличными от нуля являются только две компоненты тензора скоростей деформации $\dot{\gamma}_{zx}, \dot{\gamma}_{zy}$ и соответственно две компоненты тензора напряжений τ_{zx}, τ_{zy} , которые при установившейся ползучести связаны между собой соотношениями

$$\dot{\gamma}_{zx} = \varphi(\sigma_i)\tau_{zx}; \quad \dot{\gamma}_{zy} = \varphi(\sigma_i)\tau_{zy}, \quad (8.8.5)$$

$$\text{где } \sigma_i = \sqrt{3}\sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2}.$$

С использованием функции φ напряжений решение задачи о кручении сводится к решению уравнений (поперечное сечение считается односвязной областью)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\varphi(\sigma_i) \frac{\partial \phi}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\varphi(\sigma_i) \frac{\partial \phi}{\partial y} \right] = -2\theta; \quad (8.8.6)$$

$$M_{кр} = 2 \int_A \phi dA. \quad (8.8.7)$$

$$\text{Причем } \tau_{zx} = \frac{\partial \phi}{\partial y}; \quad \tau_{zy} = -\frac{\partial \phi}{\partial x}.$$

На контуре поперечного сечения функция ϕ равна нулю. Решение уравнения (8.8.6) может быть получено методом последовательных приближений, например, методом переменных параметров упругости.

В случае неустановившейся ползучести вместо (8.8.5) используют зависимости

$$\dot{\gamma}_{zx} = \frac{1}{G} \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial t} + \varphi(\sigma_i) \tau_{zx};$$

$$\dot{\gamma}_{zy} = \frac{1}{G} \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial t} + \varphi(\sigma_i) \tau_{zy},$$

где G - модуль сдвига.

Уравнение совместности деформаций через функцию напряжений записывается так

$$\frac{1}{G} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \phi) + \frac{\partial}{\partial x} \left[\varphi(\sigma_i) \frac{\partial \phi}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\varphi(\sigma_i) \frac{\partial \phi}{\partial y} \right] = -2\dot{\theta}. \quad (8.8.8)$$

Решение этого уравнения и уравнения (8.8.7) может быть получено шаговым методом.

Иногда предпочтительнее использовать интегральные зависимости между деформациями и напряжениями, аналогичные (8.8.4), при соответствующей модификации шагового метода.

Для линейно вязкоупругого материала справедливы зависимости

$$\gamma_{zx}(t) = \frac{\tau_{zx}(t)}{G} + \int_0^t K(t-\xi) \tau_{zx}(\xi) d\xi;$$

$$\gamma_{zy}(t) = \frac{\tau_{zy}(t)}{G} + \int_0^t K(t-\xi) \tau_{zy}(\xi) d\xi,$$

где $K(t-\xi)$ - ядро ползучести материала.

Тогда функцию напряжений ϕ и относительный угол закручивания находят из уравнений

$$\nabla^2 \phi = -2M_{кр} / J_{кр};$$

$$\theta(t) = \frac{M_{кр}(t)}{GJ_{кр}} + \frac{1}{J_{кр}} \int_0^t K(t-\xi) M_{кр}(\xi) d\xi,$$

где $J_{кр}$ - геометрическая жесткость стержня при кручении.

Отсюда следует, что напряженное состояние линейно вязкоупругого стержня совпадает с напряженным состоянием упругого стержня.

Глава 8.9

СТЕРЖНИ ИЗ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

Настоящая глава посвящена сплошным и тонкостенным стержням из композиционных

материалов, получившим широкое применение в технике в качестве элементов конструкций различного назначения. Композитные стержни наряду с такими важными свойствами, как высокие удельные (по отношению к массе) прочность и жесткость, обладают рядом особенностей, которые необходимо учитывать при расчете. К ним относятся слоистый характер и анизотропия материала, а также сравнительно низкие трансверсальные (межслоевые) жесткость и прочность. Ниже приведены основные соотношения прикладной теории композитных стержней, учитывающие особенности их структуры и материала [6].

8.9.1. ИЗГИБ БАЛОК

Композиционные материалы широко применяют для изготовления балочных элементов конструкций различного назначения, а высокомодульные композиты на основе углеродных и борных волокон - кроме того, для усиления металлических балок. Конструктивно они представляют собой, как правило, слоистую систему (рис. 8.9.1), включающую в общем случае слои композита, металла и податливого на сдвиг заполнителя из сот, пенопласта и др.

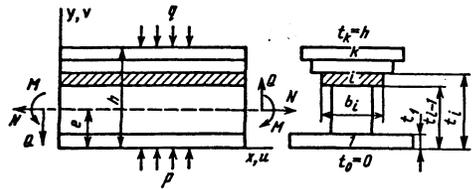


Рис. 8.9.1. Расчетная схема слоистой балки

Прикладная теория изгиба композитных балок основана на приведенных ниже уравнениях и соотношениях. Уравнения равновесия (штрих - производная по x)

$$N' = 0; \quad M' = 0; \quad Q' + \bar{p} = 0, \quad (8.9.1)$$

где $\bar{p} = pb_1 - qb_k$; b_1 и b_k - ширина соответственно нижней и верхней полки.

Соотношения упругости для осевой силы N , изгибающего момента M и поперечной силы Q следующие:

$$N = Bu'; \quad M = D\theta'; \quad Q = K(\theta + v'), \quad (8.9.2)$$

где B и D - соответственно осевая и изгибная жесткости; $u(x)$ и $\theta(x)$ - соответственно осе-

вое смещение и угол поворота сечения балки; $v(x)$ - прогиб.

Величины B , D и координата e нейтральной оси балки определяются равенствами

$$B = J_0; \quad D = J_2 - eJ_1; \quad e = J_1/J_0. \quad (8.9.3)$$

Для слоистой балки (см. рис. 8.9.1)

$$J_n = \int_0^h b E_x y^n dy = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^k b_i E_x^{(i)} (t_i^{n+1} - t_{i-1}^{n+1}), \quad (8.9.4)$$

где $n=0, 1, 2$; E_x - осевой модуль упругости.

Композиционные материалы на основе жестких волокон иногда используют в виде жгутов, усиливающих металлический профиль (рис. 8.9.2). В этом случае формула (8.9.4) обобщается следующим образом:

$$J_n = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^k b_i E_x^{(i)} (t_i^{n+1} - t_{i-1}^{n+1}) + \sum_{j=1}^m E_j F_j s_j^n,$$

где E_j , F_j и s_j - соответственно модуль упругости, площадь поперечного сечения и координата j -го жгута; m - число жгутов.

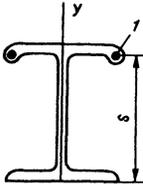


Рис. 8.9.2. Металлический профиль, усиленный композитными жгутами

Жесткость при межслоевом сдвиге

$$K = h^2 \left(\int_0^b \frac{dy}{b G_{xy}} \right)^{-1} = h^2 \left(\sum_{i=1}^k \frac{t_i - t_{i-1}}{b_i G_{xy}^{(i)}} \right)^{-1}, \quad (8.9.5)$$

где G_{xy} - модуль сдвига.

Решение уравнений (8.9.1) и (8.9.2) находят последовательным интегрированием. В частности, из первого уравнения (8.9.1) определяют осевую силу N , из третьего - поперечную силу Q , а из второго - изгибающий мо-

мент M . Затем из первого соотношения (8.9.2) получают перемещение u сечения, из второго - угол θ его поворота, а из третьего - прогиб v . Решение включает шесть произвольных постоянных, которые определяются из граничных условий.

Из условия стационарности функционала Лагранжа

$$\int [N \delta u + M \delta \theta + Q \delta (\theta + v') - \bar{p} \delta v] dx = 0$$

вытекают следующие естественные граничные условия:

$$N \delta u = 0; \quad M \delta \theta = 0; \quad Q \delta v = 0.$$

Для защемленного конца балки $u=v=\theta=0$, для шарнирно опертого $v=0$, $M=0$ и $N=0$ или $u=0$, для свободного конца $N=M=Q=0$.

По найденным N , Q и M может быть получено распределение напряжений по высоте сечения. Продольные нормальные напряжения, по величине которых можно оценить прочность слоев,

$$\sigma_x = E_x \left(\frac{N}{B} + \frac{M}{D} \bar{y} \right),$$

где $\bar{y} = y - e$ (см.рис. 8.9.1).

Одной из возможных форм разрушения композитных балок является расслоение, вызванное межслоевыми касательными и нормальными напряжениями:

$$\tau_{xy} = -\frac{Q}{bD} \int_0^y E_x b \bar{y} dy;$$

$$\sigma_y = -\frac{\bar{p}}{bD} \left(y \int_0^y E_x b \bar{y} dy - \int_0^y E_x b \bar{y}^2 dy \right) - \frac{pb_1}{b}.$$

Для слоистых балок проводят интегрирование по участкам (слоями).

8.9.2. УСТОЙЧИВОСТЬ

Критическая осевая сжимающая сила (рис. 8.9.3), вызывающая потерю устойчивости в результате изгиба в плоскости,

$$T_k = \frac{T_3}{1 + (T_3/K)}; \quad T_3 = \pi^2 D/l^2,$$

где D и K - соответственно изгибная и сдвиговая жесткости, которые находят по формулам (8.9.3) и (8.9.5); T_3 - критическая сила, соот-

ветствующая формуле Эйлера; c - коэффициент, зависящий от граничных условий; для шарнирно опертого стержня $c=1$, для защемленного $c=4$ и для консольного стержня колонны $c=1/4$.

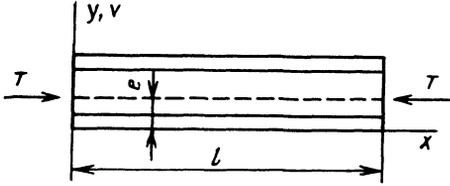


Рис. 8.9.3. Расчетная схема слоистого стержня, сжатого в осевом направлении

8.9.3. ПРОДОЛЬНЫЕ И ИЗГИБНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Уравнения динамики композитных балок и стержней:

$$\begin{aligned}
 B \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= B_p \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + C_p \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}; \\
 K \left(\theta + \frac{\partial v}{\partial x} \right) &= D \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - C_p \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - D_p \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}; \\
 K \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \bar{p}(x, t) &= B_p \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}.
 \end{aligned}
 \tag{8.9.6}$$

Здесь жесткости B, D, K определяются равенствами (8.9.3), (8.9.5). Аналогичные инерционные характеристики

$$\begin{aligned}
 B_p &= J_0; \quad C_p = J_0(e - e_p); \\
 D_p &= J_2 - 2eJ_1 + e^2J_0,
 \end{aligned}$$

где $e_p = J_1/J_0$.

Для слоистого стержня

$$J_n = \int_0^h b \rho y^n dy = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^k b_i \rho_i (t_i^{n+1} - t_{i-1}^{n+1}),$$

где $n=0, 1, 2$; ρ_i - плотность материала i -го слоя.

Коэффициент C_p , входящий в уравнения (8.9.6), учитывает связанный характер продольных и изгибных колебаний. Эти виды колеба-

ний разделяются, если $C_p = 0$, или $e_p = e$. В общем случае $e_p \neq e$, так как координата e нейтральной оси зависит от распределения жесткости по сечению, а соответствующая характеристика e_p - от распределения плотности материала. Условие $e_p = e$ строго выполняется для однородных стержней, при этом

$$e_p = e = \left(\int_0^h b y u dy \right) / \left(\int_0^h b dy \right),$$

и для стержней, структура которых симметрична относительно средней линии. При этом $e_p = e = h/2$. В общем случае необходимость учета связанности форм свободных колебаний можно ориентировочно определить сравнением параметра $\lambda_c = \pi^2 m^2 (e - e_p)^2 / l^2$ (m - номер формы колебаний, l - длина балки) с единицей.

Если можно рассматривать отдельно продольные и изгибные колебания, приняв $C_p = 0$, то система (8.9.6) сводится к двум уравнениям

$$\begin{aligned}
 B \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= B_p \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \\
 D \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - \left(D_p + \frac{B_p D}{K} \right) \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{B_p D_p}{K} \frac{\partial^4 v}{\partial t^4} + \\
 + B_p \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \bar{p} - \frac{1}{K} \left(D \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial x^2} - D_p \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial t^2} \right).
 \end{aligned}
 \tag{8.9.7}$$

Уравнение (8.9.7) описывает продольные колебания, а уравнение (8.9.8) - изгибные.

Коэффициент D_p , входящий в уравнение (8.9.8), учитывает инерцию поворота сечения при изгибных колебаниях. Влияние этого эффекта на частоту свободных колебаний можно ориентировочно оценить, сравнивая параметр $\lambda_D = \pi^2 m^2 D_p / l^2$ с единицей. Если можно не учитывать инерцию поворота сечения, считая $D_p = 0$, то уравнение изгибных колебаний имеет вид

$$D \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - \frac{B_p D}{K} \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial t^2} + B_p \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \bar{p} - \frac{D}{K} \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial t^2}.$$

Коэффициент, содержащий величину K , учитывает податливость слоистой балки при поперечном сдвиге. Существенность влияния этой податливости на частоты свободных ко-

лебаний можно ориентировочно оценить, сравнивая параметр $\lambda_K = \pi^2 m^2 D / (Kl)$ с единицей.

Для длинных балок ($l/h \geq 50$) при анализе первых форм колебаний с рассмотренными выше эффектами можно не считаться и принимать $C_p = 0$, $D_p = 0$, $K \rightarrow \infty$. Тогда уравнение изгибных колебаний принимает традиционный вид

$$D \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + B_p \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \bar{p}(x, t).$$

8.9.4. КРУЧЕНИЕ СЛОИСТЫХ СТЕРЖНЕЙ С ПРЯМОУГОЛЬНЫМ СЕЧЕНИЕМ

Крутильная жесткость стержня прямоугольного сечения, показанного на рис. 8.9.4,

$$D_k = 4Da \left(1 - \frac{1}{\lambda} \operatorname{th} \lambda \right), \quad (8.9.9)$$

где $D = J_{k2} - J_{k1}^2 / J_{k0}$; $J_{kn} = \int_0^b G_{xz} y^{(n)} dy =$

$$= -\frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^k G_{xz}^{(i)} (t_i^{n+1} - t_{i-1}^{n+1}) \quad (n=0, 1, 2);$$

$$\lambda = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{K}{D}}; \quad K = h^2 \left(\int_0^b \frac{dy}{G_{xy}} \right)^{-1} =$$

$$= h^2 \left(\sum_{i=1}^k \frac{t_i - t_{i-1}}{G_{xy}^{(i)}} \right)^{-1}; \quad G_{xz} \text{ и } G_{xy} - \text{ модули}$$

сдвига слоев в плоскости слоев и в трансверсальной плоскости.

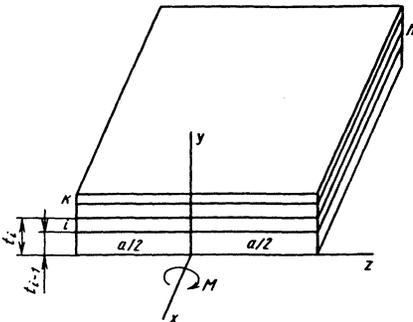


Рис. 8.9.4. Схема кручения слоистого стержня прямоугольного сечения

Формула (8.9.9) справедлива, если $a/h \geq 1$. Для тонкостенного стержня ($a/h \gg 1$) она упрощается:

$$D_k = 4Da. \quad (8.9.10)$$

8.9.5. РАСТЯЖЕНИЕ, СЖАТИЕ, ИЗГИБ И КРУЧЕНИЕ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ С ЗАМКНУТЫМ КОНТУРОМ СЕЧЕНИЯ

Одна из наиболее перспективных областей применения композитов связана с тонкостенными стержнями (рис.8.9.5), которые изготавливают намоткой или выкладкой однонаправленной или тканой ленты под различными углами к оси и используют в качестве элементов ферменных конструкций, подкосов, лонжеронов винтов самолетов и вертолетов, приводных валов и т.д.

Расчет тонкостенных стержней с замкнутым контуром поперечного сечения основан на гипотезах балочной теории. При этом принимают, что поперечное сечение является абсолютно жестким в своей плоскости, а распределение продольной деформации по контуру сечения соответствует закону плоских сечений.

При нагружении в стенке стержня возникают осевые нормальные силы $N_z(z, s)$ и касательные $N_{zs}(z, s)$, которые сводятся к осевой силе P , поперечным силам Q_x и Q_y , изгибающим моментам M_x , M_y и крутящему M_z . При отсутствии поверхностных нагрузок $P' = 0$; $Q_x' = 0$; $Q_y' = 0$; $M_x' - Q_y = 0$; $M_y' - Q_x = 0$; $M_z' = 0$ (штрих - производная по z здесь и далее).

Стержень с однозамкнутым контуром поперечного сечения в отношении сил N_z и N_{zs} является статически определимой системой. Эти силы выражаются через силы и моменты, действующие с помощью условий равновесия элемента стержня. В частности, продольная сила

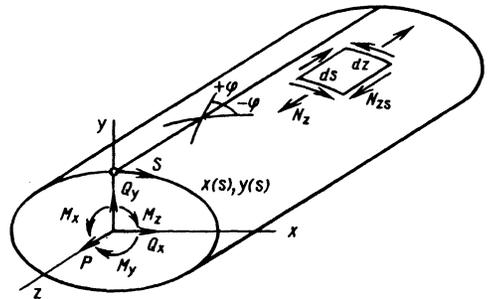


Рис. 8.9.5. Расчетная схема тонкостенного стержня с замкнутым контуром сечения

$$N_z = B \left[\frac{P}{S} + k \left(\frac{\bar{M}_x}{D_x^0} y + \frac{\bar{M}_y}{D_y^0} \bar{x} \right) \right], \quad (8.9.11)$$

где $k = \frac{1}{1 - n_x n_y}$; $n_x = \frac{D_{xy}^0}{D_x^0}$; $n_y = \frac{D_{xy}^0}{D_y^0}$;
 $D_x^0 = D_x - y_0^2 S$; $D_y^0 = D_y - x_0^2 S$;
 $D_{xy}^0 = D_{xy} - x_0 y_0 S$; $x_0 = S_y / S$; $y_0 = S_x / S$;
 $S = \oint B ds$; $S_x = \oint B y ds$; $S_y = \oint B x ds$;
 $D_x = \oint B y^2 ds$; $D_y = \oint B x^2 ds$; $D_{xy} = \oint B x y ds$;
 $\bar{M}_x = M_x - y_0 P$; $\bar{M}_y = M_y - x_0 P$.

Координаты

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x - x_0 - n_x (y - y_0); \\ \bar{y} &= y - y_0 - n_y (x - x_0). \end{aligned} \quad (8.9.12)$$

Жесткость стенки при растяжении или сжатии в осевом направлении

$$B = \sum_{i=1}^k A_{11}^{(i)} h_i, \quad (8.9.13)$$

где h_i - толщина i -го композитного слоя (слой ортотропный); $A_{11}^{(i)}$ - коэффициент жесткости i -го слоя, который определяется первым равенством (5.2.3).

Формула (8.9.13) строго соответствует условию недеформируемости сечения стержня в своей плоскости, однако на практике она обычно используется для коротких стержней, а также в случае, когда жесткость контура сечения обеспечивается упругим наполнителем, поперечными ребрами или стенками. При расчете длинных пустотелых стержней обычно учитывают деформацию контура сечения, связанную с эффектом Пуассона. При этом вместо формулы (8.9.13) используют следующую:

$$B = \sum_{i=1}^k A_{11}^{(i)} h_i - \left(\sum_{i=1}^k A_{12}^{(i)} h_i \right)^2 / \sum_{i=1}^k A_{22}^{(i)} h_i. \quad (8.9.14)$$

Входящие в (8.9.14) коэффициенты жесткости слоя $A_{12}^{(i)}$ и $A_{22}^{(i)}$ определяются вторым и третьим равенствами (5.2.3).

Сдвигающие силы

$$N_{zs} = N_{zs}^Q + N_{zs}^0. \quad (8.9.15)$$

Составляющая

$$N_{zs}^Q = -k \left[\frac{Q_y}{D_x^0} S_x(s) + \frac{Q_x}{D_y^0} S_y(s) \right] \quad (8.9.16)$$

обеспечивает статическую эквивалентность силы N_{zs} поперечным силам Q_x и Q_y , действующим в сечении. Функции $S_x(s)$ и $S_y(s)$ зависят от начала отсчета координаты s :

$$S_x(s) = \int_0^s B \bar{y} ds; \quad S_y(s) = \int_0^s B \bar{x} ds. \quad (8.9.17)$$

Координаты \bar{x} и \bar{y} имеют форму (8.9.12).

Составляющая N_{zs}^0 , независящая от s , компенсирует произвольность выбора начала отсчета контурной координаты и обеспечивает эквивалентность силы N_{zs} крутящему моменту M_z , действующему в сечении:

$$N_{zs}^0 = \frac{1}{2F} \left(M_z - \oint N_{zs}^Q r ds \right), \quad (8.9.18)$$

где F - площадь, ограниченная контуром сечения; r - длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на касательную к контуру.

Окончательная формула для сдвигающих сил

$$N_{zs} = Q_x F_x(s) + Q_y F_y(s) + \frac{M_z}{2F}, \quad (8.9.19)$$

$$\text{где } F_x(s) = -\frac{k}{D_y^0} \left[S_y(s) - \frac{1}{2F} \oint S_y(s) r ds \right];$$

$$F_y(s) = -\frac{k}{D_x^0} \left[S_x(s) - \frac{1}{2F} \oint S_x(s) r ds \right];$$

$$F = \oint r ds.$$

Таким образом, нормальная и сдвигающая силы, возникающие в стержне при осевом нагружении, изгибе и кручении, рассматривают по уравнениям (8.9.11) и (8.9.19). Приведем выражения для определения относительных деформаций стенки стержня. Осевая деформация в точке с координатами x, y

$$e_z = w' + \theta'_x y + \theta'_y x, \quad (8.9.20)$$

где $w' = \frac{P}{s} - (y_0 \theta'_x + x_0 \theta'_y)$ - деформация

сдвига оси стержня; $\theta'_x = \frac{k}{D_x^0} (\bar{M}_x - n_y \bar{M}_y)$ и

$\theta'_y = \frac{k}{D_y^0} (\bar{M}_y - n_x \bar{M}_x)$ - производные углов

поворота сечения вокруг осей x и y .

Деформация сдвига

$$e_{zs} = N_{zs} / C. \quad (8.9.21)$$

Сдвиговая жесткость стенки

$$C = \sum_{i=1}^k A_{66}^{(i)} h_i.$$

Коэффициент жесткости i -го слоя при сдвиге определяется соответствующим равенством (5.2.3). По деформациям стенки можно найти деформации армированного слоя в главных слоях ортотропии (см. рис. 5.1.1):

$$e_1^i = e_z \cos^2 \varphi_i + e_s \sin^2 \varphi_i + e_{zs} \sin \varphi_i \cos \varphi_i;$$

$$e_2^i = e_z \sin^2 \varphi_i + e_s \cos^2 \varphi_i - e_{zs} \sin \varphi_i \cos \varphi_i;$$

$$e_{12}^i = (e_s - e_z) \sin 2\varphi_i + e_{zs} \cos 2\varphi_i. \quad (8.9.22)$$

Угол армирования слоя ($\pm \varphi_i$) подставляют в эти формулы со своим знаком (см. рис. 8.9.5). Деформации e_z и e_{zs} находятся из соотношений (8.9.20) и (8.9.21). Контурная деформация e_s для жесткого контура сечения, когда осевая жесткость определяется по формуле (8.9.13), принимается равной нулю, а для податливого контура сечения, когда осевая жесткость определяется по формуле (8.9.14),

$$e_s = -e_z \frac{\sum_{i=1}^k A_{12}^i h_i}{\sum_{i=1}^k A_{22}^i h_i}.$$

По деформациям слоя могут быть получены соответствующие напряжения:

$$\sigma_1^{(i)} = \bar{E}_1^{(i)} \left(e_1^{(i)} + \nu_{12}^{(i)} e_2^{(i)} \right);$$

$$\sigma_2^{(i)} = \bar{E}_2^{(i)} \left(e_2^{(i)} + \nu_{21}^{(i)} e_1^{(i)} \right);$$

$$\tau_{12}^{(i)} = G_{12}^{(i)} e_{12}^{(i)}; \quad \bar{E}_{1,2}^{(i)} = E_{1,2}^{(i)} / \left(1 - \nu_{12}^{(i)} \nu_{21}^{(i)} \right)$$

и таким образом осуществлена оценка прочностных стержня. Крутильная жесткость стержня

$$D_k = 4F^2 / \int \frac{ds}{C}. \quad (8.9.23)$$

Например, для однородного тонкостенного стержня кругового сечения с радиусом R и толщиной h крутильная жесткость $D_k = 2\pi R^3 h A_{66}$.

8.9.6. ИЗГИБ И КРУЧЕНИЕ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ С ОТКРЫТЫМ КОНТУРОМ СЕЧЕНИЯ

Расчет стержней с открытым контуром сечения имеет ряд особенностей, связанных с тем, что стержень имеет свободный край, на котором отсутствуют касательные усилия. Если поместить начало координаты s на свободном краю (рис. 8.9.6), то $N_{zs}(s=0) = 0$. Из равенств (8.9.16) и (8.9.17) следует, что $N_{zs}^Q(s=0) = 0$, тогда согласно (8.9.15) $N_{zs}^0 = 0$.

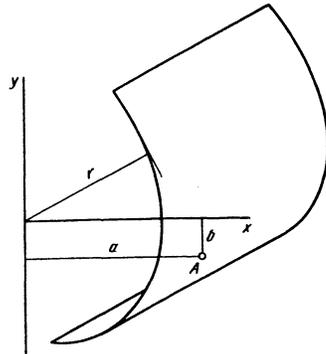


Рис. 8.9.6. Расчетная схема тонкостенного стержня с открытым контуром сечения

Таким образом, в стержне с открытым контуром сечения отсутствует составляющая N_{zs}^0 , которая в соответствии с равенством (8.9.18) обеспечивает уравнивание крутящего момента. Вследствие этого такой стержень не может быть рассчитан на кручение в рамках балочной теории тонкостенных стержней, изложенной выше. Стержень с открытым контуром сечения может быть рассчитан в рамках этой теории только в случае, если крутящий момент M_z отсутствует, а поперечные силы Q_x и Q_y (см. рис. 8.9.5) не вызывают закручивания стержня. Эти силы должны проходить через некоторую точку A - центр изгиба с координатами

$$a = \frac{k}{D_x^0} \int_0^b S_x(s) r ds; \quad b = \frac{k}{D_y^0} \int_0^{s_1} S_y(s) r ds.$$

Здесь $S_x(s)$ и $S_y(s)$ определяются равенствами (8.9.17).

Если поперечные силы проходят через центр изгиба, то нормальные усилия определяются равенством (8.9.11), а касательные - (8.9.16). При этом интегралы по замкнутому контуру, входящие в эти уравнения, заменяют интегралами с пределами $s = 0, s = s_1$.

При действии крутящего момента $M_{кр}$, который складывается из внешнего момента M_z и моментов bQ_x и aQ_y , возникающих в результате переноса сил Q_x и Q_y в центр изгиба, стержень, как отмечалось выше, не может быть рассчитан по балочной теории. Эта теория не учитывает деформацию сечения (т.е. его отклонение от первоначальной плоской формы), имеющую место при кручении стержня с открытым контуром сечения.

В случае свободной деформации, т.е. когда деформация всех сечений стержня одинаковая и не стесняется условиями закрепления, можно получить приближенную формулу для крутильной жесткости, аналогичную формуле (8.9.10):

$$D_k = 4Ds_1, \quad (8.9.24)$$

где $D = J_{x2} - J_{x1}^2 / J_{x0}$;

$$J_{кн} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^k A_{66}^{(i)} \left(t_i^{(n+1)} - t_{i-1}^{(n+1)} \right); \quad s_1 - \text{длина контура сечения.}$$

Крутильная жесткость стержней с открытым контуром сечения сравнительно невелика. Например, для однородного тонкостенного круглого стержня с радиусом R , толщиной h ,

продольным разрезом $D_k = 2/3\pi R h^3 A_{66}$. Крутильная жесткость такого же стержня без продольного разреза определяется равенством (8.9.23) и оказывается больше в $3R^2/h^2$ раз.

Крутильная жесткость стержня с открытым контуром сечения увеличивается, если он работает в условиях стесненной деформации сечений, т.е. если последней препятствуют условия закрепления или ребра, подкрепляющие стенку. Это зависит от конструктивных параметров стержня. Увеличение величины D_k может быть оценено на основе теории стесненного кручения, изложенной в гл. 8.3.

Глава 8.10

СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЕ СТЕРЖНЕВЫЕ СИСТЕМЫ

8.10.1. ПОНЯТИЕ СТАТИЧЕСКОЙ ОПРЕДЕЛИМОСТИ И ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ НЕИЗМЕНЯЕМОСТИ

Статические определимые системы - это системы, в которых можно определить (вычислить) усилия, т.е. внутренние силы и опорные реакции, используя лишь уравнения равновесия (статики). При этом предполагается, что нагрузка прикладывается статически: возрастает во времени настолько медленно, что можно пренебречь силами инерции, связанными с изменением деформаций. Кроме того, предполагается выполнение условия "недеформируемости расчетной схемы", т.е. малости деформаций и перемещений системы, которыми пренебрегают при составлении уравнений.

С позиций кинематического анализа статически определимые системы - предельный случай неизменяемых (жестких) систем. При отбрасывании одной связи статически определимая система становится механизмом с одной степенью свободы.

Например, система из трех стержней, соединенных жесткими узлами (рис. 8.10.1, а), геометрически неизменяема и статически определима. Отбрасывание любой из трех связей превращает ее в механизм. Пренебрегая деформациями стержней, из уравнений равновесия системы можно определить опорные реакции, а затем методом сечений - внутренние силы, например, изгибающие моменты. В случае гибких стержней и больших перемещений системы (рис. 8.10.1, б) нельзя найти реакции и внутренние силы без определения перемещений.

В дальнейшем предполагается справедливым допущение о "недеформируемости расчетной схемы". При кинематическом анализе плоской системы вводится понятие диска - заведомо неизменяемой части системы - и

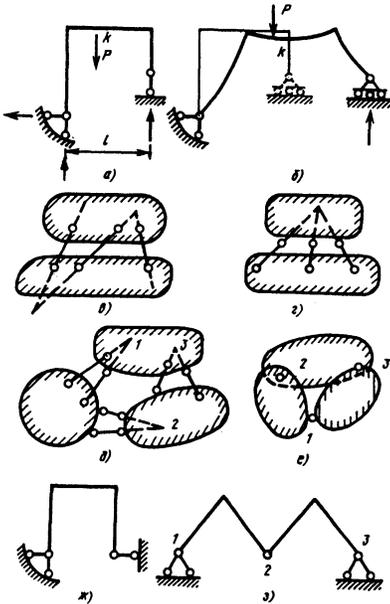


Рис. 8.10.1. Схемы, используемые при кинематическом анализе систем:

- a - недеформированная конструкция;
- б- деформированная конструкция; в - неизменяемое состояние двух дисков; г - мгновенно изменяемое состояние двух дисков; д - неизменяемое соединение трех дисков шестью связями; е - неизменяемое соединение трех дисков тремя шарнирами; ж, з - мгновенно изменяемые, с шарнирами, лежащими на одной прямой

исследуются способы соединения дисков. Простейшие диски: стержни; совокупность неизменяемых опорных устройств; совокупность соединенных в жестких узлах стержней.

Соединение двух дисков тремя связями дает новый диск, если направления этих связей не пересекаются в одной точке (рис. 8.10.1, в). В случае пересечения этих направлений в одной точке получаем мгновенно изменяемую систему (рис. 8.10.1, г). Система трех дисков, соединенных шестью связями (рис. 8.10.1, д) или тремя шарнирами (рис. 8.10.1, е) является неизменяемой и статически определимой, если шарниры 1-3 (рис. 8.10.1, е), или условные шарниры (рис. 8.10.1, д), не лежат на одной прямой. В случае, когда шарниры 1-3, или условные шарниры, лежат на одной прямой, система - мгновенно изменяемая (рис. 8.10.1, ж, з). Расчет таких систем возможен только по схеме деформированной системы, с учетом ее перемещений от нагрузки, и сводится к решению нелинейных уравнений (см. гл. 8.15).

Допущение о недеформируемости расчетной схемы приводит к линейным уравнениям относительно усилий S_k (например, продольных сил N_k изгибающих моментов M_k и т.д.) и принципу суперпозиции для каждой обобщенной силы S_k :

$$S_k = \sum_i s_{ki} P_i. \tag{8.10.1}$$

Коэффициенты s_{ki} в механической интерпретации численно равны искомому k -м усилиям от i -й единичной силы. Кинематическая интерпретация этих коэффициентов приведена в п. 8.10.2 при описании кинематического метода.

8.10.2. МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВНУТРЕННИХ СИЛ В СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМАХ

Метод сечений, как и в расчетах отдельных стержней, основан на определении опорных реакций с последующим вычислением внутренних сил через левые или правые силы. При этом уравнения по возможности, составляют так, чтобы каждая сила вычислялась из одного уравнения с одним неизвестным. Например, при расчете сил в идеальной ферме (рис. 8.10.2, а) сначала определяют опорные реакции H_A, V_A, V_B из уравнений равновесия всей системы $\sum x = 0$; $\sum m_A = 0 \quad \sum m_B = 0$. Рассекая систему например сечением 1-1 и рассматривая равновесие правой части из уравнений $\sum m_{k_1} = 0$; $\sum m_{k_2} = 0$; $\sum y = 0$ (для правых сил) находят

$$N_1 = \frac{4d}{h} P; \quad N_2 = \frac{-4,5d}{h} P; \quad N_3 = \frac{0,5P}{\cos \alpha}.$$

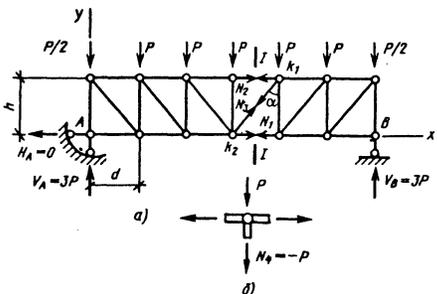


Рис. 8.10.2. Определение сил в стержнях фермы

При использовании этого метода систему можно расчленить на отдельные простые подсистемы, получить силы взаимодействия между ними, а затем определить внутренние силы в каждой подсистеме.

В расчетах ферм составление и решение уравнений равновесия узлов часто позволяет упростить вычисление сил. Например, силу N_4 в средней точке фермы (см. рис. 8.10.2, а) можно определить из уравнений равновесия $\sum y = 0$ для среднего верхнего узла (рис. 8.10.2, б).

Кинематический метод основан на непосредственном использовании принципа возможных перемещений. Для определения силы S_k отбрасывают соответствующую связь и превращают систему в механизм с одной степенью свободы. Задавая с точностью до множителя возможные перемещения и приравнивая возможную работу A к нулю, получают для S_k одно уравнение с одним неизвестным

$$A = \delta_k S_k + \sum_i P_i \Delta_i = 0, \quad (8.10.2)$$

где δ_k - обобщенное перемещение, на котором производит работу искомая сила S_k ; Δ_i - возможное обобщенное перемещение по направлению действия заданной обобщенной силы.

Равенство нулю $\delta_k = 0$ хотя бы одной силы S_k служит признаком изменяемости, или мгновенной изменяемости заданной системы. Из (8.10.2)

$$S_k = \sum_i \alpha_{ik} P_i. \quad (8.10.3)$$

Коэффициентам $\alpha_{ik} = -\Delta_i / \delta_k$ можно дать кинематическую интерпретацию: они численно равны перемещениям механизма по направлению действия обобщенных сил P_i при $\delta_k = -1$, т.е. перемещениям Δ_i заданной системы от положительной единичной деформации ее k -го элемента. (В обозначениях с двойным индексом в строительной механике, как правило, первый индекс обозначает "где", второй - "от чего".)

Метод замены связей основан на использовании в расчетах новой более простой, чем заданная, заведомо неизменяемой и статически определимой расчетной системы. Она получается из заданной путем перестановки связей [14].

8.10.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМАХ

При вычислении перемещений узлов и отдельных сечений стержневой системы в за-

данной системе координат (обычно декартовой), а также их углов поворота и других обобщенных перемещений используют метод Мора. Он позволяет найти проекции полного перемещения на любое направление, например на оси x, y, z . При необходимости полное перемещение получают как геометрическую сумму $\Delta = \sqrt{\Delta_x^2 + \Delta_y^2 + \Delta_z^2}$. Аналогично определяют углы поворота.

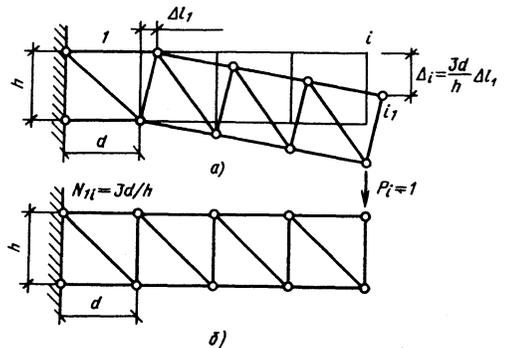


Рис. 8.10.3. Кинематическая и механическая интерпретация коэффициентов влияния

Основу метода Мора составляет рассмотренная в п. 8.10.1 двойственность коэффициентов, входящих в формулы (8.10.1) и (8.10.3), $\alpha_{ik} = s_{ki}$. Например, для определения вертикального перемещения Δ_i i -го узла фермы (рис. 8.10.3, а) от малого удлинения Δl_1 стержня l рассматривают состояние системы, показанной на рис. 8.10.3, б.

По направлению искомого перемещения прикладывают единичную силу $P_i = 1$ и определяют усилие N_{1l} в элементе l . Значение N_{1l} подставляют вместо α_{i1} в формулу $\Delta_i = \alpha_{i1} \Delta l_1$; $\Delta_i = N_{1l} \Delta l_1$. При заданных малых деформациях всех стержней $(\Delta l_1; \Delta l_2; \dots; \Delta l_m)$ считают для перемещений справедливым принцип суперпозиций, т.е. предполагают, что расчетная схема не меняется от этих малых деформаций. Тогда

$$\Delta_i = \sum_{k=1}^m N_{ki} \Delta l_k. \quad (8.10.4)$$

Метод Мора заменяет решение геометрической задачи определения перемещений системы от деформаций ее элементов решением статической задачи вычисления внутренних сил от единичных внешних сил. В случае пе-

ременной по длине стержней деформации $\varepsilon(s)$, представляя систему как совокупность бесконечно большого числа бесконечно малых элементов с удлинением $\varepsilon(s)ds$, вместо суммы имеем интеграл по длине стержней

$$\Delta_i = \int_S N_i(s)\varepsilon(s)ds.$$

Считая стержни прямыми, все деформации и перемещения малыми, а также справедливым принцип суперпозиции, в общем случае для перемещения Δ_i получаем интеграл Мора

$$\Delta_i = \int_S \left(N_i \varepsilon + M_{xpi} \theta + M_{yi} \varpi_y + M_{zi} \varpi_z + Q_{yi} \gamma_y + Q_{zi} \gamma_z \right) ds, \quad (8.10.5)$$

где N_i - продольная сила; M_{xpi} и M_{yi} , M_{zi} - соответственно крутящий и изгибающие моменты; Q_{yi} , Q_{zi} - поперечные силы; ε - продольная деформация; θ - относительный угол закручивания; $\varpi_y = 1/\rho_z$ и $\varpi_z = 1/\rho_y$ - кривизна соответственно в плоскостях xz и xy , связанная с поворотами сечений относительно осей y и z ; γ_y, γ_z - углы сдвига сечений соответственно в направлениях осей y и z .

Внутренние силы определяются из вспомогательного состояния системы, в котором нагрузкой является единичная обобщенная сила $P_i=1$, приложенная по направлению искомого перемещения.

В случае плоской системы при деформациях в ее плоскости перемещения зависят от удлинения стержней, их искривления и поперечных сдвигов:

$$\Delta_i = \int_S (N_i \varepsilon + M_i \varpi + Q_i \gamma) ds. \quad (8.10.6)$$

При использовании формул (8.10.4) - (8.10.6) не существенны причины, вызвавшие деформации элементов в системе: неточности изготовления стержней, изменение их температуры, ползучесть материала, физические линейные или нелинейные деформации от напряженного состояния под нагрузкой и др. Например, при определении перемещения Δ_{ii} от изменения температуры стержней используют формулу (8.10.6) при $\varepsilon_i = \alpha t_0$, $\varpi_i = \alpha \Delta t / h$; $\gamma_i = 0$ (где α - коэффициент линейного температурного расширения; t_0 - температура на уровне центра тяжести; Δt - разность температур на крайних волокнах; предполагается линейное изменение темпера-

туры по толщине стержня; h - высота сечения). Допуская, что все эти параметры постоянны по длине одного стержня (или его участка), вместо интеграла (8.10.6) получают

$$\Delta_{ii} = \sum \left(\alpha t_0 \Omega_{N_i} + \frac{\alpha \Delta t}{h} \Omega_{M_i} \right),$$

где $\Omega_{N_i}, \Omega_{M_i}$ - площади вспомогательных эпюр N_i и M_i от i -й единичной силы на соответствующем стержне или участке стержня.

Знак плюс сохраняется, если соответствующие деформации от изменения температуры и от $P_i=1$ совпадают.

Вычисление перемещений от заданной нагрузки P упрощается, если для материала систем справедлив закон Гука. В этом случае деформации элементов выражаются через внутренние силы и жесткости сечений:

$$\varepsilon = \frac{N_P}{EA}; \quad \theta = \frac{M_{xP}}{GJ_d}; \quad \varpi_y = \frac{1}{\rho_z} = \frac{M_{yP}}{EJ_y};$$

$$\varpi_z = \frac{1}{\rho_y} = \frac{M_{zP}}{EJ_z}; \quad \gamma_y = \frac{k_y Q_{yP}}{GA}; \quad \gamma_z = \frac{k_z Q_{zP}}{GA},$$

где k_y и k_z - коэффициенты, зависящие от формы поперечного сечения; для прямоугольника $k=1, 2$.

Формула Мора в общем случае линейно деформируемой пространственной системы имеет следующий вид:

$$\Delta_{iP} = \int_S \frac{N_i N_P ds}{EA} + \int_S \frac{M_{xpi} M_{xP} ds}{GJ_d} +$$

$$+ \int_S \frac{M_{yi} M_{yP} ds}{EJ_y} + \int_S \frac{M_{zi} M_{zP} ds}{EJ_z} + \int_S \frac{k_y Q_{yi} Q_{yP} ds}{GA} +$$

$$+ \int_S \frac{k_z Q_{zi} Q_{zP} ds}{GA}. \quad (8.10.7)$$

Ввиду малости двух последних интегралов влиянием сдвигов (поперечных сил) обычно пренебрегают [11, 41].

При определении суммарных перемещений узлов ферм (8.10.7) часто учитывают лишь первый интеграл, так как эти перемещения зависят в основном от растяжения (сжатия) стержней фермы. В расчетах пространственных рам основными являются второй, третий и четвертый интегралы, так как в этом случае преобладают перемещения, обусловленные кручением и изгибом.

В расчетах плоских систем при деформациях в их плоскости интеграл Мора имеет вид

$$\Delta_{IP} = \int_S \frac{N_i N_P ds}{EA} + \int_S \frac{M_i M_P ds}{EJ} + \int_S \frac{k Q_i Q_P ds}{GA}$$

В расчетах ферм

$$\Delta_{IP} = \sum_k \frac{N_{ki} N_{kP} l_k}{EA_k}$$

где N_{ki} , N_{kP} - продольные силы в k -м стержне от $P_i=1$ и от нагрузки P ; l_k - длина k -го стержня; EA_k - жесткость при растяжении (сжатии).

В расчетах плоских рам, балок обычно применяют упрощенное выражение

$$\Delta_{IP} = \int_S \frac{M_i M_P ds}{EJ}$$

Интегралы вычисляют с помощью квадратурных формул, например формулы Симпсона. На отдельном стержне или участке стержня она имеет вид

$$\int_0^l \frac{S_i S_P dx}{D(x)} = \frac{l}{6} \left(\frac{S_i^H S_P^H}{D_H} + 4 \frac{S_i^C S_P^C}{D_C} + \frac{S_i^K S_P^K}{D_K} \right) \tag{8.10.8}$$

где S и D - соответственно внутренние силы и жесткость сечения; индексы H, K, C - соответственно начало, конец и середина стержня (участка).

Если жесткость на участке постоянна, а произведение $S_i S_P$ - полином не выше третьей степени, то приближенная формула (8.10.8) дает точный результат. Например, если эпюра M_i на всем участке линейна, а поперечная нагрузка q распределена равномерно, т.е. эпюра M_P - квадратная парабола (рис. 8.10.4), то

$$\int_0^l \frac{M_i M_P ds}{EJ} = \frac{l}{6EJ} (aa_i + 4cc_i + bb_i)$$

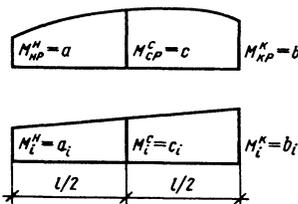


Рис. 8.10.4. Пример применения формулы Симпсона

В случае, когда одна из эпюр линейна для вычисления интеграла Мора применимо правило Верещагина. Например, при изгибе стержня

$$\int_0^l \frac{M_i M_P ds}{EJ} = \frac{1}{EJ} \Omega y,$$

где Ω - площадь криволинейной эпюры; y - ордината в линейной эпюре под центром A тяжести криволинейной (рис. 8.10.5).

8.10.4. МАТРИЦЫ ПОДАТЛИВОСТИ И ЖЕСТКОСТИ УПРУГОЙ СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ

Из линейной зависимости внутренних сил от нагрузки (8.10.1) и линейности выражений (8.10.7) следует принцип суперпозиции для малых перемещений стержневой системы (рис. 8.10.6, а):

$$\Delta_{1P} = \delta_{11} P_1 + \delta_{12} P_2 + \dots + \delta_{1n} P_n;$$

$$\Delta_{2P} = \delta_{21} P_1 + \delta_{22} P_2 + \dots + \delta_{2n} P_n;$$

$$\vdots$$

$$\Delta_{nP} = \delta_{n1} P_1 + \delta_{n2} P_2 + \dots + \delta_{nn} P_n.$$

$$\tag{8.10.9}$$

В общем случае согласно (8.10.7) $\delta_{ik} = \delta_{ki}$ представляется в виде суммы шести интегралов:

$$\delta_{ik} = \int_S \frac{N_i N_k ds}{EA} + \int_S \frac{M_{kPl} M_{iPl} ds}{GJ_d} + \int_S \frac{M_{yI} M_{yK}}{EJ_y} + \dots$$

В матричной форме равенство (8.10.9) имеет вид

$$\bar{\Delta} = \mathbf{A} \bar{P}.$$

Здесь

$$\bar{\Delta} = \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_n \end{bmatrix}; \quad \bar{P} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix};$$

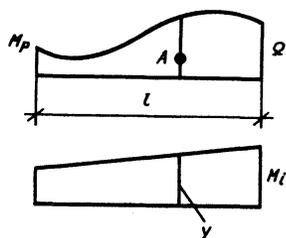


Рис. 8.10.5. Эпюры моментов, полученные по правилу Верещагина

$$A = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{nn} \end{bmatrix}$$

Симметричная матрица A называется матрицей податливости системы по направлению сил P_i . Ее элемент δ_{ik} численно равен перемещению по i -му направлению от $P_k=1$ (рис. 8.10.6, б).

Если перемещения Δ_i независимы, матрица податливости A положительно определенная и $\text{Det}A \neq 0$, то равенства (8.10.9) можно разрешить относительно сил P_i :

$$P_1 = r_{11}\Delta_1 + r_{12}\Delta_2 + \dots + r_{1n}\Delta_n;$$

$$P_2 = r_{21}\Delta_1 + r_{22}\Delta_2 + \dots + r_{2n}\Delta_n;$$

$$\vdots$$

$$P_n = r_{n1}\Delta_1 + r_{n2}\Delta_2 + \dots + r_{nn}\Delta_n$$

или

$$\bar{P} = R\bar{\Delta},$$

где $R = A^{-1}$ - матрица, обратная к матрице податливости; называется матрицей жесткости системы по заданным направлениям Δ_i .

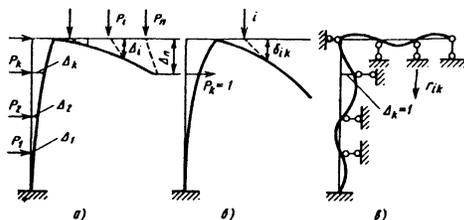


Рис. 8.10.6. Схемы механической интерпретации элементов матриц податливостей и жесткости конструкции

Произвольный элемент r_{ik} матрицы R численно равен реакции в i -й связи от единичного перемещения k -й связи. Реакцию определяют в системе со связями, наложенными по всем n направлениям (рис. 8.10.6, в).

8.10.5. ЭНЕРГИЯ ДЕФОРМАЦИИ СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ, ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МАТРИЦ ЖЕСТКОСТЕЙ И ПОДАТЛИВОСТЕЙ

Энергия u деформации стержневой линейно деформируемой системы (работа внутренних сил) может быть выражена в различных формах. Через внутренние силы

$$u = \int_S \frac{N^2 ds}{2EA} + \int_S \frac{M_{kp}^2 ds}{2GJ_d} + \int_S \frac{M_y^2 ds}{2EJ_y} + \int_S \frac{M_z^2 ds}{2EJ_z} + \int_S \frac{k_y Q_y^2 ds}{2GA} + \int_S \frac{k_z Q_z^2 ds}{2GA} \quad (8.10.10)$$

Откуда следует, что энергия деформаций всегда положительна ($u > 0$) и равна нулю только в случае равенства нулю всех внутренних сил.

С учетом (8.10.1) и (8.10.10) имеем выражение для u через внешние активные силы P_i - элементы вектора \bar{P} :

$$u = 0,5 \left(\delta_{11} P_1^2 + \delta_{12} P_1 P_2 + \dots + \delta_{1n} P_1 P_n + \delta_{21} P_2 P_1 + \delta_{22} P_2^2 + \dots + \delta_{2n} P_2 P_n + \dots + \delta_{n1} P_n P_1 + \delta_{n2} P_n P_2 + \dots + \delta_{nn} P_n^2 \right)$$

или в матричной форме

$$U = 0,5[P_1 P_2 \dots P_n] \bar{\Delta} = 0,5 \bar{P}^T A \bar{P}, \quad (8.10.11)$$

где \bar{P}^T - транспонированный вектор, т.е. строка из P_i .

Аналогично, через перемещения Δ_i (элементы вектора Δ)

$$u = 0,5[\Delta_1 \Delta_2 \dots \Delta_n] \bar{P} = 0,5 \bar{\Delta}^T R \bar{\Delta}. \quad (8.10.12)$$

Из выражений (8.10.11), (8.10.12) следуют формулы преобразования матриц податливостей или жесткостей при замене переменных P_i или Δ_i как формулы матриц преобразования квадратичной формы.

Если силы P_i^* , для которых известна матрица податливостей A^* , заменяют на новые P_i так, что $\bar{P}^* = V \bar{P}$, то новая матрица

$$A = V^T A^* V. \quad (8.10.13)$$

Аналогично

$$R = V^T R^* V, \quad (8.10.14)$$

где V выражает $\bar{\Delta}^*$ через $\bar{\Delta}$; $\bar{\Delta}^* = V \bar{\Delta}$.

Матрица V в выражении (8.10.14) или (8.10.13) может быть прямоугольной, т.е. порядок вектора $\bar{\Delta}$ или \bar{P} может быть меньше, чем у вектора $\bar{\Delta}^*$ или \bar{P}^* .

Примеры использования формул (8.10.13), (8.10.14) приведены в гл. 8.14.

Глава 8.11

СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СТЕРЖНЕВЫЕ СИСТЕМЫ. КЛАССИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА

8.11.1. МЕТОД СИЛ

Статическая неопределимость обусловлена наличием избыточных связей, превышающих минимум связей, необходимых для образования геометрически неизменяемой статически определимой системы. Число избыточных связей называют степенью статической неопределимости, которую можно вычислить как разность чисел неизвестных сил и уравнений равновесия.

Рассмотрим плоские стержневые системы. Расчет пространственных систем аналогичен, однако выкладки в этом случае более

сложны и при расчете таких систем, как правило, используют МКЭ.

Стержневая система находится в равновесии в том случае, если находится в равновесии ее стержни и узлы. Если из плоской стержневой системы выделить стержень, то в общем случае в сечениях n начала и k конца стержня возникает по три внутренние силы N , Q , M . Эти шесть усилий связаны между собой тремя уравнениями равновесия. Таким образом, независимых усилий остается три. В случае, когда на одном или обоих концах стержня расположены шарниры, число независимых усилий равно соответственно двум или одному. Если уравнения равновесия составлять относительно независимых усилий, то число уравнений равновесия равно числу уравнений равновесия узлов.

Степень статической неопределимости

$$m = 3\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 - n, \quad (8.11.1)$$

где α_1 , α_2 и α_3 - число стержней, соответственно не имеющих по концам шарниры, имеющих один шарнир и имеющих два шарнира; n - число уравнений равновесия узлов.

В число неизвестных не включены опорные реакции, при этом не учтены и соответствующие им уравнения. Таким образом для заделки или шарнирно-неподвижной опоры в число n не включены уравнения равновесия, соответствующие опорным закреплениям, а в случае шарнирно-подвижной опоры учтено только одно уравнение (например, $\sum x = 0$, когда ось x горизонтальна, а шарнирно-подвижная опора накладывает связь в вертикальном направлении).

Неизменяемая система, полученная из заданной путем отбрасывания избыточных связей (число которых равно степени статической неопределимости), является основной. Усилия в отброшенных связях обозначены буквой X . Для того чтобы основная система работала как заданная, необходимо, чтобы перемещения по направлению отброшенных связей были равны нулю. На основании принципа независимости действия сил составлена система канонических уравнений метода сил

$$\begin{aligned} \delta_{11} X_1 + \dots + \delta_{1l} X_l + \dots + \delta_{1m} X_m + \Delta_{1P} &= 0; \\ &\vdots \\ \delta_{l1} X_1 + \dots + \delta_{ll} X_l + \dots + \delta_{lm} X_m + \Delta_{lP} &= 0; \\ &\vdots \\ \delta_{m1} X_1 + \dots + \delta_{ml} X_l + \dots + \delta_{mm} X_m + \Delta_{mP} &= 0, \end{aligned} \quad (8.11.2)$$

где δ_{ij} - перемещение по направлению i -й силы от j -й силы, равной единице (единичное перемещение); $1 \leq i, j \leq m$; X_i - усилие в i -й отброшенной связи; Δ_{iP} - перемещение по направлению i -й силы от нагрузки (грузовое перемещение). Коэффициенты канонических уравнений

$$\delta_{ij} = \delta_{ji} = \sum_1^{\alpha} \int \frac{\bar{M}_i \bar{M}_j}{EJ} ds + \sum_1^{\alpha} \int \frac{\bar{N}_i \bar{N}_j}{EF} ds; \quad (8.11.3)$$

$$\Delta_{iP} = \sum_1^{\alpha} \int \frac{\bar{M}_i M_P}{EJ} ds + \sum_1^{\alpha} \int \frac{\bar{N}_i N_P}{EF} ds, \quad (8.11.4)$$

где \bar{M}_i (\bar{M}_j) и \bar{N}_i (\bar{N}_j) - ординаты эпюр соответственно моментов и продольных сил от $X_i = 1$ ($X_j = 1$); M_P и N_P - ординаты эпюр соответственно моментов и продольных сил от нагрузки.

При расчете стержневых систем (по действию температуры) для определения свободных членов Δ_{iP} используют формулу (8.10.6). После решения системы канонических уравнений окончательные эпюры строят по выражениям

$$M = M_P + \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + \dots + \bar{M}_m X_m; \quad (8.11.5)$$

$$N = N_P + \bar{N}_1 X_1 + \bar{N}_2 X_2 + \dots + \bar{N}_m X_m. \quad (8.11.6)$$

Расчет статически неопределимой системы сводится к расчету статически определимой с определением усилий в избыточных связях из системы канонических уравнений (8.11.2). Вопросы учета различных слагаемых в выражениях (8.11.3) и (8.11.4), контроля правильности построения окончательной эпюры, определения перемещений в статически неопределимых системах и учета симметрии пояснены ниже на примерах.

Пример. Построить эпюры внутренних усилий в раме, показанной на рис. 8.11.1, а. По формуле (8.11.1) степень статической неопределимости

$$m = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 5 - (1 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2) = 2. \quad (8.11.7)$$

Путем отбрасывания лишних связей получена основная система (рис. 8.11.1, б). На рис. 8.11.1, в-д построены единичные и грузовая эпюры моментов, ординаты которых отложены со стороны сжатого волокна. Перемножением

этих эпюр найдены единичные и грузовые коэффициенты системы канонических уравнений:

$$\delta_{11} = \frac{12a}{3EJ}; \quad \delta_{12} = \delta_{21} = -\frac{2a^2}{3EJ};$$

$$\delta_{22} = \frac{5a^3}{3EJ}; \quad \Delta_{1P} = \frac{5qa^3}{12EJ}; \quad \Delta_{2P} = \frac{5qa^4}{24EJ}. \quad (8.11.8)$$

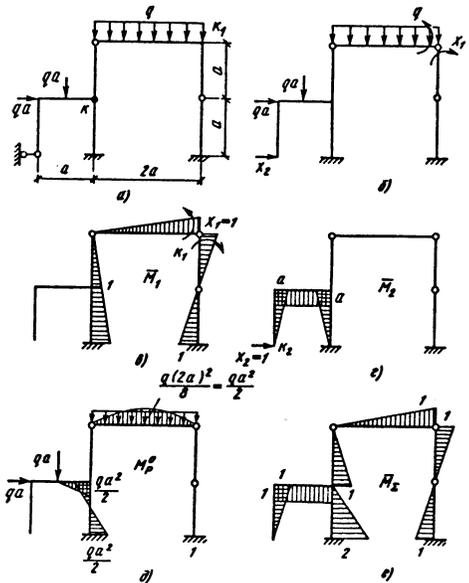


Рис. 8.11.1. Схема рамы, основная система метода сил и эпюры моментов

Для контроля правильности коэффициентов построена суммарная эпюра (для упрощения выкладок на рис. 8.11.1, е суммарная эпюра построена при $a=1$). Проведена проверка:

$$\delta_{\Sigma\Sigma} = \delta_{11} + \delta_{12} + \delta_{21} + \delta_{22}; \quad \Delta_{\Sigma P} = \Delta_{1P} + \Delta_{2P}. \quad (8.11.9)$$

Система канонических уравнений метода сил

$$4 \frac{a}{EJ} X_1 - 0,6667 \frac{a^2}{EJ} X_2 + 0,4167 \frac{qa^3}{EJ} = 0;$$

$$-0,6667X_1 + 1,6667 \frac{a^3}{EJ} X_2 + 0,2083 \frac{qa^4}{EJ} = 0.$$

$$(8.11.10)$$

Из системы (8.11.10) получены

$$X_1 = -0,1340qa^2; \quad X_2 = -0,1785qa.$$

$$(8.11.11)$$

По формуле (8.11.5) построена окончательная эпюра (рис. 8.11.2, а).

Перемножением единичной эпюры \bar{M}_1 (см. рис. 8.11.1, е) на окончательную получено перемещение по направлению силы X_1 (взаимный угол поворота в точке k_1) от нагрузки в заданной системе, но в соответствии с первым каноническим уравнением (8.11.10) это перемещение должно быть равно нулю. Аналогичный результат получен при перемножении окончательной эпюры на эпюру \bar{M}_2 (см. рис. 8.11.1, з). В результате при перемножении эпюры \bar{M}_Σ на окончательную также должен получиться нуль, что используется для контроля проверки правильности построения окончательной эпюры.

Основная система с нагрузкой P и лишним неизвестными работает так же, как и заданная статически неопределимая система.

Поэтому перемещения в статически неопределимой системе

$$\Delta_{кР} = \sum \int \frac{M_P \bar{M}_к}{EJ} ds, \quad (8.11.12)$$

где $\bar{M}_к$ - эпюра от единичного воздействия, приложенного в точке $к$ (см. рис. 8.11.1, а), от силы или момента (соответственно для определения линейного или углового перемещения) в основной (статически определимой) системе.

На участках, где эпюра M линейна, эпюра Q построена как тангенс угла наклона линии контура эпюры к оси рамы. При этом сила Q считается положительной в том случае, когда она вращает стержень или узел по часовой стрелке. Удобно использовать правило: поперечная сила положительна в том случае, если для совмещения оси рамы с контуром эпюры необходимо осуществить поворот против часовой стрелки (рис. 8.11.2, б).

Если эпюра криволинейна, то вырезают соответствующий стержень на двух опорах, который нагружен нагрузкой и опорными моментами (см. рис. 8.11.2, в). Эпюра Q показана на рис. 8.11.2, г. Эпюра N построена путем вырезания узлов (см. рис. 8.11.2, д).

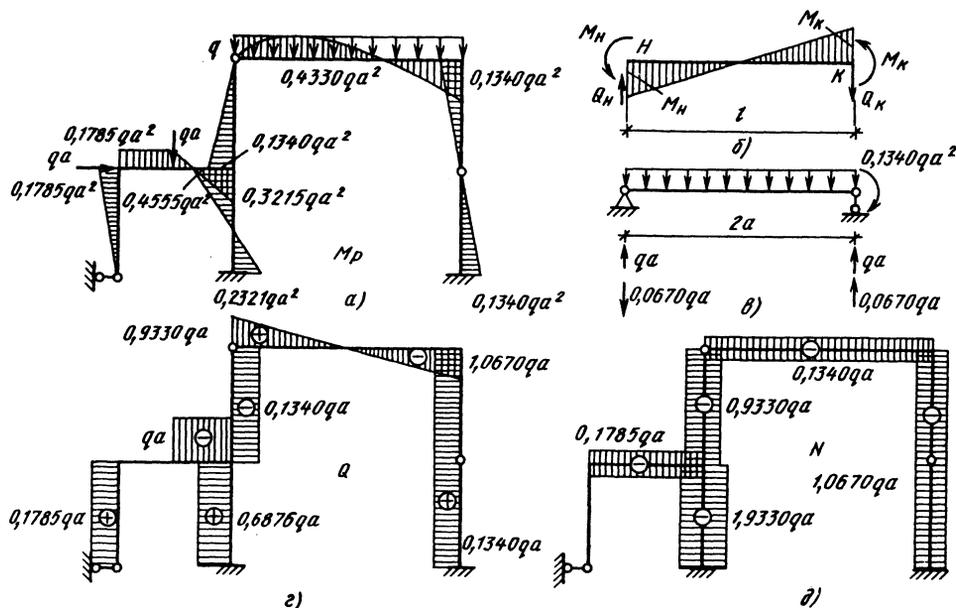


Рис. 8.11.2. Окончательная эпюра моментов и эпюры сил, действующих в раме

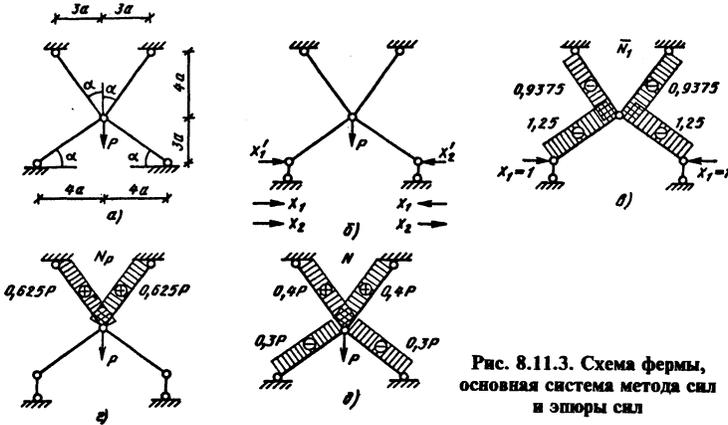


Рис. 8.11.3. Схема фермы, основная система метода сил и эпюры сил

Пример. Построить эпюру продольных сил в стержневой системе, показанной на рис. 8.11.3, а. Степень ее статической неопределимости по формуле (8.11.1)

$$m=4-2=2. \quad (8.11.13)$$

Система, показанная на рис. 8.11.3, а, и действующая на нее нагрузка являются симметричными и очевидно, что окончательная эпюра должна быть также симметричной. Поэтому в основной системе (рис. 8.11.3, б) сгруппированы неизвестные в симметричную группу X_1 и антисимметричную X_2 . Очевидно, что $X_2=0$ и, следовательно, для решения задачи необходимо составить одно каноническое уравнение. Перемножением эпюр, показанных на рис. 8.11.3, в, г, найдено

$$\frac{1}{EF} 24,4141X_1 - 5,8594P = 0,$$

откуда $X_1 = 0,24P. \quad (8.11.14)$

Используя формулу $N = N_P + \bar{N}_1 X_1$, получена окончательная эпюра (рис. 8.11.3, д).

8.11.2. МЕТОД ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Методы сил и перемещений являются двойственными методами (каждому основному понятию в методе сил соответствует двойственное понятие в методе перемещений). Так, двойственным к степени статической неопределимости является степень кинематической неопределимости. Понятие кинематической неопределимости так же, как и понятие статической неопределимости, есть свойство системы, не зависящее от нагрузки. Положение всех точек стержневой системы полностью определяется перемещением узлов. При этом каждый жесткий узел имеет три перемещения

(горизонтальное, вертикальное и поворот), а шарнирный - два (горизонтальное и вертикальное). Стержни рамы считаются несжимаемыми, поэтому в качестве неизвестных остаются угловые перемещения n_y в жестких узлах и линейных перемещениях $n_{\text{л}}$, определяемые числом степеней свободы шарнирной системы, получаемой из заданной:

$$n = n_y + n_{\text{л}}. \quad (8.11.15)$$

Аналогично методу сил (при использовании метода перемещений) выбирают основную систему. Если в первом случае основную систему получают путем отбрасывания лишних связей, то в методе перемещений - путем наложения связей, полностью исключая перемещения узлов системы. Очевидно, что число этих связей равно степени кинематической неопределимости. Затем этим связям задают перемещения таким образом, чтобы усилия в них были бы равны нулю, и составляют систему канонических уравнений метода перемещений. В соответствии с принципом независимости действия сил:

$$\begin{aligned} r_{11}Z_1 + \dots + r_{1i}Z_i + \dots + r_{1n}Z_n + R_{1P} &= 0; \\ \vdots & \\ r_{i1}Z_1 + \dots + r_{ii}Z_i + \dots + r_{in}Z_n + R_{iP} &= 0; \\ \vdots & \\ r_{n1}Z_1 + \dots + r_{ni}Z_i + \dots + r_{nn}Z_n + R_{nP} &= 0, \end{aligned} \quad (8.11.16)$$

где r_{ij} - реакция в i -й связи от смещения j -й, равного единице; Z_i - перемещение i -й нало-

женной связи; R_{iP} - реакция в i -й связи от нагрузки.

Смысл канонических уравнений метода сил заключается в том, что перемещения по направлению отброшенных связей равны нулю, а метода перемещений-в наложенных связях равны нулю.

Коэффициенты канонических уравнений

$$r_{ij} = r_{ji} = \sum_1^n \int \frac{\bar{M}_i \bar{M}_j}{EJ} ds; \quad (8.11.17)$$

$$R_{iP} = \sum_1^n - \int \frac{\bar{M}_i M_P^0}{EJ} ds, \quad (8.11.18)$$

где $\bar{M}_i (\bar{M}_j)$ - ординаты эпюр моментов от

$Z_i = 1, Z_j = 1$; M_P^0 - ординаты эпюр моментов от нагрузки в основной системе метода сил.

Остановимся на построении эпюр единичных и грузовых моментов в основной системе метода перемещений. В табл. 8.11.1 приведены выражения для прогибов при единичных смещениях начального сечения. Для построения эпюр моментов и поперечных сил от единичных смещений используют выражения

$$M = EJ \frac{d^2 v}{dx^2}; \quad Q = \frac{dM}{dx} = \operatorname{tg} \alpha, \quad (8.11.19)$$

где α - угол наклона линии, ограничивающий эпюру M , к оси стержня.

После двойного дифференцирования выражения для прогибов получены выражения для моментов M и построены эпюры моментов, отложенные со стороны сжатого волокна

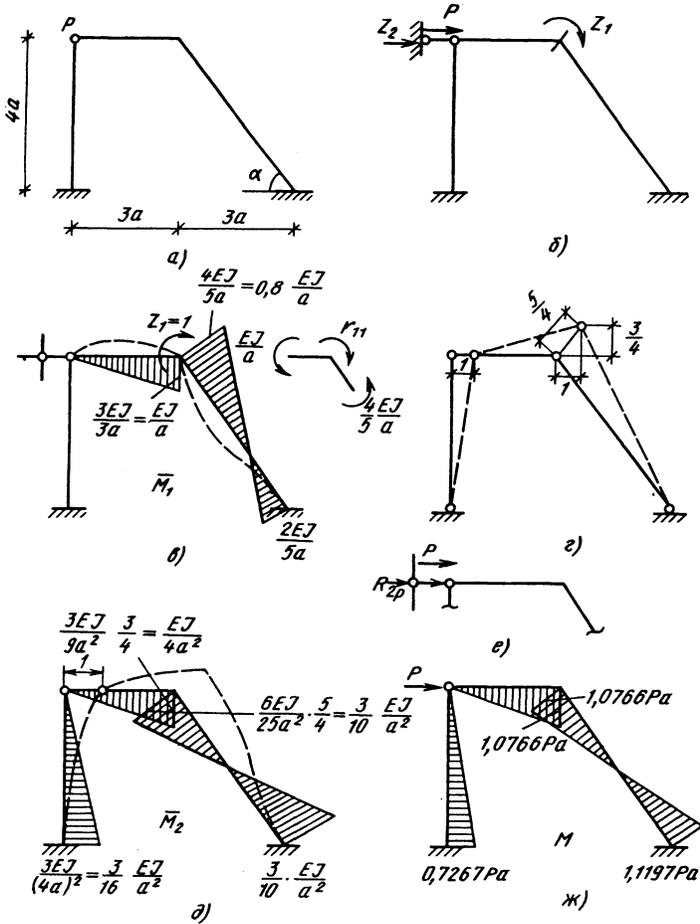
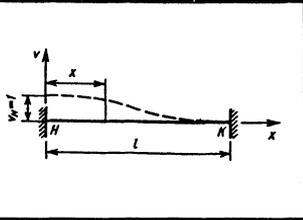
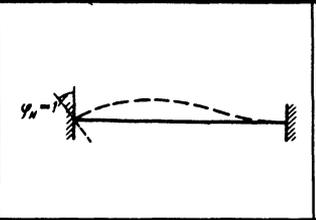
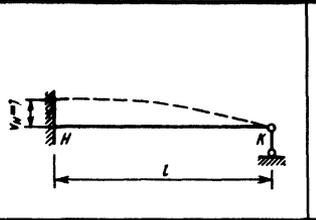
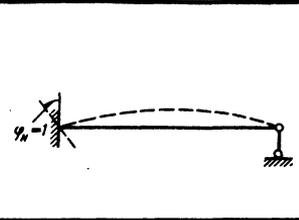
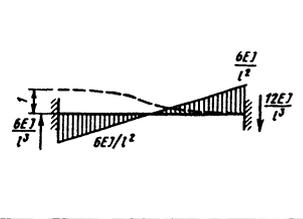
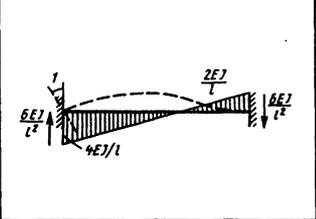
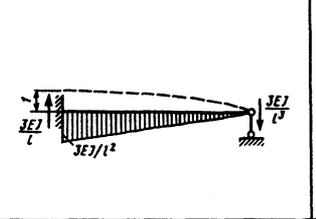
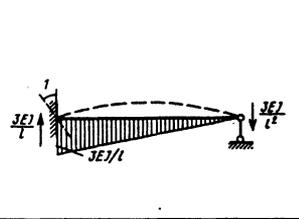
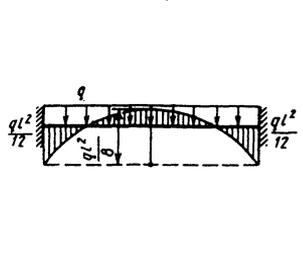
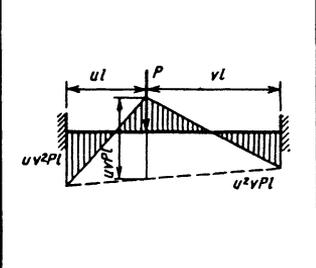
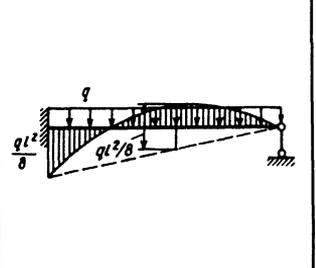
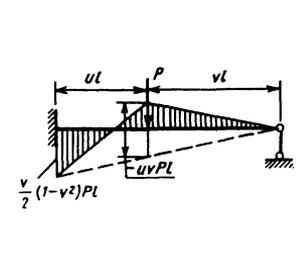


Рис. 8.11.4. Схема рамы, основная система метода перемещений и эпюры моментов

8.11.1. Выражения для определения прогибов и моментов при единичных смещениях начального сечения, а также эпоры моментов

<p>Схемы деформаций</p> 				
<p>Перемещение v</p>	$1 - \frac{3}{l^2}x^2 + \frac{2}{l^3}x^3$	$x - \frac{2}{l}x^2 + \frac{1}{l^2}x^3$	$1 - \frac{3}{2l^2}x^2 + \frac{1}{2l^3}x^3$	$x - \frac{3}{2l}x^2 + \frac{1}{2l^2}x^3$
<p>Момент M</p>	$EJ \left(-\frac{6}{l^2} + \frac{12x}{l^3} \right)$	$EJ \left(-\frac{4}{l} + \frac{6x}{l^2} \right)$	$EJ \left(-\frac{3}{l^2} + \frac{3x}{l^3} \right)$	$EJ \left(-\frac{3}{l} + \frac{3}{l^2}x \right)$
<p>Эпора моментов M</p>				
<p>Грузовые эпоры моментов M</p>				

(табл. 8.11.1). Тангенсы угла наклона эпюр M определяют поперечные силы Q (знаки поперечных сил см. п. 8.11.1). Грузовые эпюры моментов построены с использованием метода сил. Чтобы получить эпюры поперечных сил, необходимо рассмотреть балку с двумя шарнирами, на которую действуют нагрузка и опорные моменты (см. рис. 8.11.2, б).

Для определения единичных и грузовых реакций, соответствующих угловым перемещениям (моментам), составляют уравнения равновесия узлов. Если стойки рамы параллельны, то для определения реакций, соответствующих линейным смещениям (сосредоточенные силы), составляют уравнение суммы проекций всех сил отсеченной части на ось, перпендикулярную к стойкам (чтобы в уравнение равновесия не входила нормальная сила).

Пример. Построить эпюру моментов для рамы, показанной на рис. 8.11.4, а. Степень кинематической неопределенности по формуле (8.11.15)

$$n=1+1=2. \quad (8.11.20)$$

На рис. 8.11.4, б показана основная система. Для построения эпюры \bar{M}_1 первоначально получена эпюра деформаций от единичного поворота узла ($Z_1 = 1$). Затем с помощью табл. 8.11.1 построена эпюра M (момент откладывают со стороны сжатого волокна). Для получения эпюры моментов от единичного смещения рассмотрена шарнирная схема и найдены соотношения между перемещениями узлов (рис. 8.11.4, в). По эпюре смещений шарнирной схемы построена эпюра деформаций, а затем эпюра моментов M_2 (рис. 8.11.4, д). Для определения единичной реакции r_{11} вырезан узел (рис. 8.11.4, е), остальные единичные реакции получены перемножением эпюр. При загрузке основной системы силой P , приложенной в узле, грузовой эпюры не будет, следовательно, реакция $R_{1P}=0$. Для определения реакции R_{2P} проведено сечение и составлено уравнение $\sum x = 0$ (рис. 8.11.5, е):

$$R_{2P} + P = 0; \quad R_{2P} = -P. \quad (8.11.21)$$

Система канонических уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{9 EJ}{5 a} Z_1 - \frac{1 EJ}{20 a^2} Z_2 &= 0; \\ -\frac{1 EJ}{20 a^2} Z_1 + \frac{83 EJ}{320 a^3} Z_2 - P &= 0. \end{aligned} \quad (8.11.22)$$

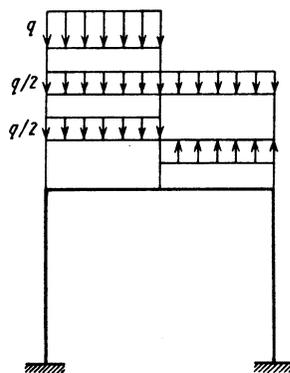


Рис. 8.11.5. Представление нагрузки, действующей на раму в виде симметричной и обратно симметричной составляющих

Ее решением получены значения Z_1 и Z_2 . Затем по формуле

$$M = \bar{M}_1 Z_1 + \bar{M}_2 Z_2 + M_P \quad (8.11.23)$$

построена окончательная эпюра моментов (рис. 8.11.4, ж).

При решении задач из двух, рассмотренных выше методов, выбирают тот, который приводит к наименьшему количеству канонических уравнений. При этом для расчета симметричных систем на произвольную нагрузку может быть использована ее группировка. Так, для системы, показанной на рис. 8.11.5, без группировки нагрузки число неизвестных как по методу перемещений, так и по методу сил равно трем. Используя группировку нагрузки, можно число неизвестных свести к двум (проводя расчет на симметричную нагрузку по методу перемещений, а на кососимметричную по методу сил). Подобный подход носит название комбинированного способа.

8.11.3. СМЕШАННЫЙ МЕТОД

Для сокращения числа неизвестных разработан смешанный метод, при использовании которого на одной части системы отбрасываются связи (метод сил), а на другой ее части - накладываются (метод перемещений). Затем составляется совместная система уравнений, часть из которых соответствует методу сил, а часть - методу перемещений.

Пример. Построить эпюру моментов в раме, показанной на рис. 8.11.6, а. Основная система смешанного метода показана на рис. 8.11.6, б. Система канонических уравнений смешанного метода

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}Z_2 + \Delta_{1P} = 0;$$

$$r_{21}X_1 + r_{22}Z_2 + R_{2P} = 0. \quad (8.11.24)$$

Поскольку $r_{21} = -\delta_{12}$, система канонических уравнений смешанного метода не симметрична. В соответствии с эпюрами, приведенными на рис. 8.11.6, σ - δ , система (8.11.24) имеет вид

$$0,3562 \frac{l^3}{EJ} X_1 - lZ_2 = 0; \quad (8.11.25)$$

$$lX_1 + \frac{8EJ}{l} Z_2 + \frac{ql^2}{12} = 0.$$

Коэффициент δ_{11} определен путем интегрирования произведения ординат эпюры \bar{M}_1 :

$$\delta_{11} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{l^2 (1 - \cos \varphi)^2}{EJ} ds.$$

Решением системы (8.11.25) получены

$$X_1 = -0,0216ql; \quad Z_2 = -0,0077 \frac{ql^3}{EJ}.$$

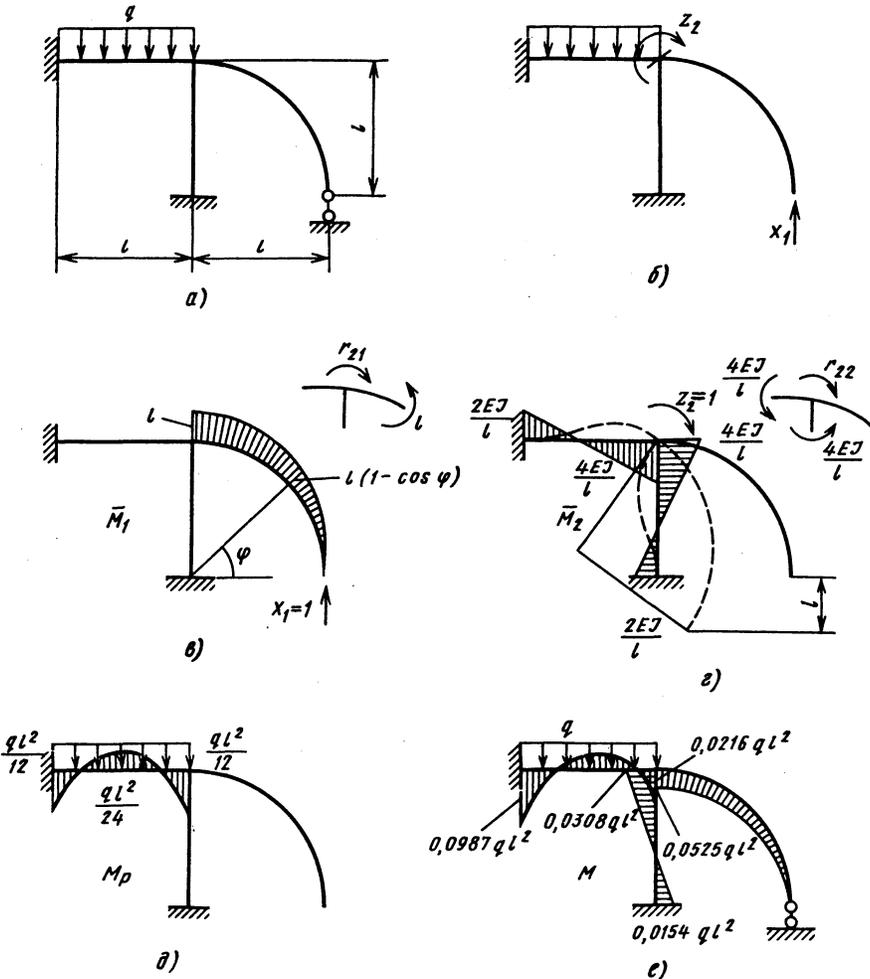


Рис. 8.11.6. Схема рамы, основная система смешанного метода и эпюры моментов

Умножением эпюр \bar{M}_1 на X_1 и \bar{M}_2 на Z_2 и суммированием с эпюрой M_p получена окончательная эпюра, показанная на рис. 8.11.6, e.

Глава 8.12

УРАВНЕНИЯ МЕХАНИКИ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ И ИХ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДЛЯ РАСЧЕТОВ НА ПЕРСОНАЛЬНЫХ КОМПЬЮТЕРАХ

Общая система уравнений механики стержневых систем состоит из уравнений статики (равновесия), геометрических (совместности) и физических (состояния) [11, 34, 35]. для составления общей системы уравнений необходимо получить матрицу уравнений путем вырезания узлов и квазидиагональную матрицу податливости, которая строится по готовым формулам. Применение общих уравнений механики стержневых систем имеет смысл только при наличии соответствующего программного комплекса. Примером такого комплекса для персонального компьютера типа IBM является комплекс "Вычислительная механика" (BM) [45].

8.12.1. СТАТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Аналогично предыдущему, рассматриваются плоские стержневые системы. При этом считаются стержни прямолинейными, а нагрузки узловыми. В случае криволинейных стержней их можно заменять вписанным многоугольником, а для учета местной нагрузки использовать данные табл. 8.11.1. При рав-

новесии стержневой системы в равновесии находятся ее стержни и узлы.

Уравнения равновесия стержней. Рассматривается стержень, вырезанный из стержневой системы, в местной системе координат, связанной с его осью. Ось x направлена от точки Н (начало стержня) к точке К (конец стержня), ось y получена путем поворота оси x на угол 90° против часовой стрелки (рис. 8.12.1, а). В общем случае в сечениях Н и К возникают по три внутренние силы (N, Q, M). Эти шесть сил связаны между собой тремя уравнениями равновесия

$$\begin{aligned} \sum x &= 0; & -N_H + N_K &= 0; & N_H &= N_K = N; \\ \sum y &= 0; & Q_H - Q_K &= 0; & Q_H &= Q_K = Q; \\ \sum m_H &= 0; & -M_H + M_K - Ql &= 0; \\ Q &= (M_K - M_H)/l. \end{aligned} \quad (8.12.1)$$

Вектор независимых усилий (для других случаев прикрепления стержня \bar{S} приведены в скобках)

$$\bar{S} = [N \ M_H \ M_K]^T \quad (8.12.2)$$

$$\left(\bar{S} = [N \ M_H]^T, \bar{S} = [N \ M_K]^T, \bar{S} = [N] \right).$$

Уравнения равновесия узлов. Уравнение равновесия для стержневой системы

$$A\bar{S} = \bar{P}, \quad (8.12.3)$$

где A - матрица уравнений равновесия узлов; \bar{S} - вектор независимых сил; \bar{P} - вектор узловых нагрузок.

Для составления уравнений равновесия узлов необходимо использовать общую систе-

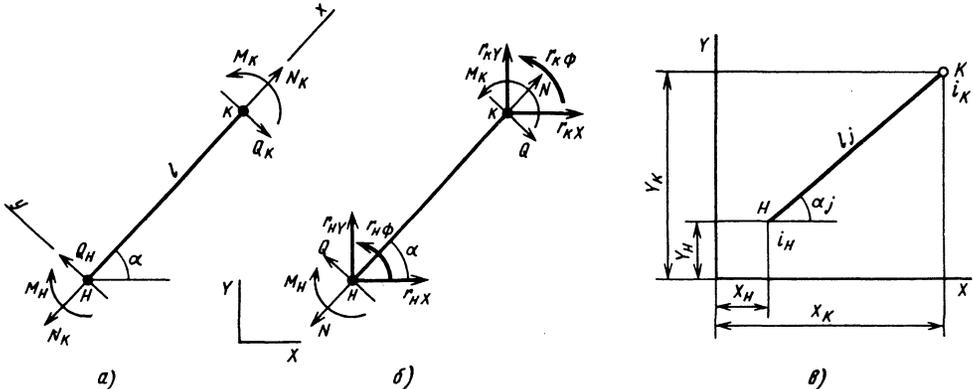


Рис. 8.12.1. Расчетные схемы стержня:

а - внутренние силы в местной системе координат; б - внутренние силы в глобальной системе координат; в - геометрия стержня

му координат X, Y . При этом будем использовать поэлементный подход. Связь между вектором реакций, действующих на стержень от отброшенной части системы

$$\left(\bar{r} = \left[r_{нх} r_{ну} r_{нф}, r_{кх} r_{ку} r_{кф} \right]^T \right), \text{ и вектором}$$

независимых сил \bar{s} (8.12.2) в соответствии с рис. 8.12.1, б

$$\bar{r} = a \bar{s}. \quad (8.12.4)$$

Здесь

$$\bar{r} = \begin{bmatrix} r_{нх} \\ r_{ну} \\ r_{нф} \\ r_{кх} \\ r_{ку} \\ r_{кф} \end{bmatrix};$$

$$a = \begin{bmatrix} -\cos \alpha & \frac{\sin \alpha}{l} & -\frac{\sin \alpha}{l} \\ -\sin \alpha & -\frac{\cos \alpha}{l} & \frac{\cos \alpha}{l} \\ \cos \alpha & -\frac{\sin \alpha}{l} & \frac{\sin \alpha}{l} \\ \sin \alpha & \frac{\cos \alpha}{l} & -\frac{\cos \alpha}{l} \end{bmatrix};$$

$$\bar{s} = \begin{bmatrix} N \\ M_n \\ M_k \end{bmatrix}.$$

(8.12.5)

В матрице A каждому стержню соответствует либо один столбец (оба узла, соединяющие стержень, шарнирные), либо два столбца (один узел шарнирный), либо три столбца (оба узла жесткие). Таким образом, построение матрицы A осуществляется по столбцам (при вырезании узлов эта матрица строится по строкам). Поясним процесс заполнения части матрицы A за счет j -го стержня, показанного на рис. 8.12.1, в. Предположим, что сечение n примыкает к узлу i_n в глобальной нумерации, а сечение k - к узлу i_k . Тогда

$$Y_{i_n} = Y_n; \quad X_{i_k} = X_k$$

$$Y_{i_n} = Y_n; \quad Y_{i_k} = Y_k$$

и

$$l_j = \sqrt{(X_k - X_n)^2 + (Y_k - Y_n)^2}; \quad (8.12.6)$$

$$\cos \alpha_j = \frac{X_k - X_n}{l_j}; \quad \sin \alpha_j = \frac{Y_k - Y_n}{l_j}. \quad (8.12.7)$$

По формуле (8.12.5) строят матрицу a в местной нумерации. С учетом того, что узел i_n является жестким, а узел i_k шарнирным,

$$a = \begin{bmatrix} -\cos \alpha_j & \frac{\sin \alpha_j}{l_j} \\ -\sin \alpha_j & -\frac{\cos \alpha_j}{l_j} \\ \cos \alpha_j & -\frac{\sin \alpha_j}{l_j} \\ \sin \alpha_j & \frac{\cos \alpha_j}{l_j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_n \\ a_k \end{bmatrix}. \quad (8.12.8)$$

В соответствии с общей нумерацией заполняют в матрице A столбцы, соответствующие j -му стержню;

$$A = \begin{array}{c} i_n \\ i_k \end{array} \begin{array}{|c|} \hline j \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline a_n \\ \hline a_k \\ \hline \end{array} \quad (8.12.9)$$

При составлении матрицы A в качестве неизвестных принимают только силы в стержнях системы. Опорные реакции могут быть получены затем из уравнений равновесия для опорных узлов. Естественно, что коэффициенты этих уравнений не входят в матрицу A , поэтому в соответствующих матрицах a отбрасывают части, соответствующие наложенным связям.

По матрице A можно исследовать образование систем. Если число строк матрицы A больше числа ее столбцов - система изменяемая, если число строк равно числу столбцов и определитель не равен нулю - система статически определяемая (если определитель равен нулю - изменяемая или мгновенно изменя-

мая), если число строк меньше числа столбцов и ранг матрицы равен числу строк - система статически неопределимая (если ранг меньше числа строк - система изменяемая).

8.12.2. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Стержневая система, соединенная в узлах до деформации, должна оставаться соединенной в тех же узлах и после деформации. Уравнения, отражающие это положение, называют уравнениями совместности $(A_1 \bar{Z} = \bar{\Delta})$. Все силы, действующие на стержневую систему, делят на внешние и внутренние.

Рассмотрена система, имеющая n жестких узлов и m стержней. Ниже приведены векторы внешних, внутренних сил, действующие на стержневую систему:

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} \bar{P}_1 \\ \vdots \\ \bar{P}_i \\ \vdots \\ \bar{P}_n \end{bmatrix}; \quad P_i = \begin{bmatrix} P_{iX} \\ P_{iY} \\ M_i \end{bmatrix}$$

$$\bar{S} = \begin{bmatrix} \bar{S}_1 \\ \vdots \\ \bar{S}_j \\ \vdots \\ \bar{S}_m \end{bmatrix}; \quad \bar{S}_j = \begin{bmatrix} N_j \\ M_{nj} \\ M_{kj} \end{bmatrix}$$

$$\bar{Z} = \begin{bmatrix} \bar{Z}_1 \\ \vdots \\ \bar{Z}_i \\ \vdots \\ \bar{Z}_n \end{bmatrix}; \quad \bar{Z}_i = \begin{bmatrix} U_i \\ V_i \\ \phi_i \end{bmatrix}$$

$$\bar{\Delta} = \begin{bmatrix} \bar{\Delta}_1 \\ \vdots \\ \bar{\Delta}_j \\ \vdots \\ \bar{\Delta}_m \end{bmatrix}; \quad \bar{\Delta}_j = \begin{bmatrix} \Delta_j \\ \Delta\varphi_{nj} \\ \Delta\varphi_{kj} \end{bmatrix}$$

(8.12.10)

Двойственными им векторами являются векторы перемещений и деформаций (под двойственными векторами понимают векторы, скалярное произведение которых дает выражение для работы).

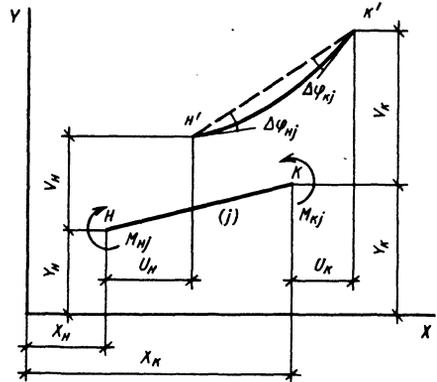


Рис. 8.12.2. Схема перемещения и деформации стержня

На рис. 8.12.2 пояснены компоненты $\Delta\varphi_{nj}$, $\Delta\varphi_{kj}$ вектора $\bar{\Delta}_j$. В соответствии с условием совместности и законом сохранения энергии (работа внешних сил равна работе внутренних сил) $P^T \bar{Z} = \bar{S}^T \bar{\Delta}$ или $\bar{S}^T A^T \bar{Z} = \bar{S}^T A_1 \bar{Z}$,

откуда $A^T \bar{Z} = \bar{\Delta}$. Это соотношение выражает принцип двойственности - матрица, связывающая вектор перемещений с вектором деформаций, является транспонированной по отношению к матрице, связывающей векторы внутренних и внешних сил. Благодаря принципу двойственности можно не строить геометрические уравнения - достаточно построить матрицу уравнений равновесия и транспонировать ее.

8.12.3. ФИЗИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Уравнения состояния связывают деформации и перемещения. Согласно закону Гука в случае действия продольной силы

$$\Delta l_j = \frac{N_j l_j}{EA_j} \quad (8.12.11)$$

Рассмотрим действия моментов M_{Hj} и M_{Kj} для одного стержня (см. рис. 8.12.2)

$$\bar{\Delta}_j = b_j \bar{s}_j \quad (8.12.12)$$

Здесь

$$\bar{\Delta}_j = \begin{bmatrix} \Delta l_j \\ \Delta \varphi_{Hj} \\ \Delta \varphi_{Kj} \end{bmatrix};$$

$$b_j = \begin{bmatrix} \frac{l_j}{EA_j} & & \\ & \frac{l_j}{3EJ_j} & \frac{l_j}{6EJ_j} \\ & \frac{l_j}{6EJ_j} & \frac{l_j}{3EJ_j} \end{bmatrix};$$

$$\bar{s}_j = \begin{bmatrix} N_j \\ M_{Hj} \\ M_{Kj} \end{bmatrix} \quad (8.12.13)$$

При $j=1, 2, \dots, m$ справедливо соотношение Гука для стержневой системы

$$\bar{\Delta} = B \bar{S}, \quad (8.12.14)$$

где B - квазидиагональная матрица податливости.

Матрица

$$B = \begin{bmatrix} b_1 & & \\ & b_j & \\ & & b_m \end{bmatrix}, \quad (8.12.15)$$

где b_j - блоки, см. выражение (8.12.12).

8.12.4. СМЕШАННЫЙ МЕТОД И МЕТОД ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Общая система уравнений механики стержневых систем

$$A \bar{S} = \bar{P};$$

$$A^T \bar{Z} = \bar{\Delta};$$

$$\bar{\Delta} = B \bar{S} + \bar{\Delta}', \quad (8.12.16)$$

где $\bar{\Delta}'$ - вектор заданных деформаций.

Любая стержневая система должна удовлетворять условию прочности и жесткости. Для проверки прочности необходимо определить усилия, а для проверки жесткости - перемещения. Таким образом, в системе (8.12.16) неизвестными являются \bar{S} и \bar{Z} . После исключения вектора $\bar{\Delta}$ подстановкой третьего уравнения во второе получена система уравнений смешанного метода

$$B \bar{S} - A^T \bar{Z} + \bar{\Delta}' = 0;$$

$$A \bar{S} - \bar{P} = 0. \quad (8.12.17)$$

Первое матричное уравнение является уравнением совместности, а второе - уравнением равновесия. Чтобы получить систему уравнений (8.12.17), необходимо построить две матрицы A и B . Векторы \bar{P} и $\bar{\Delta}'$ являются заданными. Если $\bar{P} \neq 0$, а $\bar{\Delta}' = 0$, то нагружение называют силовым, в обратном случае - деформационным. Если система является статически определимой, то матрица A квадратная, $\det A \neq 0$, и уравнения равновесия решаются независимо от уравнений совместности:

$$\bar{S} = A^{-1} \bar{P}; \quad \bar{Z} = (A^{-1})^T (B \bar{S} + \bar{\Delta}'). \quad (8.12.18)$$

Для статически неопределимой системы матрица A является прямоугольной и не имеет обратной. В этом случае необходимо выразить усилия \bar{S} через перемещения \bar{Z} из первого уравнения и результат подставить во второе уравнение:

$$A B^{-1} A^T \bar{Z} - A B^{-1} \bar{\Delta}' - \bar{P} = 0. \quad (8.12.19)$$

Матрица $A B^{-1} A^T$ - матрица реакций узлов. Уравнения (8.12.19) равновесия узлов выражены через перемещения, т.е. являются системой уравнений метода перемещений. Следует отметить, что в п. 8.12.1 уравнения равновесия составлены только для стержней системы и в их состав не включены опорные реакции. При этом на диагонали матрицы B не появляются бесконечности (податливости опорных стержней равны нулю, следовательно, соответствующие им жесткости равны беско-

нечности). Матричная форма получения матрицы реакций, входящей в выражение (8.12.19), не удобна для построения матрицы реакций (матрицы жесткости) всей стержневой системы, так как требует больших массивов для выполнения матричных операций (при

больших порядках матриц).

Аналогично построению матрицы уравнений равновесия A , для построения матрицы реакций используют поэлементный подход. Поясним его на примере построения доли матрицы реакций за счет j -го стержня:

$$\begin{array}{l}
 AB^{-1}A^T = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|} \hline & j & \\ \hline i_H & & \\ \hline & a_H & \\ \hline i_K & & \\ \hline & a_K & \\ \hline \end{array} \\ \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline \end{array} \\ \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline & i_H & i_K & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & a_H^T & a_K^T & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} \\ \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline \end{array} \\ \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline & i_H & i_K & \\ \hline i_H & a_H b^{-1} a_H^T & a_H b^{-1} a_K^T & \\ \hline & & & \\ \hline i_K & a_K b^{-1} a_H^T & a_K b^{-1} a_K^T & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} \\ \\ \end{array} \times
 \end{array}
 \quad (8.12.20)$$

В соответствии с формулой (8.12.20) первоначально строят матрицу реакций в местной нумерации

$$\begin{aligned}
 r &= \begin{bmatrix} a_H b^{-1} a_H^T & a_H b^{-1} a_K^T \\ a_K b^{-1} a_H^T & a_K b^{-1} a_K^T \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} r_{HH} & r_{HK} \\ r_{HK} & r_{KK} \end{bmatrix} \quad (8.12.21)
 \end{aligned}$$

Затем блоки r_{HH} , r_{HK} , r_{KH} , r_{KK} рассылаются в соответствии с глобальной нумерацией (8.12.20).

Матрица r является матрицей реакций в глобальной системе координат. В некоторых случаях удобнее построить матрицу r в местной системе координат ($\alpha_i = 0$). При этом используют те же уравнения (8.12.21), но матрицы a_H и a_K записывают в местной системе координат. Для перевода в глобальную систему используют матрицы направляющих косинусов. Итак:

$$r = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & & & -\frac{EA}{l} & & \\ & \frac{12EJ}{l^3} & \frac{6EJ}{l^2} & & \frac{12EJ}{l^3} & \frac{6EJ}{l^2} \\ & \frac{6EJ}{l^2} & \frac{4EJ}{l} & & \frac{6EJ}{l^2} & \frac{2EJ}{l} \\ -\frac{EA}{l} & & & \frac{EA}{l} & & \\ & \frac{12EJ}{l^3} & \frac{6EJ}{l^2} & & \frac{12EJ}{l^3} & \frac{6EJ}{l^2} \\ & \frac{6EJ}{l^2} & \frac{2EJ}{l} & & \frac{6EJ}{l^2} & \frac{4EJ}{l} \end{bmatrix} \quad (8.12.22)$$

Для перехода в глобальную систему координат используют связь между векторами

перемещений в общей и местной системе координат $\bar{Z}_H = c\bar{Z}_{H1}$; $\bar{Z}_K = c\bar{Z}_{K1}$.

Здесь

$$c = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \\ & & 1 \end{bmatrix} \quad (8.12.23)$$

Тогда

$$\Gamma = \begin{bmatrix} c^T r_{HH} c & c^T r_{HK} c \\ c^T r_{KH} c & c^T r_{KK} c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_{HH} & \Gamma_{HK} \\ \Gamma_{KH} & \Gamma_{KK} \end{bmatrix} \quad (8.12.24)$$

Очевидно, что матрицу Γ легко построить с использованием эпюр моментов стержня от единичных смещений узлов (см. табл. 8.11.1). Если стержень имеет на одном из концов шарнир, то число степеней свободы, а также порядок матрицы реакций стержня на единицу меньше. В памяти ЭВМ обычно хранится половина матрицы реакций для всей стержневой системы из условия ее симметрии.

8.12.5. ПОСТРОЕНИЕ МАТРИЦ ЖЕСТКОСТИ ДЛЯ СТЕРЖНЯ, ОПИСЫВАЕМОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Изгиб стержней при действии узловой нагрузки описывается дифференциальными уравнениями четвертого порядка:

$$\frac{d^4 v}{dx^4} = 0; \quad (8.12.25)$$

стержень на упругом основании

$$\begin{bmatrix} v \\ v' \\ v'' \\ v''' \\ v^{IV} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & e^{nx} & e^{-nx} \\ & 1 & ne^{nx} & -ne^{-nx} \\ & & n^2 e^{nx} & n^2 e^{-nx} \\ & & n^3 e^{nx} & -n^3 e^{-nx} \\ & & n^4 e^{nx} & n^4 e^{-nx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} \quad (8.12.31)$$

Четвертая строка используется для проверки правильности общего решения. В соот-

ветствии с первыми двумя строками вектор произвольных постоянных (рис. 8.12.3)

$$\bar{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ & 1 & n & -n \\ 1 & l & e^{nl} & e^{-nl} \\ & & ne^{nl} & -ne^{-nl} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} v_H \\ \varphi_H \\ v_K \\ \varphi_K \end{bmatrix} = L^{-1} z. \quad (8.12.32)$$

$$\frac{d^4 v}{dx^4} + 4\beta^4 v = 0; \quad (8.12.26)$$

гармонические колебания стержня

$$\frac{d^4 v}{dx^4} - \alpha^2 v = 0; \quad (8.12.27)$$

сжато-изогнутый стержень

$$\frac{d^4 v}{dx^4} + n^2 \frac{d^2 v}{dx^2} = 0; \quad (8.12.28)$$

растянуто-изогнутый стержень

$$\frac{d^4 v}{dx^4} - n^2 \frac{d^2 v}{dx^2} = 0; \quad (8.12.29)$$

тонкостенный стержень

$$\frac{d^4 \theta}{dx^4} - k^2 \frac{d^2 \theta}{dx^2} = 0, \quad (8.12.30)$$

где $\beta = \sqrt{\frac{kb}{4EJ}}$; $\alpha = \sqrt{\frac{m\omega^2}{EJ}}$; $n = \sqrt{\frac{N}{EJ}}$;
 $k = \sqrt{\frac{GJ_d}{EJ\omega}}$.

Рассмотрим, например, дифференциальное уравнение (8.12.29). Общее решение и производные от него:

В соответствии с двумя вторыми строками выражения (8.12.31)

$$\begin{bmatrix} r_{H\psi} \\ r_{H\phi} \\ r_{K\psi} \\ r_{K\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_H - N\phi_H \\ -M_H \\ -Q_K + N\phi_K \\ M_K \end{bmatrix} = EJ \begin{bmatrix} -n^2 & & & \\ & -n^2 & & \\ & & n^2 & \\ & & & n^2 e^{-nl} \end{bmatrix} \bar{a} = L_1 \bar{a}. \quad (8.12.33)$$

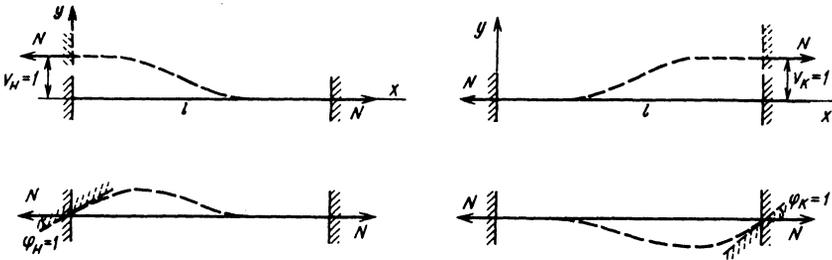


Рис. 8.12.3. Растянуто-изогнутый стержень при единичных смещениях концов

Окончательно матрица жесткости

$$r = L_1 L^{-1}. \quad (8.12.34)$$

Рассмотренный алгоритм является общим и применим для построения матрицы жесткости стержня, описываемого любым из приведенных выше дифференциальных уравнений (8.12.25) - (8.12.30). Использование таблиц специальных функций [42] имеет смысл только при расчете стержневых систем без использования ЭВМ. Добавляя к матрице жесткости (8.12.34) элементы \$EA/l\$, получают матрицы жесткости в местной системе координат. Так, матрица жесткости (8.12.22) может быть построена по дифференциальному уравнению (8.12.25) с использованием описанного выше алгоритма.

системы в смежном состоянии. Дифференциальное уравнение равновесия упругого сжато-изогнутого стержня переменного сечения (рис. 8.13.1) при \$N=P=const\$ и отсутствии поперечной нагрузки согласно (8.1.32)

$$(EJ(x)y'')'' + Ny'' = 0. \quad (8.13.1)$$

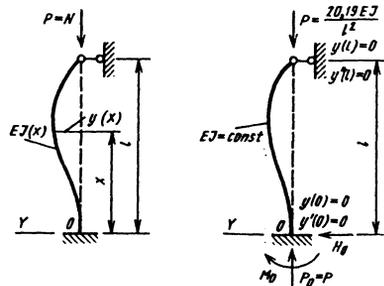


Рис. 8.13.1. Схемы определения критической нагрузки статическим методом

Глава 8.13

УСТОЙЧИВОСТЬ И ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

8.13.1. УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ

При определении критического параметра нагрузки для стержневых систем часто используют статический метод (метод Эйлера). Критическую нагрузку определяют как минимальную, при которой возможно равновесие

В случае упругого стержня постоянной жесткости \$EJ=const\$ уравнение (8.13.1) упрощается [40]:

$$y^{IV} + n^2 y'' = 0, \quad (8.13.2)$$

где $n = \sqrt{\frac{N}{EJ}}$.

Граничные условия для $y(x)$ зависят от закрепления стержня. Например, в рассматриваемом случае (см. рис. 8.13.1) $y(0)=0$; $y'(0) = 0$; $y(l)=0$; $y''(l) = 0$. Для определения критической силы необходимо найти минимальное значение $N_{min}=P_{min}$, при котором краевая задача для уравнения (8.13.1) или (8.13.2) имеет решение $y_1(x)$, отличное от нуля. Это решение дает форму потери устойчивости. В случае $EJ=const$ общее решение уравнения (8.13.2)

$$y(x) = a + bx + c \sin nx + d \cos nx.$$

Через начальные параметры y_0 ; y'_0 ; M_0 ; H_0 уравнение (8.13.2) записывается согласно (8. 1.36) так:

$$y(x) = y_0 + \frac{y'_0}{n} \sin nx + \frac{M_0}{n^2 EJ} (1 - \cos nx) + \frac{H_0}{n^3 EJ} (nx - \sin nx). \quad (8.13.3)$$

В общем случае четыре граничных условия позволяют составить четыре однородных уравнения для параметров y_0 , y'_0 , M_0 , H_0 . Условие ненулевого решения - равенство нулю определителя этой системы - позволяет вычислить минимальное значение n_{min} и P_K . Например, для случая, показанного на рис. 8.13.1, б, $y_0 = y'_0 = 0$. Условия $y(l)$ и $y''(l) = 0$ дают для M_0 и H_0 два линейных уравнения. Приравняв определитель системы нулю, получаем характеристическое уравнение $tg v = v$, где $v = nl$. Минимальный корень уравнения $v_{min} = 4,493$ дает критическую силу $P_K = 29,19EJ/l^2$. Другие корни уравнения $tg v = v$ дают, так называемые, высшие Эйлеровы нагрузки, которым соответствуют неустойчивые формы равновесия.

Решение таких задач для различных способов закрепления упругого стержня постоянной жесткости приводит к единой обобщенной формуле Эйлера

$$P_K = \pi^2 EJ / l_0^2, \quad (8.13.4)$$

где $l_0 = \mu l$ - свободная (приведенная) длина стержня; μ - коэффициент свободной длины, который равен отношению длины одной полуволны синусоиды в форме потери устойчивости к длине стержня l (рис. 8.13.2).

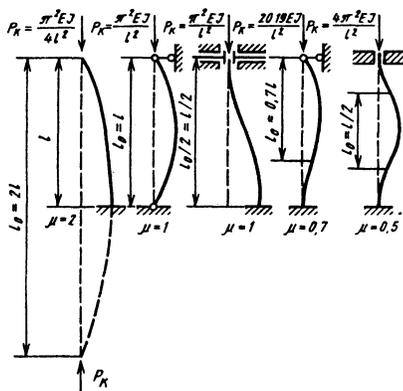


Рис. 8.13.2. Изменение свободной длины стержня в зависимости от его способа закрепления

Формула Эйлера применима для достаточно гибких стержней, которые теряют устойчивость в упругой стадии при напряжениях $\sigma_K = P_K / A$, меньших предела пропорциональности $\sigma_{пц}$. Формула для σ_K имеет вид

$$\sigma_K = \pi^2 E / \lambda^2, \quad (8.13.5)$$

где $\lambda = \mu l / i$; $i = \sqrt{J/A}$ - радиус инерции сечения.

Предельное значение гибкости λ_0 , при котором применима формула Эйлера, находится для каждого материала стержня:

$$\lambda_0 = \sqrt{\pi^2 E / \sigma_{пц}}$$

Например, $\lambda_0 \approx 100$ для стали Ст3.

Если $\lambda < \lambda_0$, то использовать формулу Эйлера нельзя. В этом случае для определения σ_K применяют экспериментальные зависимости [2]:

$$\sigma_K = \sigma_c - (\sigma_c - \sigma_{пц}) \frac{\lambda^2}{\lambda_0^2}, \quad (8.13.6)$$

где σ_c - предел прочности при сжатии.

8.13.2. МЕТОД ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В ИССЛЕДОВАНИИ УСТОЙЧИВОСТИ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

Для отдельного сжатого стержня при $N \neq P_K$ можно решать неоднородные краевые

задачи и, в частности, по определению коэффициента жесткости (реакции стержня на смещения и повороты крайних сечений). Например, рассматривая задачу изгиба сжатого стержня (рис. 8.13.3) при повороте левой заделки, используют формулы метода начальных параметров (8.13.3) при $y_0=0, y' = 1$. Для M_0 и H_0 из граничных условий $y(l) = 0, y'(l) = 0$ получают два уравнения, решая которые находят выражения

$$-M_0 = r_{11} = \frac{4EJ}{l} \varphi_2(v);$$

$$H_0 = r_{21} = \frac{6EJ}{l^2} \eta_3(v),$$

где $v = nl = l\sqrt{N/EJ}$.

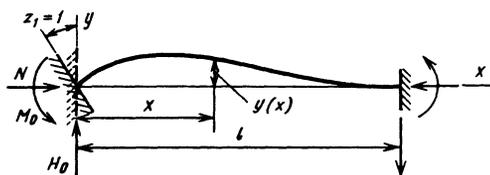
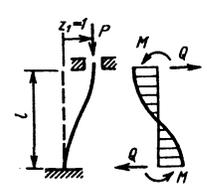
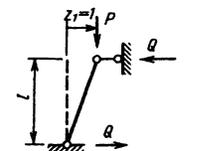
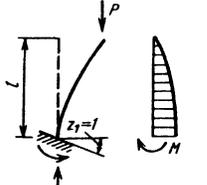


Рис. 8.13.3. Схема определения специальных функций методом перемещений

8.13.1. Зависимости для определения специальных функций сжатых стержней при расчете на устойчивость

Функция	Схема и эпюра момента M	Q	M
$\varphi_1(v) = \frac{v^2}{3 \left(1 - \frac{v}{\operatorname{tg} v} \right)}$		$\frac{3EJ}{l^2} \varphi_1(v)$	$\frac{3EJ}{l} \varphi_1(v)$
$\varphi_2(v) = \frac{1 - \frac{v}{\operatorname{tg} v}}{4 \left(\frac{\operatorname{tg}(0,5v)}{0,5v} - 1 \right)}$		$6 \frac{EJ}{l^2} \eta_3(v)$	$M_1 =$
$\varphi_3(v) = \frac{\frac{v}{\sin v} - 1}{2 \left(\frac{\operatorname{tg}(0,5v)}{0,5v} - 1 \right)}$			$\frac{2EJ}{l} \varphi_3(v);$
$\eta_3(v) = \varphi_1\left(\frac{v}{2}\right) = \varphi_4(v)$			$M_2 =$
			$\frac{4EJ}{l} \varphi_2(v)$
$\varphi_4(v) = \varphi_1(0,5v) = \eta_3(v);$		$\frac{3EJ}{l^3} \eta_1(v)$	$\frac{3EJ}{l^2} \varphi_1(v)$
$\eta_2(v) = \eta_1\left(\frac{v}{2}\right) =$			
$= \varphi_4(v) - \frac{v^2}{12}$			

Продолжение табл. 8.13.1

$\eta_1(v) = \varphi_1(v) - \frac{v^2}{2} =$ $= \frac{v^2}{3 \left(\frac{\operatorname{tg} v}{v} - 1 \right)}$		$\frac{12EJ}{l^3} \eta_2(v)$	$\frac{6EJ}{l^2} \varphi_4(v)$
v^2		$\frac{EJ}{l^3} v^2$	<p style="text-align: center;">—</p>
$\operatorname{tg} v$		<p style="text-align: center;">—</p>	$\frac{EJ}{l} \operatorname{tg} v$

Примечание. $v = \sqrt{P/EJ}$.

Формулы для специальных функций $\varphi_i(v)$, $\eta_i(v)$ даны в табл. 8.13.1. Их используют при исследовании устойчивости стержневых систем по методу перемещений: составляют уравнения равновесия системы в смежном состоянии. Критические параметры нагрузки находят как минимальные значения, при которых система уравнений равновесия в перемещениях имеет нулевое решение:

$$\begin{aligned} r_{11}z_1 + r_{12}z_2 + \dots + r_{1n}z_n &= 0; \\ r_{21}z_1 + r_{22}z_2 + \dots + r_{2n}z_n &= 0; \\ \vdots & \\ r_{n1}z_1 + r_{n2}z_2 + \dots + r_{nn}z_n &= 0, \end{aligned} \quad (8.13.7)$$

или

$$R\bar{z} = 0. \quad (8.13.8)$$

Элементы матрицы жесткости системы R являются функциями параметра нагрузки P :

$$r_{ik} = r_{ik}(v),$$

где $v = l\sqrt{P/(EJ)}$.

Приравняв к нулю детерминант системы (8.13.7), получают характеристическое уравнение

$$\operatorname{Det}R = 0. \quad (8.13.9)$$

Минимальный корень v_{\min} этого уравнения позволяет определить

$$P_k = v_{\min}^2 EJ/l^2.$$

8.13.3. ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ СТЕРЖНЕЙ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

При определении критической нагрузки для стержней переменной жесткости краевую задачу для уравнения (8.13.1) часто невозможно решить в элементарных функциях. Требуется применение приближенного метода, как и в более сложных случаях сжатия стержня переменными продольными силами $N(x)$ (рис. 8.13.4, а). Полная энергия системы

$$\mathcal{E} = U + \Pi,$$

где U - энергия деформаций (потенциал внутренних сил); Π - потенциал внешних сил; $\Pi = -W$; W - работа внешних сил на перемещениях системы.

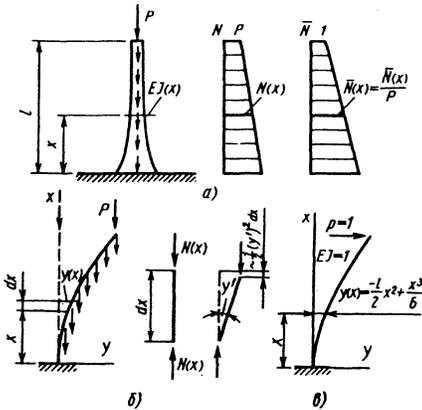


Рис. 8.13.4. Схема определения критической нагрузки энергетическим методом

Рассматривая стержень как систему бесконечно большого числа бесконечно малых элементов, работу внешних сил W можно выразить через внутренние силы $N(x)$ (см. рис. 8.13.4, б):

$$dW = 0,5N(x)(y')^2 dx.$$

В результате

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = 0,5 \int_0^l EJ(x)(y')^2 dx - \\ - 0,5P \int_0^l \bar{N}(x)(y')^2 dx, \end{aligned} \quad (8.13.10)$$

где $\bar{N}(x) = N(x) / P$ - функция (эпюра) продольных сил при $P=1$.

Как и выше, предположено, что все нагрузки возрастают пропорционально одному параметру P . Если $P < P_k$ то $\mathcal{E} > 0$ при любом значении $y(x)$, удовлетворяющем связям. При $P=P_k$ существует функция $y_1(x)$ - форма потери устойчивости, на которой $\mathcal{E}=0$. Отсюда согласно (8.13.10) получена формула Тимошенко

$$P_k = \frac{0}{\int_0^l EJ(x)(y'')^2 dx - \int_0^l \bar{N}(x)(y')^2 dx}. \quad (8.13.11)$$

Подстановкой в (8.13.11) функции $y(x)$, близкой к форме потери устойчивости и удовлетворяющей кинематическим граничным условиям, получаем приближенное (завышенное) значение для $P_{кр}$. Часто за $y(x)$ принимают форму потери устойчивости сжатого стержня постоянного сечения при $N=\text{const}$ и тех же условиях закрепления или функцию пропорционально прогибу от поперечной нагрузки при $EJ=\text{const}$ (рис. 8.13.4, в).

Можно задавать форму потери устойчивости с точностью до нескольких параметров z_1, z_2, \dots, z_n :

$$y(x) = f_1(x)z_1 + f_2(x)z_2 + \dots + f_n(x)z_n. \quad (8.13.12)$$

Подстановкой (8.13.12) в (8.13.10) получаем задачу устойчивости для системы с n степенями свободы. Условия минимума \mathcal{E} при $z_i \neq 0$ [1]

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z_1} = 0; \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z_2} = 0; \quad \dots; \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z_n} = 0. \quad (8.13.13)$$

Тогда система однородных уравнений для z_i :

$$\begin{aligned} (a_{11} - Pb_{11})z_1 + (a_{12} - Pb_{12})z_2 + \dots + (a_{1n} - Pb_{1n})z_n &= 0; \\ (a_{21} - Pb_{21})z_1 + (a_{22} - Pb_{22})z_2 + \dots + (a_{2n} - Pb_{2n})z_n &= 0; \\ \vdots & \\ (a_{n1} - Pb_{n1})z_1 + (a_{n2} - Pb_{n2})z_2 + \dots + (a_{nn} - Pb_{nn})z_n &= 0, \end{aligned} \quad (8.13.14)$$

$$\text{где } a_{ij} = \int_0^l EJf_i' f_j'' dx; \quad b_{ij} = \int_0^l \bar{N}f_i' f_j' dx.$$

В матричной форме

$$(A - P B)\bar{z} = 0. \quad (8.13.15)$$

Минимальный корень характеристического уравнения

$$|A - P B| = 0 \quad (8.13.16)$$

дает критическую нагрузку P_K . После подстановки P_K в (8.13.14) и решения этой системы получаем Z_i , а затем по (8.13.12) - форму потери устойчивости.

8.13.4. ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЕЙ

Минимальные собственные частоты колебаний стержня обычно связаны с его деформациями изгиба. Максимальные перемещения и деформации при гармонической внешней нагрузке часто возникают при поперечных колебаниях стержня. Дифференциальное уравнение поперечных колебаний стержня переменной жесткости $EJ(x)$ и распределенной массы $m(x)$ без учета сдвигов поперечных сечений имеет вид (рис. 8.13.5)

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EJ(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + m(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = q(x, t). \quad (8.13.17)$$

Для стержня постоянной жесткости и массы

$$EJ = \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = q(x, t). \quad (8.13.18)$$

При $q = 0$ для свободных поперечных колебаний

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{m}{EJ} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0. \quad (8.13.19)$$

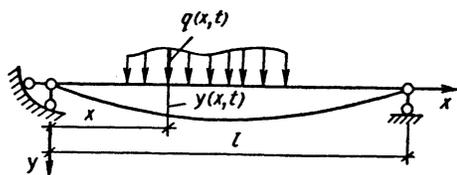


Рис. 8.13.5. Форма поперечных (изгибных) колебаний стержня

Уравнение (8.13.19) имеет множество частных решений вида $y(x, t) = X(x) \sin(\omega t + \nu)$, т.е. колебаний типа стоячей волны с частотой ω . Для функции $X(x)$ формы колебаний согласно (8.13.19)

$$X^{IV} - n^4 X = 0, \quad (8.13.20)$$

где $n^4 = \omega^2 m / (EJ)$.

Вместе с заданными условиями закрепления (граничными условиями) уравнение (8.13.20) позволяет определить частоты ω_i собственных изгибных колебаний и соответствующие им формы $X_i(x)$.

Общее решение уравнения (8.13.20)

$$X(x) = c_1 \operatorname{ch} nx + c_2 \operatorname{sh} nx + c_3 \cos nx + c_4 \sin nx. \quad (8.13.21)$$

Через начальные параметры с помощью функций Крылова $K_i(x)$ [1]

$$X(x) = X_0 K_1(nx) + \frac{X_0'}{n} K_2(nx) + \frac{M_0}{n^2 EJ} \times \\ \times K_3(nx) + \frac{Q_0}{n^3 EJ} K_4(nx). \quad (8.13.22)$$

Здесь

$$\begin{aligned} K_1(nx) &= 0,5(\operatorname{ch} nx + \cos nx); \\ K_2(nx) &= 0,5(\operatorname{sh} nx + \sin nx); \\ K_3(nx) &= 0,5(\operatorname{ch} nx - \cos nx); \\ K_4(nx) &= 0,5(\operatorname{sh} nx - \sin nx). \end{aligned} \quad (8.13.23)$$

Введение обозначения $u = nl = l^2 \sqrt{\omega^2 m / (EJ)}$ и граничных условий на обоих концах стержня дает в общем случае для параметров четыре линейных уравнения. При известных двух параметрах на одном конце стержня получают два однородных уравнения для двух остальных условий на другом конце. Равенство нулю определителя системы приводит к характеристическому уравнению для $u_i = n_i l$, т.е. для частот собственных колебаний ω_i ($i = 1, 2, 3, \dots$):

$$\omega_i = \frac{u_i^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}}. \quad (8.13.24)$$

Выражения для форм собственных колебаний [32, 44] называют балочными функциями. Они обладают свойствами ортогональности

$$\int_0^l X_i X_j dx = 0 \text{ при } i \neq j, \text{ что позволяет использовать их в решениях многих задач.}$$

Ортогональность с весом $m(x)$ обязательна и для форм колебаний стержней переменных жесткости и массы. Для любых форм, соответствующих различным собственным частотам, выполняется равенство

$$\int_0^l m(x) X_i X_j dx = 0. \tag{8.13.25}$$

$$\begin{aligned} (r_{11} - \omega^2 m_{11})z_1 + (r_{12} - \omega^2 m_{12})z_2 + \dots + (r_{1n} - \omega^2 m_{1n})z_n &= 0; \\ (r_{21} - \omega^2 m_{21})z_1 + (r_{22} - \omega^2 m_{22})z_2 + \dots + (r_{2n} - \omega^2 m_{2n})z_n &= 0; \\ \vdots & \vdots \\ (r_{n1} - \omega^2 m_{n1})z_1 + (r_{n2} - \omega^2 m_{n2})z_2 + \dots + (r_{nn} - \omega^2 m_{nn})z_n &= 0. \end{aligned} \tag{8.13.27}$$

Здесь

$$\begin{aligned} r_{ij} = r_{ji} &= \int_0^l EJ \varphi_i'' \varphi_j'' dx; \\ m_{ij} = m_{ji} &= \int_0^l m \varphi_i \varphi_j dx + \sum_k M_k \varphi_{ki} \varphi_{kj}. \end{aligned} \tag{8.13.28}$$

Если система кроме распределенных масс несет дискретные массы M_k (рис. 8.13.6), то в выражение для элемента матрицы обобщенных масс добавляют соответствующие слагаемые по формулам (8.13.28).

Коэффициенты $r_{ij} - \omega^2 m_{ij}$ являются обобщенными динамическими жесткостями. Система (8.13.28) в матричной форме

$$(R - \lambda M) \bar{z} = 0, \tag{8.13.29}$$

где $R - \lambda M$ - матрица динамической жесткости; $\lambda = \omega^2$.

Для вычисления частот ω_i составляют характеристическое уравнение $\text{Det}(R - \lambda M) = 0$, корни которого λ_i дают частоты $\omega_i = \sqrt{\lambda_i}$. Подставив λ_i

При определении частот и форм колебаний этих стержней обычно используют метод Релея-Ритца, согласно которому

$$X(x) = \sum_{i=1}^n z_i \varphi_i(x), \tag{8.13.26}$$

где z_i - неизвестные параметры; $\varphi_i(x)$ - базисные функции, удовлетворяющие кинематическим граничным условиям, например, балочные функции.

Для определения z_i согласно методу Релея-Ритца имеем уравнения

($i = 1, 2, 3, \dots$) в (8.13.29) и решая каждый раз систему однородных уравнений относительно z_i , можно получить соответствующую форму собственных колебаний $X_i(x)$. Этот алгоритм используют и для приближенного определения частот и форм собственных колебаний стержневых систем в форме МКЭ (метода конечных элементов).

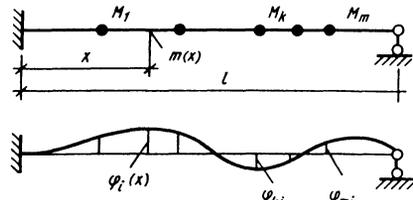


Рис. 8.13.6. Форма собственных колебаний стержня

Для первой частоты ω_1^2 используется формула Релея-Ритца

$$\omega_1^2 = \frac{r_{11}}{m_{11}} = \frac{\int_0^l EJ (y'')^2 dx}{\int_0^l m y^2 dx + \sum_k M_k y_k^2}. \tag{8.13.30}$$

Подставляя в уравнение функцию $y(x)$, удовлетворяющую условиям закрепления, близкую к первой форме колебаний, получают несколько завышенное значение первой частоты. Нельзя использовать (8.13.30) для приближенного определения высших частот. Небольшое отклонение $y(x)$, например, от второй формы дает большую погрешность определения ω_2 .

Аналогично решают задачи о частотах и формах продольных и крутильных колебаний стержней [32].

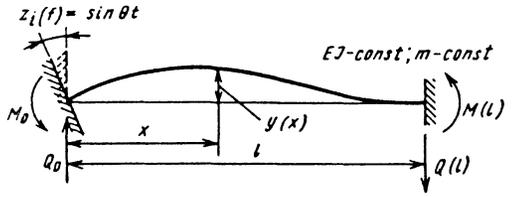


Рис. 8.13.7. Схема определения специальных функций метода перемещений в задачах гармонических колебаний

8.13.5. МЕТОД ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В ЗАДАЧАХ О ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЯХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

При гармонических колебаниях системы каждый ее элемент (стержень) совершает колебания с той же частотой и известными амплитудами z_i перемещений и поворотов крайних сечений. Для составления уравнений динамического равновесия системы вначале изучают реакции стержня на гармонические перемещения и повороты его крайних сечений с амплитудами, равными единице, и выводят специальные функции для вычисления его амплитудных жесткостей.

Например, при колебании стержня в случае поворота левого сечения с частотой θ (рис. 8.13.7) при $q \equiv 0$ методом начальных параметров аналогично формуле (8.13.22) при $y_0=0; y'_0 = 1$ получены прогибы в виде

$$y(x) = \frac{1}{n} K_2(nx) + \frac{M_0}{n^2 EJ} K_3(nx) + \frac{Q_0}{n^3 EJ} K_4(nx), \tag{8.13.31}$$

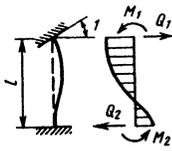
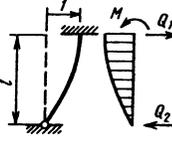
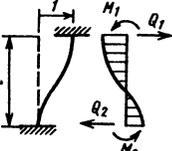
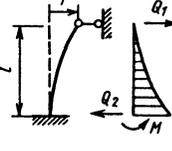
где $n = \sqrt[4]{\theta^2 m / (EJ)}$; $K_i(nx)$ - функции Крылова (8.13.23).

Из граничных условий $y(l) = 0; y'(l) = 0$ для определения M_0 и Q_0 получены два уравнения с двумя неизвестными. После расчета $y(x); M(l) = EJy'(l); Q(l) = EJy''(l)$ находят специальные функции $\psi_i(u)$ (где $u=nl$), приведены в табл. 8.13.2.

8.13.2. Единичные амплитудные реакции стержней для расчета на колебания

Функция	Схема и эпюра момента M	Q	M
$\psi_1(u) = \frac{u}{3} \frac{2shu \sin u}{chu \sin u - shu \cos u};$ $\psi_4(u) = \frac{u^2}{3} \frac{chu \sin u + shu \cos u}{chu \sin u - shu \cos u};$ $\psi_7(u) = \frac{u^2}{3} \frac{shu + \sin u}{chu \sin u - shu \cos u};$		$Q_1 = \frac{3EJ}{l^2} \psi_4(u);$ $Q_2 = \frac{3EJ}{l^2} \psi_7(u)$	$\frac{3EJ}{l} \psi_1(u)$

Продолжение табл. 3.13.2

$\psi_2(u) = \frac{u \operatorname{chu} \sin u - \dots}{4 \quad 1 - \dots} \dots$ $\dots \frac{\dots}{-shu \cos u} \dots$ $\dots \frac{\dots}{-chu \cos u}$ $\psi_3(u) = \frac{u \operatorname{shu} - \sin u}{2 \quad 1 - \operatorname{chu} \cos u};$ $\psi_5(u) = \frac{u^2 \operatorname{shu} \sin u}{6 \quad 1 - \operatorname{chu} \cos u};$ $\psi_6 = \frac{u^2 \operatorname{chu} - \cos u}{6 \quad 1 - \operatorname{chu} \cos u}$		$Q_1 = \frac{6EJ}{l^2} \psi_5(u);$ $Q_2 = \frac{6EJ}{l^2} \psi_6(u)$	$M_1 = \frac{4EJ}{l} \psi_2(u);$ $M_2 = \frac{2EJ}{l} \psi_3(u)$
$\psi_8(u) = \frac{u^3}{3} \frac{2\operatorname{chu} \times \dots}{\operatorname{chu} \sin u - \dots} \dots$ $\dots \frac{\dots}{\sin u \cos u}$ $\psi_9(u) = \frac{u^3}{3} \frac{\operatorname{chu} + \dots}{\operatorname{chu} \sin u - \dots} \dots$ $\dots \frac{\dots}{-shu \cos u}$		$Q_1 = \frac{3EJ}{l^3} \psi_2(u);$ $Q_2 = \frac{3EJ}{l^3} \psi_9(u)$	$\frac{3EJ}{l^2} \psi_4(u)$
$\psi_{10}(u) = \frac{u^3}{12} \frac{\operatorname{chu} \sin u + \dots}{1 - \dots} \dots$ $\dots \frac{\dots}{+shu \cos u};$ $\dots \frac{\dots}{-chu \cos u}$ $\psi_{11}(u) = \frac{u^3}{12} \frac{\operatorname{shu} + \sin u}{1 - \operatorname{chu} \cos u}$		$Q_1 = \frac{12EJ}{l^3} \psi_{10}(u);$ $Q_2 = \frac{12EJ}{l^3} \psi_{11}(u)$	$M_1 = \frac{6EJ}{l^2} \psi_5(u);$ $M_2 = \frac{6EJ}{l^2} \psi_6(u)$
$\psi_{12}(u) = \frac{u^3}{3} \frac{1 + \dots}{\operatorname{chu} \sin u - \dots} \dots$ $\dots \frac{\dots}{+chu \cos u}$ $\dots \frac{\dots}{-shu \cos u}$		$Q_1 = \frac{3EJ}{l^3} \psi_{12}(u);$ $Q_2 = \frac{3EJ}{l^3} \psi_9(u)$	$\frac{3EJ}{l^2} \psi_7(u)$

Примечание: $u = l \sqrt[4]{\theta^2 m / (EJ)}$.

8.13.3. "Грузовые" амплитудные реакции стержней для расчета на колебания

Функция	Схема и эпюра реакции	Q	M
$\Psi_{1p}(u) = \frac{2}{\left(\frac{u}{2}\right)} \frac{\text{ch} \frac{u}{2} - \cos \frac{u}{2}}{\text{ch} \frac{u}{2} \sin \frac{u}{2} + \text{sh} \frac{u}{2} \cos \frac{u}{2}};$ $\Psi_{2p}(u) = \frac{\text{sh} \frac{u}{2} + \sin \frac{u}{2}}{\text{ch} \frac{u}{2} \sin \frac{u}{2} + \text{sh} \frac{u}{2} \cos \frac{u}{2}}$		$0,5 P \Psi_{2p}(u)$	$\frac{Pl}{8} \Psi_{1p}(u)$
$\Psi_{3p}(u) = \frac{12}{u^2} \frac{\text{ch} \frac{u}{2} \sin \frac{u}{2} - \text{sh} \frac{u}{2} \cos \frac{u}{2}}{\text{ch} \frac{u}{2} \sin \frac{u}{2} + \text{sh} \frac{u}{2} \cos \frac{u}{2}};$ $\Psi_{4p}(p) = \frac{2}{u} \frac{-2 \text{sh} \frac{u}{2} \sin \frac{u}{2}}{\text{ch} \frac{u}{2} \sin \frac{u}{2} + \text{sh} \frac{u}{2} \cos \frac{u}{2}}$		$0,5 q l \Psi_{4p}(u)$	$\frac{q l^2}{12} \Psi_{3p}(u)$

Примечание: $u = 0,5nl$; $n = \sqrt[4]{\theta^2 m / (EJ)}$.

Аналогично составляют [42] функции для амплитудных "грузовых" реакций в случае действия внеузловой нагрузки (табл. 8.13.3). Получают систему канонических уравнений с коэффициентами - функциями частоты $r_{ij} = r_{ij}(u) = r_{ij}(\theta)$ - элементами матрицы $R = R(u) = R(\theta)$:

$$R\bar{z} + \bar{R}_p = 0. \tag{8.13.32}$$

Решая эту систему, находят перемещения z_i - элементы вектора \bar{z} . Затем, с помощью формул, приведенных в табл. 8.13.2. и 8.13.3, можно в каждом элементе определить внутренние силы.

Система (8.13.32) имеет единственное решение, если $\theta \neq \omega_i$. Для собственных колебаний $\bar{R}_p = 0$ и уравнения для амплитуд \bar{z} :

$$\begin{aligned} r_{11}z_1 + r_{12}z_2 + \dots + r_{1n}z_n &= 0; \\ \vdots & \\ r_{n1}z_1 + r_{n2}z_2 + \dots + r_{nn}z_n &= 0, \end{aligned}$$

или

$$R\bar{z} = 0,$$

где $r_{ij} = r_{ij}(u) = r_{ij}(\omega)$ $u = l\sqrt[4]{\omega^2 m / (EJ)}$.

Собственные частоты определяют из характеристического уравнения $\text{Det} R = 0$.

Глава 8.14

МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В РАСЧЕТАХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

В прочностных расчетах стержневых систем МКЭ применяют обычно в форме метода перемещений. Элементом системы является стержень. Для простоты изложения рассмотрен случай, когда система состоит из прямых стержней, соединенных в жестких узлах при узловой нагрузке (рис. 8.14.1). Выбрана единая для всей конструкции глобальная система координат. Нагрузка задана в каждом k -м узле вектором \bar{P}_k шестого порядка (проекциями сил и моментов на оси глобальной системы):

$$\bar{P}_k^T = [P_{kx}, P_{ky}, P_{kz}, M_{kx}, M_{ky}, M_{kz}]. \tag{8.14.1}$$

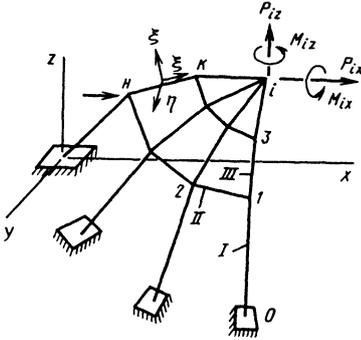


Рис. 8.14.1. Система прямых стержней с узловой нагрузкой в глобальной системе координат

В качестве основных неизвестных в каждом узле приняты шесть перемещений (проекция на оси x, y, z перемещения и угла поворота узла):

$$\bar{z}_k^T = [\Delta_{kx}, \Delta_{ky}, \Delta_{kz}, \Phi_{kx}, \Phi_{ky}, \Phi_{kz}]$$

Общий вектор неизвестных включает все перемещения и повороты узлов

$$\bar{z}^T = [\bar{z}_1^T, \bar{z}_2^T, \dots, \bar{z}_n^T]$$

Для выполнения расчета по недеформированной схеме необходимо сформировать матрицу R жесткости системы по направлению перемещений z_k (или сил P_k), как матрицу реакций для системы с наложенными в каждом узле шестью связями. Она вычисляется и формируется в памяти ЭВМ поэлементно: последовательно формируются матрицы жесткости каждого стержня и из их блоков составляется матрица жесткости системы. При этом учитываются деформации растяжения (сжатия), кручения, изгиба стержней, в общем случае - с учетом сдвигов поперечных сечений при изгибе.

Для отдельного стержня вычисляются элементы его матрицы жесткости в локальной системе координат, связанной с направлениями оси стержня ξ и главных центральных осей η, ζ поперечного сечения (рис. 8.14.2, а).

Для перемещений и поворотов начального и конечного сечений стержня в локальной системе координат (рис. 8.14.2, б) введены обозначения со звездочкой. Например, для перемещений в начале стержня

$$\bar{z}_H^* = [\Delta_\xi^H, \Delta_\eta^H, \Delta_\zeta^H, \varphi_\xi^H, \varphi_\eta^H, \varphi_\zeta^H]$$

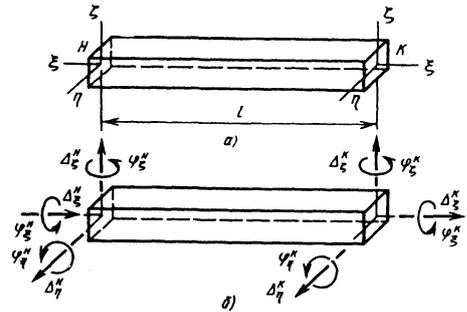


Рис. 8.14.2. Локальная система координат и перемещений

Матрица жесткости элемента, полученная в локальной системе координат, представлена в блочной форме

$$R_{эл}^* = \begin{bmatrix} R_{HH}^* & R_{HK}^* \\ R_{KH}^* & R_{KK}^* \end{bmatrix} \quad (8.14.2)$$

Каждый блок этой симметричной матрицы является матрицей шестого порядка. Элементы вычисляются через заданные жесткости сечений. Например, в табл. 8.14.1 даны формулы для определения элементов матрицы R_{HH}^* . В них учтены сдвиги при изгибе с использованием безразмерных параметров α , зависящих от соотношения соответствующих изгибных и сдвиговых жесткостей в плоскостях ξ, η и ξ, ζ :

$$\alpha_\eta = \left[1 + \frac{12k_\eta EJ_\eta}{l^2 GA} \right]^{-1}; \quad \alpha_\xi = \left[1 + \frac{12k_\xi EJ_\xi}{l^2 GA} \right]^{-1}$$

В выражения для α входят, как и в интегралы Мора (8.10.9), коэффициенты k , зависящие от формы поперечного сечения.

По аналогичным формулам вычисляются и элементы матриц R_{HK}^*, R_{KH}^* [1]. Например, реакция по направлению φ_η^H от единичного

поворота $\varphi_\eta^K = 1$ рассчитывается по формуле $(3\alpha_\eta - 1)EJ_\eta/l$. Для случая плоской системы при допущении отсутствия сдвигов (при $\alpha=1$) матрица жесткости стержня в подвижной системе координат (8.12.29) рассмотрена в гл. 8.12.

8.14.1. Элементы матрицы R_{HH}^*

$\frac{EA}{l}$	0	0	0	0	0
	$\frac{12EJ_\eta}{l^3} \alpha_\eta$	0	0	$\frac{6EJ_\eta}{l^2} \alpha_\eta$	0
		$\frac{12EJ_\xi}{l^3} \alpha_\xi$	0	0	$\frac{6EJ_\xi}{l^2} \alpha_\xi$
			$\frac{GJ_d}{l}$	0	0
Симметрично				$\frac{EJ_\eta}{l} (3\alpha_\eta + 1)$	0
					$\frac{EJ_\xi}{l} (3\alpha_\xi + 1)$

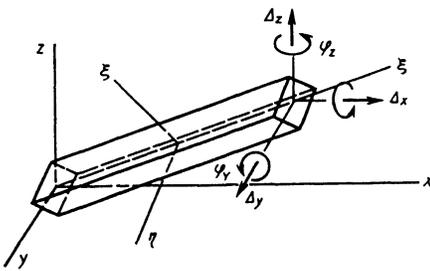


Рис. 8.14.3. Связь локальной и глобальной систем координат

После получения блоков матрицы $R_{эл}^*$ вычисляются соответствующие блоки матрицы жесткости стержня $R_{эл}$ в глобальной системе координат с использованием формул преобразования матрицы квадратичной формы (8.10.27). Перемещения Δ_i и повороты ϕ_i в глобальной системе координат (рис. 8.14.3) связаны с Δ_i^* и ϕ_i^* матрицей C направляющих косинусов. Например,

$$\bar{\Delta}^* = C\bar{\Delta}; \quad C = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix}, \quad (8.14.3)$$

где $l_1 = \cos(\widehat{\xi, x})$; $m_1 = \cos(\widehat{\xi, y})$; $n_1 = \cos(\widehat{\xi, z})$; $l_2 = \cos(\widehat{\eta, x})$ и т.д.

Аналогично, $\bar{\phi}^* = C\bar{\phi}$. Для векторов двенадцатого порядка $\bar{z}_{эл}^* = V\bar{z}_{эл}$. Квазидиагональная матрица

$$V = \begin{bmatrix} C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C \end{bmatrix}, \quad (8.14.4)$$

Согласно (8.10.27) $R_{эл} = V^T R_{эл}^* V$, откуда каждый блок матрицы в глобальной системе координат выражается через соответствующие блоки матрицы (8.14.2):

$$R_{HH} = \begin{bmatrix} C^T & 0 \\ 0 & C^T \end{bmatrix} R_{HH}^* \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}; \quad (8.14.5)$$

$$R_{HK} = \begin{bmatrix} C^T & 0 \\ 0 & C^T \end{bmatrix} R_{HK}^* \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \text{ и т.д.,}$$

8.14.3. Приближенные зависимости для определения реакций при расчете систем на гармонические колебания

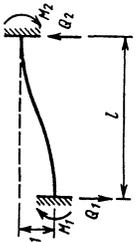
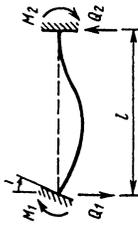
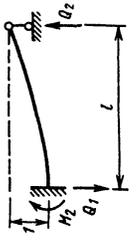
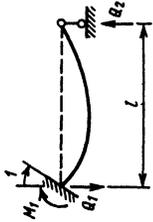
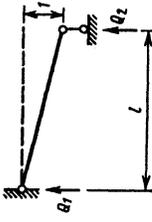
Схема	M_1	M_2	Q_1	Q_2
	$\frac{6EJ}{l^2} - \frac{11ml^2}{210}\theta^2$	$\frac{6EJ}{l^2} + \frac{13ml^2}{420}\theta^2$	$\frac{12EJ}{l^3} - \frac{13ml}{35}\theta^2$	$\frac{12EJ}{l^3} + \frac{9ml}{70}\theta^2$
	$\frac{4EJ}{l} - \frac{ml^3}{105}\theta^2$	$\frac{2EJ}{l} + \frac{ml^3}{140}\theta^2$	$\frac{6EJ}{l^2} - \frac{11ml^2}{210}\theta^2$	$\frac{6EJ}{l^2} + \frac{13ml}{420}\theta^2$
	$\frac{3EJ}{l^2} - \frac{3ml^2}{35}\theta^2$	0	$\frac{3EJ}{l^3} - \frac{17ml}{35}\theta^2$	$\frac{3EJ}{l^3} + \frac{39ml}{280}\theta^2$

Схема	M_1	M_2	Q_1	Q_2
	$\frac{3EJ}{l} - \frac{2ml^2}{105}\theta^2$	0	$\frac{3EJ}{l^2} - \frac{3ml}{35}\theta^2$	$\frac{3EJ}{l^2} + \frac{11ml^2}{280}\theta^2$
	$\frac{3EJ}{l^2} + \frac{11ml^2}{280}\theta^2$	0	$\frac{3EJ}{l^3} + \frac{39ml}{280}\theta^2$	$\frac{3EJ}{l^3} - \frac{33ml}{140}\theta^2$
	0	0	$\frac{ml}{6}\theta^2$	$\frac{ml}{3}\theta^2$

где C^T - матрица, транспонированная к C .

Из блоков (8.14.5) формируются, по мере обработки всех элементов, соответствующие блоки шестого порядка R_{jk} матрицы системы

$$R = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots \\ R_{21} & R_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (8.14.6)$$

Например, блок R_{11} , соответствующий узлу I системы (см. рис. 8.14.1), выражается через блоки матриц жесткостей трех примыкающих элементов I, II и III:

$$R_{11} = R_{kk}^I + R_{nn}^{II} + R_{nn}^{III} \quad \text{Аналогично,}$$

$$R_{12} = R_{nk}^{II} \text{ и т.д.}$$

Из элементов матрицы R составляется система уравнений МКЭ

$$R\bar{z} = \bar{P}, \quad (8.14.7)$$

где $\bar{P}^T = [\bar{P}_1^T, \bar{P}_2^T, \dots, \bar{P}_n^T]$ - вектор узловых нагрузок.

Если нагрузка приложена к элементам, то вычисленные по стандартным формулам метода перемещения реакции \bar{R}_p^* в локальной системе координат преобразуются в реакции в глобальной системе $\bar{R}_p = V^T \bar{R}_p^*$ и получается вектор узловых сил $\bar{P} = -\bar{R}_p$ [2]. Решением системы (8.14.7) являются элементы вектора \bar{z} перемещения z_i . Практически в памяти ЭВМ вся матрица R не формируется. Ввиду ее симметрии и большого числа нулевых элементов вычисляются и запоминаются только элементы ненулевых блоков, находящихся на главной диагонали и выше (или ниже) ее [17].

Решение системы (8.14.7) производится по специальным программам, составленным для МКЭ и учитывающим специфику матриц жесткостей. Все вычисления обычно проводятся с двойной точностью (двойной мантиссой чисел), так как матрицы обширных систем МКЭ близки к особенным (вырожденным) [13, 46].

Через найденные перемещения и повороты узлов вычисляются для каждого стержня внутренние силы, перемещения крайних сечений в локальной системе $\bar{\Delta}^* = C\bar{\Delta}$; $\bar{\varphi}^* = C\varphi$. Затем по формулам метода перемещений определяются внутренние силы. Например, при узловой нагрузке

$$N = \frac{EA}{l} (\Delta_\xi^k - \Delta_\xi^H);$$

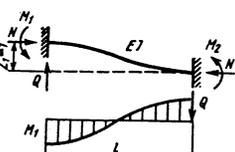
$$M_{kp} = \frac{GJ_d}{l} (\varphi_\xi^k - \varphi_\xi^H);$$

$$M_\eta^H = \frac{EJ_\eta}{l} \left[(3\alpha_\eta + 1)\varphi_\eta^H + (3\alpha_\eta - 1)\varphi_\eta^k \right] + \frac{6EJ_\eta}{l^2} \alpha_\eta (\Delta_\xi^H - \Delta_\xi^k) \pm \text{и т.д.}$$

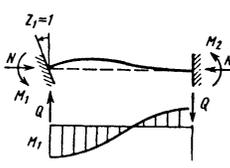
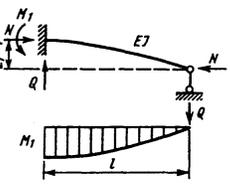
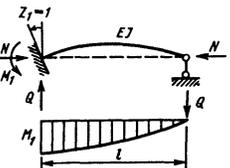
При нагрузке, приложенной к стержням, к внутренним силам добавляются силы, полученные в основной системе метода перемещений.

В решении по МКЭ задач устойчивости и расчета стержневых систем по деформированной схеме для вычисления жесткостей стержней с учетом продольно-поперечного изгиба часто используют приближенные формулы [5], приведенные в табл. 8.14.2. Аналогично в расчетах стержневых систем на гармонические колебания применяют приближенные выражения, приведенные в табл. 8.14.3.

8.14.2. Приближенные зависимости и эпюры моментов для определения реакций сжатого стержня для расчета на устойчивость

Схема, эпюра момента	M_1	M_2	Q
	$\frac{6EJ}{l^2} - \frac{\bar{N}}{10} = M_1 = M_2$		$\frac{12EJ}{l^3} - \frac{6\bar{N}}{5l}$

Продолжение табл. 8.14.2

Схема, эпюра момента	M_1	M_2	Q
	$\frac{4EJ}{l} - \frac{2\bar{N}l}{15}$	$\frac{2EJ}{l} + \frac{\bar{N}l}{30}$	$\frac{6EJ}{l^2} - \frac{\bar{N}}{10}$
	$\frac{3EJ}{l^2} - \frac{\bar{N}}{5}$	0	$\frac{3EJ}{l^3} - \frac{6\bar{N}}{5l}$
	$\frac{3EJ}{l} - \frac{\bar{N}l}{5}$	0	$\frac{3EJ}{l^2} - \frac{\bar{N}}{5}$

Примечание: $\bar{N} = N / P$, где P - основной параметр нагрузки.

Глава 8.15

НЕЛИНЕЙНО ДЕФОРМИРУЕМЫЕ СТЕРЖНЕВЫЕ СИСТЕМЫ (ПЛАСТИЧНОСТЬ, ПОЛЗУЩЕСТВО, СИСТЕМЫ ГИБКИХ СТЕРЖНЕЙ И НИТЕЙ)

8.15.1. УПРУГОПЛАСТИЧЕСКАЯ СТАДИЯ

При расчете стержневых систем в упругопластической стадии деформирования материала каждый стержень разбивают по длине на стержневые элементы, число которых зависит от требуемой точности, применяемого алгоритма расчета и возможностей ЭВМ.

Решение нелинейной задачи проводится методом последовательных приближений с использованием одного из вариантов метода упругих решений (см. п. 8.7.3). Если выбрана форма метода дополнительных нагрузок, то итерационный процесс строится как последовательность расчетов линейно-упругой стержневой системы под действием заданных и дополнительных ("фиктивных") нагрузок, обусловленных развитием пластических деформаций. Взаимосвязь вектора узловых перемеще-

ний \bar{Z}' и вектора реакций в связях, наложенных на концах стержневых элементов, в локальной системе координат выражается уравнением

$$\bar{R}' = R' \bar{Z}' + \bar{R}'_*$$

где R' - матрица жесткости упругого стержневого элемента с модулем упругости E ; \bar{R}'_* - вектор дополнительных реакций в связях, вызванных пластическими деформациями.

Порядок формирования вектора \bar{R}'_* можно проследить на примере элемента плоской стержневой системы. На рис. 8.15.1 показан стержень с местной системой координат и положительным направлением реакций в связях. Компоненты вектора \bar{R}'_* определяются следующим образом:

$$R'_{1*} = a_1 - 2a_2; R'_{2*} = -a_3; R'_{3*} = \frac{3}{l}(-a_1 + a_2);$$

$$R'_{4*} = 2a_1 - a_2; R'_{5*} = a_3; R'_{6*} = \frac{3}{l}(a_1 - a_2).$$

Здесь

$$a_1 = \frac{2}{l^2} \int_0^l M_\omega(\xi) \xi d\xi;$$

$$a_2 = \frac{2}{l} \int_0^l M_\omega(\xi) \left(1 - \frac{\xi}{l}\right) d\xi;$$

$$a_3 = \frac{1}{l} \int_0^l N_\omega(\xi) d\xi;$$

$$M_\omega(\xi) = E \int_A \omega(\varepsilon) \eta dA;$$

$$N_\omega(\xi) = E \int_A \omega(\varepsilon) dA;$$

$$\sigma = E[\varepsilon - \omega(\varepsilon)];$$

A - площадь поперечного сечения стержня.

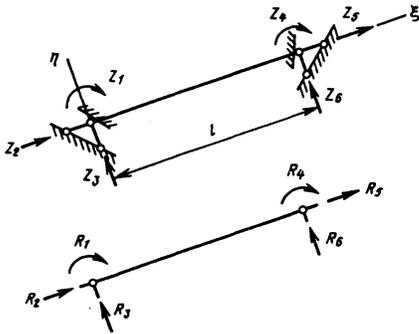


Рис. 8.15.1. Местная система координат и положительное направление реакций в связях

Приведение вектора \bar{R}_* к общей системе координат осуществляется точно так же, как вектора \bar{Z}' . Вектор \bar{Z} узловых перемещений в общей системе координат для заданной стержневой системы определяется из нелинейных уравнений

$$\mathbf{B}\bar{Z} = \bar{P} - \bar{R}_*, \quad (8.15.1)$$

где \mathbf{B} - матрица жесткости линейно-упругой стержневой системы; \bar{P} - вектор внешних узловых нагрузок; \bar{R}_* - вектор дополнительных узловых нагрузок, зависящий от вектора \bar{Z} .

Вначале рассматривается линейно-упругая стержневая система ($\bar{R}_* = 0$) и для нее находится вектор $\bar{Z}^{(0)}$, а также внутренние усилия в элементах системы, после чего для нескольких сечений по длине стержневого элемента вычисляются осевая деформация и кривизна (см. п. 8.7.3). В пределах поперечного сечения находятся функция $\omega(\varepsilon)$, дополнительные изгибающие моменты M_ω , нормальные силы N_ω , величины a_1, a_2, a_3 и реакции $R_{i*}^{(0)}$. В результате формируется новая система уравнений

$$\mathbf{B}\bar{Z}^{(1)} = \bar{P} - \bar{R}_*^{(0)}.$$

Для произвольной итерации это равенство обобщается следующим образом:

$$\mathbf{B}\bar{Z}^{(n)} = \bar{P} - \bar{R}_*^{(n-1)}.$$

Усилия, возникающие по концам стержня,

$$M_H = -\frac{4EJ}{l} Z'_1 + \frac{6EJ}{l^2} Z'_3 - \frac{2EJ}{l} Z'_4 - \frac{6EJ}{l^2} Z'_6 - a_1 + 2a_2;$$

$$M_K = \frac{2EJ}{l} Z'_1 - \frac{6EJ}{l^2} Z'_3 + \frac{4EJ}{l} Z'_4 + \frac{6EJ}{l^2} Z'_6 + 2a_1 - a_2;$$

$$N = -\frac{EA}{l} Z'_2 + \frac{EA}{l} Z'_5 + a_3.$$

Итерационный процесс может быть построен с использованием метода переменных параметров упругости [30]. В этом случае каждый стержень системы рассматривается как неоднородно-упругий, модуль упругости которого изменяется по длине и высоте поперечного сечения. Значения модуля уточняются в процессе последовательных приближений. Вектор \bar{Z} в n -й итерации находится из системы уравнений

$$\mathbf{B}\left(Z^{(n-1)}\right)\bar{Z}^{(n)} = \bar{P}. \quad (8.15.2)$$

Причем начальное приближение $\bar{Z}^{(0)}$ соответствует решению линейно-упругой задачи.

Принципиальное отличие решений уравнений (8.15.1) и (8.15.2) заключается в том,

что в первом случае матрица \mathbf{B} коэффициентов не меняется в процессе последовательных приближений, а во втором случае на каждой итерации формируется новая матрица жесткости $\mathbf{B}(Z)$. Если решение системы уравнений выражено через обратную матрицу \mathbf{B}^{-1} , то в системе (8.15.1) достаточно обратить ее только один раз, в то время как в системе (8.15.2) матрица $\mathbf{B}(Z)$ должна обращаться на каждой итерации. Хотя метод переменных параметров упругости, как правило, требует выполнения меньшего числа приближений для получения решения с требуемой точностью, он может оказаться менее эффективным по сравнению с методом дополнительных нагрузок в связи с дополнительными затратами времени на обращение матрицы $\mathbf{B}(Z)$.

8.15.2. ПОЛУЧЕСТЬ

Расчет стержневой системы в условиях установившейся ползучести, описываемой соотношением $\dot{\varepsilon} = f(\sigma)$, проводится итерационным методом, который строится точно так же, как метод упругих решений при расчете системы в упругопластической стадии при замене деформаций и узловых перемещений их скоростями (см. пп. 8.8.2, 8.15.1). В случае неустановившейся ползучести, для которой справедлива зависимость

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\sigma} / E + f(\sigma), \quad (8.15.3)$$

расчет стержневой системы выполняется шаговым методом. Шаговый метод реализуется совместно с методом упругих решений в форме дополнительных нагрузок (см. пп. 8.8.2, 8.7.3, 8.15.1):

$$\mathbf{B}\Delta\bar{Z}(t_{i+1}) = \Delta\bar{P}(t_{i+1}) - \Delta\bar{R}_*,$$

где \mathbf{B} - матрица жесткости упругой системы;

$$\Delta R_* = a_1 - 2a_2, \dots,$$

$$a_1 = \frac{2}{l^2} \int_0^l M_f(\theta, \xi) \xi d\xi, \dots;$$

$$M_f(\theta, \xi) = E \int_A f[\sigma(\theta)] \eta dA \Delta t, \dots,$$

$$t_i \leq \theta \leq t_{i+1}.$$

Аналогично, но уже по отношению к полным перемещениям $Z(t)$, деформациям $\varepsilon(t)$ и напряжениям $\sigma(t)$, для повышения точности можно выполнить расчет в условиях

неустановившейся ползучести, если уравнение (8.15.3) представить в интегральной форме

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E} + \int_0^t f[\sigma(\tau)] d\tau.$$

Тогда

$$\mathbf{B}\bar{Z}(t_{i+1}) = \bar{P}(t_{i+1}) - \bar{R}_*(t_{i+1}).$$

Здесь

$$R_{1*}(t_{i+1}) = a_1 - 2a_2, \dots;$$

$$a_1 = \frac{2}{l^2} \int_0^l M_f(t_{i+1}, \xi) \xi d\xi, \dots;$$

$$M_f(t_{i+1}, \xi) = E \sum_{k=0}^{i+1} \Delta t c \int_A f[\sigma(t_k)] \eta dA;$$

c - коэффициент квадратурной формулы.

При линейной ползучести

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t) - \int_0^t \Gamma(t-\tau)\sigma(\tau) d\tau.$$

Разрешающая система уравнений относительно узловых перемещений

$$\mathbf{B}\bar{Z}(t) - \int_0^t \mathbf{B}_*(t-\tau)\bar{Z}(\tau) d\tau = \bar{P}(t), \quad (8.15.4)$$

где $\mathbf{B}_*(t-\tau)$ - матрица жесткости стержневой системы, обусловленная вязкими свойствами материала.

Матрица $\mathbf{B}_*(t-\tau)$ формируется точно так же, как матрица \mathbf{B} с заменой модуля упругости на ядро релаксации $\Gamma(t-\tau)$.

Система линейных уравнений (8.15.4) решается путем сведения к системе рекуррентных алгебраических уравнений с заменой интегралов суммами в соответствии с одной из квадратурных формул или с методом Крылова-Боголюбова [20]. Усилия в стержнях определяются исходя из решений для упругих систем с использованием принципа Вольтерры.

8.15.3. ОСОБЕННОСТИ РАСЧЕТА ПРИ КОНЕЧНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ

Простейший элемент в виде пространственного, шарнирно присоединенного к узлам стержня используется для расчета различных конструкций, получающих большие перемещения под нагрузкой [2]. За неизвестные принимаются декартовы координаты узлов стержневой системы. В этом случае для реализации итерационного решения по Ньютону

необходимо определить концевые реакции в стержне и касательную матрицу жесткости. Пусть l_0 - длина заготовки стержня; $l = \sqrt{(x_k - x_n)^2 + (y_k - y_n)^2 + (z_k - z_n)^2}$ - длина стержня в растянутом состоянии; x_n, y_n, z_n и x_k, y_k, z_k - декартовы координаты начальной и конечной точек стержня. Если предположить, что стержень при растяжении подчиняется закону Гука, то растягивающее усилие в нем

$$N = EA(l - l_0)/l_0. \quad (8.15.5)$$

Шесть составляющих усилий, действующих по концам стержня, получаются как проекции продольной силы N на координатные оси:

$$\begin{aligned} R_{xн} &= -N \cos \alpha; & R_{yн} &= -N \cos \beta; \\ R_{zн} &= -N \cos \gamma; \\ R_{xк} &= N \cos \alpha; & R_{yк} &= N \cos \beta; & R_{zк} &= N \cos \gamma, \end{aligned} \quad (8.15.6)$$

где $\cos \alpha = (x_k - x_n)/l$; $\cos \beta = (y_k - y_n)/l$; $\cos \gamma = (z_k - z_n)/l$.

Касательная матрица жесткости стержня $[r]_{6 \times 6}$ получится дифференцированием концевых реакций по координатам:

$$[r] = \begin{bmatrix} a & -a \\ -a & a \end{bmatrix}.$$

Здесь

$$[a] = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} \frac{l}{l_0} - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma & \cos \alpha \cos \beta & \cos \alpha \cos \gamma \\ \cos \alpha \cos \beta & \frac{l}{l_0} - \cos^2 \alpha - \cos^2 \gamma & \cos \beta \cos \gamma \\ \cos \alpha \cos \gamma & \cos \beta \cos \gamma & \frac{l}{l_0} - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta \end{bmatrix}. \quad (8.15.7)$$

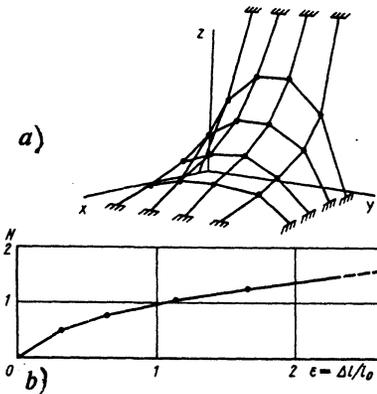


Рис. 8.15.2. К расчету пространственной

нитевой системы с шарнирными узлами:

- a* - равновесное положение системы при смещении опорных точек вдоль одной из сторон;
б - принятая диаграмма растяжения

Приведенных зависимостей достаточно для построения итерационного процесса по Ньютону, позволяющего отыскать равновесное положение системы. Следует отметить, что геометрически нелинейная стержневая система обладает, как правило, множеством равновесных форм, соответствующих одному уровню

нагрузки. Эти формы могут быть как устойчивые, так и неустойчивые.

Возможно рассмотрение более сложной зависимости между растягивающим усилием и удлинением стержня, принятой вместо закона Гука. Простейшим вариантом такой зависимости является нелинейная упругость $N = f(\Delta l / l_0)$. Для равновесной формы стержневой сетки, которую она получает при смещении опорных точек одной из сторон, на рис. 8.15.2 показан принятый в расчете вид зависимости $N = f(\Delta l / l_0)$.

Алгоритм исследования больших перемещений плоской стержневой системы с изгибаемыми элементами [51] является естественным развитием метода перемещений, реализуемого на ЭВМ, или МКЭ. Кроме действительных узлов системы необходимо ввести фиктивные узлы вдоль стержней. Число дополнительных узлов зависит от требуемой точности решения и возможностей ЭВМ. За неизвестные принимаются углы поворота и поступательные смещения узлов. Узловые реакции по концам стержневого элемента

$$M_n = (2\beta_n + \beta_k) 2EJ / l_0;$$

$$R_{\varepsilon н} = -EA(l - l_0)/l_0;$$

$$R_{\eta н} = (\beta_k - \beta_n) 6EJ / (l_0 l);$$

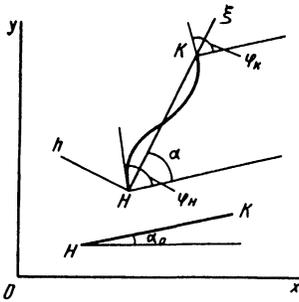


Рис. 8.15.3. Схема расчета изгибаемого стержня в условиях больших перемещений

$$M_K = (2\beta_K - \beta_H)2EJ / l_0;$$

$$R_{\xi K} = EA(l - l_0)/l_0;$$

$$R_{\eta K} = -(\beta_H - \beta_K)6EJ / (ll_0),$$

где $\beta_H = \varphi_H - (\alpha - \alpha_0)$, $\beta_K = \varphi_K - (\alpha - \alpha_0)$ - углы, определяющие изгиб стержня (рис. 8.15.3); $(\alpha - \alpha_0)$ - угол поворота местной оси ξ относительно начального положения.

Касательная матрица жесткости в местных осях $[r^*]$ получается как сумма двух матриц:

$$[r^*] = [r^*]_y + [r^*]_{\text{вн}}$$

Причем $[r^*]_y$ - матрица, практически совпадающая с обычной матрицей жесткости для изгибаемого стержня. Матрица $[r^*]_{\text{вн}}$ определяется тем, что при малых поворотах оси ξ концевые реакции, существующие в стержне, изменяют свое направление. Она имеет вид

$$[r^*]_{\text{вн}} = \begin{bmatrix} b & -b \\ -b & b \end{bmatrix},$$

причем

$$[b] = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q \\ 0 & Q & N \end{bmatrix},$$

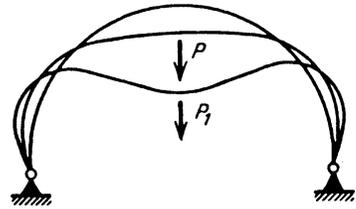


Рис. 8.15.4. Равновесные формы упругой арки при больших перемещениях

где N и Q - соответственно продольная и поперечная сила в стержне.

Переход от местных осей к общим для концевых усилий и касательной матрицы жесткости осуществляется по обычным в МКЭ формулам, но направляющие косинусы угла α должны вычисляться через координаты концов стержня в текущий момент решения.

На рис. 8.15.4 показаны большие прогибы арки при действии сосредоточенной силы, которые определялись изложенным методом. Следует отметить метод "стрельбы" для подобных задач [52], который позволяет существенно уменьшить число неизвестных, исключив промежуточные узлы по длине стержня.

8.15.4. ГИБКИЕ НИТИ

При проектировании вантовых систем наибольший интерес представляют такие методы, которые позволяют учесть изменяющуюся под нагрузкой геометрию системы, упругую растяжимость нитей, зависимость ветровой нагрузки от ориентации нити в данной точке, температурное воздействие. Решения необходимо выполнять для пространственных систем с большим числом узлов и произвольной топологией [19, 51].

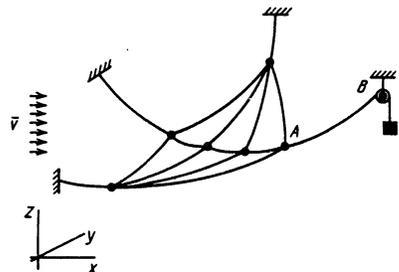


Рис. 8.15.5. Пространственная система из гибких нитей, содержащая нити заданной длины заготовки и нить заданного натяжения (нить A - B)

За неизвестные принимают декартовы координаты узлов системы (точки на рис. 8.15.5). Выбирают некоторое начальное приближение для координат \bar{x}_0 незакрепленных узлов и применяют метод Ньютона для последовательного уточнения этих координат. Основная, наиболее сложная задача, которую приходится решать многократно для каждого нитевого элемента, заключается в определении конечных усилий, соответствующих положению концов нити.

Для решения этой задачи могут быть использованы различные численные алгоритмы. Так, ветровую нагрузку принимают постоянной, а нить - лежащей в одной плоскости и занимающей положение, определяемое уравнением цепной линии [51]. Параметры цепной линии находят по специальному итерационному методу. Другой способ расчета нитевого элемента основан на методе "стрельбы" [19].

Для построения касательной матрицы жесткости применяют численный подход, который заключается в том, что концевые точки нити получают последовательно малые смещения вдоль координатных осей, для которых вычисляются концевые реакции. Приращения концевых реакций после деления на приращения соответствующих концевых смещений дают численные значения элементов касательной матрицы жесткости. Следует отметить, что при наличии неконсервативной ветровой нагрузки касательная матрица жесткости не является симметричной.

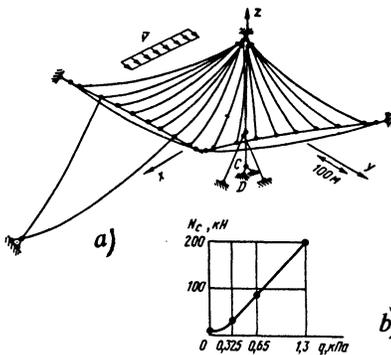


Рис. 8.15.6. Пространственная нитевая система с параметрами, соответствующими реальному сооружению:

а - равновесная форма системы; б - расчетная нелинейная зависимость растягивающего усилия в нити CD от интенсивности ветровой нагрузки

В ряде вантовых конструкций содержатся нитевые элементы с нитями постоянного тяжения (нить AB , рис. 8.15.5). В этих системах имеет место множественность форм равновесия. Известны методики получения касатель-

ной матрицы жесткости в таком элементе [18, 19].

На рис. 8.15.6 показаны нитевая система с параметрами, соответствующими реальному сооружению, и изменение растягивающего усилия N_C в нити CD в зависимости от интенсивности q ветровой нагрузки [19].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров А.В., Лещенков Б.Я., Шапошников Н.Н. Строительная механика. Тонкостенные пространственные системы. М.: Стройиздат, 1983. 458 с.
2. Александров А.В., Шапошников Н.Н., Зылев В.Б. О совершенствовании методов расчета висячих конструкций // Строительная механика и расчет сооружений. 1985. N 4. С. 31-35.
3. Арутюнян Н.Х., Абрамян Б.Л. Кручение упругих тел. М.: Физматгиз, 1963. 686 с.
4. Бицено К.Б., Граммель Р. Техническая динамика Т.1. М.-Л.: ГИИТЛ, 1950. 900 с.
5. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. М.: Гостеортехиздат, 1956. 600 с.
6. Васильев В.В. Механика конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988. 270 с.
7. Власов В.З. Тонкостенные упругие стержни. М.: Физматгиз, 1959. 566 с.
8. Власов В.З., Леонтьев Н.Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1960. 480 с.
9. Горбунов-Посадов М.Н. Расчет конструкций на упругом основании. М.: Стройиздат, 1984. 680 с.
10. Григолюк Э.И., Чулков П.П. Устойчивость и колебания трехслойных оболочек. М.: Машиностроение, 1973. 170 с.
11. Дарков А.В., Шапошников Н.Н. Строительная механика. М.: Высшая школа, 1986. 607 с.
12. Джанелидзе Г.Ю., Пановко Я.Г. Статика упругих тонкостенных стержней. М.: Гостехиздат, 1948. 208 с.
13. Джордж А., Лю Дж. Численное решение больших разреженных систем уравнений. М.: Мир, 1984. 383 с.
14. Дикович И.Л. Динамика упругопластических балок. Л.: Судпромгиз, 1962. 292 с.
15. Дьячков А.Н. Продольный изгиб. Кручение. М.: Изд-во АН СССР, 1955. 392 с.
16. Дукельский А.И. Подземные канатные дороги и кабельные краны. М.: Машгиз, 1951. 290 с.
17. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 541 с.
18. Зылев В.Б., Соловьев Г.П., Штейн А.В. Расчет нитевых систем, содержащих нити

- постоянного натяжения // Строительная механика и расчет сооружений. 1985. N 1. С. 31-33.
19. **Исследование сложной нелинейно-нестабильной системы** / В.Б. Зылев, Г.П. Соловьев, А.В. Штейн, А.Д. Вяжлинский// Межвуз. сб. МИИТ, 1984. Вып. 749. С. 28-35.
20. **Кавторович Л.В., Крылов В.И.** Приближенные методы высшего анализа. М. - Л.: Физматгиз, 1962. 708 с.
21. **Качанов Л.М.** Теория ползучести. М.: Физматгиз, 1960. 456 с.
22. **Качурин В.К.** Гибкие нити с малыми стрелками. М.: ГИТТЛ, 1956 с. 224 с.
23. **Лейбензон Л. С.** Вариационные методы решения задач теории упругости. М. - Л.: ОГИЗ-ГИТТЛ, 1943. 288 с.
24. **Малинин Н.Н.** Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1975. 400 с.
25. **Москвитин В.В.** Пластичность при переменных нагрузениях. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1965. 264 с.
26. **Мухелишвили Н.И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 708 с.
27. **Нейбер Г.** Концентрация напряжений. М. - Л.: ОГИЗ-ГИТТЛ, 1947. 204 с.
28. **Новожилов В.В.** Теория упругости. Л.: Судпромгиз, 1958. 372 с.
29. **Попов Е.П.** Нелинейные задачи статики тонких стержней. М.: Гостехиздат, 1948. 172 с.
30. **Постнов В.А., Хархуриш И.Я.** Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. Л.: Судостроение, 1974. 344 с.
31. **Прочность, устойчивость, колебания:** Справочник. Т.1. М.: Машиностроение, 1968. 831 с.
32. **Прочность, устойчивость колебания:** Справочник. Т.3. М.: Машиностроение, 1968. 568 с.
33. **Расчеты на прочность в машиностроении/ С.Д. Пономарев, В.Л. Бидерман, К.К. Лихарев и др.** Т.1. М.: Машгиз, 1956. 884 с.
34. **Резников Р.А.** Методы решения задач строительной механики на электронных цифровых машинах. М.: Изд-во лит-ры по строитель-ву, 1964. 365 с.
35. **Ржаницын А.Р.** Составные стержни и пластины. М.: Стройиздат, 1986. 316 с.
36. **Ржаницын А.Р.** Строительная механика. М.: Высшая школа, 1982. 400 с.
37. **Розин Л.А.** Стержневые системы как системы конечных элементов. Л.: Изд-во ЛГУ, 1976. 237 с.
38. **Светлицкий В.А.** Механика стержней. Т.1. М.: Высшая школа, 1987. 320 с.
39. **Смирнов А.Ф.** Устойчивость и колебания сооружений. М.: Трансжелдориздат, 1958. 571 с
40. **Смирнов В.А.** Висячие мосты больших пролетов. М.: Высшая школа, 1975. 368 с.
41. **Справочник проектировщика, расчетно-теоретический /** Под ред. А.А. Уманского. М.: Стройиздат, 1973. 415 с.
42. **Строительная механика: Динамика и устойчивость сооружений/ А.Ф. Смирнов, А.В. Александров, Б.Я. Лащеников, Н.Н. Шапошников.** М.: Стройиздат, 1984. 416 с.
43. **Строительная механика: Стержневые системы/ А.Ф. Смирнов, А.В. Александров, Б.Я. Лащеников, Н.Н. Шапошников.** М.: Стройиздат, 1981. 510 с.
44. **Уилкинсон, Райни.** Справочник алгоритмов на языке АЛГОЛ: Линейная алгебра. М.: Машиностроение, 1976. 389 с.
45. **Уманский А.А.** Изгиб и кручение тонкостенных авиаконструкций. М: Оборонгиз, 1939. 256 с.
46. **Уманский А.А.** О нормальных напряжениях при кручении крыла самолета //Техника воздушного флота. 1940. N 12. С. 18-24.
47. **Урбан И.В.** Теория расчета стержневых тонкостенных конструкций. М.: Трасжелдориздат, 1955. 194 с.
48. **Феодосьев В.И.** Сопrotивление материалов. М.: Наука, 1986. 511 с.
49. **Cook R.D.** Concepts and applications of finite element analyse. Wiley. N.Y. 1974. 421 p.
50. **Miller R.E.** Numerical analysis of a generalized plane elastica. International journal for numerical methods in engineering. 1980. Vol. 15. P.325-332.
51. **Peyrot A.H., Goulois A.M.** Analysis of cabl structur.// Computers in Structures. 1979. Vol. 10. P. 805-813.

Раздел 9

ПЛАСТИНЫ И ОБОЛОЧКИ

Глава 9.1

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

9.1.1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ГИПОТЕЗЫ

Оболочкой принято называть тело, ограниченное двумя произвольными лицевыми криволинейными поверхностями, расстояние между которыми мало по сравнению с другими размерами.

В качестве координатной поверхности в теории оболочек обычно принимают срединную поверхность, равноотстоящую от лицевых поверхностей. К срединной поверхности приводятся все внутренние силы в оболочке, а также внешние распределенные и сосредоточенные силы. Перемещения и деформации оболочки ввиду принятых кинематических гипотез полностью определяются поведением срединной поверхности. Таким образом, задача расчета трехмерного тела сводится к двумерной.

Для оболочек несимметричной структуры по толщине в качестве координатной поверхности рассматривают, как правило, не срединную, а некоторую другую поверхность, положение которой определяется дополнительными условиями. Толщина оболочки может быть как постоянной, так и переменанной. Граничный контур определяет область, внутри которой находят напряжения и перемещения точек срединной поверхности оболочки.

Пластина является частным случаем оболочки, ее срединная поверхность - плоскость.

Оболочки различают в зависимости от отношения толщины к радиусу кривизны h/R . Наиболее известной и получившей широкое распространение в практических расчетах является модель тонкой оболочки. Рассматривают также оболочки средней толщины и весьма тонкие оболочки (мягкие). Каждому виду оболочки соответствуют свои гипотезы расчета. Такое разделение оболочек не является вполне определенным и границы его недостаточно четкие.

Приближенно считается, что когда $h/R \ll 1$, то оболочку можно считать тонкой [26]. Теория тонких оболочек основана на гипотезах Кирхгофа-Лява, которые формулируются следующим образом:

1) прямолинейные волокна оболочки, перпендикулярные к ее срединной поверхности до деформации, остаются такими же (прямолинейными и перпендикулярными) к изогнутой срединной поверхности после деформации;

2) длина волокон, перпендикулярных к срединной поверхности, не меняется при деформации;

3) нормальные напряжения на площадках, параллельных срединной поверхности, пренебрежимо малы по сравнению с другими напряжениями.

В соответствии с первой гипотезой углы поперечного сдвига равны нулю, а касательные напряжения, перпендикулярные к срединной поверхности, рассматриваются как чисто статические факторы. Они определяются из уравнений равновесия, а их связь с составляющими деформаций не учитывается.

Теории оболочек средней толщины и мягких оболочек построены на основе гипотез, рассмотренных в гл. 9.14 и 9.9.

9.1.2. ГЕОМЕТРИЯ ОБОЛОЧЕК

Форма срединной поверхности, толщина и граничный контур полностью определяют геометрию оболочки. В прямоугольной системе координат уравнение срединной поверхности

$$F(x, y, z) = 0. \quad (9.1.1)$$

Разрешение этого уравнения относительно одной из координат дает явную зависимость

$$z = f(x, y). \quad (9.1.2)$$

Удобным способом задания поверхности является представление

$$\begin{aligned} x &= x(\alpha, \beta); \\ y &= y(\alpha, \beta); \\ z &= z(\alpha, \beta). \end{aligned} \quad (9.1.3)$$

Независимые параметры α и β , определяющие параметрические линии на поверхности (рис. 9.1.1), получаются, если в (9.1.3) положить $\alpha = \text{const}$ или $\beta = \text{const}$. Каждой паре значений α и β отвечает точка на поверхности. Линии $\alpha = \text{const}$ и $\beta = \text{const}$ образуют на поверхности криволинейную координатную сеть. В теории оболочек в координатах α, β обычно записывают уравнения равновесия и геометрические соотношения.

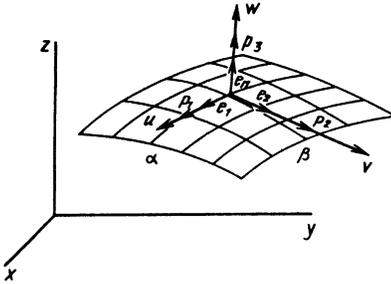


Рис. 9.1.1. Координатные линии на поверхности, положительные направления перемещений, поверхностных сил и единичных векторов e_1, e_2, e_n .

Квадрат длины дуги ds на поверхности определяет первую квадратичную форму:

$$ds^2 = A^2 d\alpha^2 + 2AB\omega d\alpha d\beta + B^2 d\beta^2. \quad (9.1.4)$$

Коэффициенты A и B называют параметрами Ляме:

$$A^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \alpha}\right)^2;$$

$$AB\omega = \frac{\partial x}{\partial \alpha} \frac{\partial x}{\partial \beta} + \frac{\partial y}{\partial \alpha} \frac{\partial y}{\partial \beta} + \frac{\partial z}{\partial \alpha} \frac{\partial z}{\partial \beta}; \quad (9.1.5)$$

$$B^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \beta}\right)^2,$$

где ω - косинус угла между касательными к линиям α и β на поверхности; для сетки ортогональных линий $\omega = 0$.

Параметры Ляме связаны с коэффициентами первой квадратичной формы соотношениями: $A^2 = E$; $B^2 = G$; $AB\omega = F$. Если уравнение поверхности имеет вид (9.1.2), то коэффициенты

$$A^2 = 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2;$$

$$AB\omega = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}; \quad (9.1.6)$$

$$B^2 = 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2.$$

Если в некоторой точке поверхности провести нормальные сечения, то кривизна каждой линии в соответствующих сечениях может быть найдена из соотношения (9.1.3) с помощью коэффициентов $A, B, AB\omega$, а также коэффициентов второй квадратичной формы L, M, N :

$$\frac{1}{R} = - \frac{Ld\alpha^2 + 2Md\alpha d\beta + Nd\beta^2}{A^2 d\alpha^2 + 2AB\omega d\alpha d\beta + B^2 d\beta^2}. \quad (9.1.7)$$

Здесь

$$L = \frac{1}{AB\sqrt{1-\omega^2}} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial \alpha^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial \alpha^2} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial x} & \frac{\partial \alpha}{\partial y} & \frac{\partial \alpha}{\partial z} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial \beta} & \frac{\partial \alpha}{\partial \beta} & \frac{\partial \alpha}{\partial \beta} \end{vmatrix};$$

$$M = \frac{1}{AB\sqrt{1-\omega^2}} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha \partial \beta} & \frac{\partial^2 y}{\partial \alpha \partial \beta} & \frac{\partial^2 z}{\partial \alpha \partial \beta} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial x} & \frac{\partial \alpha}{\partial y} & \frac{\partial \alpha}{\partial z} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial \beta} & \frac{\partial \alpha}{\partial \beta} & \frac{\partial \alpha}{\partial \beta} \end{vmatrix};$$

$$N = \frac{1}{AB\sqrt{1-\omega^2}} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial \beta^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial \beta^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial \beta^2} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial x} & \frac{\partial \alpha}{\partial y} & \frac{\partial \alpha}{\partial z} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial \beta} & \frac{\partial \alpha}{\partial \beta} & \frac{\partial \alpha}{\partial \beta} \end{vmatrix}. \quad (9.1.8)$$

Для уравнения поверхности в виде (9.1.2) коэффициенты второй квадратичной формы;

$$L = \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}};$$

$$M = \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}; \quad (9.1.9)$$

$$N = \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}.$$

Формула (9.1.7) выражает кривизну нормального сечения точки на поверхности. Для одной и той же точки значения $A^2, B^2, AB\omega, L, M, N$ при задании поверхности (9.1.3) определяются соотношениями (9.1.5), (9.1.8) и не зависят от направления нормального сечения. При повороте сечения вокруг нормали к поверхности получаются разные значения кривизны. Максимальные и минимальные значения называют главными кривизнами. В этом случае их параметрические линии - линии кривизны. Касательные к линиям кривизны пересекаются под прямым углом.

Главные кривизны поверхности $\frac{1}{R_1}$ и $\frac{1}{R_2}$ определяются из соотношений

$$\frac{1}{R_1 R_2} = \frac{LN - M^2}{A^2 B^2 \sqrt{1 - \omega^2}}; \quad (9.1.10)$$

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = -\frac{A^2 N - 2AB\omega M + B^2 L}{A^2 B^2 \sqrt{1 - \omega^2}}.$$

Произведение главных кривизн в точке поверхности называют гауссовой кривизной

$$K = \frac{1}{R_1 R_2}. \quad (9.1.11)$$

Различают поверхности положительной ($K > 0$), нулевой ($K = 0$) и отрицательной гауссовой кривизны ($K < 0$).

Полусумма главных кривизн в точке поверхности - средняя кривизна

$$H = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \quad (9.1.12)$$

Для сетки ортогональных параметрических линий на поверхности, когда кривизны экстремальны, из соотношений (9.1.10) следует, что

$$\frac{1}{R_1} = -\frac{L}{A^2}; \quad \frac{1}{R_2} = -\frac{N}{B^2}. \quad (9.1.13)$$

Кривизна $\frac{1}{R}$ произвольного нормально-го сечения выражается через главные кривизны $\frac{1}{R_1}$ и $\frac{1}{R_2}$ и угол φ между касательной этого нормального сечения и первым главным направлением

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} \cos^2 \varphi + \frac{1}{R_2} \sin^2 \varphi. \quad (9.1.14)$$

При совпадении координатных линий α и β с линиями кривизны поверхности все уравнения теории оболочек принимают наиболее простой вид.

Коэффициенты A, B и главные кривизны поверхности связаны между собой тождественными соотношениями Кодацци-Гаусса:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{B}{R_2} \right) = \frac{1}{R_1} \frac{\partial B}{\partial \alpha};$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{A}{R_1} \right) = \frac{1}{R_2} \frac{\partial A}{\partial \beta}; \quad (9.1.15)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} \right) = -\frac{AB}{R_1 R_2}.$$

Все приведенные выше зависимости справедливы для поверхностей общего вида. Для частных случаев, например, для поверхности вращения, плоскости они принимают более простую форму.

Глава 9.2

ТЕОРИЯ ПЛАСТИН

Пластиной называют плоское тело, имеющее форму призмы или цилиндра, толщина которого мала по сравнению с размерами основания. В зависимости от отношения максимальной толщины h к наименьшему размеру пластины в плане d ($\psi = h/d$) различают тонкие

пластины ($\psi < 1/20$), пластины средней толщины ($1/20 < \psi < 1/5$) и толстые пластины ($\psi > 1/5$).

Теория расчета тонких пластин основана на использовании гипотез Кирхгофа. При расчете пластин средней толщины часто возникает необходимость в учете деформаций поперечного или межслоного сдвига. Толстые пластины (плиты) рассчитывают по уравнениям трехмерной теории упругости.

В зависимости от влияния сил, действующих в срединной плоскости пластины, на прогиб различают пластины гибкие: большого и небольшого прогибов; жесткие; абсолютно гибкие (мембраны).

Ниже рассмотрены уравнения гибких пластин большого прогиба (уравнения Кармана), из которых, в частности, получены соотношения для других видов пластин. При выводе уравнений принято, что справедливы гипотезы Кирхгофа, а составляющие тензора деформаций учитывают величины, пропорциональные квадратам производных от нормальных перемещений. В уравнениях равновесия, составленных для деформированного состояния, учтены наиболее существенные члены, содержащие силы в срединной плоскости на вторые производные от перемещений по нормали.

9.2.1. УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ ИЗОТРОПНЫХ И ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИН КАРМАНА

Приведенные ниже зависимости соответствуют допущениям, рассмотренным выше.

Перемещения пластины. Перемещения $u(x, y)$, $v(x, y)$, $w(x, y)$ точки срединной плоскости и перемещения $u_z(x, y)$, $v_z(x, y)$, $w_z(x, y)$ точки, отстоящей от срединной плоскости на расстоянии z , связаны зависимостями

$$u_z = u - z \frac{\partial w}{\partial x}; \quad v_z = v - z \frac{\partial w}{\partial y}; \quad w_z = w. \quad (9.2.1)$$

Деформации пластины. Относительные удлинения и угол сдвига в срединной плоскости

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2; \quad \varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2;$$

$$\gamma_{12} = \gamma = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (9.2.2)$$

Деформации в произвольной точке пластины

$$\varepsilon_{1z} = \varepsilon_1 - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \varepsilon_{2z} = \varepsilon_2 - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2};$$

$$\gamma_z = \gamma - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (9.2.3)$$

Условие совместности деформаций срединной поверхности. Исключением с помощью первых двух уравнений (9.2.2) перемещения u и v из третьего уравнения получается условие совместности деформаций срединной поверхности

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x \partial y} = - \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right]. \quad (9.2.4)$$

Силы и моменты. Погонные силы и моменты в сечении пластины $x = \text{const}$

$$T_1 = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_1 dz; \quad S = S_1 = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{12} dz;$$

$$Q_1 = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{1z} dz; \quad M_1 = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_1 z dz;$$

$$H = H_1 = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{12} z dz; \quad (9.2.5)$$

в сечении $y = \text{const}$

$$T_2 = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_2 dz; \quad S = S_2 = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{21} dz;$$

$$Q_2 = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{2z} dz; \quad M_2 = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_2 z dz;$$

$$H = H_2 = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{21} z dz, \quad (9.2.6)$$

где T_1 , T_2 и S - нормальные и касательные силы в срединной плоскости; Q_1 , Q_2 - поперечные силы; M_1 и M_2 - изгибающие моменты, действующие в сечениях соответственно $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$; H - крутящий момент.

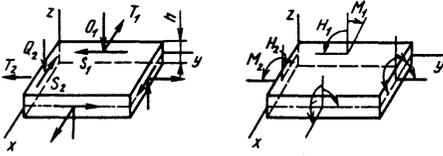


Рис. 9.2.1. Силы и моменты в пластине

Касательные силы S и крутящие моменты H в сечениях $x=\text{const}$ и $y=\text{const}$ определяются одинаковыми формулами вследствие закона парности касательных напряжений $\tau_{12}=\tau_{21}$. Все силы и моменты приведены к срединной плоскости. Их положительные направления показаны на рис. 9.2.1.

Уравнения равновесия. Уравнения равновесия элемента пластины, нагруженного поперечной нагрузкой интенсивностью $p(x, y)$, с учетом составляющих на нормаль к срединной плоскости деформированного элемента имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} &= 0; \quad \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial T_2}{\partial y} = 0; \\ \frac{\partial Q_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_2}{\partial y} &= -p - T_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - T_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2S \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}; \\ Q_1 &= \frac{\partial M_1}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y}; \quad Q_2 = \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial M_2}{\partial y}. \end{aligned} \tag{9.2.7}$$

Первые два уравнения системы (9.2.7) совпадают с уравнениями равновесия плоской задачи теории упругости, и если ввести функцию напряжений $F(x, y)$, то они тождественно удовлетворяются.

$$T_1 = h \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}; \quad T_2 = h \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}; \quad S = -h \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}. \tag{9.2.8}$$

Исключение из оставшихся трех последних уравнений (9.2.7) перерезывающих сил и использование зависимостей (9.2.8) приводит систему (9.2.7) к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} &= \\ = -p - h \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right). \end{aligned} \tag{9.2.9}$$

Таким образом, поведение тонкой пластины описывается нелинейными уравнениями (9.2.9) равновесия и (9.2.4) совместности деформаций.

Основные зависимости для изотропной пластины. В случае изотропного материала согласно закону Гука при $\sigma_z = 0$

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_1 + \mu \varepsilon_2); \quad \sigma_2 = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_2 + \mu \varepsilon_1); \\ \tau_{12} &= \frac{E}{1-\mu^2} \frac{1-\mu}{2} \gamma_{12}. \end{aligned} \tag{9.2.10}$$

С учетом (9.2.3), (9.2.5), (9.2.6) для срединной плоскости $\sigma_1 = \frac{T_1}{h}$; $\sigma_2 = \frac{T_2}{h}$; $\tau_{12} = \frac{S}{h}$. Соотношения (9.2.10) и (9.2.8) позволяют выразить $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma_{12}$ через функцию напряжения F .

Тогда линейно изменяющиеся по толщине изгибные напряжения

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \\ \sigma_2 &= -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right); \\ \tau_{12} &= -\frac{Ez}{1-\mu^2} (1-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \tag{9.2.11}$$

Касательные напряжения τ_{1z} и τ_{2z} вследствие гипотезы прямых нормалей ($\gamma_{1z}=\gamma_{2z}=0$) по закону Гука определены быть не могут. Их находят из условий равновесия:

$$\begin{aligned} \tau_{1z} &= \frac{3}{2} \frac{Q_1}{h} \left(1 - 4 \frac{z^2}{h^2} \right); \\ \tau_{2z} &= \frac{3}{2} \frac{Q_2}{h} \left(1 - 4 \frac{z^2}{h^2} \right). \end{aligned} \tag{9.2.12}$$

Моменты и поперечные силы, если учесть зависимости (9.2.5) - (9.2.7) и (9.2.11), выражаются через прогиб w :

$$M_1 = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right);$$

$$M_2 = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right);$$

$$H = H_1 = H_2 = -D(1 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}; \quad (9.2.13)$$

$$Q_1 = -D \frac{\partial}{\partial x} \Delta w; \quad Q_2 = -D \frac{\partial}{\partial y} \Delta w;$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad (9.2.14)$$

где $D = \frac{Eh^3}{12(1 - \mu^2)}$ - цилиндрическая жесткость пластины.

Подставляя $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma_{12}$, выраженные через функцию F , в левую часть уравнения (9.2.4), а (9.2.3) - в (9.2.9), получают в окончательном виде разрешающую систему дифференциальных уравнений теории пластин Кармана:

$$\Delta \Delta F = E \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right];$$

$$D \Delta \Delta w = p + h \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right), \quad (9.2.15)$$

где $\Delta \Delta = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$ - бигармонический оператор.

Изгибные напряжения определяют по формулам (9.2.11), которые с учетом (9.2.13) принимают вид

$$\sigma_1 = \frac{12M_1}{h^3} z; \quad \sigma_2 = \frac{12M_2}{h^3} z; \quad \tau_{12} = \frac{12H}{h^3} z. \quad (9.2.16)$$

Изгибные напряжения имеют наибольшие значения при $z = \pm h/2$.

Основные зависимости для ортотропной пластины. В случае ортотропного линейно-упругого материала при $\sigma_z = 0$

$$\sigma_1 = \frac{E_1}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} (\varepsilon_1 + \mu_{21}\varepsilon_2);$$

$$\sigma_2 = \frac{E_2}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} (\varepsilon_2 + \mu_{12}\varepsilon_1); \quad (9.2.17)$$

$$\tau_{12} = G_{12}\gamma_{12}.$$

Моменты и поперечные силы:

$$M_1 = -D_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu_{21} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right);$$

$$M_2 = -D_2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right); \quad (9.2.18)$$

$$H = H_1 = H_2 = -D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y};$$

$$Q_1 = -\frac{\partial}{\partial x} \left(D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_3 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right);$$

$$Q_2 = -\frac{\partial}{\partial y} \left(D_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad (9.2.19)$$

где

$$D_1 = \frac{E_1 h^3}{12(1 - \mu_{12}\mu_{21})}; \quad D_2 = \frac{E_2 h^3}{12(1 - \mu_{12}\mu_{21})};$$

$$D_{12} = \frac{G_{12} h^3}{6}; \quad D_3 = D_1 \mu_{21} + D_2 \mu_{12} = D_2 \mu_{12} + D_{12}. \quad (9.2.20)$$

Система основных дифференциальных уравнений изгиба тонкой ортотропной пластины:

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + \left(\frac{E_1}{G_{12}} - 2\mu_{12} \right) \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{E_1}{E_2} \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} =$$

$$= E_1 \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right];$$

$$D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} =$$

$$= p + h \left\{ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right\} - \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \Bigg\};$$

(9.2.21)

Учет начального прогиба. Приведенные выше зависимости справедливы для идеально плоских пластин в недеформированном состоянии. Реальные пластины могут иметь начальное искривление. Такие пластины относятся к пластинам с начальным прогибом $w_0(x, y)$. Прогиб $w_0(x, y)$ - расстояние от искривленной срединной плоскости пластины до плоскости xOy .

Если прогиб $w_0(x, y)$ удовлетворяет условию

$$\left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \ll 1, \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \ll 1, \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \ll 1,$$

то его считают малым и пластину рассчитывают по теории пластин. При существенном начальном прогибе пластину следует рассматривать как оболочку и для ее расчета применять теорию оболочек. При учете начального прогиба часть приведенных выше формул изменяется.

Компоненты деформации срединной поверхности:

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial (w + w_0)}{\partial x} \right]^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2; \\ \epsilon_2 &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial (w + w_0)}{\partial y} \right]^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2; \\ \gamma_{12} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial (w + w_0)}{\partial x} \frac{\partial (w + w_0)}{\partial y} - \\ &\quad - \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y}. \end{aligned}$$

(9.2.22)

Основные уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + \left(\frac{E_1}{G_{12}} - 2\mu_{12} \right) \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{E_1}{E_2} \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = \\ = E \left\{ \left[\frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial x \partial y} \right]^2 - \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right)^2 - \right. \end{aligned}$$

$$D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} =$$

$$= p + h \left\{ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial x \partial y} \right\}.$$

(9.2.23)

Круглые пластины. Для расчета круглых пластин целесообразно использовать цилиндрическую систему координат. Переход к ней от декартовой системы координат осуществляется по формулам

$$x = r \cos \beta; \quad y = r \sin \beta; \quad z = z,$$

которые при отождествлении направления радиуса-вектора с осью Ox , а перпендикулярного к нему направления в срединной плоскости - с осью Oy образуют приведенные выше зависимости. Радиальное u_r , окружное v_r и нормальное w_r к среднему слою произвольной точки пластины перемещения

$$u_r = u - z \frac{\partial w}{\partial r}; \quad v_r = v - \frac{z}{r} \frac{\partial w}{\partial \beta}; \quad w_r = w.$$

Относительные удлинения и угол сдвига: в срединной плоскости

$$\begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2; \\ \epsilon_\beta &= \frac{\partial v}{r \partial \beta} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{r \partial \beta} \right)^2; \\ \gamma_{r\beta} &= \frac{\partial u}{r \partial \beta} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial \beta}; \end{aligned}$$

(9.2.24)

в произвольной точке

$$\epsilon_{rz} = \epsilon_r - z \frac{\partial^2 w}{\partial r^2};$$

$$\varepsilon_{\beta z} = \varepsilon_{\beta} - z \left(\frac{\partial w}{r \partial r} + \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \beta^2} \right); \quad -2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial w}{r \partial r} \right) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial F}{r \partial \beta} \right); \quad (9.2.29)$$

$$\gamma_{r\beta z} = \gamma_{r\beta} - 2z \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial w}{r \partial \beta} \right). \quad (9.2.25)$$

Напряжения в срединной плоскости, выраженные через функцию напряжений:

$$\sigma_r = \frac{\partial F}{r \partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \beta^2}; \quad \sigma_{\beta} = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}; \quad (9.2.26)$$

$$\tau_{r\beta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial F}{r \partial \beta} \right).$$

Моменты в случае изотропного материала:

$$M_r = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \mu \left(\frac{\partial w}{r \partial r} + \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \beta^2} \right) \right];$$

$$M_{\beta} = -D \left[\frac{\partial w}{r \partial r} + \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \beta^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right]; \quad (9.2.27)$$

$$H = H_r = H_{\beta} = -D(1 - \mu) \frac{\partial^2 w}{r \partial r \partial \beta}.$$

Поперечные силы

$$Q_r = -D \frac{\partial}{\partial r} \Delta w; \quad Q_{\beta} = -D \frac{\partial}{r \partial \beta} \Delta w, \quad (9.2.28)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{r \partial r} + \frac{\partial^2}{r^2 \partial \beta^2}$ — оператор Лапласа.

Система нелинейных уравнений Кармана для изотропной пластины:

$$\Delta \Delta F = E \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial w}{r \partial \beta} \right) \right]^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \left(\frac{\partial w}{r \partial r} + \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \beta^2} \right) \right\};$$

$$D \Delta \Delta w = p(r, \beta) + h \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \left(\frac{\partial F}{r \partial r} + \frac{\partial^2 F}{r^2 \partial \beta^2} \right) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial w}{r \partial r} + \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \beta^2} \right) \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - \right.$$

9.2.2. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Нормаль к срединной плоскости в каждой точке поперечного сечения пластины может иметь пять перемещений. Например, для сечения $x = \text{const}$: u , v , w , $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$. Число

степеней свободы, которое определяется числом независимых перемещений, равно четырем, поскольку задание прогиба $w(y)$ однозначно определяет угол поворота $\frac{\partial w}{\partial y}$.

Внешними силами и моментами ($T_1(y)$, $S(y)$, $Q_1(y)$, $M_1(y)$ и $H(y)$) сечение $x = \text{const}$ может быть нагружено совершенно произвольно. Однако, если учесть, что суммарный порядок системы уравнений Кармана равен восьми, для пластины можно задать лишь четыре силы. Это противоречие приближенной теории пластин устраняется заменой крутящего момента парой сил, которые добавляются к поперечным силам. В результате, поперечная сила Q_1 и крутящий момент H заменяются одной приведенной поперечной силой:

при $x = \text{const}$

$$\hat{Q}_1 = Q_1 + \frac{\partial H}{\partial y} =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x} \left[D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (D_3 + D_{12}) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]; \quad (9.2.30)$$

при $y = \text{const}$

$$\hat{Q}_2 = Q_2 + \frac{\partial H}{\partial x} =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial y} \left[D_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (D_3 + D_{12}) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right]. \quad (9.2.31)$$

Для изотропной пластины

$$\hat{Q}_1 = -D \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right];$$

$$\hat{Q}_2 = -D \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (2 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \quad (9.2.32)$$

Итак, в теории пластин на каждом крае, например при $x = \text{const}$, могут быть заданы лишь четыре варианта граничных условий: перемещения $u, v, w, \frac{\partial w}{\partial x}$; силы $T_1, S, M_1,$

\hat{Q}_1 ; частично перемещения и частично силы (не работающие на заданных перемещениях); четыре уравнения связи между силами и перемещениями. Два из четырех граничных условий определяют характер закрепления и нагружения края в срединной плоскости пластины, а два других связаны с изгибом пластины. Ниже приведены некоторые варианты граничных условий.

Граничные условия для прямоугольной изотропной пластины на крае ($x = 0$).

Край шарнирно оперт и $w(0, y) = 0, M(0, y) = 0$. Если принять во внимание условие $w(0, y) = 0$, то $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$ и граничные условия

$$w(0, y) = 0; \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0, y) = 0. \quad (9.2.33)$$

Край жестко зашпемлен и

$$w(0, y) = 0; \frac{\partial w}{\partial x}(0, y) = 0. \quad (9.2.34)$$

Край не загружен и $\hat{Q}_1(0, y) = 0, M_1 = 0$. С учетом выражений (9.2.32):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(0, y) + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}(0, y) &= 0; \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0, y) + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(0, y) &= 0. \end{aligned} \quad (9.2.35)$$

В соответствии с приведенными выше условиями, на каждом крае должны быть заданы также величины u (либо T_1 и v , либо S), которые выражаются через функцию F .

Граничные условия для круглых и кольцевых пластин. Условия на крае аналогичны приведенным. Дополнительно к выражениям

для сил в полярной системе координат используют формулы для определения приведенных поперечных сил для изотропной пластины:

$$\begin{aligned} \hat{Q}_r &= Q_r + \frac{\partial H}{r \partial \beta} = \\ &= -D \left[\frac{\partial}{\partial r} (\Delta w) + (1 - \mu) \frac{\partial^2}{r \partial r \partial \beta} \left(\frac{\partial w}{r \partial \beta} \right) \right]; \\ \hat{Q}_\beta &= Q_\beta + \frac{\partial H}{\partial r} = \\ &= -D \left[\frac{\partial}{r \partial \beta} (\Delta w) + (1 - \mu) \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\frac{\partial w}{r \partial \beta} \right) \right]. \end{aligned} \quad (9.2.36)$$

При расчете круглых или кольцевых пластин должно соблюдаться условие периодичности любого параметра (перемещений, сил, моментов) по угловой координате β , т.е.

$$\Phi(r, \beta) = \Phi(r, \beta + 2\pi),$$

где $\Phi(r, \beta)$ - любой из приведенных выше параметров.

Для круглой пластины без центрального выреза должно быть обеспечено условие конечности перемещений, сил и моментов в центре пластины вследствие обращения некоторых частных интегралов уравнений (9.2.29) при $r = 0$ в бесконечность.

9.2.3. КЛАССИФИКАЦИЯ ПЛАСТИН

При рассмотрении уравнений пластин возможна их классификация, основанная на оценке взаимного влияния сил в срединной плоскости на изгиб пластины и изгиба на эти силы. При этом возможно выделение определенных классов пластин, расчет которых уже не требует использования в полном объеме нелинейных зависимостей теории Кармана.

Гибкие пластины большого прогиба. У таких пластин взаимное влияние величин w и F существенно, теория Кармана используется без каких-либо упрощений, прогиб соизмерим с толщиной.

Гибкие пластины небольшого прогиба. В этом случае влияние сил в срединной плоскости на изгиб существенно, тогда как влияние прогиба на силы пренебрежимо мало. В результате первое уравнение системы (9.2.21) упрощается и принимает для ортотропной пластины вид

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + \left(\frac{E_1}{G_{12}} - 2\mu_{12} \right) \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{E_1}{E_2} \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0. \quad (9.2.37)$$

Второе уравнение системы (9.2.21) остается без изменения. Если ввести в него найденную интегрированием уравнения (9.2.37) при заданных тангенциальных граничных условиях функцию $F(x, y)$, то уравнение (9.2.21) становится нелинейным дифференциальным уравнением с переменными коэффициентами.

При нагружении краев прямоугольной пластины по длине постоянными силами T_1, T_2, S , которые не зависят от координат x и y , уравнение равновесия системы (9.2.21) принимает вид

$$\begin{aligned} D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \\ = p(x, y) + T_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + T_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2S \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (9.2.38)$$

Жесткие пластины. Для таких пластин силы в срединной плоскости пренебрежимо мало влияет на изгиб. Уравнения равновесия пластин:

$$D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p(x, y); \quad (9.2.39)$$

изотропной

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = p(x, y). \quad (9.2.40)$$

Абсолютно гибкие пластины (мембраны). Поскольку изгибная жесткость таких пластин пренебрежимо мала, первое уравнение системы (9.2.21) принимается без изменения, а второе упрощается:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = - \frac{p(x, y)}{h}. \quad (9.2.41)$$

9.2.4. НЕКОТОРЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ИЗГИБА ПЛАСТИН

Решение Навье. Для свободно опертой по всем четырем краям прямоугольной пластины

длиной a и шириной b ($w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$ при

$x=0, x=a; w = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$ при $y=0, y=b$)

решение уравнения (9.2.39) или (9.2.40) ищется в виде двойного тригонометрического ряда

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (9.2.42)$$

После подстановки (9.2.42) в (9.2.39) получают для ортотропной пластины

$$a_{mn} = \frac{P_{mn}}{\pi^4 \left(D_1 \frac{m^4}{a^4} + 2D_3 \frac{m^2 n^2}{a^2 b^2} + D_2 \frac{n^4}{b^4} \right)}; \quad (9.2.43)$$

для изотропной

$$a_{mn} = \frac{P_{mn}}{\pi^4 D \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right]^2}. \quad (9.2.44)$$

Здесь

$$P_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b p(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy. \quad (9.2.45)$$

С помощью выражения для $w(x, y)$, полученного по формулам п. 9.2.2, можно определить остальные параметры изгиба пластин (углы поворота, моменты, поперечные силы).

Решение Леви. Для пластин, два противоположных края которых свободно оперты на жесткие опоры (например, $w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$ при

$x=0, x=a$), решение уравнения (9.2.39) или (9.2.40) ищется в виде

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (9.2.46)$$

Неизвестные функции $f_m(y)$ определяют из решения уравнения для пластины: ортотропной

$$D_2 f_m^{IV}(y) - 2D_3 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} f_m^{II}(y) + \quad (9.2.47)$$

$$+ D_1 \frac{m^4 \pi^4}{a^4} f_m(y) = p_m(y);$$

изотропной

$$f_m^{IV}(y) - 2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} f_m^{II}(y) + \frac{m^4 \pi^4}{a^4} f_m(y) = \frac{1}{D} p_m(y). \quad (9.2.48)$$

Здесь

$$p_m(y) = \frac{2}{a} \int_0^a p(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} dx. \quad (9.2.49)$$

Решение уравнения (9.2.48):

$$f_m(y) = f_{m0}(y) + C_0 \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + C_1 \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + C_2 \frac{m\pi y}{a} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + C_3 \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a}, \quad (9.2.50)$$

где $f_{m0}(y)$ - частное решение уравнения (9.2.48); C_i - постоянные интегрирования, определяемые из граничных условий на краях пластины ($y=0$ и $y=b$).

Решение задач изгиба изотропных прямоугольных пластин при различных вариантах их закрепления на опорном контуре и при разных законах изменения внешней поперечной нагрузки в виде таблиц используют для определения прогибов, углов поворота, моментов, поперечных сил в характерных точках срединной поверхности пластины [31, 33].

Решение Клебша. Изгиб жесткой изотропной круглой пластины в полярной системе координат описывается уравнением

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{r \partial r} + \frac{\partial^2}{r^2 \partial \beta^2} \right) \times \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{r \partial r} + \frac{\partial^2}{r^2 \partial \beta^2} \right) w(r, \beta) = \frac{p(r, \beta)}{D}. \quad (9.2.51)$$

При расчете круглых (кольцевых) пластин нагрузка согласно ряду Фурье

$$p(r, \beta) = \sum_{m=0}^{\infty} p_m^{(1)}(r) \cos m\beta + \sum_{m=1}^{\infty} p_m^{(2)}(r) \sin m\beta. \quad (9.2.52)$$

Здесь

$$p_m^{(1)}(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} p(r, \beta) \cos m\beta d\beta; \quad p_m^{(2)}(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} p(r, \beta) \sin m\beta d\beta. \quad (9.2.53)$$

Прогиб $w(r, \beta)$ ищется в виде такого же ряда:

$$w(r, \beta) = \sum_{m=0}^{\infty} w_m^{(1)}(r) \cos m\beta + \sum_{m=1}^{\infty} w_m^{(2)}(r) \sin m\beta. \quad (9.2.54)$$

Неизвестные функции $w_m^{(1)}(r)$ и $w_m^{(2)}(r)$ определяются из уравнения

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{d}{r dr} - \frac{m^2}{r^2} \right) \times \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{d}{r dr} - \frac{m^2}{r^2} \right) w_m^{(i)}(r) = p_m^{(i)}(r) \quad \text{при } i=1,2. \quad (9.2.55)$$

Частные решения уравнения (9.2.55)

$$w_0(r) = C_{00} + C_{01} r^2 + C_{02} \ln r + C_{03} r^2 \ln r; \quad w_1(r) = C_{10} r + C_{11} r^3 + C_{12} r^{-1} + C_{13} r \ln r; \quad \dots \quad w_m(r) = C_{m0} r^m + C_{m1} r^{m+2} + C_{m2} r^{-m} + C_{m3} r^{-m+2} \quad \text{при } m \geq 2. \quad (9.2.56)$$

Постоянные интегрирования C_{mi} ($i=1,2,3,4$) определяются из граничных условий на внешнем ($r=b$) и внутреннем ($r=a$) контурах кольцевой пластины. Для круглой пластины без внутреннего выреза ($a=0$) из условия конечности элементов изгиба в центре ($a=0$) постоянные C_{m2} и C_{m3} должны быть приняты равными нулю. Другие постоянные C_{m0} и C_{m1} находятся из граничных условий на крае $r=b$.

Расчет составных пластин, а также пластин сложной геометрии при произвольных законах изменения внешней нагрузки и различных граничных условиях проводится с помощью численных методов, ориентированных на использование ЭВМ: методов конечных разностей, конечных элементов, граничных элементов, и др.

Глава 9.3

ЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ ОБОЛОЧЕК

Основные соотношения линейной теории оболочек основаны на гипотезах Кирхгофа-Лява. Материал оболочки предполагается изотропным и однородным. Справедливость линейной теории ограничена случаем малых деформаций (справедлив закон Гука) и малых углов поворота.

9.3.1. ДЕФОРМАЦИЯ СРЕДИННОЙ ПОВЕРХНОСТИ ОБОЛОЧКИ

Радиус-вектор точки срединной поверхности оболочки до деформации \vec{r} задается как функция гауссовых координат α, β :

$$\vec{r} = \vec{r}(\alpha, \beta).$$

Здесь рассмотрен наиболее распространенный случай выбора гауссовых координат, когда координатные линии ($\alpha=\text{const}$, $\beta=\text{const}$) совпадают с линиями кривизны поверхности и, следовательно, ортогональны.

В результате деформации точка поверхности перемещается так, что ее новый радиус-вектор

$$\vec{r}^* = \vec{r}(\alpha, \beta) + \vec{u}(\alpha, \beta), \quad (9.3.1)$$

где $\vec{u}(\alpha, \beta) = u\vec{e}_1 + v\vec{e}_2 + w\vec{e}_n$ - вектор перемещения точки; u, v и w - проекции перемещения на оси основного триедра, образованного единичными векторами $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_n$, направленными по касательным к α - и β -

линиям и по нормали к поверхности (см. рис. 9.1.1).

Деформации элементов поверхности полностью определяются изменением коэффициентов ее первой квадратичной формы. До

деформации коэффициенты $A^2 = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha}\right)^2$, $B^2 = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \beta}\right)^2$, $AB \cos \psi = 0$ ($\psi = \pi/2$). Па-

раметры Ламе A^* , B^* деформированной срединной поверхности и единичные векторы \vec{e}_1^* , \vec{e}_2^* , касательные к α - и β -линиям, определяются зависимостями

$$A^* \vec{e}_1^* = \frac{\partial \vec{r}^*}{\partial \alpha}; \quad B^* \vec{e}_2^* = \frac{\partial \vec{r}^*}{\partial \beta}. \quad (9.3.2)$$

(Гауссовы координаты α, β предполагаются "материальными", так что материальная точка поверхности до деформации и после нее определяется одинаковыми значениями α, β .)

После подстановки в выражения (9.3.2) значения \vec{r}^* и дифференцирования с учетом деривационных формул [7], связывающих производные от векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_n$ по α и β с самими векторами, получены уравнения

$$A^* \vec{e}_1^* = A \left[(1 + \varepsilon_1) \vec{e}_1 + \gamma_1 \vec{e}_2 - \Theta_1 \vec{e}_n \right];$$

$$B^* \vec{e}_2^* = B \left[\gamma_2 \vec{e}_1 + (1 + \varepsilon_2) \vec{e}_2 - \Theta_2 \vec{e}_n \right]. \quad (9.3.3)$$

Здесь

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{A \partial \alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} v + \frac{w}{R_1};$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\partial v}{B \partial \beta} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} u + \frac{w}{R_2}; \quad (9.3.4)$$

$$\gamma_1 = \frac{\partial v}{A \partial \alpha} - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} u;$$

$$\gamma_2 = \frac{\partial u}{B \partial \beta} - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} v;$$

$$\Theta_1 = \frac{u}{R_1} - \frac{\partial w}{A \partial \alpha}; \quad \Theta_2 = \frac{v}{R_2} - \frac{\partial w}{B \partial \beta}.$$

Умножая первое уравнение (9.3.3) скалярно на $\bar{\mathbf{e}}_1$ и учитывая, что произведение

$\bar{\mathbf{e}}_1 \bar{\mathbf{e}}_1^*$ представляет собой косинус малого угла поворота вектора $\bar{\mathbf{e}}_1$ при деформации и поэтому отличается от единицы величинами второго порядка малости, найдем

$$A^* = A(1 + \varepsilon_1),$$

где ε_1 - удлинение срединной поверхности в направлении α -линии.

Аналогично, удлинение срединной поверхности в направлении β -линии равно ε_2 . Разделив первое уравнение (9.3.3) почленно на $(1 + \varepsilon_1)$, а второе на $(1 + \varepsilon_2)$ и пренебрегая величинами $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ по сравнению с единицей, найдем векторы

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{e}}_1^* &= \bar{\mathbf{e}}_1 + \gamma_1 \bar{\mathbf{e}}_2 - \Theta_1 \bar{\mathbf{e}}_2; \\ \bar{\mathbf{e}}_2^* &= \gamma_2 \bar{\mathbf{e}}_1 + \bar{\mathbf{e}}_2 - \Theta_2 \bar{\mathbf{e}}_n. \end{aligned} \quad (9.3.5)$$

Угол между векторами $\bar{\mathbf{e}}_1^*$ и $\bar{\mathbf{e}}_2^*$ равен $\frac{\pi}{2} - \gamma_{12}$, где γ_{12} - деформация сдвига в срединной поверхности. Скалярное произведение

$$\bar{\mathbf{e}}_1^* \bar{\mathbf{e}}_2^* = \gamma_1 + \gamma_2 + \Theta_1 \Theta_2 = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma_{12}\right)$$

или, отбросив нелинейные члены,

$$\begin{aligned} \gamma_{12} = \gamma_1 + \gamma_2 &= \frac{\partial v}{A \partial \alpha} + \frac{\partial u}{B \partial \beta} - \\ &- \frac{1}{AB} \left(\frac{\partial A}{\partial \beta} u + \frac{\partial B}{\partial \alpha} v \right). \end{aligned}$$

Таким образом, деформации срединной поверхности оболочки связаны с перемещениями зависимостями:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{A \partial \alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} v + \frac{w}{R_1}; \\ \varepsilon_2 &= \frac{\partial v}{B \partial \beta} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} u + \frac{w}{R_2}; \\ \gamma_{12} &= \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{v}{B} \right) + \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u}{A} \right). \end{aligned} \quad (9.3.6)$$

Нормаль $\bar{\mathbf{e}}_n^*$ к деформированной срединной поверхности

$$\bar{\mathbf{e}}_n^* = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \gamma_{12}\right)} \bar{\mathbf{e}}_1^* \times \bar{\mathbf{e}}_2^*,$$

при $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \gamma_{12}\right) \approx 1$

$$\bar{\mathbf{e}}_n^* = \bar{\mathbf{e}}_n + \Theta_1 \bar{\mathbf{e}}_1 + \Theta_2 \bar{\mathbf{e}}_2. \quad (9.3.7)$$

Как видно, величины Θ_1 и Θ_2 представляют собой углы поворота нормали к срединной поверхности оболочки в сторону векторов соответственно $\bar{\mathbf{e}}_1$ и $\bar{\mathbf{e}}_2$.

9.3.2. ДЕФОРМАЦИЯ ЭКВИДИСТАНТНОГО СЛОЯ

Эквидистантным называется слой оболочки, расположенный на постоянном расстоянии z от срединной поверхности.

Положение точки M_z эквидистантного слоя определяется гауссовыми координатами α, β точки M_0 срединной поверхности, лежащей на общей нормали с точкой M_z , и расстоянием z . Радиус-вектор точки M_z

$$\bar{\mathbf{r}}_z = \bar{\mathbf{r}}(\alpha, \beta) + z \bar{\mathbf{e}}_n(\alpha, \beta),$$

где $\bar{\mathbf{r}}(\alpha, \beta)$ - радиус-вектор точки M_0 срединной поверхности; $\bar{\mathbf{e}}_n$ - единичный вектор нормали в этой точке.

Параметры Ламе поверхности эквидистантного слоя

$$\begin{aligned} A_z \bar{\mathbf{e}}_{1z} &= \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial \alpha} + z \frac{\partial \bar{\mathbf{e}}_n}{\partial \alpha} = A \left(1 + \frac{z}{R_1} \right) \bar{\mathbf{e}}_1; \\ B_z \bar{\mathbf{e}}_{2z} &= \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial \beta} + z \frac{\partial \bar{\mathbf{e}}_n}{\partial \beta} = B \left(1 + \frac{z}{R_2} \right) \bar{\mathbf{e}}_2. \end{aligned} \quad (9.3.8)$$

Формулы (9.3.8) свидетельствуют о том, что единичные векторы $\bar{\mathbf{e}}_{1z}, \bar{\mathbf{e}}_{2z}$ эквидистантной поверхности параллельны ортам $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2$ срединной поверхности, а параметры Ламе

$$A_z = A \left(1 + \frac{z}{R_1} \right); \quad B_z = B \left(1 + \frac{z}{R_2} \right). \quad (9.3.9)$$

Следует иметь в виду, что данные зависимости, относящиеся к недеформированной оболочке, справедливы только в том случае,

когда α - и β -линии совпадают с линиями кривизны.

В соответствии с гипотезами Кирхгофа-Лява после деформации оболочки точка M_z эквидистантного слоя остается на той же нормали, проходящей через точку M_0 срединной поверхности, и на прежнем расстоянии z от последней. Однако сама точка M_0 смещается, и нормаль поворачивается. Поэтому радиус-вектор точки M_z после деформации

$$\vec{r}_z^* = \vec{r}^* + z\vec{e}_n^*. \quad (9.3.10)$$

Параметры Ламе A_z^*, B_z^* и единичные векторы $\vec{e}_{1z}^*, \vec{e}_{2z}^*$ эквидистантного слоя после деформации определяются следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} A_z^* \vec{e}_{1z}^* &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \vec{r}_z^* = \frac{\partial \vec{r}^*}{\partial \alpha} + z \frac{\partial \vec{e}_n^*}{\partial \alpha}; \\ B_z^* \vec{e}_{2z}^* &= \frac{\partial}{\partial \beta} \vec{r}_z^* = \frac{\partial \vec{r}^*}{\partial \beta} + z \frac{\partial \vec{e}_n^*}{\partial \beta}. \end{aligned} \quad (9.3.11)$$

Аналогично системе уравнений (9.3.6) получены зависимости для линейных $\varepsilon_{1z}, \varepsilon_{2z}$ и сдвиговых γ_{12z} деформаций эквидистантного слоя:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1z} &= \varepsilon_1 + \alpha_1 z; \quad \varepsilon_{2z} = \varepsilon_2 + \alpha_2 z; \\ \gamma_{12z} &= \gamma_{12} + 2\chi_{12} z, \end{aligned} \quad (9.3.12)$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma_{12}$ - деформации срединной поверхности оболочки, связанные с перемещениями зависимостями (9.3.6).

Параметры изменения кривизны срединной поверхности

$$\alpha_1 = \frac{\partial \Theta_1}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \Theta_2; \quad \alpha_2 = \frac{\partial \Theta_2}{\partial \beta} + \frac{1}{AB} \Theta_1. \quad (9.3.13)$$

Параметр кручения срединной поверхности может быть определен по двум тождественно совпадающим между собой формулам:

$$\begin{aligned} \chi_{12} &= \frac{\partial \Theta_2}{\partial \alpha} - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \Theta_1 + \frac{\gamma_2}{R_1}; \\ \chi_{12} &= \frac{\partial \Theta_1}{\partial \beta} - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \Theta_2 + \frac{\gamma_1}{R_2}. \end{aligned} \quad (9.3.14)$$

Величины Θ и γ определены формулами (9.3.4).

При выводе уравнений (9.3.12) в выражениях $1 + z/R_1, 1 + z/R_2$ опущены слагаемые $z/R_1, z/R_2$ значительно меньшие единицы.

Ниже приведены выражения параметров изменения кривизны и кручения срединной поверхности оболочки через компоненты перемещения u, v, w :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{u}{R_1} - \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \left(\frac{v}{R_2} - \frac{\partial w}{\partial \beta} \right); \\ \alpha_2 &= \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{v}{R_2} - \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \left(\frac{u}{R_1} - \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right); \\ \chi_{12} &= \frac{1}{AB} \left(\frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{\partial w}{\partial \beta} - \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} \right) + \\ &+ \frac{1}{R_1} \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u}{A} \right) + \frac{1}{R_2} \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{v}{B} \right). \end{aligned} \quad (9.3.15)$$

9.3.3. НАПРЯЖЕНИЯ В ЭКВИДИСТАНТНОМ СЛОЕ ОБОЛОЧКИ, СИЛЫ И МОМЕНТЫ. ЭНЕРГИЯ ДЕФОРМАЦИИ

Из шести компонент напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_z, \tau_{12}, \tau_{1z}, \tau_{2z}$ с деформациями можно связать лишь три. Из гипотезы сохранения нормали следует, что поперечные сдвиги γ_{1z}, γ_{2z} не учитываются. Поэтому касательные напряжения τ_{1z}, τ_{2z} нельзя определить исходя из закона Гука. Гипотеза о малости нормальных напряжений σ_z делает определение этого напряжения излишним. Для изотропного материала согласно закону Гука напряжения

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{E}{1-\mu} \left(\varepsilon_{1z} + \mu \varepsilon_{2z} \right); \\ \sigma_2 &= \frac{E}{1-\mu} \left(\varepsilon_{2z} + \mu \varepsilon_{1z} \right); \\ \tau_{12} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{12z}. \end{aligned} \quad (9.3.16)$$

(при выводе первого и второго уравнений (9.3.16) учтено, что $\sigma_z \approx 0$). После подстановки в (9.3.16) выражений деформаций полученные формулы

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{E}{1-\mu} \left[\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2 + z(\varkappa_1 + \mu\varkappa_2) \right]; \\ \sigma_2 &= \frac{E}{1-\mu} \left[\varepsilon_2 + \mu\varepsilon_1 + z(\varkappa_2 + \mu\varkappa_1) \right]; \\ \tau_{12} &= \frac{E}{2(1+\mu)} (\gamma_{12} + 2z\chi_{12}). \end{aligned} \tag{9.3.17}$$

Как видно, напряжения изменяются по толщине стенки по линейному закону. Напряжения, распределенные по нормальным сечениям оболочки, приводят к силам и моментам, отнесенным к единице длины сечения срединной поверхности. Так, систему напряжений σ_1, τ_{12} в сечении, нормальном к α -линии (рис. 9.3.1, а), заменяют силами интенсивности T_1, S_1 на единицу длины β -линии и моментами интенсивности M_1, M_{12} (рис. 9.3.1, б).

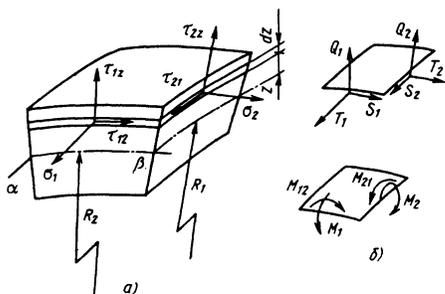


Рис. 9.3.1. Напряжения, силы и моменты в оболочке

Интенсивности нормальной силы и моментов

$$\begin{aligned} T_1 &= \int_{-0,5h}^{+0,5h} \sigma_1 dz; \\ M_1 &= \int_{-0,5h}^{+0,5h} \sigma_1 z dz; \quad M_{12} = \int_{-0,5h}^{+0,5h} \tau_{12} z dz. \end{aligned}$$

Очевидно, что эти формулы не вполне точны, так как длина элемента эквидистантного слоя в сечении зависит от z . Это обстоятельство можно учесть, включив в подынтегральные выражения множитель $1+z/R_2$, мало отличающийся от единицы, что усложняет формулы, не уточняя результатов. При вычислении сдвигающей силы S_1 множитель $1+z/R_2$ целесообразно ввести, поскольку одно

из условий равновесия элемента оболочки, а именно, условие равенства нулю суммы моментов всех сил относительно нормали к срединной поверхности должно выполняться автоматически. Выполнение этого условия обеспечивается парностью касательных напряжений ($\tau_{12}=\tau_{21}$) в α - и β -сечениях. Небольшая погрешность расчета сил S_1 и S_2 , связанная с учетом множителей $1+z/R_2$ и $1+z/R_1$, приводит к нарушению этого условия.

Поэтому сдвигающие силы

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{-0,5h}^{+0,5h} \tau_{12} (1+z/R_2) dz; \\ S_2 &= \int_{-0,5h}^{+0,5h} \tau_{21} (1+z/R_1) dz. \end{aligned}$$

После подстановки в подынтегральные выражения напряжений по уравнениям (9.3.17) получают следующие выражения для интенсивностей сил и моментов:

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{Eh}{1-\mu} (\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2); \quad T_2 = \frac{Eh}{1-\mu} (\varepsilon_2 + \mu\varepsilon_1); \\ S_1 &= S + \frac{H}{R_2}; \quad S_2 = S + \frac{H}{R_1}; \\ M_1 &= D(\varkappa_1 + \mu\varkappa_2); \quad M_2 = D(\varkappa_2 + \mu\varkappa_1); \\ M_{12} &= H; \quad M_{21} = H. \end{aligned} \tag{9.3.18}$$

Здесь

$$\begin{aligned} S &= \frac{Eh}{2(1+\mu)} \gamma_{12}; \quad H = D(1-\mu)\chi_{12}; \\ D &= \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}. \end{aligned}$$

В формулах (9.3.18) выражения сил и моментов в сечении $\beta=\text{const}$ записаны как в сечении $\alpha=\text{const}$ путем замены индексов $1 \leftrightarrow 2$.

Соотношения упругости (9.3.18), связывающие интенсивности сил и моментов в сечениях оболочки с деформациями срединной поверхности оболочки и параметрами изменения кривизны, в таком виде впервые предложены Л. И. Балабухом и В. В. Новожиловым.

Кроме сил и моментов, определяемых по приведенным формулам, в сечениях, нормальных к α - и β -линиям, имеются поперечные силы интенсивностей

$$Q_1 = \int_{-0,5h}^{+0,5h} \tau_{1z} dz; \quad Q_2 = \int_{-0,5h}^{+0,5h} \tau_{2z} dz.$$

Как уже отмечалось, эти силы не могут быть вычислены с использованием закона Гука.

Потенциальная энергия деформации, аккумулированная в элементе оболочки, ограниченном двумя парами нормальных сечений, проходящих через α - и β -линии, определяется интегрированием по объему элемента выражения удельной потенциальной энергии материала:

$$d\Pi = 0,5 \int_{-0,5h}^{+0,5h} (\sigma_1 \varepsilon_{1z} + \sigma_2 \varepsilon_{2z} + \tau_{12} \gamma_{12z}) \times \left(1 + \frac{z}{R_1}\right) \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) dz AB d\alpha d\beta. \quad (9.3.19)$$

В выражении (9.3.19) в соответствии с гипотезами Кирхгофа-Лява не учитываются деформации поперечного сдвига и напряжения σ_z .

После подстановки в подынтегральное выражение деформаций и напряжений в соответствии с уравнениями (9.3.12), (9.3.17) и интегрирования по z получают

$$d\Pi = U AB d\alpha d\beta,$$

где U - потенциальная энергия деформации, отнесенная к единице срединной поверхности; $AB d\alpha d\beta$ - площадь срединной поверхности выделенного элемента.

Потенциальная энергия деформации, отнесенная к единице площади срединной поверхности оболочки,

$$U = \frac{Eh}{2(1-\mu^2)} \left[(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 + \frac{1-\mu}{2} (\gamma_{12}^2 - 4\varepsilon_1 \varepsilon_2) \right] + 0,5D \left[(\varkappa_1 + \varkappa_2)^2 + 2(1-\mu)(\chi_{12}^2 - \varkappa_1 \varkappa_2) \right]. \quad (9.3.20)$$

Первое слагаемое представляет собой удельную энергию мембранной деформации оболочек, второе - удельную энергию изгиба и кручения.

При выводе формулы (9.3.20) не учитывались величины порядка h/R_1 , h/R_2 , пренебрежимо малые по сравнению с единицей. Первое слагаемое - энергия мембранной деформации оболочки, второе - энергия изгиба и кручения.

С учетом уравнений упругости (9.3.18) плотность энергии деформации на единицу площади срединной поверхности можно выразить также через силы и моменты:

$$U = \frac{1}{2Eh} \left[(T_1 + T_2)^2 + 2(1+\mu)(S^2 - T_1 T_2) \right] + \frac{6}{Eh^3} \left[(M_1 + M_2)^2 + 2(1+\mu)(H^2 - M_1 M_2) \right],$$

или в смешанной форме

$$U = 0,5(T_1 \varepsilon_1 + T_2 \varepsilon_2 + S \gamma_{12} + M_1 \varkappa_1 + M_2 \varkappa_2 + 2H \chi_{12}).$$

9.3.4. УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ И ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

При рассмотрении равновесия элемента оболочки, ограниченного двумя парами нормальных сечений, проходящих через α - и β -линии (рис. 9.3.2) напряжения в сечении элемента предварительно приводятся к сечениям срединной поверхности, т.е. заменяются силами и моментами. Уравнения равновесия составляют в векторной форме, а затем проецируют на оси $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_n$ основного тетраэдра. Внешняя нагрузка, приложенная к элементу,

$$\bar{Q} = (p_1 \bar{e}_1 + p_2 \bar{e}_2 + p_n \bar{e}_n) AB d\alpha d\beta,$$

где p_1, p_2 и p_n - отнесенные к площади срединной поверхности нагрузки в направлениях соответственно α -, β -линии и по нормали.

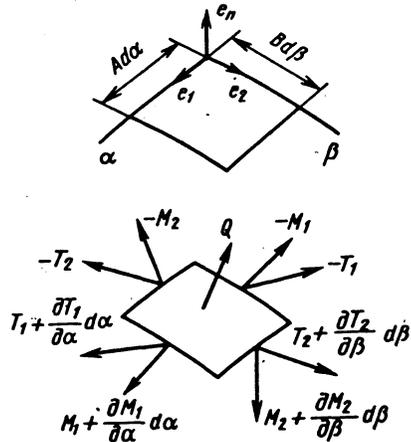


Рис. 9.3.2. Равновесие элемента оболочки

Внутренняя сила, приложенная в сечении элемента, нормаль к которому ориентирована по α -линии,

$$\bar{T}_1 = (T_1 \bar{e}_1 + S_1 \bar{e}_2 + Q_1 \bar{e}_n) B d\beta;$$

сила в сечении, внешняя нормаль к которому ориентирована по β -линии,

$$\bar{T}_2 = (S_2 \bar{e}_1 + T_2 \bar{e}_2 + Q_2 \bar{e}_n) A d\alpha.$$

Соответственно, векторы моментов в этих сечениях

$$\bar{M}_1 = (M_{12} \bar{e}_1 + M \bar{e}_2) B d\beta;$$

$$\bar{M}_2 = (-M_2 \bar{e}_1 + M_{21} \bar{e}_2) A d\alpha.$$

В векторной форме уравнения равновесия элемента имеют вид

$$i \frac{\partial \bar{T}_1}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial \bar{T}_2}{\partial \beta} d\beta + \bar{Q} = 0; \quad (9.3.21)$$

$$\frac{\partial \bar{M}_1}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial \bar{M}_2}{\partial \beta} d\beta + A d\alpha \bar{e}_1 \times T_1 + B d\beta \bar{e}_2 \times T_2 = 0. \quad (9.3.22)$$

Уравнение (9.3.21) выражает равенство нулю главного вектора сил, приложенных к элементу, а (9.3.22) - главного момента. Скалярная формула уравнений в проекциях на орты основного триэдра

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} (T_1 B) + \frac{\partial}{\partial \beta} (S_2 A) + \frac{\partial A}{\partial \beta} S_1 + \frac{\partial B}{\partial \alpha} T_2 + \frac{AB}{R_1} Q_1 + AB p_1 = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} (T_2 A) + \frac{\partial}{\partial \alpha} (S_1 B) + \frac{\partial B}{\partial \alpha} S_2 + \frac{\partial A}{\partial \beta} T_1 + \frac{AB}{R_2} Q_2 + AB p_2 = 0;$$

$$\frac{1}{AB} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} (Q_1 B) + \frac{\partial}{\partial \beta} (Q_2 A) \right] - \frac{T_1}{R_1} - \frac{T_2}{R_2} + p_3 = 0. \quad (9.3.23)$$

Аналогично, уравнения моментов в скалярной форме

$$\frac{1}{AB} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} (M_1 B) - \frac{\partial B}{\partial \alpha} M_2 + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \beta} (HA^2) \right] - Q_1 = 0;$$

$$\frac{1}{AB} \left[\frac{\partial}{\partial \beta} (M_2 A) - \frac{\partial A}{\partial \beta} M_1 + \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \alpha} (HB^2) \right] - Q_2 = 0. \quad (9.3.24)$$

Третье уравнение моментов (в проекциях на нормаль e_n) обращается в тождество ввиду условия парности касательных напряжений. Поперечные силы Q_1, Q_2 непосредственно не связаны с деформациями. Определив эти силы из уравнений (9.3.24) и подставив в уравнения (9.3.23) с учетом того, что $S_1 = S + H/R_2$ и $S_2 = S + H/R_1$, придем к уравнениям равновесия в следующей форме:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} (T_1 B) + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \beta} (SA^2) - \frac{\partial B}{\partial \alpha} T_2 + \frac{2}{R_2} \frac{\partial A}{\partial \beta} H + \frac{1}{R_1} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} (M_1 B) - \frac{\partial B}{\partial \alpha} M_2 + 2 \frac{\partial}{\partial \beta} (HA) \right] +$$

$$+ AB p_1 = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} (T_2 A) + \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \alpha} (SB^2) - \frac{\partial A}{\partial \beta} T_1 + \frac{2}{R_1} \frac{\partial B}{\partial \alpha} H +$$

$$+ \frac{1}{R_2} \left[\frac{\partial}{\partial \beta} (M_2 A) - \frac{\partial A}{\partial \beta} M_1 + 2 \frac{\partial}{\partial \alpha} (HB) \right] +$$

$$+ AB p_2 = 0;$$

$$\frac{1}{AB} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left\{ \frac{1}{A} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} (M_1 B) - \frac{\partial B}{\partial \alpha} M_2 + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \beta} (HA^2) \right] \right\} +$$

$$+ \frac{1}{AB} \frac{\partial}{\partial \beta} \left\{ \frac{1}{B} \left[\frac{\partial}{\partial \beta} (M_2 A) - \frac{\partial A}{\partial \beta} M_1 + \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \alpha} (HB^2) \right] \right\} -$$

$$- \frac{T_1}{R_1} - \frac{T_2}{R_2} + p_3 = 0.$$

$$(9.3.25)$$

В уравнения (9.3.25) входят только те силовые факторы, которые связаны с перемещениями u, v, w и их производными уравнениями упругости (9.3.18) и геометрическими зависимостями (9.3.5) и (9.3.15). Поэтому уравнения (9.3.25) можно рассматривать как систему трех дифференциальных уравнений в частных производных относительно трех искоемых функций u, v, w . Система имеет восьмой порядок. Чтобы краевая задача этой системы была сформулирована, в каждой точ-

ке контура оболочки должны быть заданы четыре граничных условия. Эти граничные условия накладываются на перемещения или на соответствующие им силовые факторы или на линейные комбинации перемещений и сил.

Так, на границе $\alpha = \text{const}$ граничные условия накладываются на следующие перемещения или соответствующие им силы:

$$u \rightarrow T_1, \quad v \rightarrow S_1^*, \quad w \rightarrow Q_1^*, \quad \Theta_1 \rightarrow M_1.$$

Здесь приведенные сдвигающая и поперечная силы [7] соответственно

$$S^* = S + \frac{2H}{R_2} \quad \text{и} \quad Q_1^* = Q_1 + \frac{\partial H}{B \partial \beta}.$$

Введение приведенных сил обусловлено использованием гипотезы о сохранении нормали.

Аналогично, на границе, совпадающей с β -линией, граничные условия накладываются на следующие перемещения и силы:

$$u \rightarrow S_2^*, \quad v \rightarrow T_2^*, \quad w \rightarrow Q_2^*, \quad \Theta_2 \rightarrow M_2,$$

$$\text{где } T_2^* = S + \frac{2H}{R_1}, \quad Q_2^* = Q_2 + \frac{\partial H}{A \partial \alpha}.$$

Глава 9.4

НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ ОБОЛОЧЕК

Уравнения геометрически нелинейной теории тонких оболочек служат основой для изучения деформирования, потери устойчивости и закрытичкового поведения гибких тонкостенных конструкций. В отличие от классической линейной теории малых деформаций и перемещений нелинейная теория рассматривает нагружение оболочек, сопровождаемое конечными перемещениями и поворотами материальных элементов.

9.4.1. ДЕФОРМАЦИИ ОБОЛОЧЕК С УЧЕТОМ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ

Геометрические зависимости теории оболочек в рамках гипотез Кирхгофа-Лява имеют общий характер. Их последовательное упрощение на базе различных геометрических предположений приводит к уравнению прикладных технических теорий.

Деформации поверхности. Пусть α, β, γ - материальные координаты оболочки, связанные с линиями кривизны и внешней норма-

лью к срединной поверхности, $r(\alpha, \beta)$ - радиус-вектор поверхности. Ортонормированные векторы начального координатного базиса $e_1 = (1/A)\partial r/\partial \alpha$, $e_2 = (1/B)\partial r/\partial \beta$, $e_n = e_1 \times e_2$. Положение поверхности после деформирования $r^* \rightarrow r + U$ определяется вектором перемещения $U = ue_1 + ve_2 + we_n$. Базисные векторы деформированной поверхности e_1^*, e_2^*, e_n^* выражаются через косинусы углов Φ_{ik} ($i = 1, 2; k = 1, 2, 3$) между направлениями ортов в начальном и деформированном состоянии:

$$e_1^* = (1/A^*)\partial r^*/\partial \alpha = \cos \Phi_{11} e_1 + \cos \Phi_{12} e_2 + \cos \Phi_{13} e_n;$$

$$e_n^* = (e_1^* \times e_2^*) / \left| (e_1^* \times e_2^*) \right| = (1/\sin \chi_{12})(a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_n);$$

$$\cos \Phi_{11} = A(1 + \varepsilon_1) / A^*;$$

$$\cos \Phi_{12} = A\gamma_1 / A^*; \quad \cos \Phi_{13} = -A\Theta_1 / A^*;$$

$$a_1 = \cos \Phi_{12} \cos \Phi_{23} - \cos \Phi_{22} \cos \Phi_{13};$$

$$a_3 = \cos \Phi_{11} \cos \Phi_{22} - \cos \Phi_{12} \cos \Phi_{21};$$

$$A^* = A \left[(1 + \varepsilon_1)^2 + \gamma_1^2 + \Theta_1^2 \right]^{1/2};$$

$$\cos \chi_{12} = e_1^* \cdot e_2^* \quad (1 \leftrightarrow 2, \alpha \leftrightarrow \beta, A \leftrightarrow B), \quad (9.4.1)$$

где $\varepsilon_i, \gamma_i, \Theta_i$ ($i = 1, 2$) - общепринятые обозначения тангенциальных деформаций и поворотов в линейном приближении; * - геометрические характеристики, относящиеся к деформированному состоянию оболочки.

Коэффициенты первой и второй квадратичных форм деформированной поверхности:

$$g_{11}^* = (\partial r^* / \partial \alpha)^2 = A^{2*};$$

$$g_{12}^* = (\partial r^* / \partial \alpha_1)(\partial r^* / \partial \beta) = A^* B^* \cos \chi_{12};$$

$$b_{11}^* = \frac{A^*}{\sin \chi_{12}} \left\{ \cos \Phi_{23} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} - \frac{1}{\cos \Phi_{11}} \frac{\partial \cos \Phi_{12}}{\partial \alpha} \right) - \cos \Phi_{22} \left(\frac{A}{R_1} - \frac{1}{\cos \Phi_{11}} \frac{\partial \cos \Phi_{13}}{\partial \alpha} \right) + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \cos \chi_{12} \left[\cos \Phi_{12} \left(\frac{A}{R_1} - \frac{1}{\cos \Phi_{11}} \frac{\partial \cos \Phi_{13}}{\partial \alpha} \right) - \right. \\
 & \left. - \cos \Phi_{13} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} - \frac{1}{\cos \Phi_{11}} \frac{\partial \cos \Phi_{12}}{\partial \alpha} \right) \right]; \\
 b_{12}^* & = \frac{A^*}{\sin \chi} \left\{ -\cos \Phi_{23} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \frac{1}{\cos \Phi_{11}} \frac{\partial \cos \Phi_{12}}{\partial \beta} \right) + \right. \\
 & + \frac{B}{R_2} \cos \Phi_{21} + \frac{\cos \Phi_{22}}{\cos \Phi_{11}} \frac{\partial \cos \Phi_{13}}{\partial \beta} + \\
 & + \cos \chi_{12} \left[-\frac{B \cos \Phi_{11}}{R_2} - \frac{\cos \Phi_{12}}{\cos \Phi_{11}} \frac{\partial \cos \Phi_{13}}{\partial \beta} + \right. \\
 & \left. + \cos \Phi_{13} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \frac{1}{\cos \Phi_{11}} \frac{\partial \cos \Phi_{12}}{\partial \beta} \right) \right] \left. \right\} \\
 & (\alpha \leftrightarrow \beta, 1 \leftrightarrow 2, A \leftrightarrow B)
 \end{aligned} \tag{9.4.2}$$

Удлинения E_i , углы сдвига Γ_{ij} ($i, j = 1, 2$), компоненты деформации e_{ij} , геометрические кривизны и кручение $1/R_i^*$, $1/R_j^*$ деформированной поверхности выражаются через коэффициенты основных квадратичных форм:

$$\begin{aligned}
 E_1 & = \left(g_{11}^* / g_{11} \right)^{1/2} - 1 = (1 + 2e_{11})^{1/2} - 1 = \\
 & = (A^* - A)A^{-1}; \\
 \Gamma_{12} & = \pi / 2 - \chi_{12}; \quad \cos \chi_{12} = g_{12}^* (g_{11}^* g_{22}^*)^{-1/2} = \\
 & = e_{22} [(1 + E_1)(1 + E_2)]^{-1}; \\
 e_{11} & = \varepsilon_1 + 1 / 2 (\varepsilon_1^2 + \gamma_1^2 + \Theta_1^2); \\
 e_{12} & = (1 + \varepsilon_1) \gamma_2 + (1 + \varepsilon_2) \gamma_1 + \Theta_1 \Theta_2; \\
 1/R_1^* & = -b_{11}^* (A^*)^{-2}; \quad 1/R_{12}^* = -b_{12}^* (A^* B^*)^{-1}. \\
 & (1 \leftrightarrow 2, A \leftrightarrow B)
 \end{aligned} \tag{9.4.3}$$

К основным характеристикам нелинейного деформирования оболочек относятся также ортогональный тензор R конечного по-

ворота и соответствующий ему вектор Ω конечного поворота окрестности точек срединной поверхности. В общем случае вектор Ω связан с компонентами тензора R зависимостью

$$\Omega = \sin \omega \mathbf{e} = 1 / 2 \varepsilon^{klm} R_{kl} \mathbf{i}_m,$$

где $\sin \omega = |\Omega|$; \mathbf{e} - единичный вектор оси поворота; \mathbf{i}_m - ортогональный векторный базис; ε^{klm} - компоненты дискриминантного тензора. Предполагается суммирование по дважды повторяющимся индексам ($k, l, m = 1, 2, 3$).

Тензор конечного поворота вводится в рассмотрение согласно теореме Коши о полярном разложении тензора градиента деформации. В линиях кривизны вектор конечного поворота вычисляется по формулам:

$$\begin{aligned}
 2\Omega \sin \chi_{12} & = \Omega^1 \mathbf{e}_1 + \Omega^2 \mathbf{e}_2 + \Omega^n \mathbf{e}_n; \\
 \Omega^1 & = \left[\frac{A}{A^*} \left(1 + \frac{\check{\gamma}_{11}}{A^2} \right) + \cos \Phi_{11} \right] \cos \Phi_{13} - \\
 & - \left(\cos \Phi_{21} - \frac{\check{\gamma}_{21}}{AB^*} \right) \cos \Phi_{13}; \\
 \Omega^2 & = - \left[\frac{A_2}{B^*} \left(1 + \frac{\check{\gamma}_{22}}{B^2} \right) + \cos \Phi_{22} \right] \cos \Phi_{23} + \\
 & + \left(\cos \Phi_{12} + \frac{\check{\gamma}_{12}}{A^* B} \right) \cos \Phi_{23}; \\
 \Omega^n & = \frac{1}{B^*} \left[A_2 \left(1 + \frac{\check{\gamma}_{22}}{B^2} \right) \cos \Phi_{12} + \frac{\check{\gamma}_{21}}{A} \cos \Phi_{11} \right] - \\
 & - \frac{1}{A^*} \left[A \left(1 + \frac{\check{\gamma}_{11}}{A^2} \right) \cos \Phi_{21} + \frac{\check{\gamma}_{12}}{B} \cos \Phi_{22} \right].
 \end{aligned} \tag{9.4.4}$$

Компоненты $\check{\gamma}_{ij}$ ($i, j = 1, 2$) симметричного тензора второго ранга $\check{\gamma} = \sqrt{1 + 2\gamma} - 1$ связаны с физическими составляющими тензора деформации γ соотношениями:

$$\begin{aligned}
 (1 + \check{\gamma}_{11})^2 + \check{\gamma}_{12}^2 & = 1 + 2\gamma_{11}; \\
 2\check{\gamma}_{12} + (\check{\gamma}_{11}^2 + \check{\gamma}_{22}^2) & = 2\gamma_{12}; \\
 \gamma_{(11)} & = \gamma_{11} / A^2 = e_{11};
 \end{aligned}$$

$$\gamma_{(12)} = \gamma_{12} / (AB) = 1 / 2e_{12} \\ (1 \leftrightarrow 2, A \leftrightarrow B).$$

Формулы (9.4.1) - (9.4.4) являются точными. Они существенно упрощаются для случаев, когда удлинения и сдвиги можно считать малыми.

Деформации и конечные повороты элемента граничного контура. Пусть на срединной поверхности F кроме линий кривизны α , β задана также ортогональная несопряженная координатная система α_v , α_t . Граничный контур Γ является одной из линий семейства $\alpha_v = \text{const}$. Касательные к линиям α_v и α образуют угол γ . Орты обеих координатных систем связаны равенствами:

$$\mathbf{v} = \cos \gamma \mathbf{e}_1 + \sin \gamma \mathbf{e}_2; \\ \mathbf{t} = -\sin \gamma \mathbf{e}_1 + \cos \gamma \mathbf{e}_2; \mathbf{n} = (\mathbf{v} \times \mathbf{t}).$$

Для деформированного состояния

$$\mathbf{v}^* = (A_v / A_v^*) \partial \Gamma^* / \partial s_{v^*} = \cos \Phi_{vv} \mathbf{v} + \\ + \cos \Phi_{vt} \mathbf{t} + \cos \Phi_{vn} \mathbf{n}; \\ \mathbf{n}^* = (\mathbf{v}^* \times \mathbf{t}^*) / |(\mathbf{v}^* \times \mathbf{t}^*)| = (1 / \sin \chi_{vt}) \times \\ \times (a_v \mathbf{v} + a_t \mathbf{t} + a_n \mathbf{n}); \\ \cos \Phi_{vv} = A_v (1 + \varepsilon_v) / A_v^*; \\ \cos \Phi_{vt} = A_v \gamma_v / A_v^*; \cos \Phi_{vn} = -A_v \Theta_v / A_v^*; \\ A_v^* = A_v \left[(1 + \varepsilon_v)^2 + \gamma_v^2 + \Theta_v^2 \right]^{1/2}; \\ \cos \chi_{vt} = \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{t}^*; \\ a_v = \cos \Phi_{vt} \cos \Phi_{tn} - \cos \Phi_{tn} \cos \Phi_{vn}; \\ a_n = \cos \Phi_{nn} \cos \Phi_{tn} - \cos \Phi_{tn} \cos \Phi_{vt}. \\ (v \leftrightarrow t, A \leftrightarrow B).$$

(9.4.5)

Деформации волокон на граничном контуре определяются зависимостями:

$$\varepsilon_{vv} = \varepsilon_v + 1 / 2 \left(\varepsilon_v^2 + \gamma_v^2 + \Theta_v^2 \right); \\ \varepsilon_{vt} = (1 + \varepsilon_v) \gamma_t + (1 + \varepsilon_t) \gamma_v + \Theta_v \Theta_t; \\ \varepsilon_v = \frac{\partial u_v}{\partial s_v} + \alpha_v u_t + \frac{w}{R_v};$$

$$\gamma_v = \frac{\partial u_t}{\partial s_v} - \alpha_v u_v - \frac{w}{R_v};$$

$$\Theta_v = -\frac{\partial w}{\partial s_v} + \frac{u_v}{R_v} - \frac{u_t}{R_v} \quad (v \leftrightarrow t),$$

где

$$u_v = u \cos \gamma + v \sin \gamma; \quad u_t = -u \sin \gamma + v \cos \gamma.$$

Составляющие геодезических кривизн и кручения контура Γ вычисляются по формулам:

$$\alpha_v = -\frac{\partial \gamma}{\partial s_v} - \frac{\sin \gamma}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \frac{\cos \gamma}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta};$$

$$\alpha_t = \frac{\partial \gamma}{\partial s_t} + \frac{\cos \gamma}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \frac{\sin \gamma}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta};$$

$$\frac{1}{R_t} = \frac{\sin^2 \gamma}{R_1} + \frac{\cos^2 \gamma}{R_2}; \quad \frac{1}{R_v} = \frac{\cos^2 \gamma}{R_1} + \frac{\sin^2 \gamma}{R_2};$$

$$\frac{1}{R_{vt}} = \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \sin \gamma \cos \gamma;$$

$$\frac{\partial}{\partial s_v} = \frac{\cos \gamma}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{\sin \gamma}{B} \frac{\partial}{\partial \beta};$$

$$\frac{\partial}{\partial s_t} = -\frac{\sin \gamma}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{\cos \gamma}{B} \frac{\partial}{\partial \beta}.$$

Для определения вектора конечного поворота граничного контура Ω_t наряду с базисными векторами \mathbf{v}^* , \mathbf{t}^* , \mathbf{n}^* (9.4.5), для которых $\cos \chi_{vt} \neq 0$, вводится вспомогательный ортонормированный базис \mathbf{v}^0 , \mathbf{t}^0 , \mathbf{n}^0 такой, что

$$\mathbf{v}^0 = \mathbf{t}^* \mathbf{n}^*, \quad \mathbf{t}^0 = \mathbf{t}^*, \quad \mathbf{n}^0 = \mathbf{n}^*.$$

Единичные векторы начального \mathbf{v} , \mathbf{t} , \mathbf{n} и вспомогательного \mathbf{v}^0 , \mathbf{t}^0 , \mathbf{n}^0 базисов связаны между собой формулами Родрига [21]:

$$\mathbf{v}^0 = \mathbf{v} + (\Omega_t \times \mathbf{v}) + \\ + 1 / 2 \cos^{-2} (\omega_t / 2) [\Omega_t \times (\Omega_t \times \mathbf{v})]; \\ \mathbf{t}^0 = \mathbf{t} + (\Omega_t \times \mathbf{t}) + \\ + 1 / 2 \cos^{-2} (\omega_t / 2) [\Omega_t \times (\Omega_t \times \mathbf{t})]; \quad (9.4.6)$$

$$\mathbf{n}^0 = \mathbf{n} + (\Omega_7 \times \mathbf{n}) + 1 / R_2) \cos \chi_{12}],$$

$$+ 1 / 2 \cos^{-2}(\omega_7 / 2) [\Omega_7 \times (\Omega_7 \times \mathbf{n})], \quad (1 \leftrightarrow 2, \alpha \leftrightarrow \beta, A \leftrightarrow B) \quad (9.4.9)$$

где $\Omega_7 = \sin \omega_7 \mathbf{e}_7$; $\sin \omega_7 = |\Omega_7|$; \mathbf{e}_7 - единичный вектор оси поворота.

Формулы (9.4.6) однозначно определяют вектор конечного поворота граничного элемента срединной поверхности

$$2\Omega_7 = (\mathbf{v} \times \mathbf{v})^0 + (\mathbf{t} \times \mathbf{t})^0 + (\mathbf{n} \times \mathbf{n}^0). \quad (9.4.7)$$

Деформации оболочки. Деформированное состояние тонкой оболочки как трехмерного тела в рамках кинематических гипотез Кирхгофа-Лява определяется в форме векторных равенств

$$\mathbf{r}_z = \mathbf{r} + z\mathbf{e}_n; \quad \mathbf{r}_z^* = \mathbf{r}^* + z\mathbf{e}_n^*, \quad (9.4.8)$$

где \mathbf{r}_z - радиус-вектор эквидистантной поверхности $z = \text{const}$; z - расстояние рассматриваемой точки от срединной поверхности.

Равенства (9.4.8), как и в линейной теории, утверждают, что фиксированный отрезок нормали в результате деформирования не меняет длину, а лишь поворачивается как твердое тело, оставаясь нормальным к деформированной поверхности.

Выражения для компонентов деформации волокон оболочки, лежащих на эквидистантной поверхности, следуют из метрических свойств деформированного трехмерного пространства, определяемого в соответствии с уравнениями (9.4.8). Для тонкой оболочки ($z/R_1 \ll 1$) в линейном приближении относительно координаты z

$$(dr_z^*)^2 - (dr_z)^2 = 2(\varepsilon_{11} H_1^2 d\alpha^2 + \varepsilon_{12} H_1 H_2 d\alpha d\beta + \varepsilon_{22} H_2^2 d\beta^2);$$

$$\varepsilon_{11} = e_{11} + z k_{11}; \quad \varepsilon_{12} = e_{12} + 2z k_{12};$$

$$H_1 = A(1 + z / R_1);$$

$$e_{11} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{A^*}{A} \right)^2 - 1 \right]; \quad e_{12} = \frac{A^* B^*}{AB} \cos \chi_{12};$$

$$k_{11} = \left(\frac{A^*}{A} \right)^2 \left(\frac{1}{R_1^*} - \frac{1}{R_1} \right);$$

$$k_{12} = A^* B^* (AB)^{-1} \left[1 / R_{12}^* - 1 / 2(1 / R_1 + \right.$$

где ε_{ij} - деформации волокон, отстоящих на расстоянии z от срединной поверхности; e_{ij}, k_{ij} - тангенциальные деформации и изменения кривизн и кручения.

Из (9.4.9) следует, что параметры k_{ij} совпадают с изменениями геометрических кривизн и кручения срединной поверхности $1 / R_i^* - 1 / R_i, 1 / R_j^*$ лишь при малых удлинениях и сдвигах, когда можно приближенно считать $A^* \approx A, B^* \approx B, \cos \chi_{ij} \approx 0$.

9.4.2. КЛАССИФИКАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ. УПРОЩЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ СООТНОШЕНИЙ

Существующие классификации нелинейных задач тесно связаны с характером геометрических допущений, принимаемых при формулировке приближенных нелинейных теорий оболочек. В зависимости от порядка величин деформаций и углов поворота, а также соотношения между ними, уравнения нелинейной теории могут допускать существенные упрощения, вплоть до их полной линеаризации. Различные варианты подобных упрощений при изучении деформаций гибких тел предложены В.В. Новожиловым [26].

Известна классификация приближенных уравнений нелинейной теории оболочек Х.М. Муштари и К.З. Галимова [24]. В ее основу положены оценки порядка линеаризованного вектора поворота $\Phi = -\Theta_2 \mathbf{e}_1 + \Theta_1 \mathbf{e}_2 + \Theta_n \mathbf{e}_n$. Выделены три группы нелинейных задач, характеризующихся слабым изгибом ($\Theta_i \ll 1$), средним изгибом ($\Theta_i^2 \ll 1$) и сильным изгибом оболочки ($\Theta_i \approx 1$).

В.Г. Койтер нелинейные задачи классифицирует по степени ограничения градиентов перемещений и компонентов вектора Φ . На этой основе рассмотрены четыре приближенных варианта уравнений теории оболочек с бесконечно малыми, ограниченно малыми, средними и большими перемещениями.

В перечисленных классификациях вектор Φ и градиенты перемещений не описывают полностью конечные повороты материальных элементов оболочки при нелинейном деформировании. Классификация нелинейных за-

дач, связанная с оценками порядка вектора конечного поворота, предложена В. Петрашкевичем [41]. В ней приняты во внимание модуль и направление вектора конечного поворота $\Omega = \sin \omega \mathbf{e}$, $|\Omega| = \sin \omega$. С этой целью тригонометрические функции $\sin \omega$, $\cos \omega$, входящие в формулы (9.4.4), (9.4.7), раскладываются в ряды Маклорена:

$$\begin{aligned} \sin \omega &= \omega - \frac{\omega^3}{3!} + \frac{\omega^5}{5!} - \dots; \\ \cos \omega &= 1 - \frac{\omega^2}{2!} + \frac{\omega^4}{4!} - \dots \end{aligned} \quad (9.4.10)$$

При этом степень нелинейности соотношений теории оболочек оценивается старшими членами, удерживаемыми в разложениях (9.4.10). Вводится малый параметр

$$\Theta = \max(\sqrt{h/R}, h/L, \sqrt{\eta}),$$

где h/R - относительная толщина оболочки; h/L - относительная длина волнообразования; η - максимальное собственное значение тензора деформации. С его помощью дается классификация нелинейных задач по величине углов ω поворота: 1) $\omega \leq 0(\Theta^2)$ - малые повороты, 2) $\omega = 0(\Theta)$ - умеренные повороты, 3) $\omega = 0(\sqrt{\Theta})$ - большие повороты, 4) $\omega \geq 0(1)$ - конечные повороты.

В рамках теории малых поворотов $\omega \ll 1$ и в каждой из формул (9.4.10) приближенно сохраняется один член ряда: $\sin \omega = \omega + 0(\Theta^6)$; $\cos \omega = 1 + 0(\Theta^4)$. Для умеренных поворотов $\omega^2 \ll 1$. В степенных рядах (9.4.10) также удерживаются первые слагаемые, но с другими остаточными членами: $\sin \omega = \omega + 0(\Theta^3)$; $\cos \omega = 1 + 0(\Theta^2)$. В пределах больших поворотов $\omega^4 \ll 1$ и подходящее приближение оценивается двумя членами ряда

$$\begin{aligned} \sin \omega &= \omega - (1/3!)\omega^3 + 0(\Theta^2\sqrt{\Theta}); \\ \cos \omega &= 1 - (1/2!)\omega^2 + 0(\Theta^2). \end{aligned}$$

Приведенная классификация ограничена конечными поворотами Ω , для которых $|\omega| < \pi/2$, $0(|\Omega|) = 0(\sin \omega) = 0(1)$. Направление оси \mathbf{e} поворота в данной классификации остается неопределенным. Тем не менее, оно может быть учтено путем ограничения отдель-

ных составляющих вектора Ω . Например, ввиду того, что гибкость реальных оболочек в направлении нормали гораздо выше, чем в тангенциальном направлении, на отдельные компоненты вектора Ω могут накладываться ограничения различного порядка. В этих случаях малые, умеренные, большие или конечные повороты будут связаны с составляющими вектора конечного поворота Ω^i, Ω^n ($i = 1, 2$).

Применяемые в технике конструкционные материалы, за некоторым исключением, сохраняют упругие свойства только при весьма малых удлинениях и сдвигах. Для этих практически важных случаев компоненты тензора деформации ограничены неравенством $\gamma_{ij} \ll 1$.

Такое ограничение позволяет существенно упростить геометрические характеристики деформированной срединной поверхности и, в частности, получить приближенные формулы:

$$E_1 = (1 + 2e_{11})^{1/2} - 1 \approx e_{11} + 0(\eta^2);$$

$$\begin{aligned} \sin \Gamma_{12} = \cos \chi_{12} &= e_{12} \left[(1 + E_1)(1 + E_2) \right]^{-1} = \\ &= e_{12} + 0(\eta^2); \end{aligned}$$

$$\tilde{\gamma}_{ij} = \gamma_{ij} + 0(\eta^2);$$

$$\begin{aligned} \sin \chi_{12} &= \left[(1 + E_1)(1 + E_2) \right]^{-1} \left[1 + 2(\gamma_1^1 + \gamma_2^2) + \right. \\ &\quad \left. + 4(\gamma_1^1 \gamma_2^2 - \gamma_1^2 \gamma_2^1) \right]^{1/2} = 1 + e_{11} + e_{22} + \\ &\quad + 0(\eta^2) = 1 + 0(\eta); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^*/A &= \left[(1 + \varepsilon_i)^2 + \gamma_i^2 + \Theta_i^2 \right]^{1/2} = \\ &= 1 + \varepsilon_i + 0(\eta^2) = 1 + 0(\eta), \end{aligned}$$

$$(A \leftrightarrow B)$$

(9.4.11)

где γ_i^j ($i, j = 1, 2$) - компоненты смешанного тензора деформации поверхности.

Приближенные зависимости для кривизн, кручения, вектора конечного поворота и деформаций эквидистантного слоя в рамках теории малых деформаций приведены в разделах 9.4.3 и 9.4.4, посвященных прикладным нелинейным теориям оболочек.

9.4.3. УРАВНЕНИЯ ЭЛАСТИКИ
ОБОЛОЧКИ.
ТЕОРИЯ Э. РЕЙССНЕРА

Приближенные геометрические соотношения, описывающие эластичность тонкой оболочки при неосесимметричной деформации, строятся в предположении малости удлинений, сдвигов и поворотов элемента оболочки около нормали по сравнению с единицей и с поворотами относительно касательных к координатным линиям. На величину последних ограничения не накладываются.

В качестве основных характеристик деформированной поверхности наряду с коэффициентами g_{ij}^* , b_{ij}^* квадратичных форм используют эквивалентные им параметры

$$E_1, E_2, \cos \Phi_{12}, \cos \Phi_{21}, \cos \Phi_{13}, \cos \Phi_{23}.$$

Перечисленные выше допущения прикладной теории эластичности оболочки формулируются следующим образом:

$$E_1 \sim \cos \Phi_{ij} \sim \cos \Phi_{ji}; \cos \Phi_{i3} \gg \cos \Phi_{ij};$$

$$E_i \ll 1; \cos \Phi_{ij} \ll 1;$$

$$(i \neq j)$$

$$\cos^2 \Phi_{ii} + \cos^2 \Phi_{i3} \approx 1; \Phi_{ii} + \Phi_{i3} \approx \pi / 2;$$

$$\partial \Phi_{ii} / \partial \alpha_j \approx -\partial \Phi_{i3} / \partial \alpha_j;$$

$$\cos \Phi_{ii} \approx \sin \Phi_{i3}; \cos \Phi_{i3} \approx \sin \Phi_{ii}.$$

$$|\langle \xi^i \rangle| \quad (9.4.12)$$

При переходе от точных формул общей теории оболочек (см. п. 9.4.1) к уравнениям эластичности порядки величин оценивают с помощью соотношений:

$$\cos^2 \Phi_{i3} \sim \cos \Phi_{ij} \quad (i \neq j); \cos \Phi_{ii} \sim 1.$$

$$|\langle \xi^i \rangle| \quad (9.4.13)$$

В окончательных результатах сохраняются величины порядка не выше $\cos \Phi_{ij}$ ($i \neq j$).

Деформации эквидистантной поверхности (9.4.9) для тонких оболочек ($z / R_i \ll 1$) с учетом упрощений (9.4.11), (9.4.12), (9.4.13) находят по формулам:

$$\varepsilon_{11} = E_1 + zK_1; \quad \varepsilon_{12} = \Omega + 2zT;$$

$$E_1 = e_{11} = (A^* / A) - 1;$$

$$\Omega = \cos \chi_{12} = e_{12} = \cos \Phi_{12} + \cos \Phi_{21} + \cos \Phi_{13} \cos \Phi_{23};$$

$$\sin \chi_{12} = 1;$$

$$\Omega = \Omega_1 + \Omega_2; \quad T = T_1 + \frac{\Omega_2}{R_1} = T_2 + \frac{\Omega_1}{R_2};$$

$$\Omega_1 = \cos \Phi_{12} + \frac{1}{2} \cos \Phi_{13} \cos \Phi_{23};$$

$$K_1 = -\frac{\cos \Phi_{22}}{A_1} \frac{\partial \Phi_{11}}{\partial \alpha} - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \sin \Phi_{22} + \frac{\cos \Phi_{22} - 1}{R_1};$$

$$2T = -\frac{\cos \Phi_{22}}{B} \frac{\partial \Phi_{11}}{\partial \beta} + \frac{\sin \Phi_{22}}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} +$$

$$+ \frac{\cos \Phi_{12}}{R_2} - \frac{\cos \Phi_{11}}{A} \frac{\partial \Phi_{22}}{\partial \alpha} +$$

$$+ \frac{\sin \Phi_{11}}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} + \frac{\cos \Phi_{21}}{R_1};$$

$$T_1 = -\frac{(\cos \Phi_{11} + \cos \Phi_{22})}{2A} \frac{\partial \Phi_{22}}{\partial \alpha} +$$

$$+ \frac{\sin \Phi_{11}}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} - \frac{\sin \Phi_{11} \sin \Phi_{22}}{2R_1} +$$

$$+ \frac{(\cos \Phi_{11} - \cos \Phi_{22})}{2B} \frac{\partial \Phi_{11}}{\partial \beta},$$

$$(1 \leftrightarrow 2, \alpha \leftrightarrow \beta, A \leftrightarrow B)$$

$$(9.4.14)$$

где E_i, Ω, K_i, T - мембранные деформации и изменения кривизн и кручения срединной поверхности. Малость удлинений и сдвигов при упрощении изгибных деформаций учитывается путем отождествления параметров Ламе до деформации и после нее с помощью (9.4.11). Согласно формулам (9.4.12) величины Φ_{i3} заменяют углами Φ_{ii} . Выражение для кручения T симметризовано с помощью тождества $\partial / \partial \alpha (\partial r^* / \partial \beta) = \partial / \partial \beta (\partial r^* / \partial \alpha)$.

Восемь параметров E_i, Ω_i, K_i, T_i представляют собой энергетические компоненты деформации, на которых совершают работу

соответствующие им внутренние силы T_i , T_{ij} и моменты M_i , M_{ij} ($i, j=1, 2$).

Вектор Ω_t конечного поворота элемента граничного контура (9.4.9) находится путем суммирования попарных векторных произведений базисных векторов \mathbf{v} , \mathbf{t} , \mathbf{n} и \mathbf{v}^0 , \mathbf{t}^0 , \mathbf{n}^0 :

$$\begin{aligned} 2\Omega_t \sin \chi_{vt} = & \left[(\cos \Phi_{vv} \cos \Phi_{tn} - \cos \Phi_{vn} \cos \Phi_{vn}) + \right. \\ & \left. + \sin \chi_{vt} \cos \Phi_{tn} \right] \mathbf{v} + \\ & + \left[-(\cos \Phi_{tn} \cos \Phi_{vn} - \cos \Phi_{vt} \cos \Phi_{tn}) - \right. \\ & \left. - \cos \Phi_{vn} + \cos \chi_{vt} \cos \Phi_{tn} \right] \mathbf{t} + \\ & + (\cos \Phi_{vt} - \sin \chi_{vt} \cos \Phi_{vn} - \\ & - \cos \chi_{vt} \cos \Phi_{tn}) \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (9.4.15)$$

В рамках уравнений эластики оболочки и допущений (9.4.11), (9.4.12), (9.4.13) выражение (9.4.15) последовательно упрощается. В окончательном виде сохраняются слагаемые порядка не выше Φ_{vt} ($\mathbf{v} \leftrightarrow \mathbf{t}$):

$$\begin{aligned} \Omega_t = & \sin \Phi_{tn} \mathbf{v} - \sin \Phi_{vv} \mathbf{t} + 1/2 (\cos \Phi_{vt} - \\ & - \cos \Phi_{vn}) \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (9.4.16)$$

Основные геометрические зависимости уравнений эластики тонкой оболочки представлены формулами (9.4.14), (9.4.16).

Непротиворечивые соотношения упругости геометрически нелинейной теории изотропных оболочек, удовлетворяющие условиям существования упругого потенциала, при малых удлинениях и сдвигах представлены в форме

$$\begin{aligned} T_1 = & \left[Eh / (1 - \mu^2) \right] (E_1 + \mu E_2); \\ T_{12} = & \left[Eh / 2(1 + \mu) \right] (\Omega + h^2 T / 6 R_2); \\ M_1 = & \left[Eh^3 / 12(1 - \mu^2) \right] (K_1 + \mu K_2); \\ M_{12} = & \left[Eh^3 / 2(1 + \mu) \right] T. \end{aligned} \quad (1 \leftrightarrow 2) \quad (9.4.17)$$

Статические уравнения эластики оболочки следуют из принципа возможных перемещений в форме вариационного уравнения Лагранжа:

$$\delta \Pi = \delta W - \delta A = 0; \quad \delta W = \iint (T_1 \delta E_1 + T_2 \delta E_2 + \quad (F)$$

$$+ S \delta \Omega + M_1 \delta K_1 + M_2 \delta K_2 + 2 H \delta T) AB d\alpha d\beta;$$

$$\delta A = \iint P \delta U AB d\alpha d\beta + \int (T \delta U + M \delta \Omega_t) ds_t; \quad (F) \quad (Г)$$

$$\mathbf{P} = p_1 \mathbf{e}_1 + p_2 \mathbf{e}_2 + p_n \mathbf{e}_n;$$

$$\mathbf{T} = T_v \mathbf{v} + T_t \mathbf{t} + T_n \mathbf{e}_n; \quad \mathbf{M} = -M_t \mathbf{v} + M_v \mathbf{t};$$

$$S = T_{12} - M_{21} / R_2 = T_{21} - M_{12} / R_1;$$

$$H = M_{12} = M_{21},$$

(9.4.18)

где Π , W и A - соответственно полная энергия, упругий потенциал и работа внешних сил; \mathbf{P} , \mathbf{T} , \mathbf{M} - векторы поверхностной нагрузки, погонных сил и моментов на граничном контуре.

Контур Γ предполагается гладким. Внутренние усилия в оболочке отнесены к недеформируемой поверхности. При вычислении вариаций кинематических факторов в уравнении (9.4.18) используются формулы (9.4.14), (9.4.16). В процессе преобразований производится упрощение варьируемых параметров в соответствии с оценками (9.4.12), (9.4.13).

Условие стандартности функционала Лагранжа (9.4.18) после преобразований с привлечением формул Грина и с учетом независимости вариаций δu , δv , δw на поверхности F и δu_v , δu_t , δw , $\delta \Phi_{vv}$ на контуре Γ приобретает вид:

$$\begin{aligned} \iint [& -(L_1 + ABp_1) \delta u - (L_2 + ABp_2) \delta v + \\ & + AB(L_3 - p_n) \delta w] d\alpha d\beta + \int [(q_v - Q_v) \delta u_v + \\ & + (q_t - Q_t) \delta u_t + (q_n - Q_n) \delta w - \\ & - (m_v - M_v) \delta \Phi_{vv}] ds_t = 0; \end{aligned} \quad (F) \quad (Г) \quad (9.4.19)$$

$$\begin{aligned} L_1 = & \frac{\partial B F_1}{\partial \alpha} + \frac{1}{A} \frac{\partial A^2 S}{\partial \beta} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} F_2 + \frac{\partial A H}{\partial \beta} \frac{1}{R_1} + \\ & + \frac{1}{R_2} \frac{\partial A}{\partial \beta} H + \frac{AB}{R_1} N_1; \end{aligned}$$

$$L_3 = \frac{F_1}{R_1} + \frac{F_2}{R_2} - \frac{1}{AB} \left(\frac{\partial BN_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial AN_2}{\partial \beta} \right);$$

$$F_1 = T_1 \cos \Phi_{11} - \left(Q_1 + S \sin \Phi_{22} - \frac{M_2 \sin \Phi_{11}}{R_1} \right) \sin \Phi_{11};$$

$$N_1 = \left(Q_1 + S \sin \Phi_{22} - M_2 \sin \Phi_{11} / R_2 \right) \cos \Phi_{11} + T_1 \sin \Phi_{11};$$

$$Q_1 = \frac{1}{AB} \left(\frac{\partial BM_1 \cos \Phi_{22}}{\partial \alpha} + \frac{\partial AH \cos \Phi_{22}}{\partial \beta} + \frac{\partial A}{\partial \beta} H \cos \Phi_{11} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} M_2 \cos \Phi_{11} \right);$$

$$q_v = F_1 \cos^2 \gamma + S \sin 2\gamma + F_2 \sin^2 \gamma + \frac{H \sin 2\gamma}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) - \mu \left(\frac{\cos \Phi_{11}}{R_{vt}} - \alpha_t \sin \Phi_{11} \right);$$

$$q_t = \frac{(F_2 - F_1) \sin 2\gamma}{2} + S \cos 2\gamma + H \left(\frac{\cos^2 \gamma}{R_2} - \frac{\sin^2 \gamma}{R_1} \right) + \frac{\mu \cos \Phi_{11}}{R_t} - \frac{\partial}{\partial s_t} \mu \sin \Phi_{11};$$

$$q_n = N_1 \cos \gamma + N_2 \sin \gamma + \frac{\mu \sin \Phi_{11}}{R_t} + \frac{\partial}{\partial s_t} \mu \cos \Phi_{11};$$

$$m_v = M_1 \cos \Phi_{22} \cos^2 \gamma + H (\cos \Phi_{11} + \cos \Phi_{22}) \sin \gamma \cos \gamma + M_2 \cos \Phi_{11} \sin^2 \gamma;$$

$$\mu = (M_2 \cos \Phi_{11} - M_1 \cos \Phi_{22}) \sin \gamma \cos \gamma + H (\cos \Phi_{11} \cos^2 \gamma - \cos \Phi_{22} \sin^2 \gamma);$$

$$Q_v = T_v + M_t \cos \Phi_{11} \left(\alpha_t \sin \Phi_{11} - \frac{\cos \Phi_{11}}{R_{vt}} \right);$$

$$Q_t = T_t + \frac{M_t \cos^2 \Phi_{11}}{R_t} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s_t} M_t \sin 2\Phi_{11};$$

$$Q_n = T_n + \frac{M_t \sin 2\Phi_{11}}{2R_t} + \frac{\partial}{\partial s_t} (M_t \cos^2 \Phi_{11}).$$

$$(1 \leftrightarrow 2, A \leftrightarrow B, \alpha \leftrightarrow \beta)$$

При перечисленных выше независимых вариациях в области и на контуре из условия стационарности (9.4.19) следуют уравнения равновесия и силовые граничные условия эластичности оболочки:

$$L_1 + ABp_1 = 0; \quad L_2 + ABp_2 = 0; \quad L_3 - p_n = 0;$$

$$q_v - Q_v = 0; \quad q_t - Q_t = 0; \quad q_n - Q_n = 0;$$

$$m_v - M_v = 0. \quad (9.4.20)$$

Уравнения равновесия (9.4.20) соответствуют проектированию главного вектора элемента оболочки на оси, связанные с недеформированной срединной поверхностью.

В частном случае при осесимметричной деформации оболочки вращения, совмещающая линию α с направлением меридиана, из уравнений (9.4.20) находим:

$$L_1^0 = \frac{\partial BF_1}{\partial \alpha} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} F_2 + \frac{AB}{R_1} N_1 + ABp_1 = 0;$$

$$L_3^0 = \frac{F_1}{R_1} + \frac{F_2}{R_2} - \frac{1}{AB} \frac{\partial BN_1}{\partial \alpha} - p_n = 0;$$

$$F_1 = T_1 \cos \Phi_{11} - Q \sin \Phi_{11};$$

$$N_1 = T_1 \sin \Phi_{11} + Q \cos \Phi_{11};$$

$$Q = Q_1 - M_2 \sin \Phi_{11} / R_2;$$

$$Q = \frac{1}{AB} \left(\frac{\partial BM_1}{\partial \alpha} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} M_2 \cos \Phi_{11} - \frac{ABM_2 \sin \Phi_{11}}{R_2} \right); \quad F_2 = T_2. \quad (9.4.21)$$

Линейные комбинации равенств (9.4.21) $L_1^0 \sin \Phi_0 - L_3^0 \cos \Phi_0 = 0$; $L_1^0 \cos \Phi_0 + L_3^0 \sin \Phi_0 = 0$ приводят к уравнениям Э. Рейсснера, полученным в предположении малости удлинений:

$$\left[r_0 (N_\xi \sin \Phi + Q \cos \Phi) \right]' + \alpha_0 r_0 p_v = 0;$$

$$\left[r_0 (N_\xi \cos \Phi - Q \sin \Phi) \right]' + \alpha_0 (r_0 p_n - N_\theta) = 0;$$

$$Q = (1 / \alpha_0 r_0) \left[(r_0 M_\xi)' - \alpha_0 M_\theta \cos \Phi \right];$$

$$\alpha = \xi; \alpha_2 = \theta; T_1 = N_\xi; T_2 = N_\theta;$$

$$M_1 = M_\xi; M_2 = M_\theta; (\cdot)' = \partial / \partial \xi;$$

$$A = \alpha_0; A^* = \alpha; \Phi_{11} = \Phi - \Phi_0;$$

$$(1 / R_1) = -(1 / \rho_0) = -\Phi_0' / \alpha_0;$$

$$p_n = p_1 \cos \Phi_0 - p_n \sin \Phi_0; B = r_0; B^* = r;$$

$$\partial B / \partial \alpha = \alpha_0 \cos \Phi_0; (1 / R_2) = -\sin \Phi_0 / r_0;$$

$$p_v = p_1 \sin \Phi_0 + p_n \cos \Phi_0;$$

$$E_1 = \alpha_0^{-1} - 1; E_2 = r_0^{-1} - 1; K_1 = \alpha_0^{-1} (\Phi_0' - \Phi');$$

$$K_2 = r_0^{-1} (\sin \Phi_0 - \sin \Phi),$$

где Φ_0 и Φ - углы наклона соответственно начального и деформированного меридиана к плоскости, нормальной к оси вращения оболочки.

9.4.4. ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ НЕПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК В КВАДРАТИЧНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ ПОЛОГИЕ ОБОЛОЧКИ

Уравнения нелинейной теории в квадратичном приближении представляют собой простейший вариант теории оболочек, в котором учитываются наиболее существенные особенности геометрически нелинейных задач. Здесь так же, как в уравнениях эластики, предполагается малость удлинений, сдвигов и поворотов элемента оболочки относительно нормали к поверхности, однако тангенциальные составляющие вектора конечного поворота соответствуют "умеренным" поворотам по классификации п. 9.4.2.

Допущения теории оболочек квадратичного приближения сформулированы В. В. Новожиловым при упрощении геометрических зависимостей нелинейной теории упругости в виде оценок:

$$E_1 \sim E_2 \sim \varepsilon^2; \cos \Phi_{12} \sim \cos \Phi_{21} \sim \varepsilon^2;$$

$$\cos \Phi_{13} \sim \cos \Phi_{23} \sim \varepsilon; \varepsilon^2 \sim \eta \leq 1.$$

(9.4.22)

С учетом оценок (9.4.22) основные уравнения квадратичной теории неполигих оболочек могут быть получены непосредственно из уравнения эластики (см. п. 9.4.3) путем разложения тригонометрических функций в степенные ряды с удержанием в окончательных результатах квадратичных слагаемых порядка не выше ε^2 .

Геометрические зависимости теории неполигих оболочек следуют из более общих уравнений (9.4.14), (9.4.16) с точностью до квадратов параметра ε^2 ($z/R_i \ll 1$):

$$\varepsilon_{11} = E_1 + zK_1; \varepsilon_{22} = E_2 + zK_2;$$

$$\varepsilon_{12} = \Omega + 2zT;$$

$$E_1 = \varepsilon_1 + 1 / 2\Theta_1^2; E_2 = \varepsilon_2 + 1 / 2\Theta_2^2;$$

$$\Omega = \omega + \Theta_1\Theta_2;$$

$$K_1 = \varkappa_1 - 1 / 2\Theta_2^2 / R_1; K_2 = \varkappa_2 - 1 / 2\Theta_1^2 / R_2;$$

$$T = \tau; \gamma = \gamma_1 + \gamma_2;$$

$$\Omega_T = \Phi = -\Theta_T v + \Theta_T t + 1 / 2(\gamma_v - \gamma_t) n.$$

(9.4.23)

Параметры деформации на срединной поверхности и на контуре Γ представлены формулами пп. 9.4.1 и 9.3.2.

Соотношения упругости тонких изотропных оболочек для простейшего варианта нелинейной теории формально совпадают с уравнениями (9.4.17), (9.4.18). Входящие в них удлинения, сдвиги, изменения кривизн и кручения определяются по формулам (9.4.23).

Уравнения равновесия квадратичной теории неполигих оболочек следуют из соответствующих уравнений эластики (9.4.19) в том же приближении, т.е. с сохранением нелинейных членов порядка не выше ε^2 . Данные уравнения равновесия отнесены к локальному координатному базису $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_n$, связанному с недеформированной срединной поверхностью:

$$\frac{\partial B T_1}{\partial \alpha} + \frac{1}{A} \frac{\partial A^2 S}{\partial \beta} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} T_2 + \frac{\partial A H}{\partial \beta} R_1 +$$

$$+ \frac{1}{R_2} \frac{\partial A}{\partial \beta} H + \frac{A B}{R_1} N_1 + A B p_1 = 0;$$

$$\frac{\partial A T_2}{\partial \beta} + \frac{1}{B} \frac{\partial B^2 S}{\partial \alpha} - \frac{\partial A}{\partial \beta} T_1 + \frac{\partial B H}{\partial \alpha} R_2 +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{R_1} \frac{\partial B}{\partial \alpha} H + \frac{AB}{R_2} N_2 + AB p_2 = 0; \\
 & \frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} - \frac{1}{AB} \left(\frac{\partial B N_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial A N_2}{\partial \beta} \right) - p_n = 0; \\
 & N_1 = \frac{1}{AB} \left\{ \left[\frac{\partial B M_1}{\partial \alpha} + \frac{1}{A} \frac{\partial A^2 H}{\partial \beta} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} M_2 \right] - \right. \\
 & \quad \left. - AB \left[\left(T_1 - \frac{M_2}{R_2} \right) \Theta_1 + S \Theta_2 \right] \right\}; \\
 & N_2 = \frac{1}{AB} \left\{ \left[\frac{\partial A M_2}{\partial \beta} + \frac{1}{B} \frac{\partial B^2 H}{\partial \alpha} - \frac{\partial A}{\partial \beta} M_1 \right] - \right. \\
 & \quad \left. - AB \left[\left(T_2 - \frac{M_1}{R_1} \right) \Theta_2 + S \Theta_1 \right] \right\}.
 \end{aligned} \tag{9.4.24}$$

Силловые граничные условия на контуре Γ

$$\begin{aligned}
 q_v - Q_v = 0; \quad q_t - Q_t = 0; \quad q_n - Q_n = 0; \\
 m_v - M_v = 0.
 \end{aligned} \tag{9.4.25}$$

Составляющие внутренних сил

$$\begin{aligned}
 q_v = T_1 \cos^2 \gamma + S \sin 2\gamma + T_2 \sin^2 \gamma + \\
 + H \sin \gamma \cos \gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) - \\
 - \sin \gamma \cos \gamma \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \left[(M_2 - \right. \\
 \left. - M_1) \sin \gamma \cos \gamma + H \cos 2\gamma \right]; \\
 q_t = (T_2 - T_1) \sin \gamma \cos \gamma + S \cos 2\gamma + \\
 + H \left(\frac{\cos^2 \gamma}{R_2} - \frac{\sin^2 \gamma}{R_1} \right) + \left(\frac{\sin^2 \gamma}{R_1} + \right. \\
 \left. + \frac{\cos^2 \gamma}{R_2} \right) \left[(M_2 - M_1) \sin \gamma \cos \gamma + H \cos 2\gamma \right];
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 q_n = N_1 \cos \gamma + N_2 \sin \gamma + \left(- \frac{\sin \gamma}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha} + \right. \\
 \left. + \frac{\cos \gamma}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \right) \left[(M_2 - M_1) \sin \gamma \cos \gamma + \right. \\
 \left. + H \cos 2\gamma \right]; \\
 m_v = M_1 \cos^2 \gamma + H \sin 2\gamma + M_2 \sin^2 \gamma; \\
 Q_v = T_v - M_t / R_{vt}; \quad Q_t = T_t + M_t / R_t; \\
 Q_n = T_n + \partial M_t / \partial s_t.
 \end{aligned}$$

Дальнейшие упрощения уравнений нелинейной теории связаны с особенностями напряженно-деформированного состояния оболочек. При его быстром изменении, хотя бы в одном из направлений на поверхности, некоторые члены уравнений общей теории становятся пренебрежимо малыми и могут быть отброшены. Приближенные уравнения такого рода известны как уравнения нелинейной теории пологих оболочек (технической теории оболочек) [12, 24].

Допущения, приводящие к теории пологих оболочек, могут быть сформулированы также в форме приближения о близости метрических свойств поверхности и ее проекции на плоскость. В результате, в формулах для компонентов изгибной деформации отбрасывают тангенциальные смещения, а в изменениях кривизн - квадратичные члены с множителями $1/R_i$; в уравнениях равновесия пренебрегают моментными членами, содержащими в качестве сомножителей главные кривизны поверхности и их производные.

Реализация данных гипотез применительно к зависимостям (9.4.24), (9.4.25) приводит к уравнениям геометрически нелинейной теории пологих оболочек [12]

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial B T_1}{\partial \alpha} + \frac{1}{A} \frac{\partial A^2 S}{\partial \beta} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} T_2 + AB p_1 = 0; \\
 \frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} - \frac{1}{AB} \left(\frac{\partial B N_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial A N_2}{\partial \beta} \right) - p_n = 0; \\
 N_1 = \frac{1}{AB} \left[\left(\frac{\partial B M_1}{\partial \alpha} + \frac{1}{A} \frac{\partial A^2 H}{\partial \beta} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} M_2 \right) - \right. \\
 \left. - AB (T_1 \Theta_1 + S \Theta_2) \right];
 \end{aligned}$$

$$T_1 = \frac{Eh}{1-\mu^2} (E_1 + \mu E_2); \quad S = \frac{Eh}{2(1+\mu)} \Omega;$$

$$M_1 = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} (K_1 + \mu K_2); \quad H = \frac{Eh^3}{12(1+\mu)} T;$$

$$E_1 = \varepsilon_1 + \frac{1}{2} \Theta_1^2; \quad \Omega = \gamma + \Theta_1 \Theta_2;$$

$$K_1 = \varkappa_1; \quad T = \tau; \quad \Theta_1 = -\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha}.$$

$$(1 \leftrightarrow 2)$$

$$(9.4.26)$$

Чтобы получить силовые граничные условия к уравнениям равновесия (9.4.26), в формулах (9.4.25) необходимо пренебречь моментными слагаемыми, пропорциональными $1/R_i$ ($i=1, 2$), $1/R_v$, $1/R_r$.

Глава 9.5

ОБОЛОЧКИ ВРАЩЕНИЯ

При повороте плоской кривой (меридиана) вокруг оси z , лежащей в этой плоскости (рис. 9.5.1), образуется срединная поверхность оболочки вращения. Точка M меридиана при повороте описывает окружность (параллель). Положение точки на поверхности может быть задано угловыми координатами: углом α между осью вращения и нормалью к меридиану; углом β , образуемым плоскостью меридиана с начальной плоскостью отсчета. На рис. 9.5.1 показаны угловые координаты точки поверхности M . На рис. 9.5.2 обозначены радиусы кривизн поверхности: радиус R_1 кривизны меридиана; окружной радиус R_r кривизны, который равен расстоянию по нормали от точки на поверхности до оси вращения. Длина дуги элемента вдоль меридиана $ds_1 = R_1 d\alpha$, а вдоль параллели

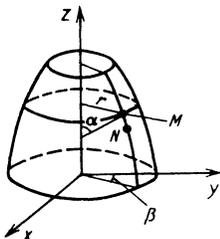


Рис. 9.5.1. Геометрия поверхности оболочки вращения

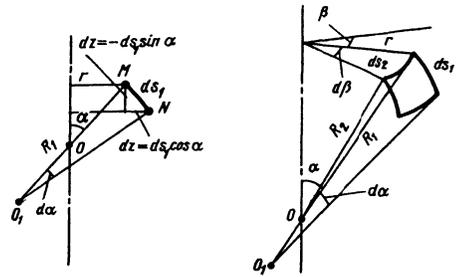


Рис. 9.5.2. Элемент оболочки вращения

$ds_2 = r d\beta$, где r - радиус поперечного сечения поверхности в точке M (рис. 9.5.2). Радиусы r и R_2 связаны соотношением $r = R_2 \sin \alpha$. Так как $ds^2 = R_1^2 d\alpha^2 + r^2 d\beta^2$, коэффициенты Ляме поверхности $A = R_1$, $B = r$. Радиусы кривизн связаны соотношением $d(R_2 \sin \alpha) / d\alpha = R_1 \cos \alpha$, которое вытекает из уравнений Кодаши-Гаусса (9.1.15).

9.5.1. УРАВНЕНИЯ МОМЕНТНОЙ ТЕОРИИ

На рис. 9.5.3 показаны положительные направления составляющих поверхностной нагрузки на оболочку: p_1 вдоль касательной к меридиану; p_2 по касательной к параллели; p_3 по нормали к поверхности. Распределенные моменты ввиду переноса внешней нагрузки на срединную поверхность не учитываются; сила T_1 направленная по касательной к меридиану; сила T_2 , направленная по касательной к параллели; сила S сдвига. В сечениях оболочки действуют следующие изгибающие моменты и перерезывающие силы: M_1 и Q_1 в плоскости меридиана; M_2 и Q_2 в перпендикулярной плоскости, проходящей через нормаль к поверхности, а также крутящий момент H (рис. 9.5.4).

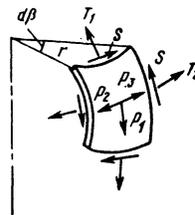


Рис. 9.5.3. Силы в срединной поверхности оболочки, внешние поверхностные силы p_1, p_2, p_3

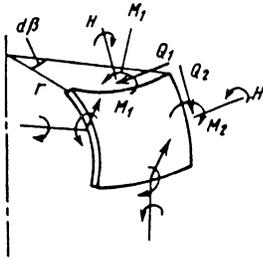


Рис. 9.5.4. Моменты и перерезывающие силы

Уравнения равновесия линейной моментной теории оболочек могут быть получены из общих соотношений п. 9.3.4:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha}(T_1 r) + R_1 \frac{\partial S}{\partial \beta} - T_2 R_1 \cos \alpha + r Q_1 &= -p_1 r R_1; \\ \frac{\partial}{\partial \alpha}(S r) + R_1 \frac{\partial T_2}{\partial \beta} + S R_1 \cos \alpha + R_1 \sin \alpha Q_2 &= \\ &= -p_2 r R_1; \\ \frac{\partial}{\partial \alpha}(Q_1 r) + R_1 \frac{\partial Q_2}{\partial \beta} - r T_1 - R_1 \sin \alpha T_2 &= -p_3 r R_1; \\ \frac{\partial}{\partial \alpha}(M_1 r) + R_1 \frac{\partial H}{\partial \beta} - M_2 R_1 \cos \alpha - R_1 r Q_1 &= 0; \\ \frac{\partial}{\partial \alpha}(H r) + R_1 \frac{\partial M_2}{\partial \beta} + H R_1 \cos \alpha - R_1 r Q_2 &= 0. \end{aligned} \tag{4.5.1}$$

Относительные удлинения элементов срединной поверхности и угловые составляющие деформаций связаны с перемещениями u, v, w зависимостями

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{R_1 \partial \alpha} + \frac{w}{R_1}; \quad \varepsilon_2 = \frac{\partial v}{r \partial \beta} + u \frac{\cos \alpha}{r} + \frac{w}{R_2}; \\ \gamma &= \frac{\partial v}{R_1 \partial \alpha} + \frac{\partial u}{r \partial \beta} - v \frac{\cos \alpha}{r}; \quad \Theta_1 = -\frac{\partial w}{R_1 \partial \alpha} + \frac{u}{R_1}; \\ \Theta_2 &= -\frac{\partial w}{r \partial \beta} + \frac{v}{R_2}. \end{aligned} \tag{9.5.2}$$

Эти уравнения, справедливые для оболочки вращения, являются частным случаем соотношений (9.3.23), (9.3.24), (9.2.4). Согласно формулам (9.3.13) и (9.3.14) определяются изменения кривизн $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ и кручение ε сре-

динной поверхности при деформации оболочки:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\partial \Theta_1}{R_1 \partial \alpha}; \quad \varepsilon_2 = \frac{\partial \Theta_2}{r \partial \beta} + \frac{\cos \alpha}{r} \Theta_1; \\ \varepsilon &= \frac{\partial \Theta_1}{r \partial \beta} + \frac{\partial \Theta_2}{R_1 \partial \alpha} - \frac{\cos \alpha}{r} \Theta_2. \end{aligned} \tag{9.5.3}$$

Геометрические соотношения (9.5.2), (9.5.3) дополняются зависимостями, связывающими силы в срединной плоскости T_1, T_2, S с $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma$, а также моменты M_1, M_2, H с $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon$.

Для изотропной оболочки

$$\begin{aligned} T_1 &= B(\varepsilon_1 + \mu \varepsilon_2); \quad T_2 = B(\varepsilon_2 + \mu \varepsilon_1); \\ S &= 0,5 B(1 - \mu) \gamma; \\ M_1 &= D(\varepsilon_1 + \mu \varepsilon_2); \quad M_2 = D(\varepsilon_2 + \mu \varepsilon_1); \\ H &= 0,5 D(1 - \mu) \varepsilon \\ \left(B &= \frac{Eh}{1 - \mu^2}; \quad D = \frac{Eh^3}{12(1 - \mu^2)} \right). \end{aligned} \tag{9.5.4}$$

Система уравнений (9.5.1) - (9.5.4) является полной и определяет напряженно-деформированное состояние моментной изотропной оболочки вращения при произвольной геометрии меридиана.

9.5.2. ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ

Для осесимметричного случая деформирования оболочки вращения система уравнений (9.5.1) - (9.5.4) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha}(T_1 r) - T_2 R_1 \cos \alpha + r Q_1 &= -p_1 r R_1; \\ \frac{d}{d\alpha}(Q_1 r) - T_1 r - T_2 R_1 \sin \alpha &= -p_3 r R_1; \\ \frac{d}{d\alpha}(M_1 r) - M_2 R_1 \cos \alpha - Q_1 R_1 r &= 0; \end{aligned} \tag{9.5.5}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{du}{R_1 d\alpha} + \frac{w}{R_1}; \\ \varepsilon_2 &= u \frac{\cos \alpha}{r} + \frac{w}{R_2}; \end{aligned}$$

$$\Theta_1 = -\frac{dw}{R_1 d\alpha} + \frac{u}{R_1}; \quad (9.5.6)$$

$$\begin{aligned} \varkappa_1 &= \frac{d\Theta_1}{R_1 d\alpha}; \quad \varkappa_2 = \frac{\cos \alpha}{r} \Theta_1; \\ T_1 &= B(\varepsilon_1 + \mu \varepsilon_2); \quad T_2 = B(\varepsilon_2 + \mu \varepsilon_1); \quad (9.5.7) \\ M_1 &= D(\varkappa_1 + \mu \varkappa_2); \quad M_2 = D(\varkappa_2 + \mu \varkappa_1). \end{aligned}$$

Интегрирование уравнений (9.5.5)' - (9.5.7) и получение аналитических решений возможно для некоторых частных видов оболочек вращения (цилиндра, сферы, конуса, кругового тора). При этом приведенные выше уравнения приводятся в системе Е. Мейснера [37]. Если первое уравнение (9.5.5) умножить на $\sin \alpha$, второе - на $\cos \alpha$ и сложить, то

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha} (T_1 r \sin \alpha - Q_1 r \cos \alpha) &= \\ &= (p_3 \cos \alpha - p_1 \sin \alpha) R_1 r. \end{aligned}$$

В результате интегрирования этого уравнения получается

$$\begin{aligned} 2\pi r (T_1 \sin \alpha - Q_1 \cos \alpha) &= \\ &= 2\pi \int_{\alpha_0}^{\alpha} (p_3 \cos \alpha - p_1 \sin \alpha) r R_1 d\alpha + P. \quad (9.5.8) \end{aligned}$$

Левая часть (9.5.8) представляет собой равнодействующую внутренних сил, направленную вдоль оси оболочки. Константа P равна осевой силе в крайнем сечении при $\alpha = \alpha_0$, а оба слагаемых правой части соответствуют равнодействующей всех внешних сил в сечении α .

Умножение на $\cos \alpha$ первого уравнения (9.5.5), на $\sin \alpha$ второго и сложение приводят к соотношению

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha} (T_1 r \cos \alpha + Q_1 r \sin \alpha) - T_2 R_1 &= \\ &= -(p_1 \cos \alpha + p_3 \sin \alpha) r R_1. \quad (9.5.9) \end{aligned}$$

Функция напряжений V определяется из следующих соотношений:

$$\begin{aligned} r T_1 &= V \cos \alpha + \Phi_1; \\ r Q_1 &= V \sin \alpha + \Phi_2; \quad (9.5.10) \\ T_2 &= \frac{dV}{R_1 d\alpha}, \end{aligned}$$

где Φ_1 и Φ_2 - функции внешней нагрузки;

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= -\cos \alpha \int_{\alpha_0}^{\alpha} (p_3 \sin \alpha + p_1 \cos \alpha) R_1 r d\alpha + \\ &+ \sin \alpha \int_{\alpha_0}^{\alpha} (p_3 \cos \alpha - p_1 \sin \alpha) R_1 r d\alpha + \\ &+ \frac{P}{2\pi} \sin \alpha; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_2 &= -\sin \alpha \int_{\alpha_0}^{\alpha} (p_3 \sin \alpha + p_1 \cos \alpha) R_1 r d\alpha - \\ &- \cos \alpha \int_{\alpha_0}^{\alpha} (p_3 \cos \alpha - p_1 \sin \alpha) R_1 r d\alpha - \\ &- \frac{P}{2\pi} \cos \alpha. \end{aligned}$$

Уравнения равновесия (9.5.8) и (9.5.9) эквивалентны двум первым уравнениям (9.5.5) и удовлетворяются тождественно при подстановке в них соотношений (9.5.10). Таким образом, система (9.5.10) заменяет два первых уравнения равновесия.

Для получения уравнения неразрывности деформаций оболочки вращения воспользуемся соотношениями (9.5.6), исключив составляющие перемещений u и w :

$$\frac{d}{d\alpha} (\varepsilon_2 r) - \varepsilon_1 R_1 \cos \alpha + \Theta_1 R_1 \sin \alpha = 0. \quad (9.5.11)$$

Подстановкой в (9.5.7) выражения для ε_1 и ε_2 , а также (9.5.10) получена система

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{Eh} \left(\frac{\cos \alpha}{r} V - \mu \frac{dV}{R_1 d\alpha} + \frac{1}{r} \Phi_1 \right); \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{Eh} \left(\frac{dV}{R_1 d\alpha} - \mu \frac{\cos \alpha}{r} V - \mu \frac{1}{r} \Phi_1 \right); \\ M_1 &= D \left(\frac{d\Theta_1}{R_1 d\alpha} + \mu \frac{\cos \alpha}{r} \Theta_1 \right); \\ M_2 &= D \left(\frac{\cos \alpha}{r} \Theta_1 + \mu \frac{d\Theta_1}{R_1 d\alpha} \right). \quad (9.5.12) \end{aligned}$$

Окончательный вид уравнений моментной оболочки вращения в форме Е. Мейснера получается, если из (9.5.12) M_1 и M_2 , а из (9.5.10) Q_1 подставить в третье уравнение (9.5.5), а также ε_1 и ε_2 - в уравнение (9.5.11). Для оболочки постоянной толщины

$$\begin{aligned} & \frac{r}{R_1} \frac{d^2 V}{d\alpha^2} + \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{r}{R_1} \right) \frac{dV}{d\alpha} + \\ & + \left(\mu \sin \alpha - \frac{R_1}{r} \cos^2 \alpha \right) V + \\ & + EhR_1 \sin \alpha \Theta_1 = \mu \frac{d\Phi_1}{d\alpha} + \frac{R_1}{r} \cos \alpha \Phi_1; \\ & \frac{r}{R_1} \frac{d^2 \Theta_1}{d\alpha^2} + \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{r}{R_1} \right) \frac{d\Theta_1}{d\alpha} + \\ & + \left(-\mu \sin \alpha - \frac{R_1}{r} \cos^2 \alpha \right) \Theta_1 - \\ & - \frac{R_1}{D} \sin \alpha V = \frac{R_1}{D} \Phi_2. \end{aligned} \tag{9.5.13}$$

Для решения полученной системы уравнений необходимо составить четыре граничных условия (по два в каждом крае), выраженные через функции V и Θ_1 . Если, например, край оболочки имеет заделку, то $\Theta_1=0$ и $\varepsilon_2=0$, при наличии опоры $\varepsilon_2=0$, $M_1=0$. Величины ε_2 и M_1 должны быть выражены через V и Θ_1 и их производные - с помощью уравнений (9.5.12). При нахождении деформированной формы оболочки вместо u и w целесообразно рассматривать радиальное u_1 и осевое w_1 перемещения:

$$u_1 = \varepsilon_2 r = u \cos \alpha + w \sin \alpha;$$

$$w_1 = u \sin \alpha - w \cos \alpha.$$

Из уравнений (9.5.6) следует, что

$$\frac{dw_1}{d\alpha} = \varepsilon_1 R_1 \sin \alpha + \Theta_1 R_1 \cos \alpha.$$

Осевое перемещение

$$w_1 = \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{R_1 \sin \alpha}{Eh} \left(\frac{\cos \alpha}{r} V - \mu \frac{dV}{R_1 d\alpha} + \frac{1}{r} \Phi_1 \right) d\alpha +$$

$$+ \int_{\alpha_0}^{\alpha} \Theta_1 R_1 \cos \alpha d\alpha + \bar{w}_1,$$

где \bar{w}_1 - константа, соответствующая перемещению оболочки как твердого тела.

Итак, при интегрировании системы уравнений моментной оболочки вращения имеется шесть произвольных постоянных: четыре входят в решение системы уравнений Е. Мейснера (9.5.13) и две (P и \bar{w}_1) имеют смысл осевой силы в крайнем сечении и перемещения оболочки вдоль оси как твердого тела.

Для цилиндрической, конической и сферической оболочек система уравнений Е. Мейснера упрощается. Решение может быть получено для функции напряжений V и угла поворота нормали Θ_1 в аналитических функциях, которые позволяют определить все составляющие перемещений, сил и моментов.

9.5.3. ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ, КОНИЧЕСКАЯ И СФЕРИЧЕСКАЯ ОБОЛОЧКИ

В качестве частного решения неоднородной задачи при плавно изменяющихся внешних нагрузках может быть принято решение, соответствующее безмоментной теории. Система (9.5.13) без правой части имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{r}{R_1} \frac{d^2 V}{d\alpha^2} + \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{r}{R_1} \right) \frac{dV}{d\alpha} - \frac{R_1}{r} \cos^2 \alpha V + \\ & + \mu \sin \alpha V + EhR_1 \sin \alpha \Theta_1 = 0; \\ & \frac{r}{R_1} \frac{d^2 \Theta_1}{d\alpha^2} + \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{r}{R_1} \right) \frac{d\Theta_1}{d\alpha} - \frac{R_1}{r} \cos^2 \alpha \Theta_1 - \\ & - \mu \sin \alpha \Theta_1 - \frac{R_1}{D} \sin \alpha V = 0. \end{aligned} \tag{9.5.14}$$

Вводится комплексная функция

$$\psi = \Theta_1 + i \frac{\sqrt{12(1-\mu^2)}}{Eh^2} V, \tag{9.5.15}$$

где $i = \sqrt{-1}$.

Система уравнений (9.5.14) приводится к виду

$$\frac{d^2 \psi}{R_1^2 d\alpha^2} + \text{ctg} \alpha \frac{1}{R_1 R_2} \frac{d\psi}{d\alpha} - \text{ctg}^2 \alpha \frac{1}{R_2^2} \psi +$$

$$+i \frac{\sqrt{12(1-\mu^2)}}{R_2 h} \psi = 0. \quad (9.5.16)$$

Вводится новая переменная

$$x = \sqrt[4]{3(1-\mu^2)} \int \frac{R_1 d\alpha}{\sqrt{R_2 h}}$$

и функция

$$\varphi = \sqrt[4]{r} \sin \alpha \psi.$$

Уравнение (9.5.16) имеет следующий вид:

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} + [2i - f(x)] \varphi = 0, \quad (9.5.17)$$

где

$$f(x) = \frac{h}{R_2} \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha}{\sqrt{3(1-\mu^2)}} \left[\frac{5}{16} - \frac{5}{16} \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2 + \frac{1}{8} \frac{R_2}{R_1} - \frac{1}{4} \frac{R_2}{R_1} \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) \operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{R_2^2}{4R_1} \operatorname{tg} \alpha \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{1}{R_1} \right) \right].$$

Разрешающее уравнение (9.5.17) позволяет получить частные решения однородной системы для оболочек вращения различной геометрии меридиана.

Цилиндрическая оболочка. Для цилиндрической оболочки $R_1 d\alpha = ds$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $r = R$:

Переменная x в (9.5.17) выражается через координату оболочки вдоль образующей s :

$$x = \frac{\sqrt[4]{3(1-\mu^2)}}{\sqrt{Rh}} s; \quad f(x) = 0.$$

Уравнение (9.5.17) принимает вид

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} + 2i\varphi = 0.$$

С помощью функции $\psi(\varphi = \sqrt[4]{R} \psi)$ переменной s (9.5.15)

$$\frac{d^2 \Theta_1}{ds^2} - \frac{1}{RD} V = 0; \quad \frac{d^2 V}{ds^2} + \frac{Eh}{R} \Theta_1 = 0.$$

При $\frac{Eh}{R^2 D} = 4k^4$ эти уравнения приводятся к виду

$$\frac{d^4 \Theta_1}{ds^4} + 4k^4 \Theta_1 = 0.$$

Одна из форм решения уравнения

$$\Theta_1 = \Theta_0 + C_1 e^{-ks} \sin ks + C_2 e^{-ks} \cos ks + C_3 e^{ks} \sin ks + C_4 e^{ks} \cos ks, \quad (9.5.18)$$

где Θ_0 - частное решение неоднородной системы (9.5.15), соответствующее безмоментной теории.

Для поверхностных нагрузок $p_3 = p$, $p_1 = 0$ и краевой силе P в (9.5.13) функции;

$$\Phi_1 = \frac{P}{2\pi}, \quad \Phi_2 = -pRs;$$

$$V = V_0 - 2k^2 C_1 e^{-ks} \cos ks + 2k^2 C_2 e^{-ks} \sin ks + 2k^2 C_3 e^{ks} \cos ks + 2k^2 C_4 e^{ks} \sin ks. \quad (9.5.19)$$

Из приведенных выше уравнений определяются Q_1 , T_2 , ε_1 , ε_2 , M_1 , M_2 . Осевое и нормальное к срединной поверхности перемещения $\frac{du}{ds} = \varepsilon_1$; $w = \varepsilon_2 R$. Константы C_1 -

C_4 в (9.5.18) и (9.5.19) находят из граничных условий на краях оболочки. На каждом крае должны быть заданы два условия. Например,

для опоры $\frac{dV}{ds} = \mu \frac{\Phi_1}{R}$; $\frac{d\Theta_1}{ds} = 0$. Если край

оболочки заделан, $\frac{dV}{ds} = \mu \frac{\Phi_1}{R}$; $\Theta_1 = 0$. При

отсутствии закреплений для свободного края $\frac{d\Theta_1}{ds} = 0$; $V = -\Phi_2$.

Для длинной оболочки, у которой $l > 5\sqrt{Rh}$, можно упростить решение и рассматривать уравнения (9.5.18) и (9.5.19), содержащие только функции с отрицательным показателем экспоненты. Тогда

$$\Theta_1 = \Theta_0 + C_1 e^{-ks} \sin ks + C_2 e^{-ks} \cos ks;$$

$$V = DR \frac{d^2 \Theta_0}{ds^2} + pRs - 2k^2 C_1 e^{-ks} \cos ks + 2k^2 C_2 e^{-ks} \sin ks.$$

В оболочке, край которой ($s=0$) заделан и

$$\Theta_0 = 0, C_2 = 0, C_1 = -\frac{1}{2k^3} \left(pR - \mu \frac{P}{2\pi R} \right).$$

Радиальное перемещение

$$w = \left(\frac{pR^2}{Eh} - \mu \frac{PR}{2\pi REh} \right) \left[1 - e^{-ks} (\sin ks + \cos ks) \right].$$

Коническая оболочка. Для усеченной конической оболочки при отсчете s вдоль образующей от краевого сечения меньшего радиуса $r = s \cos \alpha$, $R_2 = s \operatorname{ctg} \alpha$, $R_1 \rightarrow \infty$. Переменная x и s связаны зависимостью

$$s = \frac{h \operatorname{ctg} \alpha}{4\sqrt{3(1-\mu^2)}} x^2.$$

В уравнении (9.5.17) функция $f(x) = \frac{15}{4x^2}$.

Разрешающее уравнение относительно φ

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \left(2i - \frac{15}{4x^2} \right) \varphi = 0.$$

Решение уравнения следующее:

$$\varphi = C_1 \sqrt{x} I_2(x\sqrt{2i}) + C_2 H'_2(x\sqrt{2i}),$$

где I_2 - функция Бесселя второго порядка мнимого аргумента; H'_2 - функция Ганкеля первого рода второго порядка.

Функция $I_2=0$ при $x=0$, а $H'_2 \rightarrow \infty$ при $x=0$. Специальные функции I_2 и H'_2 преобразуются в функции Кельвина и их комбинации, через которые выражаются зависимости для Θ_1 и V :

$$\Theta_1 = \Theta_0 + A_1 f_1(\sqrt{2x}) - B_1 f_2(\sqrt{2x}) + A_2 f_3(\sqrt{2x}) - B_2 f_4(\sqrt{2x});$$

$$V = V_0 + \frac{Eh^2}{\sqrt{12(1-\mu^2)}} \left[A_1 f_2(\sqrt{2x}) + B_1 f_1(\sqrt{2x}) + A_2 f_4(\sqrt{2x}) + B_2 f_3(\sqrt{2x}) \right].$$

С помощью этих соотношений и (9.5.10), (9.5.15) можно через специальные функции выразить все силы и деформации. Константы A_1 - B_2 находятся после удовлетворения граничным условиям на краях оболочки.

Сферическая оболочка. Для сферической оболочки ($R_1=R_2=R$, $r=R \sin \alpha$, $s=R\alpha$) в уравнении (9.5.17)

$$x = \sqrt[4]{3(1-\mu^2)} \sqrt{\frac{R}{h}} \alpha;$$

$$f(x) = \frac{h}{R} \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha}{\sqrt{3(1-\mu^2)}} \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \alpha \right).$$

Уравнение (9.5.17) решается в специальных функциях Лежандра. Для пологой сферической оболочки $\left(\operatorname{tg}^2 \alpha \ll \frac{3}{2}, \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\alpha^2} \right)$ уравнение (9.5.17) принимает вид

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \left(2i - \frac{3}{4x^2} \right) \varphi = 0.$$

Решение этого уравнения подобно полученному выше для конической оболочки

$$\varphi = C_1 \sqrt{x} I_1(x\sqrt{2i}) + C_2 \sqrt{x} H'_1(x\sqrt{2i}).$$

Функции Бесселя и Ганкеля здесь первого порядка. Они могут быть представлены через табулированные функции Кельвина и их производные. Искомые углы поворота Θ_1 и функция напряжений V определяются соотношениями

$$\Theta_1 = \Theta_0 + A_1 f'_1(x\sqrt{2}) + B_1 f'_2(x\sqrt{2}) + A_2 f'_3(x\sqrt{2}) + B_2 f'_4(x\sqrt{2});$$

$$V = V_0 + \frac{Eh^2}{\sqrt{12(1-\mu^2)}} \left[A_1 f'_2(x\sqrt{2}) - B_1 f'_1(x\sqrt{2}) + A_2 f'_4(x\sqrt{2}) - B_2 f'_3(x\sqrt{2}) \right].$$

Аналогично конической оболочке для нахождения сил и деформаций в оболочке необходимо воспользоваться уравнениями (9.5.10) и (9.5.12). Соотношения между деформациями и перемещениями позволяют определить u и w . Четыре частных решения с постоянными A_1 - B_2 позволяют удовлетворить граничным условиям на краях оболочки (по два на каждый край). Функции $f'_3(x\sqrt{2})$ и $f'_4(x\sqrt{2})$ стремятся к бесконечности при $x \rightarrow 0$ (или $\alpha \rightarrow 0$). Для замкнутой в полюсе оболочки $A_2=B_2=0$.

Подробно последовательность расчета конических, сферических и круговых торооб-

разных оболочек, а также примеры решения задач рассмотрены в литературных источниках [7, 37, 38].

9.5.4. ОБОЛОЧКИ ПРИ НЕОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Оболочки вращения замкнутые по координате β рассчитываются с использованием метода разделения переменных. При этом система уравнений в частных производных (9.5.1) - (9.5.4) приводится к уравнениям с одной переменной. Поверхностные составляющие нагрузки, разложенные в ряды,

$$p_1 = \sum_n p_{1n} \cos n\beta; \quad p_2 = \sum_n p_{2n} \sin n\beta;$$

$$p_3 = \sum_n p_{3n} \cos n\beta, \quad (9.5.20)$$

где n - целое число ($n=0, 1, 2, \dots$); p_{1n}, p_{2n}, p_{3n} - функции только одной координаты α .

Тогда величины $u, w, T_1, T_2, Q_1, M_1, M_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \Theta_1$ можно получить в виде сумм: $u = \sum_n u_n \cos n\beta; w = \sum_n w_n \cos n\beta$ и

т.д. В то же время величины $v, s, Q_2, H, \Theta_2, \gamma, \varepsilon$ представляют следующим образом:

$$v = \sum_n v_n \sin n\beta; \quad S = \sum_n S_n \sin n\beta \text{ и т.д.}$$

где $n=1, 2, \dots$ - номер гармоники составляющих сил, деформаций и перемещений; соответствующие им амплитудные значения имеют индекс n .

Уравнения равновесия (9.5.1) принимают вид:

$$\frac{d}{d\alpha}(T_{1n}r) + R_1 n S_n - T_{2n} R_1 \cos \alpha + r Q_{1n} =$$

$$= -p_{1n} r R_1;$$

$$\frac{d}{d\alpha}(S_n r) + R_1 n T_{2n} + S_n R_1 \cos \alpha + R_1 \sin \alpha Q_{2n} =$$

$$= -p_{2n} r R_1;$$

$$\frac{d}{d\alpha}(Q_{1n} r) + R_1 n Q_{2n} - r T_{1n} - R_1 \sin \alpha T_{2n} =$$

$$= -p_{3n} r R_1;$$

$$\frac{d}{d\alpha}(M_{1n} r) + R_1 n H_n - M_{2n} R_1 \cos \alpha -$$

$$- R_1 r Q_{1n} = 0;$$

$$\frac{d}{d\alpha}(H_n r) - R_1 n M_{2n} + H_n R_1 \cos \alpha -$$

$$- R_1 r Q_{2n} = 0. \quad (9.5.21)$$

Геометрические соотношения (9.5.2) и (9.5.3) после разложения в ряды их составляющих:

$$\varepsilon_{1n} = \frac{du_n}{R_1 d\alpha} + \frac{w_n}{R_1};$$

$$\varepsilon_{2n} = \frac{n}{r} v_n + \frac{\cos \alpha}{r} u_n + \frac{\sin \alpha}{r} w_n;$$

$$\gamma_n = -\frac{n}{r} u_n + \frac{dv_n}{R_1 d\alpha} - \frac{\cos \alpha}{r} v_n;$$

$$\Theta_{1n} = -\frac{dw_n}{R_1 d\alpha} + \frac{u_n}{R_1}; \quad \Theta_{2n} = n \frac{w_n}{r} + \frac{v_n}{R_2};$$

$$\varepsilon_{1n} = \frac{d\Theta_{1n}}{R_1 d\alpha}; \quad \varepsilon_{2n} = \frac{n}{r} \Theta_{2n} + \frac{\cos \alpha}{r} \Theta_{1n};$$

$$\varepsilon_n = \frac{d\Theta_{2n}}{R_1 d\alpha} - \frac{n}{r} \Theta_{1n} - \frac{\cos \alpha}{r} \Theta_{2n}. \quad (9.5.22)$$

Уравнения (9.5.4) принимают вид:

$$T_{1n} = B(\varepsilon_{1n} + \mu \varepsilon_{2n}); \quad T_{2n} = B(\varepsilon_{2n} + \mu \varepsilon_{1n});$$

$$S_n = 0,5 B(1 - \mu) \gamma_n;$$

$$M_{1n} = D(\varepsilon_{1n} + \mu \varepsilon_{2n}); \quad M_{2n} = D(\varepsilon_{2n} + \mu \varepsilon_{1n});$$

$$H_n = 0,5 D(1 - \mu) \varepsilon_n. \quad (9.5.23)$$

Все силы, перемещения и деформации зависят лишь от одной координаты α .

При $n=0$ уравнения соответствуют осесимметричной задаче. В этом случае силы сдвига S_n, Q_{2n} , момент H_n , перемещение v_n , а также величины $\varepsilon_n, \gamma_n, \Theta_{2n}$ равны нулю. Перемещения u_n и w_n , силы T_{1n} и T_{2n} , моменты M_{1n}, M_{2n} , а также $Q_{1n}, \varepsilon_{1n}, \varepsilon_{2n}, \varepsilon_{1n}, \varepsilon_{2n}, \Theta_{1n}$ зависят только от координаты α . Второе и

пятое уравнения равновесия (9.5.21), а также соотношения для $\gamma_n, \Theta_{2n}, \varepsilon_n$ тождественно равны нулю, остальные зависимости упрощаются.

При $n=1$ все составляющие сил, перемещений и деформаций изменяются, как при изгибе балки круглого поперечного сечения. В поперечном сечении оболочки вращения меридиональные и сдвигающие силы можно привести к суммарным нормальной силы N , изгибающему моменту M и перерезывающей силе Q в поперечном сечении оболочки:

$$N = 2 \int_0^\pi T_1 r \sin \alpha d\beta; \quad M = 2 \int_0^\pi T_1 r^2 \sin \alpha \cos \beta d\beta;$$

$$Q = 2 \int_0^\pi S r \sin \beta d\beta.$$

Поскольку величины T_1 и S представляют в виде суммы ортогональных тригонометрических функций, равнодействующая сила N определяется только осесимметричной составляющей T_{10} , момент M - величиной T_{11} (первой гармоникой), а перерезывающая сила Q - сдвигающей силой S ($n=1$). Остальные члены рядов в поперечном сечении дают нулевые равнодействующие, иначе, для $n \geq 2$ составляющие сил T_1 и S самоуравновешены.

Система уравнений (9.5.21) - (9.5.23), описывающая несимметричную деформацию оболочки вращения в аналитической форме, решается лишь в отдельных случаях. Общий случай расчета оболочек связан с применением численных методов.

Глава 9.6

ПРИКЛАДНЫЕ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК

Расчет оболочек с использованием общей моментной теории связан с решением краевых задач и интегрированием сложной системы уравнений в частных производных. Широко известны численные способы решения этих уравнений. Приближенные теории построены на дополнительных упрощениях: безмоментная теория оболочек; теория краевого эффекта; полубезмоментная теория цилиндрических оболочек; теория пологих оболочек.

9.6.1. БЕЗМОМЕНТНАЯ ТЕОРИЯ

Согласно безмоментной теории нормальные и касательные напряжения постоян-

ны по толщине оболочки. Внутренние силы сведены к нормальным T_1, T_2 и сдвигающим S . Перерезывающие силы Q_1 и Q_2 , изгибающие M_1 и M_2 и крутящий H моменты равны нулю.

Безмоментная теория хорошо описывает напряженное состояние оболочек, имеющих плавно изменяющуюся срединную поверхность, постоянную или плавно изменяющуюся толщину, непрерывно и плавно изменяющуюся нагрузку на оболочку. Безмоментную теорию в рассматриваемой линейной постановке нельзя рекомендовать для расчета напряжений на участках, близких к закреплениям, сопряжениям частей оболочки, рядом с усиливающими элементами.

Общие уравнения равновесия безмоментной оболочки можно получить из соотношений:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} (T_1 B) + \frac{\partial}{\partial \beta} (S A) + S \frac{\partial A}{\partial \beta} - T_2 \frac{\partial B}{\partial \alpha} = -p_1 A B;$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} (S B) + \frac{\partial}{\partial \beta} (T_2 A) + S \frac{\partial B}{\partial \alpha} - T_1 \frac{\partial A}{\partial \beta} = -p_2 A B;$$

$$\frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} = p_3.$$

(9.6.1)

В системе уравнений (9.6.1) число неизвестных (T_1, T_2, S) соответствует числу уравнений. При заданных составляющих внешней нагрузки и краевых силах для определения внутренних сил достаточно рассмотреть уравнения равновесия.

Для оболочки вращения при осесимметричном случае нагружения система уравнений (9.6.1) принимает вид

$$\frac{d}{d\alpha} (T_1 r) - T_2 R_1 \cos \alpha = -p_1 R_1 r;$$

(9.6.2)

$$\frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} = p_3.$$

Сила

$$T_1 = \frac{1}{r \sin \alpha} \int (-p_1 \sin \alpha + p_3 \cos \alpha) R_1 r d\alpha + \frac{C}{r \sin \alpha}, \quad (9.6.3)$$

где C - константа, определяемая из условия равенства силы T_1 на контуре при $\alpha = \alpha_0$ заданному значению T_1 .

Окружная сила в оболочке

$$T_2 = \left(p_3 - \frac{T_1}{R_1} \right) R_2. \quad (9.6.4)$$

Соотношения (9.6.3) и (9.6.4) позволяют найти силы T_1 и T_2 для оболочек вращения различного вида (табл. 9.6.1). Силы T_1 и T_2 позволяют определить перемещения u и w , соответствующие безмоментной теории. Согласно (9.5.6)

$$\varepsilon_1 = \frac{du}{R_1 d\alpha} + \frac{w}{R_1}; \quad \varepsilon_2 = u \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{R_2} + \frac{w}{R_2}. \quad (9.6.5)$$

Перемещение

$$u = \sin \alpha \int \frac{1}{\sin \alpha} (\varepsilon_1 R_1 - \varepsilon_2 R_2) d\alpha + C_1 \sin \alpha.$$

Для оболочки с прямолинейной образующей ($\alpha = \text{const}$, $R_1 d\alpha = ds$)

$$u = \int \varepsilon_1 ds + C_2.$$

Нормальное к поверхности перемещение из второго уравнения (9.6.5)

$$w = \varepsilon_2 R_2 - u \operatorname{ctg} \alpha.$$

Деформации ε_1 и ε_2 определяются по известным значениям T_1 и T_2 из соотношений упругости. Перемещение w находится из алгебраического уравнения, не содержащего константы для удовлетворения граничным условиям для w . Это одна из особенностей безмоментной теории. Не только для осесимметричной деформации, но и для общего случая деформирования удается выполнить условия на границе относительно касательных перемещений и сил, но для нормального перемещения w граничные условия не удовлетворяются.

Для оболочки вращения при неосесимметричной нагрузке внутренние силы T_1 , T_2 , S определяются из уравнений равновесия:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} (T_1 r) + R_1 \frac{\partial S}{\partial \beta} - R_1 \cos \alpha T_2 = -p_1 r R_1;$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} (S r) + R_1 \frac{\partial T_2}{\partial \beta} + R_1 \cos \alpha S = -p_2 r R_1;$$

9.6.1. Расчетные силы, действующие внутри оболочки при осесимметричном нагружении

Оболочка	Внутренние силы		Примечание
	T_1	T_2	
Цилиндрическая, нагруженная внутренним давлением p и осевой силой N	$\frac{pR}{2} + \frac{N}{2\pi R}$	pR	R - радиус; $p_3 = p$ - внутреннее давление; N - растягивающая сила
Сферическая, нагруженная внутренним давлением	$0,5pR$	$0,5pR$	p - внутреннее давление
Полусферическая, закрепленная у экватора и заполненная жидкостью	$\frac{1}{3} \frac{\rho g R^2}{\sin^2 \alpha} (1 - \cos^3 \alpha)$	$\rho g R^2 \left(\cos \alpha - \frac{1 - \cos^3 \alpha}{3 \sin^2 \alpha} \right)$	R - радиус полусферы; ρ - плотность тяжелой жидкости, залитой в оболочку; g - ускорение свободного падения
Коническая, нагруженная внутренним давлением	$0,5p s \operatorname{ctg} \alpha$	$p s \operatorname{ctg} \alpha$	p - внутреннее давление; s - координата сечения вдоль образующей
Торообразная кругового сечения, нагруженная внутренним давлением	$\frac{pR}{2} \frac{2a + R \sin \alpha}{a + R \sin \alpha}$	$\frac{pR}{2}$	p - внутреннее давление; R - радиус осевого сечения тора; a - расстояние от оси вращения до центра круга

$$T_1 r + T_2 R_1 \sin \alpha = p_3 r R_1. \quad (9.6.6)$$

Если поверхностные нагрузки для замкнутой оболочки представить в виде рядов

$$p_1 = \sum_n p_{1n} \cos n\beta; \quad p_2 = \sum_n p_{2n} \sin n\beta;$$

$$p_3 = \sum_n p_{3n} \cos n\beta, \text{ то внутренние силы}$$

$$T_1 = \sum_n T_{1n} \cos n\beta; \quad T_2 = \sum_n T_{2n} \cos n\beta;$$

$$S = \sum_n S_n \sin n\beta.$$

Тогда для каждой n -й гармоники уравнения (9.6.6) принимают вид:

$$\frac{dT_{1n}}{ds} + T_{1n} \frac{1}{r} \cos \alpha - T_{2n} \frac{1}{r} \cos \alpha + \frac{n}{r} S_n = -p_{1n};$$

$$\frac{dS_n}{ds} + S_n \frac{2}{r} \cos \alpha - R_1 n T_{2n} = -p_{2n};$$

$$T_{1n} \frac{1}{R_1} + T_{2n} \frac{1}{R_2} = p_{3n}, \quad (9.6.7)$$

где $ds = R_1 d\alpha$, $n=0,1,2,3,\dots$

Когда на одном из краев ($\alpha = \alpha_0$) заданы усилия T_{1n} и S_n , систему (9.6.6) для оболочки с произвольной геометрией меридиана можно проинтегрировать численно; для каждого значения n из третьего уравнения (9.6.7) определить T_{2n} ; из первых двух уравнений найти приращения T_{1n} и S_n , а затем усилия T_{1n} и S_n в следующем сечении оболочки, отстоящем от $\alpha = \alpha_0$ на $\Delta\alpha$ (или на $\Delta s = R_1 \Delta\alpha$). После этого определить T_{2n} и т.д. Таким образом, для каждой гармоники на всей длине меридиана найти все значения сил T_{1n} , T_{2n} , S_n .

Перемещения в оболочке вращения с использованием безмоментной теории можно найти из первых трех соотношений (9.5.2), которые после разложения по периодическим функциям для каждого n принимают вид:

$$\varepsilon_{1n} = \frac{du_n}{ds} + \frac{w_n}{R_1};$$

$$\varepsilon_{2n} = n \frac{v_n}{r} + \cos \alpha \frac{u_n}{r} + \sin \alpha \frac{w_n}{r};$$

$$\gamma_n = -\frac{n}{r} u_n + \frac{dv_n}{ds} - v_n \frac{\cos \alpha}{r}. \quad (9.6.8)$$

Левые части уравнений получают после определения сил T_{1n} , T_{2n} , S_n и использования соотношений упругости. Интегрирование (9.6.8) позволяет найти безмоментные составляющие перемещений. Аналогично задаче при осесимметричном случае нагружения удовлетворить условиям на крае оболочки относительно w_n не удастся.

Безмоментная теория - одно из существенных упрощений общей теории оболочек. Она обычно соответствует частным решениям моментной теории, а также технической теории мягких оболочек. Расчет многих тонкостенных конструкций основан часто на приближениях, соответствующих безмоментной линейной теории без уточнений.

9.6.2. КРАЕВОЙ ЭФФЕКТ

Приближенное решение моментной теории оболочек вращения предполагает расчленение напряженно-деформированного состояния на безмоментное и краевой эффект. Краевому эффекту соответствует аналитическое решение моментной теории, справедливое в сравнительно узкой зоне оболочки. Оно строится на основе упрощения уравнений моментной теории в предположении, что угол α_0 между осью вращения и краем оболочки близок $\pi/2$, длина краевой зоны невелика и в ее пределах радиусы кривизны R_1 и R_2 и толщина оболочки не меняются, производные от функции перемещений w углов поворота Θ_1 , сил T_2 , Q_1 , моментов M_1 значительно больше самих функций $\frac{d}{d\alpha}(\) \gg (\)$. В соответствии с методом расчленения перемещение

$$w = w_0 + w_{\kappa}. \quad (9.6.9)$$

Первое слагаемое суммы определяется безмоментной теорией, второе - краевому эффекту. Используя принятые упрощения, однородную часть системы уравнений моментной теории приводят к соотношению

$$\frac{d^4 w_{\kappa}}{d\alpha^4} + \frac{EhR_1^4}{DR_2^2} w_{\kappa} = 0. \quad (9.6.10)$$

Обозначив $4k^4 = \frac{EhR_1^4}{DR_2^2}$, решение уравнения

(9.6.10) можно представить в форме

$$w_k = C_1 e^{-k\alpha} \sin(k\alpha) + C_2 e^{-k\alpha} \cos(k\alpha). \quad (9.6.11)$$

Учет только затухающей части объясняет ся тем, что длина краевой зоны мала по сравнению с длиной образующей оболочки. Для получения общего решения к величине w_k добавляется безмоментная составляющая w_0 общего решения. Окружная сила

$$T_2 = T_{20} + T_{2k},$$

где $T_{2k} = Ehw_k / R_2$; T_{20} - безмоментная часть решения.

На меридиональную силу и касательное перемещение краевой эффект влияния не оказывает и величины T_1 и u определяются только безмоментным решением. Изгибающий момент и перерезывающая сила в краевой зоне

$$M_1 = -D \frac{d^2 w_k}{R_1^2 d\alpha^2}; \quad Q_1 = -D \frac{d^3 w_k}{R_1^3 d\alpha^3}. \quad (9.6.12)$$

Последовательность решения задач с использованием теории краевого эффекта состоит в следующем. Вначале находят силы и перемещения в оболочке по безмоментной теории. Сила T_1 и перемещение u определяются только этими зависимостями. Нормальное перемещение и окружная сила состояются из двух слагаемых. Из уравнения (9.6.11) определяют w_k . Изгибающий момент и перерезывающую силу находят по зависимостям (9.6.12). Все моментные части сил и перемещений выражаются через константы C_1 и C_2 . Их определяют из граничных условий или условий сопряжения. Если оболочка имеет несколько участков, для каждого сопрягаемого края записывается решение вида (9.6.11) со своими коэффициентами k . Из условия равенства нормальных перемещений, углов поворота нормали, изгибающих моментов и перерезывающих сил находят все искомые значения констант.

Подобное решение можно построить при неосесимметричном случае нагружения оболочки. При этом после нахождения безмоментных частей общего решения для сил и перемещений к w_n так же, как и в (9.6.9), добавляется составляющая (9.6.11), соответствующая краевому эффекту. Упрощенный расчет можно применить при не очень быстром изменении функций перемещений и сил в окружном направлении.

9.6.3. ПОЛУБЕЗМОМЕНТНАЯ ТЕОРИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Расчет цилиндрических оболочек при медленном изменении всех составляющих сил,

деформаций и перемещений вдоль образующей и при искажении контура поперечного сечения основан на полубезмоментной теории, которая базируется на следующих гипотезах [12]:

изгибающий момент M_1 , крутящий момент H и перерезывающая сила Q_1 считаются малыми и в уравнениях равновесия не учитываются;

деформации оболочек в окружном направлении ε_2 и сдвига γ предполагаются равными нулю ($\varepsilon_2=0, \gamma=0$);

слагаемые уравнений, содержащие коэффициент Пуассона ($\mu=0$), не учитываются.

Приведенные гипотезы упрощают систему уравнений оболочки. Аналогичные зависимости получаются, если иметь в виду лишь одно условие о значительности больших величинах вторых производных функций сил деформаций и перемещений в окружном направлении по сравнению с этими величинами вдоль

образующей: $\frac{\partial^2}{R^2 \partial \beta^2} () \gg \frac{\partial^2}{d\alpha^2} ()$. Уравнения равновесия (9.5.1) для цилиндрической оболочки при соблюдении гипотез ($Q_1=0, M_1=0, H=0$) принимают вид

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\partial S}{R \partial \beta} = -p_1;$$

$$\frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial T_2}{R \partial \beta} + \frac{Q_2}{R} = -p_2;$$

$$\frac{\partial Q_2}{R \partial \beta} - \frac{T_2}{R} = -p_3;$$

$$\frac{\partial M_2}{R \partial \beta} - Q_2 = 0.$$

(9.6.13)

Эти четыре зависимости эквивалентны следующему соотношению:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^4 M_2}{R^3 \partial \beta^4} - \frac{\partial^2 M_2}{R^3 \partial \beta^2} = \\ = -\frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{\partial p_2}{R \partial \beta} + \frac{\partial^2 p_3}{R \partial \beta^2}. \end{aligned} \quad (9.6.14)$$

Вторая гипотеза соответствует равенствам $\frac{\partial u}{R \partial \beta} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0$; $\frac{\partial v}{R \partial \beta} + \frac{w}{R} = 0$, которые получены из (9.5.2). Они удовлетворяются тождественно, если ввести разрешающую функцию Φ :

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}; \quad v = \frac{\partial \Phi}{R \partial \beta}; \quad w = \frac{\partial^2 \Phi}{R \partial \beta^2}. \quad (9.6.15)$$

Осевая сила и окружной изгибающий момент можно определить следующим образом:

$$T_1 = Eh \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}; \quad M_2 = -\frac{D}{R^3} \left(\frac{\partial^4 \Phi}{\partial \beta^4} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \beta^2} \right). \quad (9.6.16)$$

Уравнение (9.6.14) при подстановке в него (9.6.16) принимает вид

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + \frac{D}{EhR^6} \left(\frac{\partial^8 \Phi}{\partial \beta^8} + 2 \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \beta^6} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \beta^4} \right) = \frac{1}{Eh} \left(-\frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{\partial p_2}{R \partial \beta} + \frac{\partial^2 p_3}{R \partial \beta^2} \right). \quad (9.6.17)$$

Для замкнутой по координате β оболочки при разложении нагрузки в ряды $p_1 = \sum p_{1n} \cos n\beta$; $p_2 = \sum p_{2n} \sin n\beta$; $p_3 = \sum p_{3n} \cos n\beta$ можно представить функцию $\Phi = \sum \Phi_n \cos n\beta$. Разрешающее уравнение (9.6.17) для каждого значения n

$$\frac{d^4 \Phi_n}{dx^4} + \frac{D}{EhR^6} n^4 (n^2 - 1)^2 \Phi_n = \frac{1}{Eh} \left(-\frac{dp_{1n}}{dx} - \frac{n}{R} p_{2n} - \frac{n^2}{R} p_{3n} \right). \quad (9.6.18)$$

Составляющие нагрузки p_{1n} , p_{2n} , p_{3n} , а также разрешающая функция Φ_n зависят только от координаты x . Если обозначить $4k_n^4 = \frac{D}{EhR^6} n^4 (n^2 - 1)^2$, то общее решение (9.6.18)

$$\begin{aligned} \Phi_n = & \bar{\Phi}_n + C_{1n} e^{-k_n x} \sin k_n x + \\ & + C_{2n} e^{-k_n x} \cos k_n x + C_{3n} e^{k_n x} \sin k_n x + \\ & + C_{4n} e^{k_n x} \cos k_n x, \end{aligned} \quad (9.6.19)$$

где $\bar{\Phi}_n$ - частное решение неоднородного уравнения (9.6.18).

Константы $C_{1n} - C_{4n}$ определяются из граничных условий в поперечных сечениях оболочки. Так же, как для безмоментной оболочки, они могут быть заданы относительно u или T_1 , а также v или S . Перемещения и силы в оболочке представлены через функцию Φ_n следующим образом:

$$\begin{aligned} u_n = \frac{d\Phi_n}{dx}; \quad v_n = -\frac{n}{R} \Phi_n; \quad w_n = -\frac{n^2}{R} \Phi_n; \\ T_{1n} = Eh \frac{d^2 \Phi_n}{dx^2}; \quad S_n = -\frac{EhR}{n} \frac{d^3 \Phi_n}{dx^3} - \frac{R}{n} p_{1n}; \\ M_{2n} = -\frac{D}{R^3} n^2 (n^2 - 1) \Phi_n \end{aligned}$$

Показатель изменчивости функции Φ_n в решении (9.6.19) зависит от толщины h , радиуса оболочки R и от номера гармоники n . Полубезмоментная теория справедлива при $n \geq 2$, когда силы T_{1n} и S_n самоуравновешены, а перемещения u_n , v_n и w_n соответствуют искажению поперечного сечения. При значениях $n=0$ и $n=1$ имеет место растяжение (сжатие) и изгиб оболочки как балки.

9.6.4. РАСЧЕТ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК

Расчет оболочки малой гауссовой кривизны, сетка координатных линий на поверхности которых может быть заменена линиями на плоскости, проводится по схеме пологой оболочки. Основное допущение теории пологих оболочек связано с упрощением соотношений для изменений кривизны и кручения, где не учитываются составляющие перемещений, касательные к поверхности. При этом

$$\begin{aligned} \alpha_1 = & -\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial w}{A \partial \alpha} \right) - \frac{1}{A^2 B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{\partial w}{\partial \alpha}; \\ \alpha_2 = & -\frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\partial w}{B \partial \beta} \right) - \frac{1}{AB^2} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial w}{\partial \beta}; \\ \alpha = & -\frac{1}{AB} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{\partial B}{B \partial \alpha} \frac{\partial w}{\partial \beta} - \frac{\partial A}{A \partial \beta} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right). \end{aligned} \quad (9.6.20)$$

Относительные удлинения вдоль линий α и β и сдвиг определяются зависимостями:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{A \partial \alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} v + \frac{w}{R_1}; \\ \varepsilon_2 &= \frac{\partial v}{B \partial \beta} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} u + \frac{w}{R_2}; \\ \gamma &= \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{v}{B} \right) + \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u}{A} \right).\end{aligned}\quad (9.6.21)$$

Наиболее последовательный путь получения упрощенных уравнений равновесия - вариационный. С помощью принципа возможных перемещений и соотношений (9.6.20), (9.6.21) получены уравнения

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \alpha} (T_1 B) + \frac{\partial}{B \partial \beta} (S A^2) - \frac{\partial B}{\partial \alpha} T_2 &= -p_1 AB; \\ \frac{\partial}{\partial \beta} (T_2 A) + \frac{\partial}{A \partial \alpha} (S B^2) - \frac{\partial A}{\partial \beta} T_1 &= -p_2 AB; \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} (Q_1 B) + \frac{\partial}{\partial \beta} (Q_2 A) - \frac{AB}{R_1} T_1 - \frac{AB}{R_2} T_2 &= -p_3 AB; \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} (M_1 B) - \frac{\partial B}{\partial \alpha} M_2 + \frac{\partial}{A \partial \beta} (H A^2) - Q_1 AB &= 0; \\ \frac{\partial}{\partial \beta} (M_2 A) - \frac{\partial A}{\partial \beta} M_1 + \frac{\partial}{B \partial \alpha} (H B^2) - Q_2 AB &= 0.\end{aligned}\quad (9.6.22)$$

Неучет составляющих, содержащих переизбыточные силы в первых двух уравнениях, является следствием принятых допущений об упрощении соотношений для кривизн и кручения. Однородные части первых двух уравнений равновесия удовлетворяются для оболочек даже при одной постоянной кривизне, если ввести функцию Φ [5]:

$$\begin{aligned}T_1 &= \frac{\partial}{B \partial \beta} \left(\frac{\partial \Phi}{B \partial \beta} \right) + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{\partial \Phi}{A \partial \alpha} + \frac{\Phi}{R_1 R_2}; \\ T_2 &= \frac{\partial}{A \partial \alpha} \left(\frac{\partial \Phi}{A \partial \alpha} \right) + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial \Phi}{B \partial \beta} + \frac{\Phi}{R_1 R_2}; \\ S &= -\frac{\partial^2 \Phi}{AB \partial \alpha \partial \beta} + \frac{1}{A^2 B} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} + \\ &+ \frac{1}{AB^2} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{\partial \Phi}{\partial \beta}.\end{aligned}\quad (9.6.23)$$

Четвертое и пятое уравнения (9.6.22) после подстановки в них соотношений между

моментами M_1 , M_2 , H и ε_1 , ε_2 , ε (9.3.18), а также зависимостей (9.6.20) приводятся к виду

$$Q_1 = -D \frac{\partial}{A \partial \alpha} (\nabla^2 w); \quad Q_2 = -D \frac{\partial}{B \partial \beta} (\nabla^2 w), \quad (9.6.24)$$

где ∇^2 - оператор Лапласа в криволинейных координатах;

$$\nabla^2 w = \frac{\partial}{AB \partial \alpha} \left(\frac{B}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{AB \partial \beta} \left(\frac{A}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right).$$

Подстановка (9.6.24) в третье уравнение (9.6.22), а также использование зависимостей (9.6.23) позволяют получить одно из двух основных уравнений теории пологих оболочек

$$D \nabla^2 \nabla^2 w + \nabla_k^2 \Phi = p_3, \quad (9.6.25)$$

где

$$\nabla_k^2 \Phi = \frac{\partial}{AB \partial \alpha} \left(\frac{B}{R_2} \frac{\partial \Phi}{A \partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{AB \partial \beta} \left(\frac{A}{R_1} \frac{\partial \Phi}{B \partial \beta} \right).$$

Второе основное уравнение для пологих оболочек получается из уравнения совместности деформаций, которое строится путем исключения перемещений из (9.6.20) и (9.6.21). После ряда преобразований и использования (9.6.23) выведено уравнение

$$\frac{1}{Eh} \nabla^2 \nabla^2 \Phi - \nabla_k^2 w = 0. \quad (9.6.26)$$

Два уравнения (9.6.25) и (9.6.26) являются основными разрешающими соотношениями для пологих оболочек. Они могут быть упрощены для прямоугольной системы координат, для которой $A=B=1$; $\alpha=x$; $\beta=y$ и операторы

$$\begin{aligned}\nabla^2 () &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} () + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (); \quad \nabla_k^2 = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial ()}{R_2 \partial x} \right] + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial ()}{R_1 \partial y} \right].\end{aligned}$$

Если задача рассматривается применительно к оболочке вращения в полярных координатах, то $A=1$, $B=r$, $\alpha=r$ и

$$\nabla^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \beta^2};$$

$$\nabla_k^2 \Phi = \frac{\partial}{r \partial r} \left(\frac{r}{R_2} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{R_1 r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \beta^2}.$$

Для плоской пластины $R_1^{-1} = 0$; $R_2^{-1} = 0$ соотношения (9.6.25), (9.6.26) распадаются на

два независимых уравнения, описывающих поперечный изгиб пластин и плоскую задачу теории упругости

$$D\nabla^2\nabla^2 w = p_3; \nabla^2\nabla^2 \Phi = 0.$$

Расчет пологих оболочек имеет много общего с расчетом пластин и решением плоской задачи. Для определения сил и перемещений применяют методы двойных и ординарных тригонометрических рядов, численные методы конечных разностей и конечных элементов. Для сферической оболочки $R_1=R_2=R$;

$$\nabla_k^2 \Phi = \frac{1}{R} \nabla \Phi.$$

При нагружении распределенной нагрузкой $p_3=p$ полой сферической оболочки прямоугольной в плане размером $a \times b$ для случая, когда перемещение w и функция Φ так же, как и вторые производные от них, на контуре равны нулю, нагрузку p , функции w и Φ представляют в виде двойных рядов

$$p = \sum_m \sum_n p_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b};$$

$$w = \sum_m \sum_n w_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b};$$

$$\Phi = \sum_m \sum_n \Phi_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

Коэффициенты рядов w_{mn} и Φ_{mn} определяют из уравнений (9.6.25), (9.6.26)

$$w_{mn} = \frac{p_{mn} R}{1 + \frac{R^2 D}{Eh} \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^2};$$

$$\Phi_{mn} = \frac{p_{mn} R}{\left\{ 1 + \frac{R^2 D}{Eh} \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^2 \right\} \times \dots \times \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]}.$$

Эти зависимости позволяют определить силы T_1, T_2, S с помощью (9.6.23), а также Q_1, Q_2 из (9.6.24). Изгибающие моменты M_1

и M_2 находят из (9.6.22) и из соотношений (9.5.4).

Глава 9.7

СОСТАВНЫЕ И ПОДКРЕПЛЕННЫЕ ОБОЛОЧКИ

Силловые тонкостенные конструкции, применяемые в машиностроении, представляют собой, как правило, составные оболочки, подкрепленные продольным и поперечным набором стрингеров и шпангоутов. Подкрепление конструкции в местах передачи сосредоточенных сил и моментов разгружает оболочку от изгиба и приближает ее напряженное состояние к безмоментному, наиболее рациональному с точки зрения весовой отдачи.

Если нагрузки приложены непосредственно к шпангоутам, которые обладают достаточно большой жесткостью на изгиб ($J \geq hR^3$), то при расчете тангенциальных сил взаимодействия оболочки и шпангоутов можно использовать безмоментную теорию. Учет тангенциальных реактивных сил на шпангоут достаточен для оценки его прочности и жесткости. Напряжения в оболочке при этом должны вычисляться с учетом краевого эффекта.

При относительно слабых шпангоутах, жесткость которых соизмерима с изгибной жесткостью оболочки, расчет напряженно-деформированного состояния составной тонкостенной системы следует проводить с использованием одного из вариантов моментной теории (см. гл. 9.5, 9.6).

9.7.1. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ В КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧАХ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК И КОЛЕЦ

Для отдельной оболочки со свободными, частично или полностью закрепленными краями, граничные условия формулируются в зависимости от характера заданных ограничений на краевые кинематические или силовые факторы (см. гл. 9.6). Особенностью контактных задач для составных тонкостенных систем является сложный характер краевых условий, которые должны учитывать упругое взаимодействие оболочек с подкрепляющим набором по линиям сопряжения элементов конструкции [5].

В общем случае деформирования задача сопряжения оболочек и колец (шпангоутов) формулируется как нелинейная краевая задача для моментных оболочек и криволинейных стержней, испытывающих пространственный изгиб и кручение. Ограничиваясь рассмотре-

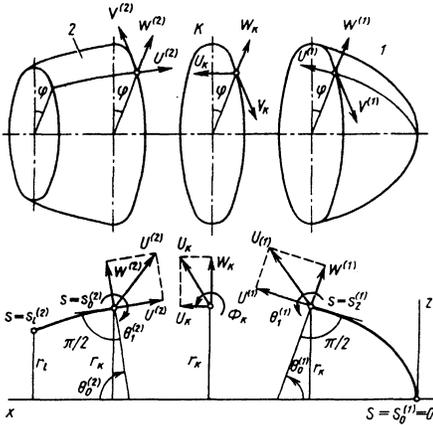


Рис. 9.7.1. Сопряжение оболочек вращения и шпангоута

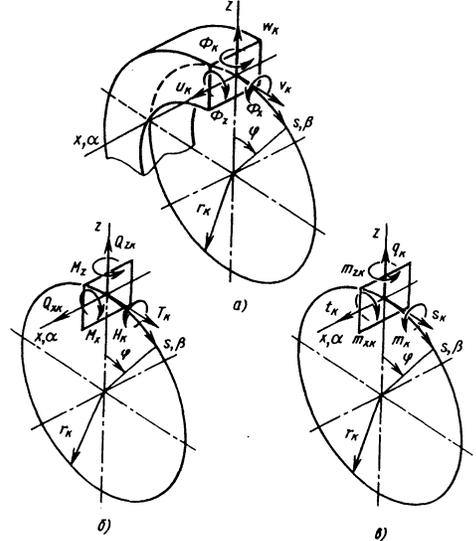


Рис. 9.7.2. Перемещения, усилия и внешние силы, действующие на шпангоут

нием составных оболочек вращения произвольного очертания, остановимся на силовых граничных условиях для наиболее характерного случая, когда две оболочки соединены между собой промежуточным упругим шпангоутом, представляющим собой круговое кольцо (рис. 9.7.1).

Принято, что деформации кольца происходят без поперечных сдвигов, а его сечения в процессе нагружения смещаются как жесткое целое и не испытывают деформаций. Осевая и сдвиговая деформации при кручении, а также повороты сечений относительно оси кольца имеют одинаковый порядок малости, оцениваемый как ε^2 , где $\varepsilon \ll 1$ - малый параметр. Повороты сечения относительно двух других осей (порядка ε) существенно превосходят деформации. При этих допущениях геометрические зависимости для пространственной деформации кольца имеют вид [12]:

$$\varepsilon = \varepsilon + x\chi_x + z\chi_z; \quad \gamma = \rho\chi; \quad \rho^2 = x^2 + z^2;$$

$$\varepsilon = e + \frac{1}{2}(\Phi_x^2 + \Phi_z^2); \quad e = \frac{1}{r_k} \left(\frac{dw_k}{d\varphi} + w_k \right);$$

$$\Phi_x = -\frac{1}{r_k} \frac{du_k}{d\varphi}; \quad \Phi_z = -\frac{1}{r_k} \left(\frac{dw_k}{d\varphi} - v_k \right);$$

$$\chi_x = \frac{1}{r_k} \left(\frac{d\Phi_x}{d\varphi} - \Phi_k \right); \quad \chi_z = \frac{1}{r_k} \frac{d\Phi_z}{d\varphi};$$

$$\chi = \frac{1}{r_k} \left(\frac{d\Phi_k}{d\varphi} + \Phi_x \right),$$

где ε и γ - соответственно осевая деформация и угол сдвига при кручении; χ_x, χ_z, χ - изменения кривизн и кручения; Φ_x, Φ_z - повороты главной нормали к оси кольца; u_k, v_k, w_k, Φ_k - обобщенные перемещения кольца (рис. 9.7.2).

В соответствии с теорией изгиба криволинейных стержней физические уравнения кольца

$$T_k = E_k F \varepsilon; \quad H_k = G_k J_k \chi;$$

$$M_x = E_k J_{xz} \chi_x + E_k J_{xz} \chi_z;$$

$$M_z = E_k J_z \chi_x + E_k J_{xz} \chi_z;$$

$$\sigma = E_k \varepsilon; \quad \tau = G_k \gamma;$$

$$T_k = \iint (F) \sigma dF; \quad H_k = \iint (F) \tau \rho dF;$$

$$M_x = \iint (F) \sigma z dF; \quad M_z = \iint (F) \sigma x dF,$$

где T_k, H_k и M_x, M_z - соответственно внутренние силы и моменты (рис. 9.7.2); σ и τ - соответственно нормальные и касательные напряжения; E_k, G_k - модули упругости материала кольца; F, J_x, J_z, J_{xz} - геометрические характеристики поперечного сечения.

Основные энергетические характеристики упругого кольца-шпангоута

$$\begin{aligned} \Pi_{\mathbf{k}} &= W_{\mathbf{k}} - A_{\mathbf{k}}; \quad W_{\mathbf{k}} = \int_0^{2\pi} (T_{\mathbf{k}\varphi} \varphi + M_z \chi_x + \\ &+ M_x \chi_z + H_{\mathbf{k}} \chi) r_{\mathbf{k}} d\varphi; \\ A_{\mathbf{k}} &= \int_0^{2\pi} (t_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}} + s_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} + q_{\mathbf{k}} w_{\mathbf{k}} + m_{\mathbf{zx}} \Phi_z + \\ &+ m_{\mathbf{zx}} \Phi_x + m_{\mathbf{k}} \Phi_{\mathbf{k}}) r_{\mathbf{k}} d\varphi. \end{aligned} \quad (9.7.1)$$

Кинематические условия сопряжения оболочек 1 и 2 со шпангоутом K находят, приравнявая векторы перемещений и поворотов линейных элементов контактирующих частей в фиксированной точке составной конструкции (см. рис. 9.7.1). При отсутствии эксцентриситета между срединными поверхностями оболочек и осью кольца необходимые условия сопряжения следуют из уравнений $U(1)=U(2)=U(\mathbf{k})$ и $\Phi(1)=\Phi(2)=\Phi(\mathbf{k})$, где $U^{(i)}$, $\Phi^{(i)}$; $i=1,2,\dots,k$ - векторы перемещений и поворотов на линии контакта. В скалярной форме

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= u_{\mathbf{k}} \sin \theta_0^{(1)} + w_{\mathbf{k}} \cos \theta_0^{(1)}; \quad v^{(1)} = v_{\mathbf{k}}; \\ w^{(1)} &= -u_{\mathbf{k}} \cos \theta_0^{(1)} + w_{\mathbf{k}} \sin \theta_0^{(1)}; \quad v^{(2)} = -v_{\mathbf{k}}; \\ u^{(2)} &= -u_{\mathbf{k}} \sin \theta_0^{(2)} + w_{\mathbf{k}} \cos \theta_0^{(2)}; \quad \theta_1^{(1)} = \Phi_{\mathbf{k}}; \\ w^{(2)} &= u_{\mathbf{k}} \cos \theta_0^{(2)} + w_{\mathbf{k}} \sin \theta_0^{(2)}; \quad \theta_1^{(2)} = -\Phi_{\mathbf{k}}. \end{aligned} \quad (9.7.2)$$

Для получения силовых условий сопряжения оболочек с кольцом используют метод возможных перемещений, особенно надежный при решении сложных контактных задач механики тонкостенных конструкций.

Совмещая координатные линии α, β на поверхности оболочек вращения 1 и 2 (см. гл. 9.3, 9.5) соответственно с образующими и направляющими, согласно результатам гл. 9.4 и формулам (9.7.1) получим полную энергию составной системы (см. рис. 9.7.1) в виде

$$\Pi = \Pi^{(1)} + \Pi^{(2)} + \Pi_{\mathbf{k}},$$

где $\Pi^{(1)}$, $\Pi^{(2)}$ и $\Pi_{\mathbf{k}}$ - энергия соответственно оболочек и кольца.

Вариационное уравнение Лагранжа для составной конструкции при использовании зависимостей (9.4.18), (9.4.19) квадратичного варианта уравнений теории непологих оболо-

чек, формул Грина и кинематических условий сопряжения (9.7.2) приводится к виду

$$\begin{aligned} \delta \Pi &= \iint_{\Omega^{(1)}} \delta L^{(1)} d\alpha d\beta + \iint_{\Omega^{(2)}} \delta L^{(2)} d\alpha d\beta - \\ &- \int_0^{2\pi} (K_1 \delta u_{\mathbf{k}} + K_2 \delta v_{\mathbf{k}} + K_3 \delta w_{\mathbf{k}} + \\ &+ K_4 \delta \Phi_{\mathbf{k}}) r_{\mathbf{k}} d\varphi + \int_0^{2\pi} [T_1^{(2)} \delta u^{(2)} + \\ &+ \left(S_1^{(2)} + \frac{2H^{(2)}}{R_2^{(2)}} \right) \delta v^{(2)} + \\ &+ \left(N_1^{(2)} + \frac{1}{B^{(2)}} \frac{\partial H^{(2)}}{\partial \beta} \right) \delta w^{(2)} + \\ &+ M_1^{(2)} \delta \Theta_1^{(2)}]_{s=s_1^{(2)}} r_l d\varphi = 0, \end{aligned} \quad (9.7.3)$$

где $\Omega^{(j)}$ - поверхность j -й оболочки, $j=1,2$; $r_{\mathbf{k}}$ и r_l - радиусы соответственно кольца и оболочки в сечении $s=s_1^{(2)}$; $L^{(j)}$, K_s ($s=1,4$)-дифференциальные операторы, определяемые формулами гл. 9.4 и зависимостями:

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{1}{r_{\mathbf{k}}} \frac{dQ_{\mathbf{zx}}}{d\varphi} + t_{\mathbf{k}} - \left[T_1^{(1)} \sin \theta_0^{(1)} - \right. \\ &- \left. \left(N_1^{(1)} + \frac{1}{B^{(1)}} \frac{\partial H^{(1)}}{\partial \beta} \right) \cos \theta_0^{(1)} \right]_{s=s_1^{(1)}} + \\ &+ \left[T_1^{(2)} \sin \theta_0^{(2)} + \right. \\ &+ \left. \left(N_1^{(2)} + \frac{1}{B^{(2)}} \frac{\partial H^{(2)}}{\partial \beta} \right) \cos \theta_0^{(2)} \right]_{s=s_0^{(2)}}; \\ K_2 &= \frac{1}{r_{\mathbf{k}}} \left(\frac{dT_{\mathbf{k}}}{d\varphi} + Q_{\mathbf{zx}} \right) + s_{\mathbf{k}} - \\ &- \left(S^{(1)} + \frac{2H^{(1)}}{R_2^{(1)}} \right)_{s=s_1^{(1)}} + \\ &+ \left(S^{(2)} + \frac{2H^{(2)}}{R_2^{(2)}} \right)_{s=s_0^{(2)}}; \end{aligned}$$

$$K_3 = \frac{1}{r_k} \left(\frac{dQ_{zk}}{d\varphi} - T_k \right) + q_k - \left[T_1^{(1)} \cos \theta_0^{(1)} + \left(N_1^{(1)} + \frac{1}{B^{(1)}} \frac{\partial H^{(1)}}{\partial \beta} \right) \sin \theta_0^{(1)} \right]_{s=s_1^{(1)}} - \left[T_1^{(2)} \cos \theta_0^{(2)} - \left(N_1^{(1)} + \frac{1}{B^{(1)}} \frac{\partial H^{(1)}}{\partial \beta} \right) \sin \theta_0^{(1)} \right]_{s=s_0^{(1)}} -$$

$$K_4 = \frac{1}{r_k} \left(\frac{dH_k}{d\varphi} + M_z \right) + m_k - \left(M_1^{(1)} \right)_{s=s_1^{(1)}} + \left(M_1^{(2)} \right)_{s=s_0^{(2)}};$$

$$Q_{zk} = \frac{1}{r_k} \left(\frac{dM_z}{d\varphi} - H_k \right) - T_k \Phi_x + m_{zk};$$

$$Q_{zk} = \frac{1}{r_k} \frac{dM_x}{d\varphi} - T_k \Phi_z + m_{zk}.$$

При независимых вариациях перемещений оболочек $(\delta u^{(j)}, \delta v^{(j)}, \delta w^{(j)}, \delta \Theta_1^{(1)})$ и кольца $(\delta u_k, \delta v_k, \delta w_k, \delta \Phi_k)$ из вариационного уравнения (9.7.3) следуют известные дифференциальные уравнения равновесия оболочек 1 и 2 (см. гл. 9.4) и силовые граничные условия к ним на краю $s = s_j^{(2)}$ (см. рис. 9.7.1), а также уравнения равновесия кольца

$$K_s = 0 \quad (s = \overline{1,4}). \quad (9.7.4)$$

Дифференциальные уравнения (9.7.4) представляют собой искомые силовые условия сопряжения при упругом контакте оболочек вращения со шпангоутами.

В частном случае, когда оболочки предполагаются безмоментными, кольцо нерастяжимым, а контактная задача геометрически линейной, кинематические и силовые условия сопряжения в зоне контакта определяются уравнениями:

$$u^{(1)} = u_k \sin \theta_0^{(1)} - (dv_k / d\varphi) \cos \theta_0^{(1)};$$

$$v^{(1)} = v_k;$$

$$u^{(2)} = -u_k \sin \theta_0^{(2)} - (dv_k / d\varphi) \cos \theta_0^{(2)};$$

$$v^{(2)} = -v_k;$$

$$T_1^{(1)} \sin \theta_0^{(1)} - T_1^{(2)} \sin \theta_0^{(2)} - t_k = 0;$$

$$\frac{EJ}{r_k^4} \left(\frac{d^3}{d\varphi^3} + \frac{d}{d\varphi} \right) v_k + \frac{dq_k}{d\varphi} + s_k + \frac{1}{r_k} \left(\frac{d^2 m_{zk}}{d\varphi^2} + m_{zk} \right) -$$

$$- \frac{d}{d\varphi} \left(T_1^{(1)} \cos \theta_0^{(1)} + T_1^{(2)} \cos \theta_0^{(2)} \right) -$$

$$- S^{(1)} + S^{(2)} = 0, \quad (9.7.5)$$

где EJ - жесткость кольца при изгибе в его плоскости.

9.7.2. ИЗГИБ ШПАНГУОТОВ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО БАКА СО СФЕРИЧЕСКИМИ ДНИЩАМИ

При проведении расчетов на прочность шпангоутов цилиндрического бака при действии распределенных и сосредоточенных сил целесообразно выбрать наиболее простую расчетную модель тонкой оболочки, достаточно правильно отражающую особенности ее работы в качестве упругого основания для подкрепляющих колец (рис. 9.7.3). Для оболочки, длина l которой не слишком велика и соизмерима с размерами поперечного сечения, может быть принята безмоментная теория [5].

Внутренние силы и перемещения в обечайке 3 и днищах 1 и 2 находятся интегриро-

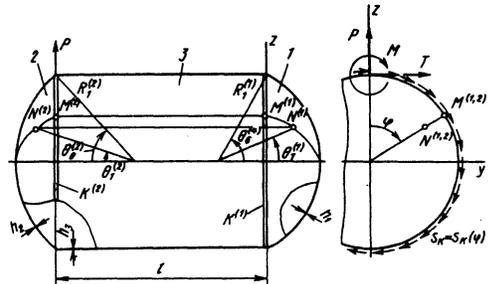


Рис. 9.7.3. Схема расчета цилиндрического бака со сферическими днищами и с соединительными шпангоутами

ванием уравнений цилиндрической и сферической оболочек (см. п. 9.6.1) [27]. Для цилиндрической части составной конструкции

$$T_1^{(3)} = -\frac{x}{R}\Omega_1' + \Omega_2; \quad T_2^{(3)} = 0; \quad \mathcal{S}^{(3)} = \Omega_1;$$

$$u^{(3)} = \frac{1}{Eh_3} \left(-\frac{x^2}{2r}\Omega_1' + x\Omega_2 \right) + \Omega_3;$$

$$w^{(3)} = \frac{1}{Eh_3} \left[-\frac{x^3}{6r^2}\Omega_1'' + \frac{x^2}{2r}\Omega_2' + \mu(x\Omega_1' - r\Omega_2) - 2(1+\mu)x\Omega_1' \right] + \frac{x}{r}\Omega_3' - \Omega_4;$$

$$v^{(3)} = \frac{1}{Eh_3} \left[\frac{x^3}{6r^2}\Omega_1'' - \frac{x^2}{2r}\Omega_2' + 2(1+\mu)x\Omega_1' \right] - \frac{x}{r}\Omega_3' + \Omega_4, \quad (9.7.6)$$

где Ω_s ($s = \overline{1,4}$) - произвольные функции угла φ .

Предполагая кольца $k^{(i)}$ ($i=1,2$) нерастяжимыми, зададим их перемещения в форме тригонометрических рядов

$$u_{K^{(i)}} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(i)} \frac{\cos n\varphi}{\sin n\varphi}; \quad v_{K^{(i)}} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n^{(i)} \frac{\sin n\varphi}{\cos n\varphi};$$

$$w_{K^{(i)}} = \pm \sum_{n=1}^{\infty} n B_n^{(i)} \frac{\cos n\varphi}{\sin n\varphi}. \quad (9.7.7)$$

Исходя из разложений (9.7.7), условий сопряжения оболочек и колец (9.7.5) и свойств периодичности функций Ω_s , внутренние силы в обечайке 3

$$T_1^{(3)} = \frac{Eh_3}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{3n}{n^2 + \beta^2} \left[n(A_n^{(1)} + A_n^{(2)}) \pm \frac{2r}{l} (B_n^{(1)} - B_n^{(2)}) \right] \left(\frac{2x}{l} - 1 \right) + A_n^{(2)} - A_n^{(1)} \right\} \frac{\cos n\varphi}{\sin n\varphi};$$

$$S^{(3)} = -\frac{6Eh_3r}{l^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + \beta^2} \left[\pm (A_n^{(1)} + A_n^{(2)}) + \frac{2r}{l} (B_n^{(1)} - B_n^{(2)}) \right] \frac{\sin n\varphi}{\cos n\varphi}, \quad (9.7.8)$$

где $\beta^2 = 24(1+\mu)(r/l)^2$.

Усилия и перемещения каждого из сферических днш для n -го члена ряда запишем, опуская, для краткости, индекс n [27]:

$$T_1 = -T_2 = \mp \frac{Eh}{R(1+\mu)} \frac{n(n^2-1)}{\sin^2 \theta} \operatorname{tg}^n \frac{\theta \cos n\varphi}{2 \sin n\varphi};$$

$$S = \frac{Eh}{R(1+\mu)} \frac{n(n^2-1)}{\sin^2 \theta} \operatorname{tg}^n \frac{\theta \sin n\varphi}{2 \cos n\varphi};$$

$$u = \mp \left[D_1 \sin \theta + D_2 \frac{n(n+\cos \theta)}{\sin \theta} \right] \operatorname{tg}^n \frac{\theta \cos n\varphi}{2 \sin n\varphi};$$

$$v = - \left\{ D_1 \sin \theta - D_2 \left[\frac{n(n+\cos \theta)}{\sin \theta} - \sin \theta \right] \operatorname{tg}^n \frac{\theta \sin n\varphi}{2 \cos n\varphi} \right\}. \quad (9.7.9)$$

Константы D_1, D_2 находятся через амплитуды перемещений колец $A^{(i)}, B^{(i)}$ (9.7.7) из условий совместного деформирования сферических сегментов с кольцами (9.7.5):

$$D_1^{(1)} = \left[\left(1 - \eta^{(1)} + n \cos \theta_0^{(1)} \right) B^{(1)} \mp \mp \sin \theta_0^{(1)} A^{(1)} \right] \left[\eta^{(1)} \sin \theta_0^{(1)} \operatorname{tg}^n \left(\theta_0^{(1)} / 2 \right) \right]^{-1};$$

$$D_1^{(2)} = \left[\left(1 - \eta^{(2)} + n \cos \theta_0^{(2)} \right) B^{(2)} \pm \pm \sin \theta_0^{(2)} A^{(2)} \right] \left[\eta^{(2)} \sin \theta_0^{(2)} \operatorname{tg}^n \left(\theta_0^{(2)} / 2 \right) \right]^{-1};$$

$$D_2^{(1)} = \left[\left(1 + n \cos \theta_0^{(1)} \right) B^{(1)} \mp \sin \theta_0^{(1)} A^{(1)} \right] \times \times \left[2n \left(n + \cos \theta_0^{(1)} \right) / \sin \theta_0^{(1)} - \sin \theta_0^{(1)} \right]^{-1} \times \times \operatorname{tg}^{-n} \frac{\theta_0^{(1)}}{2};$$

$$D_2^{(2)} = \left[\left(1 + n \cos \theta_0^{(2)} \right) B^{(2)} \pm \sin \theta_0^{(2)} A^{(2)} \right] \times \\ \times \left[2n \left(n + \cos \theta_0^{(2)} \right) / \sin \theta_0^{(2)} - \sin \theta_0^{(2)} \right]^{-1} \times \\ \times \operatorname{tg}^{-n} \frac{\theta_0^{(2)}}{2};$$

$$\eta^{(j)} = \left[2n \left(n + \cos \theta_0^{(j)} \right) - \sin^2 \theta_0^{(j)} \right] \times \\ \times \left[n \left(n + \cos \theta_0^{(j)} \right) - \sin^2 \theta_0^{(j)} \right]^{-1}. \quad (9.7.10)$$

На основе силовых условий сопряжения оболочек и колец (9.7.5) на линиях контакта $\theta = \theta_0^{(1)}$ и $\theta = \theta_0^{(2)}$ и зависимостей (9.7.6), (9.7.7).

$$A_n^{(1)} = \pm b_{11} B_n^{(1)} \pm b_{12} B_n^{(2)} + d_1; \\ A_n^{(2)} = \mp b_{21} B_n^{(1)} \mp b_{22} B_n^{(2)} + d_2. \quad (9.7.11)$$

Здесь

$$b_{11} = \frac{1}{\mu_1} \left\{ \left[\lambda_1 \left(1 + n \cos \theta_0^{(1)} \right) - \frac{6nr}{l} \right] \left(\lambda_2 \sin \theta_0^{(2)} + \right. \right. \\ \left. \left. + 4n^2 + \beta^2 \right) + \frac{6nr}{l} \left(2n^2 - \beta^2 \right) \right\};$$

$$b_{12} = \frac{1}{\mu_1} \left\{ \left[\lambda_2 \left(1 + n \cos \theta_0^{(2)} \right) - \frac{6nr}{l} \right] \left(2n^2 - \beta^2 \right) + \right. \\ \left. + \left(\lambda_2 \sin \theta_0^{(2)} + 4n^2 + \beta^2 \right) \frac{6nr}{l} \right\};$$

$$d_1 = \left[l \left(n^2 + \beta^2 \right) / \left(E h_3 \mu_1 \right) \right] \left[-t_n^{(1)} \left(\lambda_2 \sin \theta_0^{(2)} + \right. \right. \\ \left. \left. + 4n^2 + \beta^2 \right) + t_n^{(2)} \left(2n^2 - \beta^2 \right) \right];$$

$$\mu_1 = \left(\lambda_1 \sin \theta_0^{(1)} + 4n^2 + \beta^2 \right) \left(\lambda_2 \sin \theta_0^{(2)} + \right. \\ \left. + 4n^2 + \beta \right) \mp \left(2n^2 - \beta^2 \right)^2;$$

$$\lambda_1 = h_1 n l \left(n^2 - 1 \right) \left(n^2 + \beta^2 \right) \left\{ R_1 h_3 \left(1 + \mu \right) \left[2n \left(n + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \cos \theta_0^{(1)} \right) - \sin^2 \theta_0^{(1)} \right] \right\}.$$

(1 ↔ 2)

При определении постоянных $B^{(j)}$ ($j = 1, 2$) внешние нагрузки на кольца должны быть предварительно представлены в форме тригонометрических рядов

$$q_{K^{(j)}} = q_n^{(j)} \cos n\varphi; \quad S_{K^{(j)}} = S_n^{(j)} \sin n\varphi; \\ t_{K^{(j)}} = t_n^{(j)} \cos n\varphi; \quad m_{xK^{(j)}} = m_n^{(j)} \sin n\varphi \quad (9.7.12)$$

С помощью формул (9.7.12) усилия и перемещения в оболочках выражаются через коэффициенты разложений в ряды тангенциальных перемещений колец

$$B_n^{(1)} = r^3 \left(c_{11} c_{22} - c_{12} c_{21} \right)^{-1} \left\{ \left[- \left(n^2 - 1 \right) m_n^{(1)} - \right. \right. \\ \left. \left. - r \left(s_n^{(1)} \mp n q_n^{(1)} \right) \mp r \left(b_{11} t_n^{(1)} - b_{21} t_n^{(2)} \right) \right] c_{22} + \right. \\ \left. + \left[\left(n^2 - 1 \right) m_n^{(2)} + r \left(s_n^{(2)} \mp n q_n^{(2)} \right) \pm \right. \right. \\ \left. \left. \pm r \left(b_{12} t_n^{(1)} - b_{22} t_n^{(2)} \right) \right] c_{12} \right\}; \\ B_n^{(2)} = r^3 \left(c_{11} c_{22} - c_{12} c_{21} \right)^{-1} \left\{ \left[- \left(n^2 - 1 \right) m_n^{(2)} - \right. \right. \\ \left. \left. - r \left(s_n^{(2)} \mp n q_n^{(2)} \right) \mp r \left(b_{12} t_n^{(1)} - b_{22} t_n^{(2)} \right) \right] c_{11} + \right. \\ \left. + \left[\left(n^2 - 1 \right) m_n^{(1)} + r \left(s_n^{(1)} \mp n q_n^{(1)} \right) \pm \right. \right. \\ \left. \left. \pm r \left(b_{11} t_n^{(1)} - b_{21} t_n^{(2)} \right) \right] c_{21} \right\}. \quad (9.7.13)$$

Здесь c_{11} , c_{22} , c_{12} , c_{21} , - константы, функции номера n :

$$c_{11} = -EJ^{(1)} n^2 \left(n^2 - 1 \right)^2 + \frac{E h_3 r^4}{l \left(n^2 + \beta^2 \right)} \times \\ \times \left\{ b_{11} \left[\lambda_1 \left(1 + n \cos \theta_0^{(1)} \right) - \frac{6nr}{l} \right] - \right.$$

$$\begin{aligned}
 & -b_{21} \left(6nr / l \right) - \left[\lambda_1 \left(1 + n \cos \theta_0^{(1)} \right)^2 \times \right. \\
 & \left. \times \sin^{-1} \theta_0^{(1)} + 12 \left(r / l \right)^2 \right] \}; \\
 c_{12} = & \frac{Eh_3 r^4}{l \left(n^2 + \beta^2 \right)} \left\{ b_{12} \left[\lambda_1 \left(1 + n \cos \theta_0^{(1)} \right) - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{6nr}{l} \right] - b_{22} \frac{6nr}{l} + 12 \left(\frac{r}{l} \right)^2 \right\}. \\
 & (1 \leftrightarrow 2)
 \end{aligned}$$

Зависимости (9.7.7) - (9.7.13) определяют общее решение задачи о напряженно-деформированном состоянии шпангоутов и безмоментных оболочек составной конструкции бака.

Практически важными являются случаи нагружения одного из колец бака сосредоточенной радиальной силой P , касательной силой T и моментом M (см. рис. 9.7.3). Уравновешивающие погонные силы в каждом из этих случаев прикладываются непосредственно к кольцу и распределяются по закону статических моментов или по Бредту в соответствии с балочной теорией изгиба и кручения тонкостенных стержней. Комбинируя указанные случаи нагружения между собой и с решениями для закрепленного бака по балочной теории, можно получать решения различных задач прочности конструкций данного класса.

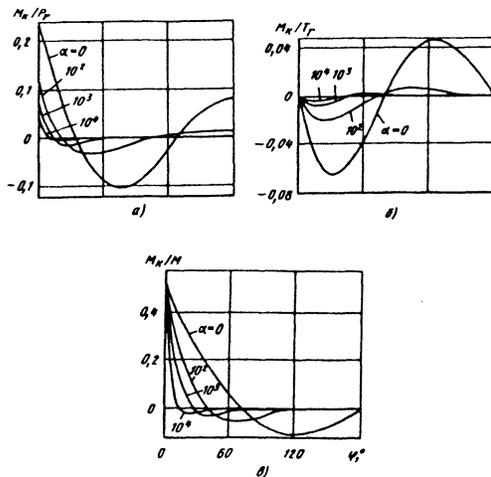


Рис. 9.7.4. Изменение изгибающих моментов в шпангоутах при действии радиальных и касательных сосредоточенных и локальных моментов

На рис. 9.7.4, а, б, в приведены результаты расчетов изгибающих моментов в торцовых шпангоутах симметричного цилиндрического бака со сферическими днищами. Здесь принято $R_1^{(1)} = R_1^{(2)} = R$, $h_1 = h_2 = h_3 = h$, $\theta_0^{(1)} = \theta_0^{(2)} = \pi/3$, $l/r = 1$. Параметр $\alpha = hr^3/J$ на рис. 9.7.4 учитывает взаимное соотношение изгибной жесткости кольца и жесткости оболочки, как мембраны. С параметром α связана степень разгрузки шпангоута оболочками бака. В реальных конструкциях такая разгрузка может быть существенной.

9.7.3. РАСЧЕТ ОБОЛОЧЕК, ПОДКРЕПЛЕННЫХ ПРОДОЛЬНЫМИ РЕБРАМИ

Напряженное состояние в составных цилиндрических оболочках с отдельно стоящими ребрами наиболее просто оценивается приближенным методом, основанным на элементарной теории плоских сечений. Этот метод не учитывает краевые эффекты и влияние деформаций сдвига. Согласно принципу Сен-Венана можно ожидать, что вычисленные напряжения близки к действительным только в сечениях оболочки, достаточно удаленных от ее торцов. В случае, если длина оболочки соизмерима с ее диаметром, необходимы более точные методы расчета напряженно-деформированного состояния конструкции, полученные с применением моментной теории.

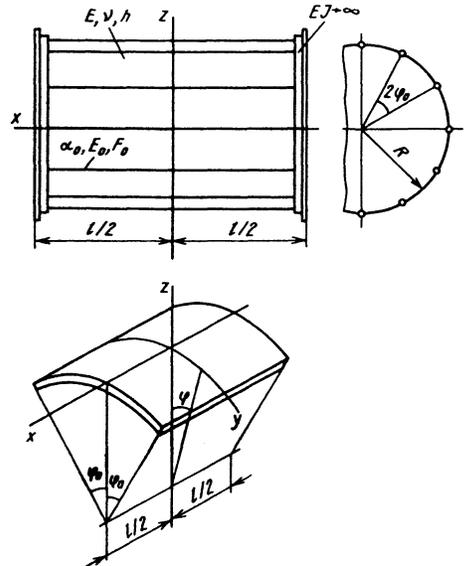


Рис. 9.7.5. Схема расчета цилиндрической оболочки, подкрепленной продольными ребрами

Для цилиндрической оболочки, подкрепленной ребрами, решается задача о тепловых напряжениях при перепаде температур между стенкой и ребром. Подкрепленная система состоит из $2m$ цилиндрических панелей и промежуточных ребер, образующих замкнутую оболочку, шарнирно опертую по торцам на жесткие шпангоуты (рис. 9.7.5). Введем обозначения: радиус R , толщину h и длину l оболочки, модуль упругости E и коэффициент μ Пуассона материала панели, модуль упругости E_0 и площадь F_0 поперечного сечения ребер.

Каждая цилиндрическая панель ограничена двумя смежными ребрами и торцовыми кольцами. Продольные стороны криволинейных панелей шарнирно оперты на упругие ребра (стержни), работающие только на растяжение или сжатие. Изгибная жесткость ребер пренебрежимо мала. Температура $t_0(x)$ всех ребер одинаковая и постоянная в пределах поперечного сечения. Температура стенки панелей равна нулю. Упругие характеристики и коэффициент α_0 линейного расширения ребер не зависят от температуры и равны ее значениям при некоторой средней температуре ребра.

Для определения напряженно-деформированного состояния панели воспользуемся уравнениями теории пологих оболочек (см. гл. 9.6).

В рамках теории пологих оболочек внутренние усилия в цилиндрической обечайке;

$$T_1 = \partial^2 \Phi / \partial y^2; \quad T_2 = \partial^2 \Phi / \partial x^2;$$

$$S = -\partial^2 \Phi / \partial x \partial y. \quad (9.7.14)$$

Функция усилий Φ при отсутствии поверхностных сил удовлетворяет дифференциальному уравнению [7]

$$\nabla^8 \Phi + \frac{12(1-\mu^2)}{h^2 R^2} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} = 0; \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (9.7.15)$$

Для симметричного нагрева продольных ребер относительно плоскости $x=0$ при удовлетворении условий на торцах оболочки $x = \pm 0,5l$ ($T_1 = M_1 = v = w = 0$)

$$\Phi = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(y) \cos \lambda_n x; \quad \lambda_n = (2n-1)\pi / l. \quad (9.7.16)$$

Из (9.7.15), (9.7.16) для функции $\varphi_n(y)$ следует обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\left[\left(\frac{d^2}{dy^2} - \lambda_n^2 \right)^4 + \rho_n \right] \varphi_n = 0; \quad (9.7.17)$$

$$\rho_n = \frac{12(1-\mu^2)\lambda_n^4}{h^2 R^2}.$$

Общий интеграл уравнения (9.7.17) выражается через гиперβολо-тригонометрические функции Φ_{kn} :

$$\varphi_n(y) = \sum_{k=1}^8 C_{kn} \Phi_{kn};$$

$$\Phi_{1n,2n} = \text{ch} r_n y \frac{\sin s_n y}{\cos s_n y};$$

$$\Phi_{3n,4n} = \text{sh} r_n y \frac{\cos s_n y}{\sin s_n y};$$

$$\Phi_{5n,6n} = \text{ch} \bar{r}_n y \frac{\sin \bar{s}_n y}{\cos \bar{s}_n y};$$

$$\Phi_{7n,8n} = \text{sh} \bar{r}_n y \frac{\cos \bar{s}_n y}{\sin \bar{s}_n y};$$

$$r_n = p_n \lambda_n; \quad s_n = q_n \lambda_n;$$

$$\bar{r}_n = \bar{p}_n \lambda_n; \quad \bar{s}_n = \bar{q}_n \lambda_n, \quad (9.7.18)$$

где $p_n, s_n, \bar{p}_n, \bar{s}_n$ - действительные и мнимые части корней характеристического уравнения, отвечающего дифференциальному оператору (9.7.17); C_{kn} - произвольные постоянные.

Компоненты вектора перемещений и внутренние силы в цилиндрической панели вычисляются через функции $\varphi_n(y)$ (9.7.18) и их производные. В частности:

$$u = \frac{1}{Eh} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_n} \varphi_n'' + \mu \lambda_n \varphi_n \right) \sin \lambda_n x;$$

$$v = \frac{1}{Eh} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\lambda_n^2} \varphi_n''' - (2-\mu) \varphi_n' \right] \cos \lambda_n x;$$

$$w = -\frac{R}{Eh} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_n^2} \varphi_n^{IV} + 2\varphi_n'' + \lambda_n^2 \varphi_n \right) \cos \lambda_n x;$$

$$N_2 = \frac{h^2 R}{12(1-\mu^2)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_n^2} \varphi_n^{VIII} - 3\varphi_n^V + 3\lambda_n^2 \varphi_n''' - \lambda_n^4 \varphi_n' \right) \cos \lambda_n x;$$

$$M_2 = \frac{h^2 R}{12(1-\mu^2)} \sum_{r=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\lambda_n^2} \varphi_n^{VI} - (2-\mu)\varphi_n^{IV} + (1+2\mu)\lambda_n^2 \varphi_n'' - \mu\lambda_n^4 \varphi_n \right] \cos \lambda_n x. \tag{9.7.19}$$

Произвольные постоянные C_{kn} определяются из условий сопряжения цилиндрической панели с продольными ребрами $y = \pm R\varphi_0$:

$$u = u_0; v = N_2 = M_2 = 0. \tag{9.7.20}$$

Функция $u_0(x)$ удовлетворяет уравнению равновесия и физическому уравнению для ребра с учетом нагрева:

$$2\hat{S} - \frac{dN_0}{dx} = 0; \frac{du_0}{dx} = \frac{N_0}{E_0 F_0} + \alpha_0 t_0(x). \tag{9.7.21}$$

Верхний символ “^” свидетельствует о том, что соответствующая функция вычисляется при $y=R\varphi_0$. Разложение функции температуры $t_0(x)$ в тригонометрический ряд с периодом $2l$ $t_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n \cos \lambda_n x$, учет (9.7.14) и интегрирование системы уравнений (9.7.21) при краевых условиях $x = 0: u = 0; x = \pm 0,5l; N_0 = 0$ позволяет выразить и усилить для ребра с помощью функции $\varphi_n(y)$:

$$u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \left(\alpha_0 \theta_n - \frac{2\hat{\varphi}'_n}{E_0 F_0} \right) \sin \lambda_n x; \tag{9.7.22}$$

$$N_0 = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\varphi}'_n \cos \lambda_n x.$$

В результате реализации краевых условий (9.7.20) и вычисления констант интегрирования C_{kn} внутренние силы в элементах составной конструкции находятся по формулам (9.7.19), (9.7.22).

Наиболее важными характеристиками напряженно-деформированного состояния неравномерно нагретой оболочки с продольными ребрами, определяющими ее несущую способность, являются сдвигающие силы в обечайке вблизи ребер и напряжения в ребрах. Для рассмотренных силовых факторов при $t_0(x) = T_0 = \text{const}$

$$\bar{S} = K \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin \lambda_n x}{(2n-1)\psi_n + K};$$

$$\bar{N}_0 = -\frac{4K}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos \lambda_n x}{(2n-1)[(2n-1)\psi_n + K]}, \tag{9.7.23}$$

где $\bar{S} = \hat{S}l / (2\alpha_0 T_0 E_0 F_0)$;

$$\bar{N}_0 = N_0 / (\alpha_0 T_0 E_0 F_0)$$

$$K = EhI / (\pi E_0 F_0)$$

$$2\psi_n = [(\alpha_2 + \mu)\omega_1 + (\bar{\alpha}_2 + \mu)\omega_2 - \beta_2\omega_3 - \bar{\beta}\omega_4][\alpha_1\mu_1 + \bar{\alpha}_1\mu_2 - \beta_1\mu_3 - \bar{\beta}_1\mu_4]^{-1};$$

$\alpha_i, \beta_i, \bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_i, \omega_s, \mu_s$ - постоянные; $i=1,2; s=1,4$, выраженные в функции параметров оболочки.

В частном случае, когда тонкая оболочка средней длины подкреплена двумя продольными ребрами ($m=1, 2\varphi_0=\pi$), результаты вычислений по формулам (9.7.23) представлены на рис. 9.7.6 в функции параметра $\eta_1 = l(hR)^{-1/2}$ при $\eta_2 = K = 4$.

Асимптотический анализ формул (9.7.23) показывает, что вблизи торцового сечения оболочки в угловых точках панелей ($x = \pm 0,5l; y = \pm R\varphi_0$) погонные сдвигающие силы \bar{S} имеют логарифмическую особенность. Это обстоятельство приводит к возникновению значительной концентрации касательных напряжений у краев и при достаточно больших перепадах температур возможно местное выпучивание оболочки.

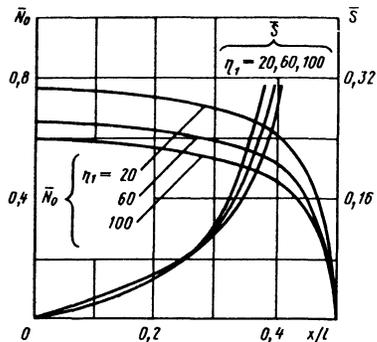


Рис. 9.7.6. Изменение нормальных и сдвигающих сил в оболочке, подкреплённой нагретыми продольными ребрами

9.7.4. КОМБИНИРОВАННОЕ НАГРУЖЕНИЕ ОБОЛОЧКИ, ПОДКРЕПЛЕННОЙ ГОФРОМ

Применение мембранной теории (см. гл. 9.6) к решению задачи о комбинированном нагружении цилиндрической оболочки внешним давлением $p = p_0 + p_2 \cos 2\varphi$, удовлетворяющим условиям существования безмоментного напряженного состояния, дает лишь первое представление о действительном напряженном состоянии. Если постоянная составляющая p_0 сжимает оболочку, безмоментное решение оказывается справедливым только в области очень малых значений p_0 , удовлетворяющих неравенству $p_0 \ll p_k$ (где p_k - критическое внешнее давление).

При давлении p_0 , близком к критическому, совместное нагружение оболочки неравномерной нагрузкой $p_2 \cos 2\varphi$ и окружным сжатием $T_2 = -p_0 R$ приводит к такому же эффекту резкого уменьшения несущей способности конструкции, который наблюдается при продольном изгибе сжатого стержня по мере приближения осевой силы к ее критическому значению. Прямая пропорциональность между внутренними силами и нагрузкой в этом случае нарушается, а принцип суммирования компонентов напряженно-деформированного состояния, вычисленных порознь от составляющих p_0 и $p_2 \cos 2\varphi$, теряет силу. Такое поведение упругой конструкции свойственно геометрически нелинейным задачам механики, которые решаются с привлечением соответствующих нелинейных теорий.

Для решения задачи о комбинированном нагружении цилиндрической оболочки, подкрепленной гофром и шарнирно опертой по торцам на упругие кольца жесткостью $(EJ)_k$, воспользуемся полубезмоментной теорией оболочек. Линеаризованные уравнения этой теории можно получить, отсюда уравнения гл. 9.6 к деформированной поверхности, как это принято в геометрически нелинейных теориях (см. гл. 9.4) [1].

Степень подкрепления полотна оболочки поперечным набором (гофром) определяется исходя из приведенного момента инерции поперечного сечения, вычисленного с учетом полотна обшивки и гофра (рис. 9.7.7): $J_{пп} = t\bar{h}^3 / 12$; $\bar{h} = (12J_{пп} / t)^{1/3}$; \bar{h} - приведенная толщина оболочки в окружном направлении; t - шаг поперечного набора.

Для получения уравнений равновесия полубезмоментной цилиндрической оболочки в деформированном состоянии с учетом геометрической нелинейности достаточно в уравнениях гл. 9.6 заменить кривизну $1/R$ и длины

дуг dx , dy их значениями на деформированной поверхности, или приближенно:

$$1/R_i^* = (1/R_i) + \alpha_i; \quad \partial / \partial x^* \approx \partial / \partial x;$$

$$\partial / \partial y^* \approx \partial / \partial y.$$

Линеаризацией полученных таким образом уравнений равновесия и присоединением к ним условия совместности деформаций в силах, принятого в полубезмоментной теории, получена система уравнений относительно осевой силы $T_1 = Eh\varepsilon_1$ и окружного изгибающего момента $M_2 (E\bar{h}^3 / 12) \alpha_2$:

$$\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left[M_2 \left(1 - \frac{12T_0 R^2}{Eh^3} \right) + \frac{\partial^2 M_2}{\partial \varphi^2} \right] - R^3 \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} = R^2 \frac{\partial^2 q_2}{\partial \varphi^2};$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left(T_1 + \frac{\partial^2 T_1}{\partial \varphi^2} \right) + \frac{12R^3 h}{\bar{h}^3} \frac{\partial^2 M_2}{\partial x^2} = 0, \quad (9.7.24)$$

где

$$\varepsilon_1 = \partial u / \partial x; \quad \alpha_2 = -\partial^2 w / \partial y^2 + (1/R) \partial v / \partial y; \quad y = R\varphi; \quad T_0 = -p_0 R;$$

$$q_2 = p_2 \cos 2\varphi.$$

С помощью функции $F(x, y)$ такой, что $M_2 = -\Omega F$; $\Omega = \partial^2 / \partial \varphi^2 (1 + \partial^2 / \partial \varphi^2)$;

$$T_1 = \left(12R^3 h / \bar{h}^3 \right) \left(\partial^2 F / \partial x^2 \right), \text{ система (9.7.24)}$$

приводится к разрешающему уравнению

$$\frac{\partial^4}{\partial \varphi^4} \Omega F + \left(1 - \frac{12T_0 R^2}{Eh^3} \right) \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \Omega F + \frac{12R^6}{h^2} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} = -R^2 \frac{\partial^2 q_2}{\partial \varphi^2}. \quad (9.7.25)$$

Принимая во внимание свойства симметрии конструкции и внешней нагрузки (рис. 9.7.7), решение дифференциального уравнения (9.7.25) разыскивается в форме

$$F = \sum_{n=2}^{\infty} f_n(x) \cos n\varphi;$$

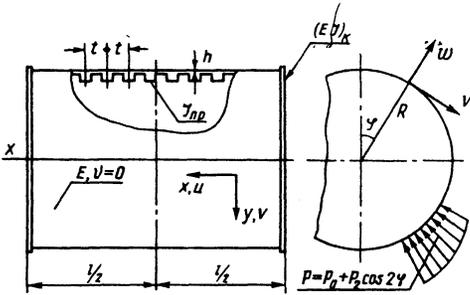


Рис. 9.7.7. Схема расчета цилиндрической оболочки, подкрепленной поперечным гофром

$$q_2 = \sum_{n=2}^{\infty} P_n \cos n\varphi; \quad P_n = \begin{cases} P_2 & (n = 2); \\ 0 & (n \neq 2). \end{cases} \quad (9.7.26)$$

Из (9.7.26) внутренние силы и перемещения в оболочке определяются зависимостями:

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{12R^3 h}{\bar{h}^3} \sum_{n=2}^{\infty} f_n'' \cos n\varphi; \\ T_2 &= -p_0 R - p_2 \cos 2\varphi + \\ &+ \frac{1}{R} \sum_{n=2}^{\infty} n^4 (n^2 - 1) f_n \cos n\varphi; \\ S &= -\frac{12R^4 h}{\bar{h}^3} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{f_n''}{n} \sin n\varphi; \\ M_2 &= \sum_{n=2}^{\infty} n^2 (n^2 - 1) f_n \cos n\varphi; \\ N_2 &= -\frac{1}{R} \sum_{n=2}^{\infty} n^3 (n^2 - 1) f_n \sin n\varphi; \\ u &= \frac{12R^3}{E\bar{h}^3} \sum_{n=2}^{\infty} f_n' \cos n\varphi; \\ v &= \frac{12R^2}{E\bar{h}^3} \sum_{n=2}^{\infty} n f_n \sin n\varphi; \\ w &= -\frac{12R^2}{E\bar{h}^3} \sum_{n=2}^{\infty} n^2 f_n \cos n\varphi. \end{aligned} \quad (9.7.27)$$

Функция $f_n(x)$ находится из обыкновенного дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} \frac{d^4 f_n}{dx^4} + 4\sigma_n^4 f_n &= \frac{P_n \bar{h}^3 n^2}{12hR^4}, \\ 4\sigma_n^4 &= \frac{n^4 (n^2 - 1)^2 \bar{h}^3}{12R^6 h} \left(1 - \frac{p_0}{p^*} \right), \quad (9.7.28) \\ p^* &= \frac{(n^2 - 1)E\bar{h}^3}{12R^3}, \end{aligned}$$

где p^* - критическое давление изолированного кругового кольца единичной ширины, выделенного из оболочки.

Общий интеграл уравнения (9.7.28) зависит от знака разности $p_0 - p^*$:

$$\begin{aligned} \text{при } p_0 \leq p^* \\ f_n(x) &= \begin{cases} C_{2n}^{(1)} \bar{\Phi}_{2n} + C_{4n}^{(1)} \bar{\Phi}_{4n} + \frac{p_2 \bar{h}^3 n^2}{(48hR^4 \sigma_n^4)} \\ \text{при } n = 2; \\ C_{2n}^{(1)} \bar{\Phi}_{2n} + C_{4n}^{(1)} \bar{\Phi}_{4n} \\ \text{при } n \neq 2; \end{cases} \\ \text{при } p_0 \geq p^* \\ f_n(x) &= \begin{cases} C_{2n}^{(2)} \bar{\chi}_{2n} + C_{4n}^{(2)} \bar{\chi}_{4n} - \frac{p_2 \bar{h}^3 n^2}{(48hR^4 \sigma_n^4)} \\ \text{при } n = 2; \\ C_{2n}^{(2)} \bar{\chi}_{2n} + C_{4n}^{(2)} \bar{\chi}_{4n} \\ \text{при } n \neq 2; \end{cases} \end{aligned} \quad (9.7.29)$$

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_{2n} &= \text{ch} \sigma_n x \cos \sigma_n x; \quad \bar{\Phi}_{4n} = \text{sh} \sigma_n x \sin \sigma_n x; \\ \bar{\chi}_{2n} &= \text{ch} \sigma_n x \sqrt{2}; \quad \bar{\chi}_{4n} = \cos \sigma_n x \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Постоянные интегрирования в формулах (9.7.29) определяются из граничных условий на безмоментном краю оболочки $x = \pm 0,5l$:

$$T_1 = 0; \quad v = v_k. \quad (9.7.30)$$

Тангенциальное перемещение v_k торцевого кольца удовлетворяет дифференциальному уравнению изгиба с учетом упругости оболочки

Глава 9.8

ОСНОВЫ РАСЧЕТА
ОБОЛОЧЕК ЧИСЛЕННЫМИ
МЕТОДАМИ

$$(EJ)_x \left(\frac{d^3}{d\varphi^3} + \frac{d}{d\varphi} \right)^2 v_x - R^4 (S)_{x=\pm l/2} = 0. \quad (9.7.31)$$

Зависимости (9.7.27) - (9.7.31) дают полное решение задачи об изгибе подкрепленного гофром цилиндрического корпуса с учетом кольцевого сжатия. Наибольший практический интерес в данной задаче представляют окружные моменты M_2 и связанные с ними изгибные напряжения в оболочке.

На рис. 9.7.8 представлены максимальные значения момента M_2 при $x=0$, $\varphi=0$ с учетом сжатия в окружном направлении, определяющие прочность гофрированной оболочки при комбинированном нагружении давлением $p = p_0 + p_2 \cos 2\varphi$. График построен в функции параметров

$$\bar{M} = 16(M_2)_{\max} (p_2 \alpha_1^4 R^2)^{-1}; \quad \alpha_1 = \alpha \beta^{3/4};$$

$$\alpha = (l/R)(h/R)^{1/2}; \quad \beta = \bar{h}/h; \quad \bar{p} = p_0/p^*;$$

$$p^* = Eh^3 \beta^3 / 4R^3; \quad \bar{D} = EhR^6 [9(EJ)_x l^3]^{-1}.$$

При вычислении относительного максимального момента \bar{M} в зависимости от значений безразмерного давления \bar{p} следует использовать правую ($\bar{p} < 1, a b c d$) либо левую ($\bar{p} > 1, A B C D$) часть номограммы.

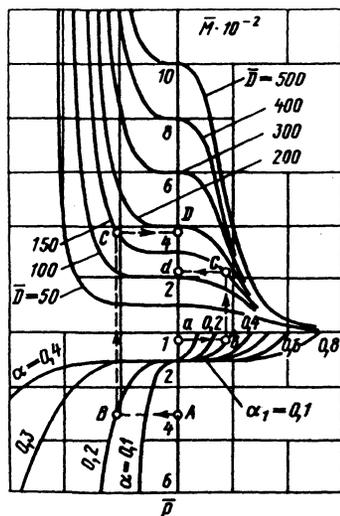


Рис. 9.7.8. Изменение максимального окружного момента в оболочке при неравномерном внешнем давлении

Уравнения, описывающие деформированные состояния оболочек, интегрируются аналитически только в некоторых частных случаях. Решения общего вида можно получить прибегая к упрощениям, что значительно сужает область применимости полученных результатов. В настоящее время расчет оболочек выполняется несколькими численными методами, например: начальными параметрами; конечных разностей и конечных элементов, которые рассмотрены ниже.

9.8.1. МАТРИЧНЫЙ МЕТОД
НАЧАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ

При расчете оболочек вращения этим методом формулируется краевая задача на основе системы дифференциальных уравнений первого порядка. Пусть оболочка из однородного изотропного материала нагружена осесимметричными поверхностными p_1, p_3 силами. Уравнения моментной теории оболочек вращения рассмотрены в гл. 9.5. Для осесимметричного случая имеется шесть дифференциальных уравнений

$$\frac{du}{ds} + \frac{w}{R_1} - \varepsilon_1 = 0;$$

$$\frac{dw}{ds} - \frac{u}{R_1} + \Theta_1 = 0;$$

$$\frac{d\Theta_1}{ds} + \varepsilon_1 = 0;$$

$$\frac{dT_1}{ds} + T_1 \frac{\cos \alpha}{r} - T_2 \frac{\cos \alpha}{r} - \frac{Q_1}{R_1} = -p_1;$$

$$\frac{dQ_1}{ds} + Q_1 \frac{\cos \alpha}{r} + T_1 \frac{1}{R_1} + T_2 \frac{\sin \alpha}{r} = p_3;$$

$$\frac{dM_1}{ds} + M_1 \frac{\cos \alpha}{r} - M_2 \frac{\cos \alpha}{r} - Q_1 = 0. \quad (9.8.1)$$

Эти уравнения должны быть дополнены шестью алгебраическими соотношениями

$$\varepsilon_2 - u \frac{\cos \alpha}{r} - w \frac{\sin \alpha}{r} = 0;$$

$$\varkappa_2 + \Theta_1 \frac{\cos \alpha}{r} = 0;$$

$$M_1 - D(\varkappa_1 + \mu \varkappa_2) = 0;$$

$$M_2 - D(\varkappa_2 + \mu \varkappa_1) = 0;$$

$$T_1 - B(\varepsilon_1 + \mu \varepsilon_2) = 0;$$

$$T_2 - B(\varepsilon_2 + \mu \varepsilon_1) = 0.$$

(9.8.2)

В системах уравнений (9.8.1) и (9.8.2) двенадцать искоемых функций ($u, w, \Theta_1, T_1, Q_1, M_1, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varkappa_1, \varkappa_2, T_2, M_2$): первые шесть - основные, остальные - дополнительные. Введение векторов основных $\{z_1\}$ и дополнитель-

ных $\{z_2\}$ неизвестных, а также вектора внешних нагрузок $\{p\}$ позволяет представить систему уравнений (9.8.1), (9.8.2) в векторно-матричной форме

$$\{z_1\} = \{u \ w \ \Theta_1 \ T_1 \ Q_1 \ M_1\}^T; \quad (9.8.3)$$

$$\{z_2\} = \{\varepsilon_2 \ \varkappa_2 \ \varkappa_1 \ M_2 \ \varepsilon_1 \ T_2\}^T; \quad (9.8.4)$$

$$\{p\} = \{0 \ 0 \ 0 \ -p_1 \ p_3 \ 0\}^T. \quad (9.8.5)$$

Тогда система дифференциальных уравнений (9.8.1) может быть представлена в форме

$$\frac{d}{ds} \{z_1\} + [a_1] \{z_1\} + [b_1] \{z_2\} = \{p\}. \quad (9.8.6)$$

Здесь матрицы :

$$[a_1] = \begin{bmatrix} 0 & 1/R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/R_1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha / r & -1/R_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/R_1 & \cos \alpha / r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \cos \alpha / r \end{bmatrix};$$

$$[b_1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\cos \alpha / r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin \alpha / r \\ 0 & 0 & 0 & -\cos \alpha / r & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Матричная форма алгебраических уравнений (9.8.2)

$$[a_2] \{z_1\} + [b_2] \{z_2\} = 0. \quad (9.8.7)$$

Матрицы :

$$[a_2] = \begin{bmatrix} -\cos \alpha / r & -\sin \alpha / r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\cos \alpha / r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$[b_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu D & -D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -D & -\mu D & 1 & 0 & 0 \\ -\mu B & 0 & 0 & 0 & -B & 0 \\ -B & 0 & 0 & 0 & -\mu B & 1 \end{bmatrix}$$

Исключением вектора $\{z_2\}$ из соотношений (9.8.6) и (9.8.7) получено одно матричное уравнение, описывающее деформацию оболочки вращения:

$$\frac{d}{ds}\{z_1\} + [A_1]\{z_1\} = \{p\}. \quad (9.8.8)$$

Здесь

$$[A_1] = [a_1] - [b_1][b_2]^{-1}[a_2]. \quad (9.8.9)$$

Остановимся на приведении уравнения к безразмерному виду. При численном решении безразмерная форма уравнений позволяет выделить основные параметры системы, провести более общий анализ решения и получить результаты, которые могут быть использованы для широкой области изменения нагрузок, жесткости, геометрии системы и др. Характерным геометрическим параметром оболочки R_0 может быть радиус какого-либо сечения оболочки, ее длина или какой-нибудь другой ха-

рактерный радиус кривизны и длина дуги оболочки: $\rho = r / R_0$; $R = R_1 / R_0$; $x = s / R_0$.

Искомый вектор состояния, соответствующий вектору (9.8.3),

$$\{y\} = \{\bar{u} \bar{w} \bar{Q}_1 \bar{T}_1 \bar{Q}_1 \bar{M}\}^T. \quad (9.8.10)$$

Безразмерные составляющие (обозначены черточками) этого вектора для оболочки постоянной толщины выражаются через перемещение и силы: $\bar{u} = u / R_0$; $\bar{w} = w / R_0$;

$$\bar{T}_1 = T_1 / (Eh); \quad \bar{Q}_1 = Q_1 / (Eh);$$

$$\bar{M} = M_1 / (EhR_0).$$

Разрешающее уравнение, соответствующее уравнению (9.8.8),

$$\frac{d}{dx}\{y\} + [A]\{y\} = \{p\}. \quad (9.8.11)$$

Матрица $[A]$ имеет безразмерные составляющие:

$$[A] = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & 0 & \alpha_{14} & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & 0 & \alpha_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & 0 & 0 & \alpha_{36} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & 0 & \alpha_{44} & \alpha_{45} & 0 \\ \alpha_{51} & \alpha_{52} & 0 & \alpha_{54} & \alpha_{55} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{63} & 0 & 0 & \alpha_{66} \end{bmatrix}, \quad (9.8.12)$$

где

$$\alpha_{11} = \mu \cos \alpha / \rho; \quad \alpha_{12} = 1 / R + \mu \sin \alpha / \rho;$$

$$\alpha_{14} = -(1 - \mu^2); \quad \alpha_{21} = -1 / R; \quad \alpha_{23} = -1;$$

$$\alpha_{33} = \mu \cos \alpha / \rho; \quad \alpha_{36} = -1 / k;$$

$$\alpha_{41} = -\cos^2 \alpha / \rho^2; \quad \alpha_{42} = -\sin \alpha \cos \alpha / \rho^2;$$

$$\alpha_{44} = (1 - \mu) \cos \alpha / \rho; \quad \alpha_{45} = \alpha_{21}; \quad \alpha_{51} = -\alpha_{42};$$

$$\alpha_{52} = \sin^2 \alpha / \rho^2; \quad \alpha_{54} = \alpha_{12};$$

$$\alpha_{55} = \cos \alpha / \rho; \quad \alpha_{63} = (1 - \mu^2) k \alpha_{41};$$

$$\alpha_{66} = \alpha_{44}.$$

Вектор правой части уравнения (9.8.11)

$$\{p\} = \left\{ 0 \ 0 \ 0 \ -\frac{p_1 R_0}{Eh} \ -\frac{p_3 R_0}{Eh} \ 0 \right\}^T.$$

Параметр, определяющий отношение толщины оболочки к радиусу R_0 , от которого зависит точность решения задачи,

$$k = \frac{D}{EhR_0^2} = \frac{h^2}{12(1 - \mu^2)R_0^2}. \quad (9.8.13)$$

Так как рассматриваются тонкие оболочки, величина k мала. В матрицу $[A]$, как видно из выражения (9.8.13), входят величины k (малая величина) и $1/k$ (большая величина). Такие системы уравнений при большой длине интервала интегрирования решаются с применением особых приемов.

Уравнение (9.8.11) при решении задачи должно быть дополнено граничными условиями. На каждом граничном контуре для осесимметричного случая моментной оболочки необходимо удовлетворение трех граничных условий: по три компонента вектора известны в конце и начале интервала интегрирования или заданы их линейные комбинации. Общее решение уравнения (9.8.11)

$$\{y\} = C_1\{y_1\} + C_2\{y_2\} + C_3\{y_3\} + \{z\}. \quad (9.8.14)$$

Константы $C_1 \dots C_3$ определяют следующим образом. Трехкратным интегрированием однородной части системы (9.8.11) при значениях векторов $\{y_1\}_0, \dots, \{y_3\}_0$, удовлетворяющих граничным условиям в начале интервала интегрирования, находятся векторы $\{y_1\}_1, \{y_2\}_1, \{y_3\}_1$. Вектор $\{z\}_0$ частного решения может быть задан нулевым. Еще одно интегрирование уже неоднородного уравнения (9.8.11) дает вектор $\{z\}_1$.

После определения векторов в конце интервала интегрирования константы C_1, \dots, C_3 находятся из граничных условий. Следует отметить, что полученные векторы $\{y_1\}, \{y_2\}, \{y_3\}, \{z\}$ могут быть использованы для самых разных граничных условий в конце интервала. Если приходится решать ряд задач с одинаковыми граничными условиями на одном конце и разными на другом, целесообразно начать интегрирование системы уравнений с того края, на котором граничные условия одинаковые. После определения констант C_1, C_2, C_3 вектор $\{y\}_0$ в начале интервала известен [уравнение (9.8.14)], что позволяет провести еще одно интегрирование уравнения (9.8.11). Значения составляющих вектора $\{y\}$ в промежуточных точках интервала по существу являются искомыми значениями функций сил и перемещений. Однако не все усилия и перемещения находятся интегрированием уравнений. С помощью уравнения (9.8.7), если привести его составляющие к безразмерной форме, можно получить остальные силы и перемещения.

Как уже отмечалось, задачи расчета оболочек имеют особенность. Они описываются уравнениями, имеющими сильно отличающиеся по значению коэффициенты. В результате при интегрировании уравнения (9.8.11) при разных значениях векторов $\{y_1\}_0, \{y_2\}_0$ и других могут получиться мало отличающиеся между собой значения векторов $\{y_1\}_1, \{y_2\}_1$ и др., что дает неточные значения констант C_1, C_2, C_3 и, по существу, неверное решение, особенно при расчете оболочек большой длины. Для того чтобы добиться результата, удовлетворяющего необходимой точностью, оболочку делят на несколько сегментов. Для оболочек вращения минимальная длина сегмента может быть выбрана на основе теории краевого эффекта. Длина l каждого участка приближенно определяется формулой

$$\frac{l}{R_2} = \beta \sqrt{\frac{h}{R_2}}, \quad (9.8.15)$$

где R_2 и h - соответственно окружной радиус кривизны и толщина оболочки на рассматриваемом участке; β - коэффициент, может быть принят $\beta=3$.

Пример. Рассчитать круговую торообразную оболочку, нагруженную равномерным давлением p . Известно, что поле перемещений, определенное по линейной безмоментной теории оболочек, характеризуется разрывом в зонах, близких к линиям нулевых кривизн. Применение моментной теории позволяет избежать этого. Однако общее аналитическое решение задачи получить трудно. При проведении численного расчета принято, что характерному параметру R_0 соответствует радиус сечения тора. Размер $r = a + R_0 \sin \alpha$. Безразмерный радиус $\rho = a / R_0 + \sin \alpha$. Касательная составляющая нагрузки равна нулю, а нормальная $p_3 = p$. В связи с тем, что $x = s / R_0 = \alpha$, переменная в уравнении (9.8.11) соответствует угловой координате α :

$$\frac{d}{d\alpha} \{y\} + [A] \{y\} = \{p\}.$$

Составляющие матрицы $[A]$ зависят от коэффициента Пуассона μ , параметров оболочки $k, a / R_0$ и угловой координаты α . Вектор правой части

$$\{p\} = \left\{ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \frac{pR_0}{Eh} \ 0 \right\}^T.$$

Благодаря симметрии оболочки относительно экваториального сечения интегрирование можно проводить не по всей контуре, а только от $\alpha = -\pi/2$ до $\alpha = \pi/2$. Граничные условия $u=0$; $\Theta=0$; $Q_1=0$ при $\alpha = -\pi/2$ и $u=0$; $\Theta=0$; $Q_1=0$ при $\alpha = \pi/2$. Решение представляется в виде

$$\{y\} = C_1\{y_1\} + C_2\{y_2\} + C_3\{y_3\} + \{z\}.$$

При интегрировании уравнения (9.8.11) начальные значения векторов (в соответствии с граничным условием при $\alpha = -\pi/2$) принимаются следующими:

$$\{y_1\}_0 = \{0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\}^T;$$

$$\{y_2\}_0 = \{0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0\}^T;$$

$$\{y_3\}_0 = \{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1\}^T;$$

$$\{z\}_0 = \{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\}^T.$$

После определения констант C_1 , C_2 , C_3 и истинных начальных параметров еще одно интегрирование позволяет построить поле перемещений и сил в оболочке. На рис. 9.8.1 приведены кривые нормального перемещения \bar{w} для оболочки, геометрические параметры которой $a/R_0 = 1,5$; $(h/R_0)_1 = 0,05$; $(h/R_0)_2 = 0,02$; $(h/R_0)_3 = 0,005$.

Расчеты выполнены для безразмерного давления $pR_0/(Eh) = 0,002$ и коэффициента $\mu = 0,3$. На всем участке $\alpha = -\pi/2 \dots +\pi/2$ кривая нормального перемещения плавная, без разрывов. В зоне близкой к экваториальному сечению, вдали от точки $\alpha = 0$ нормальное перемещение \bar{w} мало зависит от относи-

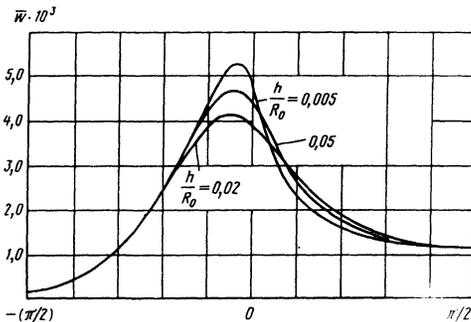


Рис. 9.8.1. Изменение нормальных перемещений торoidalной оболочки, нагруженной внутренним давлением

тельной толщины оболочки и приближенно может быть определено по линейной безмоментной теории. Для точки $\alpha = \pi/2$ силы $T_1 = \frac{pR_0}{2} \frac{2a + R}{a + R}$, $T_2 = \frac{pR_0}{2}$, а безразмерное

$$\text{перемещение } \bar{w} = \frac{pR_0}{2Eh} \left[\frac{a}{R_0} (1 - 2\mu) + (1 - \mu) \right].$$

При этом $\mu = 0,3$, $pR_0/(Eh) = 0,002$, $\bar{w} = 1,3 \cdot 10^{-3}$. Как видно, отличие от численного расчета незначительно.

Расчет оболочки вращения при осесимметричном нагружении наиболее простой. Такой подход может быть применен к более общим случаям нагружения, например, к оболочкам при несимметричном нагружении или неравномерном нагреве, а также к анизотропным оболочкам и оболочкам, имеющим переменную толщину и дискретные кольцевые подкрепления. Общая схема расчета при этом остается такой же.

9.8.2. МЕТОД КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

Этот метод используется при решении широкого круга задач теории оболочек. Ниже на примере решения уравнения моментной цилиндрической оболочки при неосесимметричной деформации рассматриваются особенности и последовательность определения в ней сил и перемещений.

Для однородных изотропных оболочек вращения уравнения моментной теории приведены в гл. 9.5. Для цилиндрической оболочки уравнения равновесия принимают вид;

$$\frac{\partial T_1}{\partial s} + \frac{\partial S}{R\partial\beta} = -p_1;$$

$$\frac{\partial T_2}{R\partial\beta} + \frac{\partial S}{\partial s} - \frac{Q_2}{R} = -p_2;$$

$$\frac{T_2}{R} + \frac{\partial Q_1}{\partial s} + \frac{\partial Q_2}{R\partial\beta} = p_3; \quad (9.8.16)$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial s} + \frac{\partial H}{R\partial\beta} - Q_1 = 0;$$

$$\frac{\partial M_2}{R\partial\beta} + \frac{\partial H}{\partial s} - Q_2 = 0.$$

Деформации, углы поворота, перемещения и изменения кривизн связаны между собой соотношениями:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial s}; \quad \varepsilon_2 = \frac{\partial v}{R\partial\beta} + \frac{w}{R}; \\ \gamma &= \frac{\partial u}{R\partial\beta} + \frac{\partial v}{\partial s}; \quad \Theta_1 = -\frac{\partial w}{\partial s}; \\ \Theta_2 &= -\frac{\partial w}{R\partial\beta} + \frac{v}{R}; \quad \alpha_1 = \frac{\partial\Theta_1}{\partial s}; \\ \alpha_2 &= \frac{\partial\Theta_2}{R\partial\beta}; \quad \alpha_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\Theta_1}{R\partial\beta} + \frac{\partial\Theta_2}{\partial s} \right). \end{aligned} \quad (9.8.17)$$

Силы и моменты для изотропной одно-
родной оболочки выражаются через деформа-
ции и изменения кривизн следующим обра-
зом:

$$\begin{aligned} T_1 &= B(\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2); \quad T_2 = B(\varepsilon_2 + \mu\varepsilon_1); \\ S &= 0,5B(1 - \mu)\gamma; \\ M_1 &= D(\alpha_1 + \mu\alpha_2); \quad M_2 = D(\alpha_2 + \mu\alpha_1); \\ H_1 &= D(1 - \mu)\alpha_{12}. \end{aligned} \quad (9.8.18)$$

Система уравнений (9.8.16) - (9.8.18)
полная: при девятнадцати уравнениях она
содержит девятнадцать искомым функций
($T_1, T_2, S, Q_1, Q_2, M_1, M_2, H, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma, \Theta_1, \Theta_2,$
 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_{12}, u, v, w$). Для приведения уравне-
ния к безразмерному виду координата s вдоль
меридиана отнесена к радиусу оболочки:
 $x=s/R$. Безразмерные силы, перемещения и
изменения кривизн:

$$\begin{aligned} \bar{T}_1 &= T_1 / (Eh); \quad \bar{T}_2 = T_2 / (Eh); \quad \bar{S} = S / (Eh); \\ \bar{Q}_1 &= Q_1 / (Eh); \quad \bar{Q}_2 = Q_2 / (Eh); \\ \bar{M}_1 &= M_1 / (EhR); \\ \bar{M}_2 &= M_2 / (EhR); \quad \bar{H} = H / (EhR); \\ \bar{u} &= u / R; \\ \bar{v} &= v / R; \quad \bar{w} = w / R; \quad \bar{\alpha}_1 = \alpha_1 R; \\ \bar{\alpha}_2 &= \alpha_2 R; \quad \bar{\alpha}_{12} = \alpha_{12} R; \quad k = h^2 / (12R^2). \end{aligned} \quad (9.8.19)$$

Первый этап решения задачи состоит в
приведении уравнений в частных производных
к обыкновенным дифференциальным. Иско-

мые силы, деформации и перемещения, пред-
ставленные в виде суммы произведений двух
функций, одна из которых соответствует чле-
нам рядов Фурье по окружной координате,
другая - функции координаты x , имеют вид:

$$\begin{aligned} \bar{T}_1 &= \sum_{m=0} T_{1m} \cos m\beta; \quad \bar{T}_2 = \sum_{m=0} T_{2m} \cos m\beta; \\ \bar{S} &= \sum_{m=1} S_m \sin m\beta; \quad \bar{M}_1 = \sum_{m=0} M_{1m} \cos m\beta; \\ \bar{M}_2 &= \sum_{m=0} M_{2m} \cos m\beta; \quad \bar{H} = \sum_{m=1} H_m \sin m\beta; \\ \bar{Q}_1 &= \sum_{m=0} Q_{1m} \cos m\beta; \quad \bar{Q}_2 = \sum_{m=1} Q_{2m} \sin m\beta; \\ \bar{u} &= \sum_{m=0} u_m \cos m\beta; \quad \bar{v} = \sum_{m=1} v_m \sin m\beta; \\ \bar{w} &= \sum_{m=0} w_m \cos m\beta; \\ \varepsilon_1 &= \sum_{m=0} \varepsilon_{1m} \cos m\beta; \quad \varepsilon_2 = \sum_{m=0} \varepsilon_{2m} \cos m\beta; \\ \gamma &= \sum_{m=1} \gamma_m \sin m\beta; \quad \bar{\alpha}_1 = \sum_{m=0} \alpha_{1m} \cos m\beta; \\ \bar{\alpha}_2 &= \sum_{m=0} \alpha_{2m} \cos m\beta; \quad \bar{\alpha}_{12} = \sum_{m=1} \alpha_m \sin m\beta; \\ \Theta_1 &= \sum_{m=0} \Theta_{1m} \cos m\beta; \quad \Theta_2 = \sum_{m=1} \Theta_{2m} \sin m\beta. \end{aligned} \quad (9.8.20)$$

Здесь суммируются безразмерные значе-
ния сил, перемещений, деформаций, которые
соответствуют определенной m -й гармонике и
являются функцией только одной переменной
 x . Следует отметить, что разложения (9.8.20)
не являются полными, поскольку опущены
кососимметричные составляющие сил, пере-
мещений и деформаций для величин $\bar{T}_1, \bar{T}_2,$
 $\bar{M}_1, \bar{M}_2, \bar{Q}_1, \bar{u}, \bar{w}, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \Theta_1$ и симмет-
ричные составляющие для величин $\bar{S}, \bar{H}, \bar{Q}_2,$
 $\bar{v}, \gamma, \bar{\alpha}_{12}$. В большинстве случаев это допусти-
мо, так как соответствующим выбором начала
отсчета по β и разделением системы на сим-
метричную и кососимметричную появляется
возможность дополнительные слагаемые не
учитывать.

Зависимости (9.8.20) дополняют разло-
жениями в ряды Фурье составляющих поверх-
ностной нагрузки: $P_1 = \sum_{m=0} P_{1m} \cos m\beta;$

$$p_2 = \sum_{m=1} p_{2m} \sin m\beta; \quad p_3 = \sum_{m=0} p_{3m} \cos m\beta. \quad \text{Ис-}$$

пользуя эти зависимости, а также зависимости (9.8.19) и (9.8.20), система уравнений (9.8.16) приводится к виду

$$\begin{aligned} \frac{dT_{1m}}{dx} + mS_m &= -\frac{p_{1m}R}{Eh}; \\ -mT_{2m} + \frac{dS_m}{dx} - Q_{2m} &= -\frac{p_{2m}R}{Eh}; \\ T_{2m} + \frac{dQ_{1m}}{dx} + mQ_{2m} &= \frac{p_{3m}R}{Eh}; \\ \frac{dM_{1m}}{dx} + mH_m - Q_{1m} &= 0; \\ -mM_{2m} + \frac{dH_m}{dx} - Q_{2m} &= 0. \end{aligned} \quad (9.8.21)$$

Соотношения (9.8.17) представляют следующим образом:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1m} &= \frac{du_m}{dx}; \quad \varepsilon_{2m} = mv_m + w_m; \\ \gamma_m &= -mu_m + \frac{dv_m}{dx}; \\ \Theta_{1m} &= \frac{dw_m}{dx}; \quad \Theta_{2m} = -mw_m - v_m; \\ \varkappa_{1m} &= \frac{d\Theta_{1m}}{dx}; \quad \varkappa_{2m} = m\Theta_{2m}; \\ \varkappa_m &= -0,5 \left(m\Theta_{1m} - \frac{d\Theta_{2m}}{dx} \right). \end{aligned} \quad (9.8.22)$$

Безразмерные составляющие сил и моментов для каждого значения выражаются через деформации и изменения кривизн:

$$\begin{aligned} (1 - \mu^2)T_{1m} &= \varepsilon_{1m} + \mu\varepsilon_{2m}; \\ (1 - \mu^2)T_{2m} &= \varepsilon_{2m} + \mu\varepsilon_{1m}; \\ 2(1 + \mu)S_m &= \gamma_m; \quad M_{1m} = k(\varkappa_{1m} + \mu\varkappa_{2m}); \\ M_{2m} &= k(\varkappa_{2m} + \mu\varkappa_{1m}); \quad H_m = (1 - \mu)k\varkappa_m. \end{aligned} \quad (9.8.23)$$

Полученная система уравнений может быть решена различными способами. Целесо-

образна процедура, изложенная в предыдущем разделе: интегрирование системы уравнений первого порядка.

Другим вариантом решения является приведение данной системы к системе уравнений второго порядка. Для выражения сил и моментов в уравнениях (9.8.21) через деформации по формулам (9.8.23) используются все соотношения, кроме

$$M_{1m} = k(\varkappa_{1m} + \mu\varkappa_{2m}). \quad (9.8.24)$$

В уравнениях (9.8.21) исключают величины Q_{1m} и Q_{2m} , а моменты M_{1m} остаются в виде одной из основных искомым функций. Выражением деформаций и изменений кривизн в этих уравнениях и в уравнении (9.8.24) через перемещения по формулам (9.8.22) получается система из четырех обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Каждое уравнение имеет второй порядок:

$$\begin{aligned} a_1 \frac{d^2 u_m}{dx^2} + a_2 u_m + a_3 \frac{dv_m}{dx} + a_4 \frac{dw_m}{dx} &= \\ &= -\frac{p_{1m}R}{Eh} (1 - \mu^2); \\ a_5 \frac{du_m}{dx} + a_6 \frac{d^2 v_m}{dx^2} + a_7 v_m + a_8 \frac{d^2 w_m}{dx^2} + \\ + a_9 \frac{dw_m}{dx} &= -\frac{p_{2m}R}{Eh} (1 - \mu^2); \\ a_{10} \frac{du_m}{dx} + a_{11} \frac{d^2 v_m}{dx^2} + a_{12} v_m + a_{13} \frac{d^2 w_m}{dx^2} + \\ + a_{14} w_m + a_{15} \frac{d^2 M_{1m}}{dx^2} &= \frac{p_{3m}R}{Eh} (1 - \mu^2); \\ a_{16} v_m + a_{17} \frac{d^2 w_m}{dx^2} + a_{18} w_m + a_{19} M_{1m} &= 0. \end{aligned} \quad (9.8.25)$$

Вектор искомым функций, состоящий из трех компонентов u_m, v_m, w_m - перемещений и момента M_{1m} :

$$\{y\} = \{u_m \ v_m \ w_m \ M_{1m}\}^T. \quad (9.8.26)$$

Тогда уравнения (9.8.25) могут быть представлены в виде

$$\left[A \right] \frac{d^2}{dx^2} \{y\} + \left[B \right] \frac{d}{dx} \{y\} + \left[C \right] \{y\} = \{P\}. \quad (9.8.27)$$

Здесь

$$[A] = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_6 & a_8 & 0 \\ 0 & a_{11} & a_{13} & a_{15} \\ 0 & 0 & a_{17} & 0 \end{bmatrix};$$

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 & a_3 & a_4 & 0 \\ a_5 & 0 & 0 & 0 \\ a_{10} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$[C] = \begin{bmatrix} a_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_7 & a_9 & 0 \\ 0 & a_{12} & a_{14} & 0 \\ 0 & a_{16} & a_{18} & a_{19} \end{bmatrix};$$

$$\{P\} = \left(1 - \mu^2\right) \frac{R}{Eh} \begin{Bmatrix} -p_{1m} \\ -p_{2m} \\ p_{3m} \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (9.8.28)$$

Составляющие матриц рассчитывают, как рассмотрено выше. Они зависят от относительной толщины оболочки $k = h^2 / (12R^2)$,

коэффициента μ Пуассона и номера m гармоники. Чтобы решить задачу, кроме уравнения (9.8.23) необходимы граничные условия на каждом из граничных контуров: силы, перемещения или условия упругого закрепления. Например, для заделанного края $u_m = v_m =$

$w_m = \frac{dw_m}{dx} = 0$, для шарнирно опертого

края $u_m = v_m = w_m = M_{1m} = 0$. Таким образом, известны некоторые из компонентов вектора $\{y\}$ или его производной $d\{y\}/dx$. В общем виде матричная форма граничных условий при $x=0$ и $x=x_n$ может быть представлена следующим образом:

$$[E]_0 \frac{d}{dx} \{y\}_0 + [F] \{y\}_0 = \{G\}_0;$$

$$[E]_n \frac{d}{dx} \{y\}_n + [F] \{y\}_n = \{G\}_n. \quad (9.8.29)$$

Матрицы $[E]$ и $[F]$ имеют размер 4×4 и обычно слабо заполнены. Для заделанного края при нулевом векторе $\{G\}$ правой части (9.8.29)

$$[E] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$[F] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Итак, краевая задача для оболочки описывается уравнением (9.8.27) и граничными условиями (9.8.29). При решении уравнений методом конечных разностей область интегрирования $x=0 \dots x_n$ разбивают на ряд участков длиной Δ . Первая и вторая производные от векторов

$$\frac{d^2}{dx^2} \{y\} = \frac{1}{\Delta^2} (\{y\}_{i-1} - 2\{y\}_i + \{y\}_{i+1});$$

$$\frac{d}{dx} \{y\} = -\frac{1}{2\Delta} (\{y\}_{i-1} - \{y\}_{i+1}).$$

Первая производная при аппроксимации граничных условий с точностью $O(\Delta^2)$: для начала интервала через правые разности

$$\frac{d}{dx} \{y\}_0 = -\frac{3}{2\Delta} \{y\}_0 + \frac{2}{\Delta} \{y\}_1 - \frac{1}{2\Delta} \{y\}_2,$$

а для конца интервала через левые разности

$$\frac{d}{dx} \{y\}_n = \frac{3}{2\Delta} \{y\}_n - \frac{2}{\Delta} \{y\}_{n-1} + \frac{1}{2\Delta} \{y\}_{n-2}.$$

С учетом этих соотношений граничные условия и уравнения оболочки:

$$[H]_0 \{y\}_0 + \frac{2}{\Delta} [E]_0 \{y\}_1 - \frac{1}{2\Delta} [E]_0 \{y\}_2 = \{G\}_0;$$

$$\begin{aligned}
 & [L]_i \{y\}_{i+1} + [M]_i \{y\}_i + [N]_i \{y\}_{i-1} = \{D\}_i; \\
 & \frac{1}{2\Delta} [E]_n \{y\}_{n-2} - \frac{2}{\Delta} [E]_n \{y\}_{n-1} + [H]_n \{y\}_n = \\
 & = \{G\}_n.
 \end{aligned} \tag{9.8.30}$$

Первая строка относится к левой границе ($i=0$), третья - к правой ($i=n$). Во втором уравнении $i=1, 2, 3, \dots, n-1$. Отсюда общее число уравнений $n+1$ соответствует числу искоемых векторов $\{y\}$. Матрицы в выражениях (9.8.30):

$$\begin{aligned}
 [H]_0 &= -\frac{3}{2\Delta} [E]_0 + [F]_0; \\
 [H]_n &= \frac{3}{2\Delta} [E]_n + [F]_n; \\
 [L]_i &= \frac{1}{\Delta^2} [A]_i + \frac{1}{2\Delta} [B]_i; \\
 [M]_i &= -\frac{2}{\Delta} [A]_i + [C]_i; \\
 [N]_i &= \frac{1}{\Delta^2} [A]_i - \frac{1}{2\Delta} [B]_i.
 \end{aligned}$$

Для решения системы уравнений (9.8.30) процедурой матричной прогонки принимается, что векторы $\{y\}$ в соседних точках связаны линейным соотношением

$$\{y\}_i = [\alpha]_i + [\beta]_i \{y\}_{i+1}, \tag{9.8.31}$$

где $[\alpha]_i$ и $[\beta]_i$ - матрицы прогонки.

Для построения рекуррентных формул, связывающих эти матрицы в соседних точках, запишем формулу, аналогичную последней, но для предыдущей $i-1$ -й точки $\{y\}_{i-1} = [\alpha]_{i-1} + [\beta]_{i-1} \{y\}_i$. Подстановкой ее во второе соотношение (9.8.30) и с учетом соотношения (9.8.31) получена связь между матрицами прогонки в соседних точках:

$$\begin{aligned}
 [\alpha]_i &= \left([M]_i + [N]_i [\beta]_{i-1} \right)^{-1} \times \\
 & \times \left([D]_i - [N]_i [\alpha]_{i-1} \right); \\
 [\beta]_i &= - \left([M]_i + [N]_i [\beta]_{i-1} \right)^{-1} [L]_i.
 \end{aligned} \tag{9.8.32}$$

Для первого этапа расчета - определения всех матриц прогонки - нужны их значения в начале интервала для $i=1$, которые можно найти с помощью первого и второго уравнений (9.8.30) и выражения (9.8.31):

$$\begin{aligned}
 [\alpha]_1 &= - \left([M]_1 + \frac{2}{\Delta} [N]_1 [H]_0 [E]_0 \right)^{-1} \times \\
 & \times \left([D]_1 - [N]_1 [H]_0^{-1} [G]_0 \right); \\
 [\beta]_1 &= \left([M]_1 + \frac{2}{\Delta} [N]_1 [H]_0 [E]_0 \right)^{-1} \times \\
 & \times \left([L]_1 + \frac{1}{2\Delta} [N]_1 [H]_0^{-1} [E]_0 \right).
 \end{aligned} \tag{9.8.33}$$

Эти матрицы могут быть рассчитаны при заданных параметрах оболочки и известных граничных условиях в начале интервала. Остальные матрицы для $i=2, 3$ и т.д. находят по формуле (9.8.31). Прямой ход при прогонке ведется до значения $i=n-2$. В конце интервала нужно воспользоваться граничным условием для $i=n-1$ - третьим и вторым уравнениями (9.8.30) и выражением (9.8.31). Тогда вектор искоемых функций для предпоследней точки

$$\begin{aligned}
 \{y\}_{n-1} &= \left([N]_{n-1} [\beta]_{n-2} - \right. \\
 & - \frac{1}{2\Delta} [L]_{n-1} [H]_{n-1}^{-1} [E]_n [\beta]_{n-2} + [M]_{n-1} + \\
 & \left. + \frac{2}{\Delta} [L]_{n-1} [H]_{n-1}^{-1} [E]_n \right)^{-1} \left([D]_{n-1} - \right. \\
 & - [N]_{n-1} [\alpha]_{n-2} - [L]_{n-1} [H]_{n-1}^{-1} [G]_n + \\
 & \left. + \frac{1}{2\Delta} [L]_{n-1} [H]_{n-1}^{-1} [E]_n [\alpha]_{n-2} \right).
 \end{aligned} \tag{9.8.34}$$

Векторы в остальных точках определяют последовательно с помощью соотношения (9.8.31) и известных матриц прогонки при обратном ходе. При этом необходимы значения не только искомого вектора $\{y\}_i$, но и его

производных $\frac{d}{dx} \{y\}_i = \frac{1}{2\Delta} \{y\}_{i+1} - \frac{1}{2\Delta} \{y\}_{i-1}$.

С помощью этих величин и соотношений

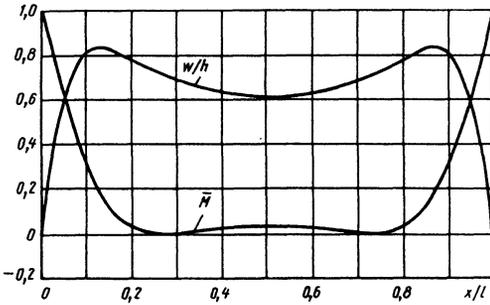


Рис. 9.8.2. Изменение нормальных перемещений и изгибающих моментов при нагружении краевыми моментами

теории оболочек находят компоненты усилий и перемещений оболочки для определенного числа m .

На рис. 9.8.2 приведены результаты расчета цилиндрической оболочки, нагруженной на двух торцах краевыми моментами $M_0 = M_n = \bar{M} \cos m\beta$ для $m = 5$ при нулевых перемещениях $u_0 = u_n = 0$; $w_0 = w_n = 0$. Вычисления проведены для $h/R = 1/50$, коэффициента Пуассона $\mu = 0,3$ и $l/R = 1$.

Рассмотренная последовательность решения задачи для цилиндрической оболочки может быть распространена на оболочку вращения произвольной геометрии меридиана. В этом случае несколько усложняется расчет коэффициентов уравнений (9.8.25), разных для всех точек интервала интегрирования. Но общий алгоритм расчета остается тем же.

9.8.3. МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В соответствии с общими соотношениями принципа возможных перемещений условие равновесия для оболочки вращения

$$\iiint \{\delta \epsilon_z\}^T \{\sigma_z\} r d\beta ds dz = \iiint \{\delta u\}^T \{p\} r d\beta ds. \tag{9.8.35}$$

Векторы деформаций и напряжений, соответствующие слою оболочки, находящемуся на расстоянии z от срединной поверхности, $\{\epsilon_z\}^T = \{\epsilon_{1z} \ \epsilon_{2z} \ \gamma_z\}^T$; $\{\sigma_z\} = \{\sigma_{1z} \ \sigma_{2z} \ \tau_z\}^T$. Все объемные силы приводятся к срединной поверхности и входят в общий вектор поверхностной нагрузки $\{p\} = \{p_1 \ p_2 \ p_3\}^T$. Вектор перемещений $\{u\} = \{u \ v \ w\}^T$. Согласно гипотезе прямых нормалей

$$\{\epsilon_z\} = \{\epsilon\} + z\{\kappa\}. \tag{9.8.36}$$

Векторы деформаций срединного слоя и изменения кривизн:

$$\{\epsilon\} = \{\epsilon_1 \ \epsilon_2 \ \gamma\}^T; \ \{\kappa\} = \{\kappa_1 \ \kappa_2 \ \kappa_{12}\}^T.$$

Для слоя на расстоянии z вектор напряжений

$$\{\sigma_z\} = [D]\{\epsilon\} + z[D]\{\kappa\}. \tag{9.8.37}$$

Матрица $[D]$ упругих констант для изотропной оболочки определяется зависимостями (9.5.4). После подстановки формул (9.8.36) и (9.8.37) в выражение (9.8.35) и интегрирования по z левой части уравнения условие равновесия тонкой оболочки вращения, соответствующее принципу возможных перемещений,

$$h \iint \{\delta \epsilon\}^T [D]\{\epsilon\} r d\beta ds + \frac{h^3}{12} \iint \{\delta \kappa\}^T [D]\{\kappa\} r d\beta ds = \iint \{\delta u\}^T \{p\} r d\beta ds. \tag{9.8.38}$$

Векторы деформаций и изменения кривизн срединного слоя выражаются через перемещения с помощью соотношений (9.5.2). Тогда

$$\{\epsilon\} = [C_1]\{u\}, \tag{9.8.39}$$

где

$$[C_1] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial s} & 0 & \frac{1}{R_1} \\ \cos \alpha & \frac{\partial}{\partial \beta} & \frac{\sin \alpha}{r} \\ r & r\partial\beta & r \\ \frac{\partial}{r\partial\beta} & \left(\frac{\partial}{\partial s} - \frac{\cos \alpha}{r}\right) & 0 \end{bmatrix}.$$

Формулы (9.5.3) связывают изменения кривизн с углами поворота Θ_1 и Θ_2 , составляющими вектор $\{\Theta\}$:

$$\{\kappa\} = [C_2]\{\Theta\}, \tag{9.8.40}$$

где

$$[C_2] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial s} & 0 \\ \cos \alpha & \frac{\partial}{\partial \beta} \\ r & r\partial\beta \\ \frac{\partial}{2r\partial\beta} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial s} - \frac{\cos \alpha}{r}\right) \end{bmatrix}.$$

В свою очередь, углы поворота выражаются через перемещения в соответствии с уравнениями (9.5.2), откуда

$$\{\Theta\} = [C_3]\{u\}, \quad (9.8.41)$$

где

$$[C_3] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1} & 0 & \frac{\partial}{\partial s} \\ 0 & -\frac{\sin \alpha}{r} & \frac{\partial}{r\partial \beta} \end{bmatrix}$$

После подстановки выражений (9.8.41) в формулу (9.8.40)

$$\{\mathfrak{x}\} = [C_4]\{u\}, \quad (9.8.42)$$

где матрица $[C_4] = [C_2][C_3]$ имеет размер 3×3 .

В дальнейшем при решении задачи методом конечных элементов необходимо задать поле перемещений в элементе и выразить перемещения в любой точке через вектор узловых перемещений. Пусть матрица $[\Phi]$ определяет это соотношение:

$$\{u\} = [\Phi]\{\Delta\}. \quad (9.8.43)$$

Тогда с помощью выражений (9.8.39) и (9.8.42) можно получить следующие соотношения:

$$\{\varepsilon\} = [B_1]\{\Delta\}; \quad \{\mathfrak{x}\} = [B_2]\{\Delta\}. \quad (9.8.44)$$

Подставим их в уравнение (9.8.38) и, введя обозначения

$$\begin{aligned} [k_1] &= h \iint [B_1]^T [D] [B_1] r d\beta ds; \\ [k_2] &= \frac{h^3}{12} \iint [B_2]^T [D] [B_2] r d\beta ds, \end{aligned} \quad (9.8.45)$$

получим матрицу жесткости элемента оболочки $[k] = [k_1] + [k_2]$, составленную из слагаемых, соответствующих работе мембранных сил и изгибающих моментов. Вектор нагрузки элемента

$$\{F\} = \iint [\Phi]^T \{p\} r d\beta ds. \quad (9.8.46)$$

Уравнение (9.8.38) равновесия элемента оболочки

$$[k]\{\Delta\} = \{F\}, \quad (9.8.47)$$

Подобное соотношение получают для каждого элемента, на которые разбита конструкция. После приравнивания узловых перемещений и суммирования узловых сил соседних элементов можно построить глобальную матрицу жесткости и вектор узловых сил всей системы. Для узлов, совпадающих с граничным контуром, удовлетворяются краевые условия. Полученная система уравнений однозначно определяет перемещения в узлах, которые, в свою очередь, позволяют провести расчет напряженного состояния.

Точность полученных результатов связана с рядом факторов, но прежде всего с числом конечных элементов, на которые разбивается система, их формой и точностью аппроксимации поля перемещений в пределах элемента.

Пример. Построить матрицу жесткости элемента цилиндрической оболочки при осесимметричной деформации. Вектор узловых перемещений элемента состоит из шести составляющих: $\{\Delta\} = \{u_1 w_1 \Theta_1 u_2 w_2 \Theta_2\}^T$. Пусть поле перемещений внутри элемента аппроксимируется полиномами

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 s; \\ w &= \alpha_3 + \alpha_4 s + \alpha_5 s^2 + \alpha_6 s^3, \end{aligned} \quad (9.8.48)$$

где $\alpha_1, \dots, \alpha_6$ - коэффициенты аппроксимации; s - осевая координата.

Угол поворота нормали для цилиндрической оболочки

$$\Theta = -\frac{dw}{ds} = -\alpha_4 - 2\alpha_5 s - 3\alpha_6 s^2.$$

Поскольку $u = u_1$; $w = w_1$; $\Theta = \Theta_1$ при $s = 0$ и $u = u_2$; $w = w_2$; $\Theta = \Theta_2$ при $s = l$, коэффициенты $\alpha_1, \dots, \alpha_6$ выражают через узловых перемещения $u_1, u_2, w_1, w_2, \Theta_1, \Theta_2$. Матрица, связывающая вектор перемещений $\{u\} = \{u, w\}^T$ с вектором узловых перемещений $\{\Delta\}$, в уравнении (9.8.43)

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 - \frac{s}{l} \\ l \end{pmatrix} & 0 & 0 & \begin{pmatrix} s \\ l \end{pmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} 1 - 3\frac{s^2}{l^2} + 2\frac{s^3}{l^3} \\ \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} s - 2\frac{s^2}{l} + \frac{s^3}{l^2} \\ \end{pmatrix} & 0 & \begin{pmatrix} 3\frac{s^2}{l^2} - 2\frac{s^3}{l^3} \\ \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -\frac{s^2}{l} + \frac{s^3}{l^2} \\ \end{pmatrix} \end{bmatrix}. \quad (9.8.49)$$

С помощью соотношений (9.8.39), (9.8.42), (9.8.43) определяют матрицы :

$$[B_1] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{l} & 0 & 0 & \frac{1}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \left(1 - 3\frac{s^2}{l^2} + 2\frac{s^3}{l^3} \right) & \frac{1}{r} \left(s - 2\frac{s^2}{l} + \frac{s^3}{l^2} \right) & 0 & \frac{1}{r} \left(3\frac{s^2}{l^2} - 2\frac{s^3}{l^3} \right) & \frac{1}{r} \left(-\frac{s^2}{l} + \frac{s^3}{l^2} \right) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$[B_2] = \begin{bmatrix} 0 & \left(-6\frac{1}{l^2} + 12\frac{s}{l^3} \right) & \left(-4\frac{1}{l} + 6\frac{s}{l^2} \right) & 0 & \left(6\frac{1}{l^2} - 12\frac{s}{l^3} \right) & \left(-2\frac{1}{l} + 6\frac{s}{l^2} \right) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Составляющие матрицы жесткости элемента $[k_1]$ и $[k_2]$ находят из соотношений (9.8.45), где интегралы взяты по цилиндричес-

кой поверхности элемента длиной l и радиусом r :

$$[k_1] = \frac{2\pi Eh}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} \frac{1}{l} & -\frac{\mu}{2l} & -\frac{\mu l}{12r} & -\frac{1}{l} & -\frac{\mu}{2r} & \frac{\mu l}{12r} \\ \frac{13}{35} \frac{l}{r^2} & \frac{11}{210} \frac{l}{r^2} & \frac{\mu}{2r} & \frac{9}{70} \frac{l}{r^2} & \frac{13}{420} \frac{l}{r^2} \\ \frac{1}{105} \frac{l^3}{r^2} & \frac{\mu l}{12r} & \frac{\mu}{420} \frac{r^2}{r^2} & \frac{13}{420} \frac{l^2}{r^2} & \frac{140}{140} \frac{r^2}{r^2} \\ & \frac{1}{l} & \frac{\mu}{2r} & \frac{13l}{35r^2} & \frac{\mu l}{11l^2} \\ & & & & \frac{210}{5l^3} \frac{r^2}{r^2} \\ & & & & \frac{84}{84} \frac{r^2}{r^2} \end{bmatrix};$$

$$[k_2] = \frac{2\pi r E h^3}{12(1-\mu^2)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} & 0 & -\frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} \\ & & \frac{4}{l} & 0 & -\frac{6}{l^2} & \frac{2}{l} \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} \\ & & & & & \frac{4}{l} \end{bmatrix}.$$

(9.8.50)

Сумма этих матриц дает матрицу жесткости элемента $[k]$. Для построения общей мат-

рицы жесткости системы необходимо приравнять перемещения и просуммировать силы в

узлах соседних элементов. Следует отметить, что при решении задач часто приходится стыковать элементы разных размеров. На участках оболочки с ожидаемым быстрым изменением перемещений, например вблизи краевой зоны, длина элементов должна быть меньше, чем у элементов остальных зон оболочки. Стыковка элементов разной длины в МКЭ мало усложняет расчет, что является большим преимуществом этого метода.

Соотношения (9.8.45) и (9.8.46) справедливы также для произвольной оболочки вращения как при осесимметричной, так и при несимметричной деформации. Асимметрия несколько усложняет расчет. Прежде всего появляется еще одна составляющая вектора v перемещения. И, кроме того, каждый из компонентов вектора - функция двух переменных s и β . В этом случае необходимо разделить переменные по координатам s и β , представив составляющие по β в виде периодических тригонометрических функций.

При рассмотрении оболочек вращения с криволинейной образующей хорошие результаты получают для конических элементов и при аппроксимации поля перемещений вида (9.8.48). Составление общей матрицы жесткости при этом имеет некоторые особенности. Прежде чем проводить стыковку элементов, необходимо для каждого элемента от локальной координатной системы перейти к общей. В остальном последовательность определения узловых перемещений и усилий аналогична рассмотренной.

Глава 9.9

МЯГКИЕ ОБОЛОЧКИ И МЕМБРАНЫ

При расчете тонкостенных конструкций, изгибная жесткость которых мала, применяется теория мягких оболочек, согласно которой оболочка считается безмоментной и неспособной воспринимать силы сжатия. При наличии растягивающих сил оболочка находится в двухосном напряженном состоянии. Если на поверхности возможно возникновение сжимающих сил, они принимаются равными нулю и оболочка или ее часть считается образованной системой нитей, направленных вдоль главной растягивающей силы (одноосная оболочка).

Определение деформированной геометрии оболочки, ее напряженного состояния, в общем случае, связано как с геометрической, так и физической нелинейностью. При расчете конструкций, имеющих ограниченные деформации, применяют приближенную техническую теорию мягких оболочек. Она основана на общем нелинейном подходе, но предполагает

выделение некоторого основного напряженного состояния и линеаризацию относительно него системы уравнений оболочки. Частным случаем мягкой оболочки является мембрана, начальная поверхность которой плоская.

9.9.1. ТЕОРИЯ БОЛЬШИХ ДЕФОРМАЦИЙ МЯГКИХ ОБОЛОЧЕК

Поведение мягких оболочек наиболее полно описывает теория больших деформаций, учитывающая нелинейность характеристик материала и справедливая при неограниченных деформациях и перемещениях. Так же, как и выше (см. гл. 9.3 и 9.4), в качестве координатной поверхности оболочки принимается поверхность, определяемая линиями главных кривизн α и β , коэффициентами A и B Ляме и главными радиусами R_1 и R_2 кривизны. Составляющие вектора полного перемещения точки поверхности на касательные к линиям α и β - u и v на нормаль w . Обозначим: вектор перемещений $\{u\} = \{u \ v \ w\}^T$, длину дуги на недеформированной поверхности вдоль линии α $ds_1 = A d\alpha$, на деформированной $ds_1^* = A^* d\alpha$, а вдоль линии β соответственно $ds_2 = B d\beta$ и $ds_2^* = B^* d\beta$. Если принять в качестве меры деформации меру Коши-Грина, то

$$\varepsilon_1^* = \frac{1}{2} \left(\frac{ds_1^{*2}}{ds_1^2} - 1 \right); \quad \varepsilon_2^* = \frac{1}{2} \left(\frac{ds_2^{*2}}{ds_2^2} - 1 \right);$$

$$\omega^* = \omega \frac{ds_1^* ds_2^*}{ds_1 ds_2}, \quad (9.9.1)$$

где ω - косинус угла между касательными к линиям α и β на деформированной поверхности.

Составляющие тензора Коши-Грина выражаются через перемещения следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^* &= \varepsilon_1 + 0,5 \left(\varepsilon_1^2 + \gamma_1^2 + \Theta_1^2 \right); \\ \varepsilon_2^* &= \varepsilon_2 + 0,5 \left(\varepsilon_2^2 + \gamma_2^2 + \Theta_2^2 \right); \\ \omega^* &= \gamma_1 + \gamma_2 + \varepsilon_1 \gamma_2 + \varepsilon_2 \gamma_1 + \Theta_1 \Theta_2. \end{aligned} \quad (9.9.2)$$

В теории больших деформаций используются также степени удлинения или кратности λ_1 , λ_2 , связанные с ε_1^* , ε_2^* соотношениями:

$$\lambda_1 = \sqrt{1 + 2\varepsilon_1^*}; \lambda_2 = \sqrt{1 + 2\varepsilon_2^*}; \quad (9.9.3)$$

Составим из $\varepsilon_1, \gamma_1, \Theta_1, \varepsilon_2, \gamma_2, \Theta_2$, векторы

$$\{\varepsilon_1\} = \{\varepsilon_1 \gamma_1 - \Theta_1\}^T; \{\varepsilon_2\} = \{\gamma_2 \varepsilon_2 - \Theta_2\}^T. \quad (9.9.4)$$

Они связаны с вектором перемещений $\{u\}$ соотношениями

$$\{\varepsilon_1\} = [B_1]\{u\}; \{\varepsilon_2\} = [B_2]\{u\}. \quad (9.9.5)$$

Матрицы $[B_1]$ и $[B_2]$ имеют размер 3×3 :

$$[B_1] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{A\partial\alpha} & \frac{\partial A}{AB\partial\beta} & \frac{1}{R_1} \\ \frac{\partial A}{AB\partial\beta} & \frac{\partial}{A\partial\alpha} & 0 \\ \frac{1}{R_1} & 0 & \frac{\partial}{A\partial\alpha} \end{bmatrix};$$

$$[B_2] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{B\partial\beta} & -\frac{\partial B}{AB\partial\alpha} & 0 \\ \frac{\partial B}{AB\partial\alpha} & \frac{\partial}{B\partial\beta} & \frac{1}{R_2} \\ 0 & -\frac{1}{R_2} & \frac{\partial}{B\partial\beta} \end{bmatrix}. \quad (9.9.6)$$

Представим себе элемент деформированной поверхности оболочки, по граням которого вдоль линий α и β действуют силы T_1, T_2, S . Условие равновесия элемента согласно принципу возможных перемещений

$$\delta U - \delta A = 0. \quad (9.9.7)$$

Приращение работы внутренних сил на возможных перемещениях

$$\delta U = \iint (T_1^* \delta\varepsilon_1^* + T_2^* \delta\varepsilon_2^* + S\delta\omega^*) ABd\alpha d\beta. \quad (9.9.8)$$

Обобщенные силы T_1^* и T_2^* связаны с истинными силами T_1, T_2 соотношениями

$$T_1^* = T_1 \sqrt{\frac{1 + 2\varepsilon_2^*}{1 + 2\varepsilon_1^*}}; T_2^* = T_2 \sqrt{\frac{1 + 2\varepsilon_1^*}{1 + 2\varepsilon_2^*}}. \quad (9.9.9)$$

Истинные и обобщенные силы S сдвига равны между собой.

Приращение работы поверхностных и краевых сил, действующих на оболочку,

$$\delta A = \iint (f_1^* \delta u + f_2^* \delta v + f_3^* \delta w) ABd\alpha d\beta + \delta A_1, \quad (9.9.10)$$

где f_1^*, f_2^*, f_3^* - проекции распределенной нагрузки на касательные к линиям α и β и на нормаль к недеформированной поверхности оболочки, отнесенные к площади ее элемента $ABd\alpha d\beta$; $\delta u, \delta v, \delta w$ - составляющие вектора возможных перемещений.

Второе слагаемое в (9.9.10) - приращение работы краевых сил оболочки. Для края, совпадающего с линией β , приращение работы

$$\delta A_1 = \int (T_1^0 \delta u + S^0 \delta v + Q^0 \delta w) B d\beta.$$

Составляющие поверхностной нагрузки в (9.9.10) связаны с соответствующими значениями f_1, f_2, f_3 , отнесенными к деформированному элементу, площадь которого

$AB\lambda_1\lambda_2\sqrt{1 - \omega^2}$, соотношением

$$\{f^*\} = \lambda_1\lambda_2\sqrt{1 - \omega^2} \{f\},$$

где $\{f^*\} = \{f_1^* f_2^* f_3^*\}^T$; $\{f\} = \{f_1 f_2 f_3\}^T$.

Применение формул Остроградского-Гаусса для криволинейных координат позволяет из (9.9.2), (9.9.5) и (9.9.8) получить уравнения равновесия и естественные граничные условия. Скалярная форма уравнений равновесия для осей, совпадающих с проекциями возможных перемещений $\delta u, \delta v, \delta w$:

$$\begin{aligned} & - \left[\frac{\partial}{\partial\alpha} (T_1^* B) + \frac{\partial}{\partial\beta} (SA) \right] (1 + \varepsilon_1) - \left[\frac{\partial}{\partial\beta} (T_2^* A) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial\alpha} (SB) \right] \gamma_2 + T_1^* \left[\frac{AB}{R_1} \Theta_1 - \frac{\partial A}{\partial\beta} \gamma_1 - B \frac{\partial\varepsilon_1}{\partial\alpha} \right] + \\ & + T_2^* \left[\frac{\partial B}{\partial\alpha} (1 + \varepsilon_2) - A \frac{\partial\gamma_2}{\partial\beta} \right] + S \left[\frac{\partial B}{\partial\alpha} \gamma_1 - \right. \\ & \left. - \frac{\partial A}{\partial\beta} (1 + \varepsilon_2) + \frac{AB}{R_1} \Theta_2 - B \frac{\partial\gamma_2}{\partial\alpha} - A \frac{\partial\varepsilon_1}{\partial\beta} \right] = \\ & = f_1^* AB; \end{aligned} \quad (9.9.11)$$

$$\begin{aligned}
& - \left[\frac{\partial}{\partial \beta} (T_2^* A) + \frac{\partial}{\partial \alpha} (SB) \right] (1 + \varepsilon_2) - \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} (T_1^* B) + \right. \\
& \left. + \frac{\partial}{\partial \beta} (SA) \right] \gamma_1 + T_2^* \left[\frac{AB}{R_2} \Theta_2 - \frac{\partial B}{\partial \alpha} \gamma_2 - A \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial \beta} \right] + \\
& + T_1^* \left[\frac{\partial A}{\partial \beta} (1 + \varepsilon_1) - B \frac{\partial \gamma_1}{\partial \alpha} \right] + S \left[\frac{\partial A}{\partial \beta} \gamma_2 - \right. \\
& \left. - \frac{\partial B}{\partial \alpha} (1 + \varepsilon_1) + \frac{AB}{R_2} \Theta_1 - A \frac{\partial \gamma_1}{\partial \beta} - B \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial \alpha} \right] = \\
& = f_2^* AB; \quad (9.9.12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} (T_1^* B) + \frac{\partial}{\partial \beta} (SA) \right] \Theta_1 + \left[\frac{\partial}{\partial \beta} (T_2^* A) + \right. \\
& \left. + \frac{\partial}{\partial \alpha} (SB) \right] \Theta_2 + T_1^* \left[\frac{AB}{R_1} (1 + \varepsilon_1) + B \frac{\partial \Theta_1}{\partial \alpha} \right] + \\
& + T_2^* \left[\frac{AB}{R_2} (1 + \varepsilon_2) + A \frac{\partial \Theta_2}{\partial \beta} \right] + S \left[\frac{AB}{R_1} \gamma_2 + \right. \\
& \left. + \frac{AB}{R_2} \gamma_1 + B \frac{\partial \Theta_2}{\partial \alpha} + A \frac{\partial \Theta_1}{\partial \beta} \right] = f_3^* AB. \quad (9.9.13)
\end{aligned}$$

Приведенные уравнения соответствуют деформированному состоянию оболочки. Если не учитывать изменение геометрии, то они превращаются в уравнения безмоментной теории в ортогональных криволинейных координатах. Другая форма уравнений соответствует касательным к линиям α и β и нормальному к деформированной поверхности направлениям:

$$\begin{aligned}
& - \frac{\partial}{\partial \alpha} (T_1^* B^*) - \frac{\partial}{\partial \beta} (SA^*) - T_1 \frac{\omega}{1 - \omega^2} \left[\frac{\partial A^*}{\partial \beta} - \right. \\
& \left. - \frac{\partial}{\partial \alpha} (B^* \omega) \right] + T_2 \frac{1}{1 - \omega^2} \left[\frac{\partial B^*}{\partial \alpha} - \frac{\partial}{\partial \beta} (A^* \omega) \right] + \\
& + S \frac{1}{1 - \omega^2} \left[2\omega \frac{\partial B^*}{\partial \alpha} - (1 + \omega^2) \frac{\partial A^*}{\partial \beta} \right] = \\
& = p_1 A^* B^* \sqrt{1 - \omega^2}; \quad (9.9.14)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\partial}{\partial \beta} (T_2^* A^*) - \frac{\partial}{\partial \alpha} (SB^*) - T_2 \frac{\omega}{1 - \omega^2} \left[\frac{\partial B^*}{\partial \alpha} - \right. \\
& \left. - \frac{\partial}{\partial \beta} (A^* \omega) \right] + T_1 \frac{1}{1 - \omega^2} \left[\frac{\partial A^*}{\partial \beta} - \frac{\partial}{\partial \alpha} (B^* \omega) \right] + \\
& + S \frac{1}{1 - \omega^2} \left[2\omega \frac{\partial A^*}{\partial \beta} - (1 + \omega^2) \frac{\partial B^*}{\partial \alpha} \right] = \\
& = p_2 A^* B^* \sqrt{1 - \omega^2}; \quad (9.9.15) \\
& \frac{T_1^*}{R_1^*} + \frac{T_2^*}{R_2^*} + \frac{2S}{R_{12}^*} = p_3 \sqrt{1 - \omega^2}, \quad (9.9.16)
\end{aligned}$$

где R_1^* и R_2^* - радиусы кривизны нормальных сечений линий α и β ; R_{12}^* - крутка деформированной поверхности.

Уравнения (9.9.14) - (9.9.16) аналогичны соотношениям безмоментной теории в косоугольной системе координат. Однако следует иметь в виду, что они соответствуют деформированной оболочке, геометрия которой в большинстве задач заранее неизвестна.

9.9.2. НЕЛИНЕЙНО-УПРУГИЕ МАТЕРИАЛЫ

При больших деформациях мягких оболочек рассматриваются различные нелинейно-упругие модели материалов. Функция энергии деформации, отнесенная к единице объема недеформированного тела, определяет его упругие свойства. Она представляется как зависимость от составляющих деформаций ε_1^* , ε_2^* , ω^* или от степеней удлинений. Аналогом формы деформации линейно-упругого анизотропного тела в двухосном напряженном состоянии является квадратичная функция

$$\begin{aligned}
W = & 0,5C_{11}^* \varepsilon_1^{*2} + 0,5C_{22}^* \varepsilon_2^{*2} + 0,5C_{33}^* \varepsilon_3^{*2} + \\
& + 0,5C_{44}^* \omega^{*2} + C_{12}^* \varepsilon_1^* \varepsilon_2^* + C_{13}^* \varepsilon_1^* \varepsilon_3^* + \\
& + C_{14}^* \varepsilon_1^* \omega^* + C_{23}^* \varepsilon_2^* \varepsilon_3^* + C_{24}^* \varepsilon_2^* \omega^* + \\
& + C_{34}^* \varepsilon_3^* \omega^*. \quad (9.9.17)
\end{aligned}$$

Приведенная зависимость совпадает с формулой для линейно-упругого тела. Она распространяется на случай больших деформаций при замене составляющих тензора малых деформаций компонентами тензора Коши-Грина. В соответствии с зависимостью (9.9.7)

при необходимости существования полного дифференциала обобщенные силы в оболочке

$$T_1^* = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_1^*}; T_2^* = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_2^*};$$

$$S = \frac{\partial W}{\partial \omega^*}; \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_3^*} = 0. \quad (9.9.18)$$

Последнее равенство соответствует отсутствию сил по нормали к поверхности оболочки. Дифференцированием (9.9.17) и исключением ε_3^* из полученных соотношений можно построить зависимости

$$T_1^* = C_{11}\varepsilon_1^* + C_{12}\varepsilon_2^* + C_{13}\omega^*;$$

$$T_2^* = C_{21}\varepsilon_1^* + C_{22}\varepsilon_2^* + C_{23}\omega^*;$$

$$S = C_{31}\varepsilon_1^* + C_{32}\varepsilon_2^* + C_{33}\omega^*.$$

Эти соотношения распространяются на случай больших деформаций и применяются при расчете оболочек из тканевых материалов. Они могут быть выражены через степени удлинения и косинус угла между координатными линиями на поверхности после деформации. Имея в виду, что $\varepsilon_1^* = 0,5(\lambda_1^2 - 1)$; $\varepsilon_2^* = 0,5(\lambda_2^2 - 1)$, $\omega^* = \lambda_1\lambda_2\omega$ а также зависимости для обобщенных сил (9.9.9), получаем

$$T_1 = C_{11}0,5\frac{\lambda_1}{\lambda_2}(\lambda_1^2 - 1) + C_{12}0,5\frac{\lambda_1}{\lambda_2}(\lambda_2^2 - 1) + C_{13}\lambda_1^2\omega;$$

$$T_2 = C_{21}0,5\frac{\lambda_2}{\lambda_1}(\lambda_1^2 - 1) + C_{22}0,5\frac{\lambda_2}{\lambda_1}(\lambda_2^2 - 1) + C_{23}\lambda_2^2\omega;$$

$$S = C_{31}0,5\frac{\lambda_1}{\lambda_2}(\lambda_1^2 - 1) + C_{32}0,5\frac{\lambda_1}{\lambda_2}(\lambda_2^2 - 1) + C_{33}\lambda_1\lambda_2\omega. \quad (9.9.20)$$

Истинные силы связаны со степенями удлинения нелинейными соотношениями. Коэффициенты $C_{12}=C_{21}$, $C_{13}=C_{31}$, $C_{23}=C_{32}$.

Когда деформации малы $\lambda_1=1+\varepsilon_1$; $\lambda_2=1+\varepsilon_2$; $\omega=\gamma$, соотношения (9.9.20) упрощаются и в линейном приближении становятся такими же, как в линейно-упругом анизотропном теле:

$$T_1 = C_{11}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2 + C_{13}\gamma;$$

$$T_2 = C_{21}\varepsilon_1 + C_{22}\varepsilon_2 + C_{23}\gamma; \quad (9.9.21)$$

$$S = C_{31}\varepsilon_1 + C_{32}\varepsilon_2 + C_{33}\gamma.$$

Изотропные нелинейно-упругие тела описываются различными соотношениями. Большую группу материалов составляют гиперупругие изотропные среды. Для них функция энергии деформации представляется обычно как зависимость от инвариантов деформаций. Для плоской задачи инварианты можно выразить через компоненты деформаций следующим образом:

$$I_1 = 2(\varepsilon_1^* + \varepsilon_2^* + \varepsilon_3^*) + 3;$$

$$I_2 = 4(\varepsilon_1^*\varepsilon_2^* + \varepsilon_2^*\varepsilon_3^* + \varepsilon_3^*\varepsilon_1^* - \frac{1}{4}\omega^{*2}) + 3;$$

$$I_3 = 2(\varepsilon_1^*\varepsilon_2^*\varepsilon_3^* + \varepsilon_2^*\varepsilon_3^*\varepsilon_1^* + \varepsilon_3^*\varepsilon_1^*\varepsilon_2^* - \frac{1}{4}\omega^{*2}\varepsilon_3^*) + 1. \quad (9.9.22)$$

Функция энергии деформации изотропного упругого тела представляется в виде полинома по степеням инвариантов

$$W = \sum_m \sum_n \sum_p C_{mnp} (I_1 - 1)^m (I_2 - 3)^n (I_3 - 1)^p.$$

Простейший вид этой зависимости соответствует случаю, когда $m=1$, $n=1$, $p=1$:

$$W = C_{100}(I_1 - 3) + C_{010}(I_2 - 3) + C_{001}(I_3 - 1).$$

Постоянные коэффициенты этой функции определяются экспериментально. Многие гиперупругие тела незначительно изменяют свой объем при деформировании. Условие постоянства объема для мягкой оболочки

$$\lambda_2\lambda_2\lambda_3\sqrt{1-\omega^2} - 1 = 0. \text{ Эту же зависимость можно представить следующим образом: } (1 + 2\varepsilon_1^*)(1 + 2\varepsilon_2^*)(1 + 2\varepsilon_3^*) - \omega^{*2} - 1 = 0. \text{ Со-}$$

гласно этому условию $I_3=1$, а упругая энергия W является функцией только первых двух инвариантов:

$$W = W(I_1, I_2). \quad (9.9.23)$$

Наиболее простая форма упругой энергии соответствует зависимости, предложенной Треоларом, для так называемого неогуковского тела:

$$W = C(I_1 - 3). \quad (9.9.24)$$

Она применяется для описания некоторых видов резин с органическими наполнителями. Рассмотрим соотношения между силами и деформациями для несжимаемого тела в плоском напряженном состоянии. Упругая энергия (9.9.24) выражается через составляющие деформации с помощью (9.9.22):

$$W = 2C(\varepsilon_1^* + \varepsilon_2^* + \varepsilon_3^*)$$

или через степени удлинения

$$W = C(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3).$$

Для несжимаемого тела упругая энергия

$$W = C \left[2\varepsilon_1^* + 2\varepsilon_2^* + \frac{1}{(1+2\varepsilon_1^*)(1+2\varepsilon_2^*) - \omega^{*2}} - 1 \right],$$

или

$$W = C \left[\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2 (1 - \omega^2)} - 3 \right].$$

Обобщенные силы можно найти, воспользовавшись зависимостями (9.9.18):

$$T_1^* = 2C \left\{ 1 - \frac{1+2\varepsilon_2^*}{\left[(1+2\varepsilon_1^*)(1+2\varepsilon_2^*) - \omega^{*2} \right]^2} \right\};$$

$$T_2^* = 2C \left\{ 1 - \frac{1+2\varepsilon_1^*}{\left[(1+2\varepsilon_1^*)(1+2\varepsilon_2^*) - \omega^{*2} \right]^2} \right\};$$

$$S = 2C \frac{\omega^*}{\left[(1+2\varepsilon_1^*)(1+2\varepsilon_2^*) - \omega^{*2} \right]^2}. \quad (9.9.25)$$

Константа C соответствует половине модуля упругости второго рода при малых деформациях. Из этих уравнений следуют соотношения между истинными усилиями и степенями удлинения:

$$T_1 = 2C \left[\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1^3 \lambda_2^3 (1 - \omega^2)^2} \right];$$

$$T_2 = 2C \left[\frac{\lambda_2}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_1^3 \lambda_2^3 (1 - \omega^2)^2} \right]; \quad (9.9.26)$$

$$S = 2C \frac{\omega}{\lambda_1^3 \lambda_2^3 (1 - \omega^2)^2}.$$

Для описания нелинейного поведения мягких материалов применяют ряд других зависимостей для W . Широко известна, например, модель Муни $W=C_1(I_1-3)+C_2(I_2-3)$. Ривлин и Сандерс предложили более общую форму функции энергии деформации $W=C_1(I_1-3)+F(I_2-3)$. Последнее слагаемое может отличаться для различных видов материалов, например, как кубический полином от второго инварианта. Тогда

$$W=C_1(I_1-3)+C_2(I_2-3)+C_3(I_1-3)^2+C_4(I_2-3)^3.$$

Существуют формы упругой энергии в виде полинома от первого инварианта. Так, В. Л. Бидерманом предложена зависимость

$$W=C_1(I_1-3)+B_1(I_1-3)^2+B_2(I_1-3)^3+C_2(I_2-3).$$

Во всегда выражения для W имеют вид полинома. Известны зависимости Харт-Смита, Александра и ряд других, представляемых через другие функции от инвариантов деформаций.

9.9.3. ОДНООСНЫЕ ОБЛАСТИ

Одна из важных особенностей мягких оболочек состоит в том, что отдельные ее зоны могут находиться в одноосном напряженном состоянии. Оболочка не воспринимает сил сжатия, а там, где они возникают, появляются складки. Считается, что в этой зоне существует

некоторая гладкая поверхность, образованная системой нитей, которые ориентированы вдоль главной растягивающей силы. В перпендикулярном к нему направлении силы считаются равными нулю.

При проведении расчетов не удается заранее установить размеры зоны, в которой имеет место одноосное напряженное состояние. В большинстве случаев это делается при решении совместной задачи, когда рассматриваются одно- и двухосная зоны оболочки, а граница определяется как искомая система неизвестных параметров.

Условия образования одноосных участков оболочки находят следующим образом. На рис. 9.9.1 показан элемент деформированной поверхности оболочки. Вдоль граней, направленных по линиям α и β , действуют силы T_1 , S и T_2 , S . Приложим к третьей стороне силы X и Y , чтобы вектор X совпал с линией α , а Y был перпендикулярен к нему. Нормаль n к этой стороне треугольника составляет с касательной к α угол γ . Сумма сил на направления векторов X и Y

$$\begin{aligned}
 X \sin \chi &= T_1 \cos \gamma + T_2 \cos \chi \cos \gamma \sin \chi (\operatorname{tg} \gamma + \\
 &+ \operatorname{ctg} \chi) + S \cos \gamma \sin \chi (2 \operatorname{ctg} \chi + \operatorname{tg} \gamma); \\
 Y &= S \cos \gamma + T_2 \sin \chi \cos \gamma (\operatorname{ctg} \chi + \operatorname{tg} \gamma).
 \end{aligned}
 \tag{9.9.27}$$

Найдем углы γ , при которых касательные составляющие сил вдоль линии ab отсутствуют. Если обозначить нормальную составляющую N , то

$$X = N \cos \gamma; \quad Y = N \sin \gamma. \tag{9.9.28}$$

Подстановкой (9.9.28) в (9.9.27) и исключением тригонометрических функций, содержащих угол γ , получено квадратное уравнение относительно N , корни которого

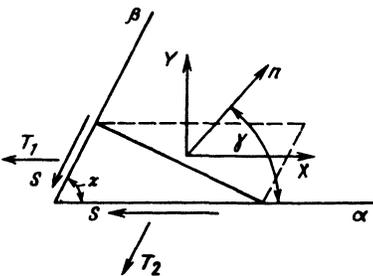


Рис. 9.9.1. Элемент деформированной поверхности мягкой оболочки

$$\begin{aligned}
 N_{1,2} &= \frac{1}{2 \sin \chi} (T_1 + T_2 + 2S \cos \chi) \pm \\
 &\pm \sqrt{\frac{1}{4} (T_1 + T_2 + 2S \cos \chi)^2 - \frac{1}{\sin^2 \chi} (T_1 T_2 - S^2)}.
 \end{aligned}
 \tag{9.9.29}$$

Знак плюс соответствует большей главной силе. При возникновении одноосных участков меньшая главная сила должна быть равна нулю. Это возможно, когда второе слагаемое под радикалом равно нулю. Отсюда следует условие появления одноосных участков

$$T_1 T_2 - S^2 = 0. \tag{9.9.30}$$

Если левая часть уравнения больше нуля, то наименьшее значение силы N положительно и одноосные участки в оболочке отсутствуют. Условие (9.9.30) справедливо не только для истинных сил, но и для обобщенных:

$$T_1^* T_2^* - S^2 = 0. \tag{9.9.31}$$

Направление наибольшей силы N_1 может быть определено из системы (9.9.27). Если $N=N_2=0$, то угол γ находится из соотношения

$$\operatorname{tg} \gamma = - \frac{S + T_2 \omega}{T_2 \sqrt{1 - \omega^2}}, \tag{9.9.32}$$

где $\omega = \cos \chi$.

Растягивающая сила в одноосной области определяется из уравнения (9.9.29):

$$N = \frac{1}{\sqrt{1 - \omega^2}} (T_1 + T_2 + 2\omega S). \tag{9.9.33}$$

Приведенные соотношения относятся к оболочкам самого общего вида. После решения задачи определения напряженно-деформированного состояния оболочки в каждой ее точке необходимо выяснить, удовлетворяется ли условие (9.9.30). Если левая часть уравнения меньше нуля, то задачу нужно решать снова. При этом сила сдвига и наименьшая сила в повернутой системе равны нулю, а сила вдоль другого главного направления определяется из уравнения (9.9.33).

9.9.4. ПЛОСКИЕ МЕМБРАНЫ

Рассмотренные выше общие уравнения больших деформаций мягких оболочек упрощаются, если их применить к плоским мембранам. Для прямоугольной системы координат с переменными x и y следует принять $\alpha = x$,

$\beta = \gamma$. Коэффициенты Ламе: $A=1$, $B=1$, а кривизны оболочки в недеформированном состоянии приравняются нулю ($1/R_1=0$, $1/R_2=0$). Тогда $A d\alpha = dx$, $B d\beta = dy$. Для любых деформаций и перемещений справедливы геометрические соотношения (9.9.2), в которых компоненты

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \gamma_1 = \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \Theta_1 = -\frac{\partial w}{\partial x}; \\ \epsilon_2 &= \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \gamma_2 = \frac{\partial u}{\partial y}; \quad \Theta_2 = -\frac{\partial w}{\partial y}. \end{aligned} \quad (9.9.34)$$

Поверхностные составляющие внешних сил, отнесенные к площади недеформированного элемента поверхности и направленные вдоль осей, касательных к линиям α и β и по нормали к поверхности, обозначены f_1^* , f_2^* , f_3^* . Их можно выразить через силы, действующие на мембрану в деформированном состоянии. Если мембрана нагружена только давлением p_3 , нормальным к деформированной поверхности,

$$\begin{aligned} f_1^* &= p_3 \left(-\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right); \\ f_2^* &= p_3 \left(-\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} \right); \\ f_3^* &= p_3 \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (9.9.35)$$

Уравнения равновесия мембраны получаются из общих соотношений (9.9.11) - (9.9.13). Для системы координат, совпадающей с недеформированной поверхностью,

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1^*}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(T_1^* \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T_2^* \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left(S \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(S \frac{\partial u}{\partial x} \right) &= -f_1^*; \\ \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial T_2^*}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(T_2^* \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(T_1^* \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left(S \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(S \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= -f_2^*; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(T_1^* \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T_2^* \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(S \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left(S \frac{\partial w}{\partial y} \right) &= -f_3^*. \end{aligned} \quad (9.9.36)$$

Приведенные уравнения учитывают все составляющие сил на оси недеформированной поверхности и получены без каких-либо упрощений.

Вариант уравнений равновесия мембраны может быть получен из соотношений (9.9.14) - (9.9.16), которые соответствуют осям деформированной поверхности оболочки:

$$\begin{aligned} -\left(1 - \omega^2\right) \frac{\partial}{\partial x} \left(T_1 \lambda_2 \right) - \left(1 - \omega^2\right) \frac{\partial}{\partial y} \left(S \lambda_1 \right) + \\ + T_1 \omega \left[-\frac{\partial \lambda_1}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_2 \omega \right) \right] + \\ + T_2 \left[\frac{\partial \lambda_2}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_1 \omega \right) \right] + \\ + S \left[2\omega \frac{\partial \lambda_2}{\partial x} - \left(1 + \omega^2\right) \frac{\partial \lambda_1}{\partial y} \right] = \\ = p_1 \lambda_1 \lambda_2 \sqrt{\left(1 - \omega^2\right)^3}; \\ -\left(1 - \omega^2\right) \frac{\partial}{\partial y} \left(T_2 \lambda_1 \right) - \left(1 - \omega^2\right) \frac{\partial}{\partial x} \left(S \lambda_2 \right) + \\ + T_2 \omega \left[-\frac{\partial \lambda_2}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_1 \omega \right) \right] + \\ + T_1 \left[\frac{\partial \lambda_1}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_2 \omega \right) \right] + \\ + S \left[2\omega \frac{\partial \lambda_1}{\partial y} - \left(1 + \omega^2\right) \frac{\partial \lambda_2}{\partial x} \right] = \\ = p_2 \lambda_1 \lambda_2 \sqrt{\left(1 - \omega^2\right)^3}; \\ \frac{T_1}{R_1^*} + \frac{T_2}{R_2^*} + \frac{2S}{R_{12}^*} = p_3 \sqrt{1 - \omega^2}, \end{aligned} \quad (9.9.37)$$

где λ_1 и λ_2 - степени удлинения вдоль осей x и y соответственно; ω - косинус угла между осями x и y после деформации.

Радиусы кривизны R_1^*, R_2^*, R_{12}^* определяются из следующих формул:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_1^*} &= \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2 \sqrt{1-\omega^2}} \left\{ [-\Theta_1(1+\varepsilon_2) + \right. \\ &+ \gamma_1 \Theta_2] \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1+\varepsilon_1}{\lambda_1} \right) + [-\Theta_2(1+\varepsilon_1) + \\ &+ \gamma_2 \Theta_1] \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\gamma_1}{\lambda_1} \right) + [(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2) - \\ &\left. - \gamma_1 \gamma_2] \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\Theta_1}{\lambda_1} \right) \right\}; \\ \frac{1}{R_{12}^*} &= \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2 \sqrt{1-\omega^2}} \left\{ [-\Theta_1(1+\varepsilon_2) + \right. \\ &+ \gamma_1 \Theta_2] \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\gamma_2}{\lambda_2} \right) + [-\Theta_2(1+\varepsilon_1) + \\ &+ \gamma_2 \Theta_1] \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1+\varepsilon_2}{\lambda_2} \right) + [(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2) - \\ &\left. - \gamma_1 \gamma_2] \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\Theta_2}{\lambda_2} \right) \right\}. \end{aligned} \tag{9.9.38}$$

Зависимости для $1/R_2^*$ и $1/R_{21}^*$ могут быть найдены после замены индексов 1 на 2, 2 на 1 и x на y в приведенных соотношениях. В уравнениях равновесия (9.9.36) силы обобщенные, а в (9.9.37) истинные. Связь между ними дана выше. Силы с составляющими деформаций или степенями удлинения должны быть связаны соотношениями упругости. Вместе с ними уравнения равновесия и геометрические соотношения в форме (9.9.2) или в другом варианте, где деформации представлены через $\lambda_1, \lambda_2, \omega$, составляют полную систему зависимостей для мембраны в прямоугольной системе координат.

Решение уравнений мембраны в такой форме весьма трудоемко. В расчетах используют соотношения, соответствующие малым

деформациям. При этом полагается: линейные составляющие деформаций существенно меньше единицы; при малых деформациях относительные удлинения равны правым частям формул (9.9.2), а истинные силы - обобщенным; принимается также условие малости касательных перемещений и их производных по сравнению с нормальным перемещением w . Уравнения, связывающие деформации с перемещениями,

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^* &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2; \quad \varepsilon_2^* = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2; \\ \omega^* &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}. \end{aligned} \tag{9.9.39}$$

Условие равновесия, соответствующее принципу возможных перемещений, при нагружении нормальными к деформированной поверхности силами

$$\begin{aligned} &\iint (T_1 \delta \varepsilon_1^* + T_2 \delta \varepsilon_2^* + S \delta \omega^*) dx dy + \\ &+ \iint p_3 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \delta u + \frac{\partial w}{\partial y} \delta v + \delta w \right) dx dy. \end{aligned} \tag{9.9.40}$$

Уравнения равновесия, которые могут быть получены из (9.9.40) после подстановки (9.9.39) и интегрирования по частям,

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} &= p_3 \frac{\partial w}{\partial x}; \quad \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial T_2}{\partial y} = p_3 \frac{\partial w}{\partial y}; \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(T_1 \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(S \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(S \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left(T_2 \frac{\partial w}{\partial y} \right) = -p_3. \end{aligned} \tag{9.9.41}$$

Последнее уравнение с использованием первых двух можно заменить зависимостью

$$\begin{aligned} T_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2S \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + T_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= \\ = -p_3 \left[1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right]. \end{aligned} \tag{9.9.42}$$

К полученным уравнениям необходимо добавить физические соотношения, связыва-

ющие усилия T_1, T_2, S с составляющими деформации $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \omega$. Следует отметить, что рассмотренная следящая поверхностная нагрузка p_3 определяет правую часть уравнений (9.9.41), (9.9.42). Если нагрузка при деформировании мембраны сохраняет первоначальное направление, то первые два уравнения (9.9.41) однородны, а правая часть (9.9.42) равна p_3 .

9.9.5. ТЕХНИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ МЯГКИХ ОБОЛОЧЕК

Техническая теория справедлива при малых деформациях и основывается на линеаризованных соотношениях. Используется метод расчленения напряженно-деформированного состояния на основное и дополнительное. Наиболее простое основное состояние корректируется дополнительным на отдельных участках оболочки.

При построении технической теории мягких оболочек все силы и параметры, характеризующие геометрию деформированного состояния оболочки, представляют в виде суммы компонент основного состояния и дополнительных слагаемых. Геометрия оболочки в основном состоянии считается известной. В качестве такой геометрии может быть принята начальная (раскройная) форма оболочки или некоторая промежуточная, близкая к окончательной и определенная при упрощенном нагружении или при более простых граничных условиях (например, без учета стеснения перемещений). Силы в основном состоянии находят для заданной геометрии по линейной безмоментной теории.

Линеаризованная относительно основного состояния система уравнений соответствует дополнительному состоянию. В соответствии с условием разделения сил

$$T_1 = T_{10} + \bar{T}_1; \quad T_2 = T_{20} + \bar{T}_2; \quad S = S_0 + \bar{S}. \quad (9.9.43)$$

Первые слагаемые отнесены к форме основного состояния и считается, что они получаются из уравнений равновесия безмоментной теории оболочек при поверхностных нагрузках f_{10}, f_{20}, f_{30} . Полные составляющие поверхностных сил также разделяются на две части:

$$f_1 = f_{10} + \bar{f}_1; \quad f_2 = f_{20} + \bar{f}_2; \quad f_3 = f_{30} + \bar{f}_3. \quad (9.9.44)$$

Разделение внешней нагрузки проводится так, чтобы первые слагаемые описывались плавно изменяющимися функциями.

Рассмотрим условие равновесия элемента оболочки (9.9.7). Приращение работы внутренних сил на возможных перемещениях в виде трех слагаемых

$$\delta U = \delta U_0 + \delta U_1 + \delta U_2. \quad (9.9.45)$$

Слагаемое δU_0 соответствует основному состоянию:

$$\delta U_0 = \iint (T_{10}\delta\varepsilon_1 + T_{20}\delta\varepsilon_2 + S_0\delta\gamma_1 + S_0\delta\gamma_2) ABd\alpha d\beta.$$

Выражением составляющих деформаций через перемещения с помощью уравнений Остроградского-Гаусса получены уравнения равновесия безмоментной линейной теории оболочек. Во втором слагаемом (9.9.45) учитываются только дополнительные силы, а также силы основного состояния на деформации и углы поворота, умноженные на вариации деформаций:

$$\begin{aligned} \delta U_1 = & \iint \left[(\bar{T}_1\delta\varepsilon_1 + \bar{T}_2\delta\varepsilon_2 + \bar{S}\delta\gamma_1 + \bar{S}\delta\gamma_2) + \right. \\ & + (T_{10}\varepsilon_2\delta\varepsilon_1 + T_{10}\gamma_1\delta\gamma_1 + T_{10}\ominus_1\delta\ominus_1 + \\ & + T_{20}\varepsilon_1\delta\varepsilon_2 + T_{20}\gamma_2\delta\gamma_2 + T_{20}\ominus_2\delta\ominus_2 + \\ & + S_0\varepsilon_1\delta\gamma_2 + S_0\gamma_2\delta\varepsilon_1 + S_0\varepsilon_2\delta\gamma_1 + \\ & + S_0\gamma_1\delta\varepsilon_2 + S_0\ominus_1\delta\ominus_2 + \\ & \left. + S_0\ominus_2\delta\ominus_1 \right] ABd\alpha d\beta. \quad (9.9.46) \end{aligned}$$

Эта составляющая работы внутренних сил в технической теории мягких оболочек занимает особое место. Она позволяет сравнительно простыми методами решить целый ряд сложных задач. В выражение δU_2 входят члены более высоких степеней, при малых значениях деформаций они незначительны и в технической теории не учитываются.

Приращение работы внешних сил на возможных перемещениях так же, как в (9.9.45), разделяется на три составляющие:

$$\delta A = \delta A_0 + \delta A_1 + \delta A_2. \quad (9.9.47)$$

В соответствии с разделением поверхностных сил

$$\delta A_0 = \iint (f_{10}\delta u + f_{20}\delta v + f_{30}\delta w) ABd\alpha d\beta. \quad (9.9.48)$$

Слагаемое δA_1 получается в результате линеаризации (9.9.10) с использованием (9.9.44):

$$\begin{aligned} \delta A_1 = & \iint \left[\bar{f}_1\delta u + \bar{f}_2\delta v + \bar{f}_3\delta w + \right. \\ & + f_{10}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\delta u + f_{20}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\delta v + \\ & \left. + f_{30}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\delta w \right] ABd\alpha d\beta. \quad (9.9.49) \end{aligned}$$

Третий член (9.9.47) соответствует нелинейным членам и не учитывается.

Уравнениями Эйлера вариационного соотношения равновесия (9.9.7) будут три следующие зависимости:

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial}{\partial \alpha}(\bar{T}_1 B) - \frac{\partial}{\partial \beta}(\bar{S} A) + \bar{T}_2 \frac{\partial B}{\partial \alpha} - S \frac{\partial A}{\partial \beta} - \\ & -\frac{\partial}{\partial \alpha}(T_{10} B \varepsilon_2) - \frac{\partial}{\partial \alpha}(S_0 B \gamma_2) + T_{20} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \varepsilon_1 + \\ & + S_0 \frac{\partial B}{\partial \alpha} \gamma_1 - T_{10} \frac{\partial A}{\partial \beta} \gamma_1 - S_0 \frac{\partial A}{\partial \beta} \varepsilon_2 - \\ & -\frac{\partial}{\partial \beta}(T_{20} A \gamma_2) - \frac{\partial}{\partial \beta}(S_0 A \varepsilon_1) + \frac{AB}{R_1} T_{10} \ominus_1 + \\ & + \frac{AB}{R_1} S_0 \ominus_2 = \bar{f}_1 AB + f_{10}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) AB; \end{aligned} \quad (9.9.50)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial}{\partial \beta}(\bar{T}_2 A) - \frac{\partial}{\partial \alpha}(\bar{S} B) + \bar{T}_1 \frac{\partial A}{\partial \beta} - S \frac{\partial B}{\partial \alpha} - \\ & -\frac{\partial}{\partial \beta}(T_{20} A \varepsilon_1) - \frac{\partial}{\partial \beta}(S_0 A \gamma_1) + T_{10} \frac{\partial A}{\partial \beta} \varepsilon_2 + \\ & + S_0 \frac{\partial A}{\partial \beta} \gamma_2 - T_{20} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \gamma_2 - S_0 \frac{\partial B}{\partial \alpha} \varepsilon_1 - \\ & -\frac{\partial}{\partial \alpha}(T_{10} B \gamma_1) - \frac{\partial}{\partial \alpha}(S_0 B \varepsilon_2) + \frac{AB}{R_2} T_{20} \ominus_2 + \\ & + \frac{AB}{R_2} S_0 \ominus_1 = \bar{f}_2 AB + f_{20}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) AB; \end{aligned} \quad (9.9.51)$$

$$\begin{aligned} & \bar{T}_1 \frac{AB}{R_1} + \bar{T}_2 \frac{AB}{R_2} + T_{10} \frac{AB}{R_1} \varepsilon_2 + T_{20} \frac{AB}{R_2} \varepsilon_1 + \\ & + S_0 \frac{AB}{R_1} \gamma_2 + S_0 \frac{AB}{R_2} \gamma_1 + \frac{\partial}{\partial \alpha}(T_{10} B \ominus_1) + \\ & + \frac{\partial}{\partial \alpha}(S_0 B \ominus_2) + \frac{\partial}{\partial \beta}(T_{20} A \ominus_2) + \frac{\partial}{\partial \beta}(S_0 A \ominus_1) = \\ & = \bar{f}_3 AB + f_{30}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) AB. \end{aligned} \quad (9.9.52)$$

Правые части уравнений можно заменить на составляющие нагрузки, соответствующие осям деформированной поверхности. При

рассмотрении только гидростатического или равномерного давления от действия газа в правых частях уравнений будут слагаемые $p_{30} \ominus_1 AB$; $p_{30} \ominus_2 AB$; $[\bar{p}_3 + p_{30}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)] AB$. Остальные слагаемые, содержащие дополнительные и основные составляющие нагрузки, равны нулю.

Уравнения равновесия (9.9.50) - (9.9.52) вместе с геометрическими соотношениями, которые для линеаризованной задачи определяются зависимостями (9.9.5), должны быть объединены с линеаризованными соотношениями между дополнительными силами и составляющими деформаций. Для анизотропной оболочки при упругой энергии (9.9.17) они имеют вид

$$\begin{aligned} \bar{T}_1 &= \bar{C}_{11} \varepsilon_1 + \bar{C}_{12} \varepsilon_2 + \bar{C}_{13} \gamma_1 + \bar{C}_{13} \gamma_2 - T_{10}; \\ \bar{T}_2 &= \bar{C}_{21} \varepsilon_1 + \bar{C}_{22} \varepsilon_2 + \bar{C}_{23} \gamma_1 + \bar{C}_{23} \gamma_2 - T_{20}; \\ \bar{S} &= \bar{C}_{31} \varepsilon_1 + \bar{C}_{32} \varepsilon_2 + \bar{C}_{33} \gamma_1 + \bar{C}_{33} \gamma_2 - S_0. \end{aligned} \quad (9.9.53)$$

Приведенные выше уравнения справедливы для оболочек произвольной геометрии. Для цилиндрической оболочки радиуса R , нагруженной внутренним давлением p и осевой силой, основное состояние определяется усилиями T_{10} и $T_{20} = pR$. Уравнение дополнительного состояния

$$-T_{10} \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{Eh}{R^2} w = p - \mu \frac{T_1}{R}, \quad (9.9.54)$$

где E - модуль упругости; μ - коэффициент Пуассона.

Прогиб, соответствующий частному решению уравнения,

$$w_0 = \frac{pR^2}{Eh} - \mu \frac{T_1 R}{Eh}.$$

Обозначим $\lambda^2 = Eh / T_{10}$, тогда решение уравнения будет следующим:

$$w = w_0 + A_1 \exp(-\lambda x / R) + A_2 \exp(-\lambda x / R).$$

Для длинной оболочки, закрепленной при $x=0$, где $w=0$, перемещение

$$w = w_0 \left[1 - \exp\left(-\lambda \frac{x}{R}\right) \right].$$

Как видно, перемещение w вблизи закрепления изменяется по экспоненте с показателем λ . Длина краевой зоны оболочки ($x=R$) приближенно может быть определена из зависимости

$$\begin{aligned} & -\frac{E}{1-2\mu}\alpha T^0, \dots; \\ \tau_{12} = & \frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{12}, \dots, \end{aligned} \quad (9.10.4)$$

где $\varepsilon = \frac{1}{3}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)$ - средняя деформация.

В теории пластинок и оболочек наиболее интересен случай плоского напряженного состояния:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 = & \frac{1}{E}(\sigma_1 - \mu\sigma_2) + \alpha T^0; \\ \varepsilon_2 = & \frac{1}{E}(\sigma_2 - \mu\sigma_1) + \alpha T^0; \quad (9.10.5) \\ \gamma_{12} = & \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{12}. \end{aligned}$$

Сопряженные уравнения

$$\begin{aligned} \sigma_1 = & \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2) - \frac{E}{1-\mu}\alpha T^0; \\ \sigma_2 = & \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_2 + \mu\varepsilon_1) - \frac{E}{1-\mu}\alpha T^0; \\ \tau_{12} = & \frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{12}. \end{aligned} \quad (9.10.6)$$

Уравнения упругости для анизотропного тела с учетом тензора температурной деформации. Для упругого анизотропного тела уравнения упругости в матричной форме

$$\{\varepsilon\} = [a]\{\sigma\} + \{\alpha T^0\}, \quad (9.10.7)$$

где $\{\varepsilon\}$ и $\{\sigma\}$ - шестимерные векторы соответственно деформаций и напряжений; $[a]$ - симметричная матрица 6×6 коэффициентов упругой податливости; $\{\alpha T^0\}$ - шестимерный вектор температурных деформаций, компоненты которого образуют тензор температурных деформаций.

Для плоского напряженного состояния в анизотропном теле, что характерно для пластин и оболочек,

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_1 \ \varepsilon_2 \ \gamma_{12}\}^T; \quad \{\sigma\} = \{\sigma_1 \ \sigma_2 \ \tau_{12}\}^T, \quad (9.10.8)$$

уравнения упругости

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \alpha_1 T^0 \\ \alpha_2 T^0 \\ \alpha_{12} T^0 \end{Bmatrix}. \quad (9.10.9)$$

В частном случае ортотропного тела (оси 1, 2 совпадают с направлениями ортотропии)

$$a_{13} = a_{31} = 0; \quad a_{23} = a_{32} = 0. \quad (9.10.10)$$

Из уравнения (9.10.9)

$$\begin{aligned} \{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \times \\ &\times \left(\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \alpha_1 T^0 \\ \alpha_2 T^0 \\ \alpha_{12} T^0 \end{Bmatrix} \right), \end{aligned} \quad (9.10.11)$$

где элементы матрицы упругих констант ;

$$\begin{aligned} A_{11} = & \frac{1}{\Delta}(a_{22}a_{33} - a_{23}^2); \\ A_{12} = A_{21} = & \frac{1}{\Delta}(a_{23}a_{32} - a_{12}a_{33}); \\ A_{13} = A_{31} = & \frac{1}{\Delta}(a_{12}a_{13} - a_{11}a_{23}); \\ A_{22} = & \frac{1}{\Delta}(a_{11}a_{33} - a_{13}^2); \\ A_{23} = A_{32} = & \frac{1}{\Delta}(a_{12}a_{13} - a_{11}a_{33}); \\ A_{33} = & \frac{1}{\Delta}(a_{11}a_{22} - a_{12}^2); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta = & a_{11}a_{22}a_{33} + 2a_{12}a_{23}a_{13} - a_{11}a_{23}^2 - \\ & - a_{22}a_{13}^2 - a_{33}a_{12}^2. \end{aligned}$$

Для ортотропного материала

$$\begin{aligned} [A] = & \frac{1}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} \times \\ & \times \begin{bmatrix} E_1 & \mu_{12}E_1 & 0 \\ \mu_{21}E_2 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \mu_{12}\mu_{21})G_{12} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Уравнения (9.10.6) и (9.10.11) используют для получения зависимостей, связывающих в теории пластин и оболочек силы, моменты и параметры деформации срединной поверхности.

Свойство температурных напряжений. Температурные напряжения в изотропных и анизотропных телах при закреплении, не препятствующем их деформации, не возникают только в том случае, если температурные деформации $\alpha_{ij}T^0$ удовлетворяют условиям совместности деформации Сен-Венана.

Для доказательства допускается, что температурные напряжения отсутствуют:

$$\{\sigma_{ij}\} = \{\sigma\} = 0. \quad (9.10.12)$$

Тогда уравнения равновесия будут удовлетворяться, а из соотношений упругости (9.10.7)

$$\{\varepsilon\} = \{\alpha T^0\}.$$

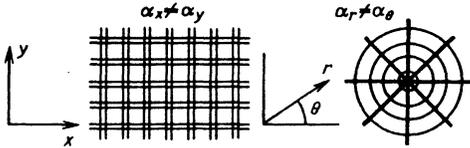


Рис. 9.10.1. Анизотропия свойств коэффициентов температурных деформаций

Решение (9.10.12) следует признать точным, если удовлетворяются уравнения совместности деформаций. В результате, если в декартовой системе координат при постоянных коэффициентах температурных деформаций $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_{12}, \dots)$ температура является линейной функцией координат, то температурные напряжения (в теле, свободном от закрепления) не возникают. Это связано с тем, что условия совместности деформаций в декартовых координатах содержат вторые производные по координатам. В других случаях, при анизотропии коэффициентов температурных деформаций, могут возникать температурные напряжения. На рис. 9.10.1 показаны два анизотропных тела, причем при постоянной температуре во втором случае возникают температурные напряжения.

Следует отметить, что при изотропии коэффициентов линейного расширения температурные напряжения в незакрепленном теле при линейном изменении температуры не возникают.

9.10.2. ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ПЛАСТИНАХ

Круглые пластины при осесимметричном температурном поле, постоянном по толщине пластины. Температурные напряжения определяются решением следующего дифференци-

ального уравнения для радиального перемещения:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{dr^2} + \varphi(r) \frac{du}{dr} + \left(\frac{\mu}{r} \varphi(r) + \frac{d}{dr} \left(\frac{\mu}{r} \right) - \frac{1}{r^2} \right) u = \\ = (1 + \mu) \varphi(r) \alpha T^0 + \frac{d}{dr} \left((1 + \mu) \alpha T^0 \right) - \\ - \frac{1 + \mu}{r} \alpha T^0, \end{aligned}$$

где $\varphi(r) = \frac{d}{dr} \left(\ln \frac{r h E}{1 - \mu^2} \right)$; h - толщина пластины.

При постоянных величинах E , μ , h радиальные и окружные температурные напряжения в круглых кольцевых пластинах (края пластинки свободны от закрепления)

$$\sigma_1 = E \left[F(b) \frac{b^2}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) - F(r) \right]; \quad (9.10.13)$$

$$\sigma_2 = E \left[F(b) \frac{b^2}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) - F(r) - \alpha T^0 \right], \quad (9.10.14)$$

где $F(r) = \frac{1}{r^2} \int_0^r r_1 \alpha T^0(r_1) dr_1$; a и b - соответственно внутренний и внешний радиус пластины.

Для пластины без центрального отверстия

$$\sigma_1 = E(F(b) - F(r)); \quad (9.10.15)$$

$$\sigma_2 = E(F(b) + F(r) - \alpha T^0). \quad (9.10.16)$$

Здесь

$$F(r) = \frac{1}{r^2} \int_0^r r_1 \alpha T^0(r_1) dr_1.$$

В центре сплошной пластины

$$F(0) = 0,5 \alpha T^0(0).$$

Круглые пластины при осесимметричном температурном поле, изменяющемся по толщине. Если температура изменяется по координате z , то возникают дополнительные температурные напряжения, вызывающие изгиб пластины. Для пластины постоянной толщины

$$\sigma_{1u} = \sigma_{2u} = \frac{E}{1-\mu} \left(z \frac{12}{h^3} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \alpha T^0 z dz - \alpha T^0 \right).$$

Температурные напряжения, вызывающие растяжение (сжатие) в пластине, определяются по формулам (9.1.13), (9.1.14) или (9.1.15), (9.1.16) для средней температурной деформации по толщине пластины

$$\langle \alpha T^0 \rangle = \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \alpha T^0(r, z) z dz.$$

Температурные напряжения в прямоугольных пластинах. Рассматриваются пластины постоянной толщины. Модуль упругости считается переменным по толщине (например, биметаллические пластины); коэффициент Пуассона принимается постоянным. Силы и моменты в сечениях пластины показаны на рис. 9.2.2. Принято, что координатная плоскость отстоит от лицевых плоскостей пластины на расстояниях δ_1 и δ_2 , причем ее положение определяется условием

$$\int_{-\delta_1}^{\delta_2} E z dz = 0. \quad (9.10.17)$$

Координата z отсчитывается от координатной плоскости. При постоянном значении E получим $\delta_1 = \delta_2 = 0,5h$. Деформации в пластине на основе гипотезы прямой нормали

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{01} \\ \varepsilon_{02} \\ \gamma_{012} \end{Bmatrix} - z \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}$$

или в краткой форме

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_0\} - z\{\varepsilon\}. \quad (9.10.18)$$

Силловые факторы

$$\{N\} = \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ S_{12} \end{Bmatrix} = \int_{-\delta_1}^{\delta_2} \{\sigma\} dz;$$

$$\{M\} = \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_{12} \end{Bmatrix} = - \int_{-\delta_1}^{\delta_2} \{\sigma\} z dz.$$

В соответствии с уравнениями (9.10.11) и (9.10.18)

$$\{N\} = [A_0]\{\varepsilon_0\} - \{N_T\};$$

$$\{M\} = [D]\{\chi\} + \{M_T\};$$

$$\text{где } [A_0] = \int_{-\delta_1}^{\delta_2} [A] dz; \quad [D] = \int_{-\delta_1}^{\delta_2} [A] z^2 dz;$$

$$\{N_T\} = \int_{-\delta_1}^{\delta_2} [A] \{\alpha T^0\} dz;$$

$$\{M_T\} = \int_{-\delta_1}^{\delta_2} [A] \{\alpha T^0\} z dz.$$

Если известны силовые факторы, то напряжения

$$\sigma_1 = E \left(\frac{T_1}{\int_{-\delta_1}^{\delta_2} E dz} - z \frac{M_1}{\int_{-\delta_1}^{\delta_2} E z^2 dz} \right) + \sigma_{ТД};$$

$$\sigma_2 = E \left(\frac{T_2}{\int_{-\delta_1}^{\delta_2} E dz} - z \frac{M_2}{\int_{-\delta_1}^{\delta_2} E z^2 dz} \right) + \sigma_{ТД};$$

$$\tau_{12} = E \left(\frac{S_{12}}{\int_{-\delta_1}^{\delta_2} E dz} - z \frac{M_{12}}{\int_{-\delta_1}^{\delta_2} E z^2 dz} \right); \quad (9.10.19)$$

где

$$\sigma_{\text{Тд}} = \frac{E}{1-\mu} \left\{ \frac{\int_{-\delta_1}^{\delta_2} E\alpha T^0 dz}{\int_{-\delta_1}^{\delta_2} Edz} + \right. \\ \left. + z \frac{\int_{-\delta_1}^{\delta_2} Ez\alpha T^0 dz}{\int_{-\delta_1}^{\delta_2} Ez^2 dz} - \alpha T^0 \right\} \quad (9.10.20)$$

Прямоугольная пластина, температура изменяется по толщине $T^0 = T^0(z)$. Внешние нагрузки на пластину отсутствуют, края пластины свободны от закрепления. Тогда силы T_1, T_2, S_{12} и моменты M_1, M_2, M_{12} отсутствуют, и из уравнений (9.10.19) следуют температурные напряжения в пластине

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{E}{1-\mu} \left\{ \frac{\int_{-\delta_1}^{\delta_2} E\alpha T^0 dz}{\int_{-\delta_1}^{\delta_2} Edz} + \right. \\ \left. + z \frac{\int_{-\delta_1}^{\delta_2} Ez\alpha T^0 dz}{\int_{-\delta_1}^{\delta_2} Ez^2 dz} - \alpha T^0 \right\} \quad (9.10.21)$$

Если температура

$$T^0(z) = \sum_{i=0}^m a_i z^i,$$

то из уравнения (9.10.21)

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{\alpha E}{1-\mu} \sum_{i=0}^m a_i \left[\frac{1}{(i+1)h} \left[\left(\frac{h}{2} \right)^{i+1} - \left(-\frac{h}{2} \right)^{i+1} \right] + z \frac{12}{(i+2)h^3} \left[\left(\frac{h}{2} \right)^{i+2} - \left(-\frac{h}{2} \right)^{i+2} \right] - \right.$$

$$\left. - \left[\left(-\frac{h}{2} \right)^{i+2} \right] - z^i \right].$$

При $i=0, i=1$ (линейное распределение температуры по координате z) температурные напряжения не возникают. При заземленных краях пластины (пластина произвольного контура, края пластины заделаны)

$$\sigma_1 = \sigma_2 = - \frac{E(z)\alpha T^0(z)}{1-\mu}.$$

Пластина остается плоской и каждый ее слой находится в условиях полного стеснения температурной деформации. Следует отметить, что в тонких пластинах при этом может наступить потеря устойчивости, если усилия

$$T_1 = T_2 = - \frac{1}{1-\mu} \int_{-\delta_1}^{\delta_2} E\alpha T^0 dz$$

окажутся равными критическим.

Прямоугольная пластина при произвольном распределении температуры $T^0(x, y, z)$. Для определения сил в плоскости пластины вводится функция напряжений $F(x, y)$, причем

$$T_1 = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}; \quad T_2 = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}; \quad S_{12} = - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad (9.10.22)$$

Тогда уравнения равновесия удовлетворяются, а из условия совместности деформаций

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{A} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) \right) + \\ + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{1}{A} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \mu \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) \right) + \\ + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{1+\mu}{A} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right) = -\nabla^2 \left(\frac{1}{A} \int_{-\delta_1}^{\delta_2} E\alpha T^0 dz \right), \quad (9.10.23)$$

где $A = \int_{-\delta_1}^{\delta_2} Edz$ - жесткость на растяжение

(единицы длины сечения); $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

Для пластины с постоянной жесткостью на растяжение уравнение (9.10.23) имеет вид

$$\nabla^4 F = -\nabla^2 \left(\frac{1}{A} \int_{-\delta_1}^{\delta_2} E\alpha T^0 dz \right), \quad (9.10.24)$$

где $\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$ - бигармонический оператор.

Краевые условия устанавливаются с помощью соотношений (9.10.22). Для определения изгибающих моментов M_1 , M_2 и крутящего M_{12} используется уравнение относительно прогибов $W(x, y)$:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right) + \\ & + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right) + \\ & + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left((1 - \mu) D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) = \\ & = \nabla^2 \left(\frac{1}{1 - \mu} \int_{-\delta_1}^{\delta_2} z E \alpha T^0 dz \right), \end{aligned} \quad (9.10.25)$$

где $D = \frac{1}{1 - \mu} \int_{-\delta_1}^{\delta_2} E z^2 dz$ - цилиндрическая жесткость.

Для пластины постоянной толщины из уравнения (9.10.25)

$$D \nabla^4 w = -\nabla^2 \left(\frac{1}{1 - \mu} \int_{-\delta_1}^{\delta_2} z E \alpha T^0 dz \right).$$

Моменты выражаются через прогибы по следующим равенствам:

$$\begin{aligned} M_1 &= D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{1 - \mu} \int_{-\delta_1}^{\delta_2} z E \alpha T^0 dz; \\ M_2 &= D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \frac{1}{1 - \mu} \int_{-\delta_1}^{\delta_2} z E \alpha T^0 dz; \end{aligned}$$

$$M_{12} = -(1 - \mu) D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Последние соотношения используются при формировании краевых условий для уравнения (9.10.25).

Метод конечных элементов. Сложные задачи определения температурных напряжений в пластинах (при резких изменениях геометрии типа надрезов, отверстий и пр.) решаются МКЭ. Следует отметить, что на той же сетке конечных элементов часто решается и задача расчета температурного поля. Рассмотрим случай, когда температура постоянна по толщине пластины, $T^0 = T^0(x, y)$, и внешние нагрузки отсутствуют.

Напряжения и деформации связаны зависимостью (9.10.11):

$$\{\sigma\} = [A] \left(\{\varepsilon\} - \{\alpha T^0\} \right).$$

Перемещения и деформации в элементе выражаются через вектор перемещения узлов $\{\Delta\}$ следующим образом:

$$\{u\} = [\Phi] \{\Delta\};$$

$$\{\varepsilon\} = [B] \{\Delta\},$$

где $[\Phi]$ - матрица функций формы, позволяющая определить упругие смещения точек элемента по заданным перемещениям его узлов:

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} [\Phi].$$

Основное уравнение МКЭ, вытекающее из вариационного уравнения Лагранжа, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{N_n} \{\delta \Delta_n\} \left(\left(\iiint_{V_n} [B_n]^T [A] [B_n] dV \right) \{\Delta_n\} - \right. \\ & \left. - \iiint_{V_n} [B_n]^T [A] [\alpha T] dV \right) = 0, \end{aligned} \quad (9.10.26)$$

где N_3 - число элементов; n - индекс элемента транспонирования.

Ввиду произвольности вариаций узловых перемещений из уравнения (9.10.26) получается система линейных алгебраических уравнений для узловых перемещений и находятся деформации и напряжения.

Применение МКЭ излагается в работах [16, 30, 36] и др.

9.10.3. ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ОБОЛОЧКАХ

Физические уравнения (соотношения упругости) для оболочек имеют такую же структуру, как и для пластин, поскольку в технической теории пластин и оболочек рассматривается плоское напряженное состояние.

Цилиндрические оболочки при осесимметричном температурном поле. Рассматривается цилиндрическая оболочка переменной толщины и с переменным модулем упругости по длине и толщине. Радиус координатной поверхности выбирается из условия (9.10.17). Дифференциальное уравнение изгиба оболочки от действия температурного поля

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(D \frac{d^2 w}{dx^2} \right) + \frac{A}{r_0^2} w = \frac{1}{r_0} \int_{-\delta_1}^{\delta_2} E \alpha T^0 dz - \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{1}{1-\mu} \int_{-\delta_1}^{\delta_2} z E \alpha T^0 dz \right). \quad (9.10.27)$$

Величины A и D даны в уравнениях (9.10.23) и (9.10.25). Если параметры A и D постоянны по длине оболочки (цилиндрическая оболочка постоянной толщины с постоянными E и μ), то уравнение (9.10.27) имеет вид

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 4\beta^4 w = \frac{E}{r_0 D} \int_{-\delta_1}^{\delta_2} \alpha T^0 dz - \frac{E}{(1-\mu)D} \int_{-\delta_1}^{\delta_2} z \alpha T^0 dz. \quad (9.10.28)$$

Здесь

$$4\beta^4 = \frac{A}{r_0^2 D}.$$

Решение уравнения (9.10.28) может быть представлено через функции Крылова [8].

Температурные напряжения в цилиндрической оболочке при осесимметричном нагреве

$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{T_1(1-\mu^2)}{A} - z \frac{M_1}{D} \right) + \sigma_{ТД};$$

$$\sigma_2 = \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{T_2(1-\mu^2)}{A} - z \frac{M_2}{D} \right) + \sigma_{ТД}$$

Величина $\sigma_{ТД}$ определяется по формуле (9.10.19). При изменении температурного поля только по толщине оболочки и свободных ее торцах $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_{ТД}$. В рассматриваемом случае температурные напряжения в пластине и тонкой оболочке совпадают.

Оболочки вращения при осесимметричном температурном поле. Точки координатной поверхности оболочки характеризуются длиной дуги s меридионального сечения. Деформации в слое

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{01} + z \varepsilon_1; \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_{02} + z \varepsilon_2,$$

где $\varepsilon_{01}, \varepsilon_{02}$ - деформации в точках координатной поверхности; ε_1 и ε_2 - изменение кривизны поверхности в результате упругой деформации. Величины

$$\varepsilon_1 = \frac{d\Theta_1}{ds}; \quad \varepsilon_2 = \frac{\Theta_1 \cos \alpha}{r},$$

где Θ_1 - угол поворота нормали.

Если принять в качестве основных неизвестных параметры Майснера $\eta(s) = R_2(s)Q(s)$ и $\Theta(s)$, то для определения температурных напряжений получена система двух дифференциальных уравнений [8]

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{R_2}{A} \frac{d\eta}{ds} \right) - \frac{d}{ds} \left(\frac{\mu \operatorname{ctg} \varphi}{A} \eta \right) + \left(\mu + \frac{R_2}{R_1} \right) \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{A} \frac{d\eta}{ds} - \frac{\operatorname{ctg}^2 \varphi}{R_2} \left(1 + \mu \frac{R_2}{R_1} \right) \frac{1}{A} \eta - \Theta_1 = \psi_{1T};$$

$$\frac{d}{ds} \left(R_2 D \frac{d\Theta_1}{ds} \sin \alpha \right) + \frac{d}{ds} (\mu D \Theta \cos \alpha) -$$

$$-\mu D \frac{d\Theta_1}{ds} \cos \alpha - D \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cos \alpha}{R_2} \Theta +$$

$$+\eta \sin \alpha = \psi_{2T}.$$

Температурные функции;

$$\psi_{1T} = -\frac{\operatorname{ctg} \alpha}{A} N_T \left(1 - \frac{R_2}{R_1} \right) (1 - \mu) +$$

$$+ \frac{d}{ds} \left(\frac{N_T R_2}{A} (1 - \mu) \right);$$

$$\psi_{2T} = \frac{d}{ds} (R_2 M_T \sin \alpha) - M_T \cos \alpha;$$

$$N_T = \frac{1}{1 - \mu} \int_{-\delta_1}^{\delta_2} E \alpha T^0 dz;$$

$$M_T = \frac{1}{1 - \mu} \int_{-\delta_1}^{\delta_2} z E \alpha T^0 dz.$$

Величины $\eta(s)$ и $\Theta_1(s)$ при определенных краевых условиях позволяют однозначно определить силы и моменты в оболочке.

Глава 9.11

РАСЧЕТ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК С УЧЕТОМ ДЕФОРМАЦИЙ ПЛАСТИЧНОСТИ И ПОЛЗУЧЕСТИ

9.11.1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ И ПОЛЗУЧЕСТИ

Для учета деформаций пластичности наибольшее распространение получили теории: деформационная Генки-Ильюшина и пластического течения Сен-Венана - Прандтля-Рейсса.

Деформационная теория пластичности. В деформационной теории упругопластических деформаций изотропного тела используются следующие шесть зависимостей между деформациями и напряжениями:

$$\varepsilon_1 - \varepsilon = \psi \frac{1 + \mu}{E} (\sigma_1 - \sigma), \dots;$$

$$0,5 \gamma_{12} = \psi \frac{1 + \mu}{E} \tau_{12}, \dots$$

(9.11.1)

Недостающие уравнения получают по правилу круговой перестановки. Средние деформации и напряжения

$$\varepsilon = \frac{1}{3} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3);$$

$$\sigma = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3).$$

В соответствии с закономерностями упругой деформации

$$\varepsilon = \frac{1 - 2\mu}{E} \sigma + \alpha T^0, \quad (9.11.2)$$

где αT^0 - температурная деформация. Параметр пластичности

$$\psi = \frac{3E}{2(1 + \mu)} \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i},$$

где $\sigma_i \varepsilon_i$ - интенсивности соответственно напряжений и деформаций.

Интенсивность напряжений для напряженного состояния: трехмерного

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \dots + 6\tau_{12}^2 + \dots};$$

двумерного

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_1 \sigma_2 + 3\tau_{12}^2}. \quad (9.11.3)$$

Интенсивность деформаций для трехмерного состояния

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + \dots + \frac{3}{2} \gamma_{12}^2 \dots} \quad (9.11.4)$$

Для двумерного напряженного состояния в (9.11.4) $\gamma_{13}=0$ и $\gamma_{23}=0$.

Интенсивности напряжений и деформаций связаны по деформационной теории единой кривой деформирования, в качестве которой можно принять кривую деформирования

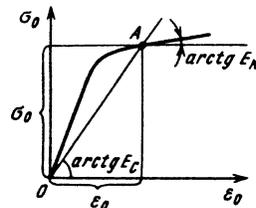


Рис. 9.11.1. Кривая деформирования материала

в опытах на растяжение гладких образцов (рис. 9.11.1).

Эквивалентные напряжения и деформации при простом растяжении

$$\sigma_0 = \sigma_i; \varepsilon_0 = \varepsilon_i + \frac{1 - 2\mu}{3} \frac{\sigma_i}{E}$$

Параметр пластичности

$$\psi = \frac{3E}{2(1+\mu)} \frac{\varepsilon_0}{\sigma_0} - \frac{1-2\mu}{2(1+\mu)} = \frac{3}{2(1+\mu)} \left(\frac{E}{E_c} - \frac{1-2\mu}{3} \right)$$

Секущий модуль

$$E_c = \sigma_0 / \varepsilon_0$$

При решении задач деформационной теории пластичности уравнения (9.11.1) и (9.11.2) образуют физические уравнения, эквивалентные уравнениям упругости.

Деформационная теория пластичности дает хорошие результаты для процессов нагружения, в которых интенсивность напряжений монотонно возрастает. Если имеются этапы разгрузки (при совместном силовом и тепловом нагружениях), то следует принять теорию пластического течения.

Теория пластического течения. Нагружение разбивается на ряд малых этапов, что позволяет учесть "историю нагружения". Рассматриваются приращения деформаций, предполагая суммирование упругой и пластической деформации:

$$d\varepsilon_i = d\varepsilon_i^e + d\varepsilon_i^p, \dots, d\gamma_{12} = d\gamma_{12}^e + d\gamma_{12}^p, \tag{9.11.5}$$

где *e* и *p* - индексы соответственно упругих и пластических деформаций.

Приращение упругих деформаций с учетом влияния температуры на параметры упругости

$$\begin{aligned} d\varepsilon_1 &= \frac{1}{E} (d\sigma_1 - \mu(d\sigma_2 + d\sigma_3)) - \\ &- \frac{1}{E^2} \frac{dE}{dT^0} (\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)) dT^0 - \\ &- \frac{1}{E} \frac{d\mu}{dT^0} (\sigma_2 + \sigma_3) dT^0 + \frac{d(\alpha T^0)}{dT^0} dT^0, \dots; \\ d\gamma_{12} &= \frac{1}{G} d\tau_{12} - \frac{1}{G^2} \frac{dG}{dT^0} \tau_{12} dT^0, \dots \tag{1,2,3} \end{aligned}$$

В общем виде, основываясь на уравнении (9.10.7),

$$\{d\varepsilon\} = [a]\{d\sigma\} + \frac{d[a]}{dT^0} \{\sigma\} dT^0 + \frac{d\{\alpha T^0\}}{dT^0} dT^0$$

Приращение пластических деформаций по неизотермической теории пластического течения

$$\begin{aligned} d\varepsilon_1^p &= F(\sigma_i, T^0) \left(d\sigma_i - \frac{\partial \sigma_T}{\partial T} dT^0 \right) (\sigma_1 - \sigma), \dots; \\ 0,5 d\gamma_{12}^p &= F(\sigma_i, T^0) \left(d\sigma_i - \frac{\partial \sigma_T}{\partial T} dT^0 \right) \tau_{12}, \dots \tag{9.11.6} \end{aligned}$$

Функция пластичности

$$F(\sigma_i, T^0) = \frac{3}{2\sigma_i} \left(\frac{1}{E_k} - \frac{1}{E} \right) \tag{9.11.7}$$

Приращение интенсивности напряжений

$$d\sigma_i = \frac{3}{2\sigma_i} ((\sigma_1 - \sigma) d\sigma_1 + \dots + 2\tau_{12} d\tau_{12} + \dots) \tag{9.11.8}$$

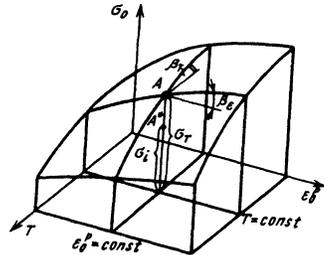


Рис. 9.11.2. Поверхность пластического деформирования, определяющая $\sigma_0 = f(\varepsilon_0^p, T^0)$ при разных температурах

Предел текучести $\sigma_T = \sigma_T(\varepsilon_0^p, T^0)$ - ордината поверхности пластического деформирования (рис. 9.11.2), соответствующая достигнутой пластической деформации ε_0^p и температуре T^0 . Поверхность образуется совокупностью кривых деформирования (испытаний образцов на растяжение при постоянной температуре). Величины σ_0 и ε_0 при сложном напряженном состоянии представляют собой

эквивалентные напряжения и пластические деформации:

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= \sigma_i; \\ \varepsilon_0^p &= \varepsilon_{i*}^p = \int d\varepsilon_{i*}^p = \\ &= \int \left(\frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_1^p - \varepsilon_2^p)^2 + \dots + \frac{2}{3} (\varepsilon_{12}^p)^2 + \dots} \right). \end{aligned}$$

Накопленная к данному моменту нагружения пластическая деформация (параметр Одквиста)

$$\varepsilon_0^p = \varepsilon_i - \sigma_i / E,$$

где ε_i - интенсивность общих (суммарных) деформаций. Касательный модуль равенства (9.11.6) при простом растяжении (см. рис. 9.11.1)

$$E_k = \left. \frac{\partial \sigma_0}{\partial \varepsilon_0} \right|_{T^0 = \text{const}}.$$

Если в данный момент нагружения процесс изображается точкой A (см. рис. 9.11.2), то при $T^0 = \text{const}$

$$d\varepsilon_0^p = \left(\frac{1}{E_k} - \frac{1}{E} \right) d\sigma_T.$$

Тангенсы углов, которые составляют касательные в точке A к линиям $T^0 = \text{const}$ и $\varepsilon_0^p = \text{const}$,

$$\beta_T = -\frac{\partial \sigma_T}{\partial T^0}; \quad \beta_\varepsilon = \frac{\partial \sigma_T}{\partial \varepsilon_0^p}.$$

Приращение пластической деформации, определяемое равенством (9.11.6), происходит только в процессе нагружения. Для этого необходимо, чтобы точка, изображающая в данный момент процесс деформирования, лежала на поверхности деформирования:

$$\sigma_i = \sigma_T(\varepsilon_0^p, T^0). \quad (9.11.9)$$

Другое необходимое условие обеспечивает, чтобы процесс не был направлен в упругую область (внутреннюю область под поверхностью деформирования):

$$d\sigma_i > \frac{\partial \sigma}{\partial T^0} dT^0. \quad (9.11.10)$$

Условия, при которых происходит разгрузка,

$$\sigma_i < \sigma_T(\varepsilon_0^p, T^0) \cup d\sigma_i < \frac{\partial \sigma_T}{\partial T^0} dT^0. \quad (9.11.11)$$

На этапе разгрузки приращение пластических деформаций отсутствует:

$$d\varepsilon_1^p = 0, \dots, d\varepsilon_{12}^p = 0, \dots \quad (9.11.12)$$

Методы переменных параметров и дополнительных деформаций для деформационной теории пластичности. По методу переменных параметров упругости уравнения (9.11.1) и (9.11.2) заменяются "обычными" уравнениями упругости

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E^*} (\sigma_1 - \mu^* (\sigma_2 + \sigma_3)) + \alpha T^0, \dots; \\ \gamma_{12} &= \frac{2(1 + \mu^*)}{E^*} \tau_{12}, \dots \end{aligned} \quad (9.11.13)$$

"Переменные" параметры упругости

$$\begin{aligned} E^* &= E_c; \\ \mu^* &= 0,5 - 0,5(1 - 2\mu) E_c / E. \end{aligned} \quad (9.11.14)$$

Решение находится методом последовательных приближений.

В первом приближении решается упругая задача:

$$E_{(1)}^* = E; \quad \mu_{(1)}^* = \mu.$$

При расчете в каждой точке тела определяется интенсивность напряжений $\sigma_{i(1)}^*$ и эквивалентная деформация

$$\varepsilon_{0(1)} = \sigma_{i(1)}^* / E. \quad (9.11.15)$$

По величине $\varepsilon_{0(1)}$ (рис. 9.11.3) находится значение $\sigma_{i(1)}$ на кривой деформирования и секущий модуль

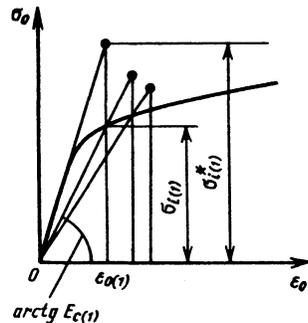


Рис. 9.11.3. Интенсивность напряжений и эквивалентная деформация

$$E_{c(1)} = \sigma_{i(1)} / \varepsilon_{0(1)}. \quad (9.11.16)$$

Во втором приближении полагаем, что $E_{(2)}^* = E_{c(1)}$, $\mu_{(2)}^* = 0,5 - 0,5(1 - 2\mu)E_{c(1)} / E$. Расчет заканчивается при достаточной близости двух соседних приближений.

В методе дополнительных деформаций пластические деформации рассматриваются как дополнительные. Уравнения (9.11.1) и (9.11.2) записываются в виде

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} (\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)) + \alpha T^0 + \varepsilon_1^0, \dots;$$

$$\gamma_{12} = \frac{2(1 + \mu)}{E} \tau_{12} + \gamma_{12}^0, \dots$$

Дополнительные (пластические) деформации

$$\varepsilon_1^0 = \left(1 - \frac{1}{\Psi}\right) (\varepsilon_1 - \varepsilon), \dots;$$

$$\gamma_{12}^0 = \left(1 - \frac{1}{\Psi}\right) \gamma_{12}, \dots$$

В первом приближении решается упругая задача, а дополнительные деформации считаются отсутствующими. В результате в каждой точке тела рассчитываются напряжения и деформации, интенсивность напряжений $\sigma_{i(1)}^*$, эквивалентная деформация (9.11.15) и первое приближение для секущего модуля (9.11.16). Дополнительные деформации

$$\varepsilon_{1(1)}^0 = \left(1 - \frac{1}{\Psi(1)}\right) (\varepsilon_{1(1)}^* - \varepsilon_{(1)}^*), \dots;$$

$$\gamma_{12(1)}^0 = \left(1 - \frac{1}{\Psi(1)}\right) \gamma_{12(1)}^*,$$

где $\varepsilon_{1(1)}^*$, $\varepsilon_{(1)}^*$, $\gamma_{12(1)}^*$ - деформации упругой задачи. Здесь

$$\Psi(1) = \frac{1}{2(1 + \mu)} \left(\frac{3E}{E_{c(1)}} - (1 - 2\mu) \right) \approx \frac{E}{E_{c(1)}}.$$

Во втором приближении используются зависимости

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} (\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)) + \alpha T^0 + \varepsilon_{1(1)}^0;$$

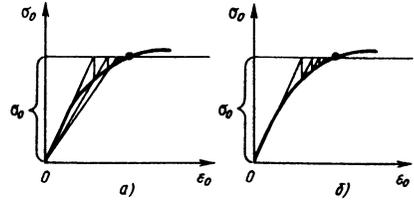


Рис. 9.11.4. Схемы расчета по методам переменных параметров: а - упругости; б - дополнительных деформаций

$$\gamma_{12} = \frac{2(1 + \mu)}{E} \tau_{12} + \gamma_{12(1)}^0. \quad (9.11.17)$$

Существенно, что во всех приближениях упругая задача решается при обычных (постоянных) параметрах упругости. В этом преимущество метода дополнительных деформаций, однако процесс последовательных приближений сходится несколько медленнее.

На рис. 9.11.4 приведены схемы расчета по методам переменных параметров упругости и дополнительных деформаций для определения деформаций при заданном напряжении σ_0 .

Метод переменных параметров упругости в теории пластического течения. При расчете пластин и оболочек обычно используют зависимости для плоского напряженного состояния. При методе переменных параметров упругости применяют зависимости (9.11.6), причем приращение $d\sigma_i$ определяют по формуле (9.11.8). Основные зависимости (9.11.5) в матричной форме

$$\{d\varepsilon\} = \left\{ \left[a^e \right] + \left[a^p \right] \right\} + \{d\sigma\} + \{d\varepsilon^T\}. \quad (9.11.18)$$

Здесь

$$\{d\varepsilon\} = \{d\varepsilon_1, d\varepsilon_2, d\gamma_{12}\}^T;$$

$$\{d\sigma\} = \{d\sigma_1, d\sigma_2, d\tau_{12}\}^T.$$

$$(9.11.19)$$

Матрицы податливости упругой

$$\left[a^e \right] = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\mu & 0 \\ -\mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1 + \mu) \end{bmatrix}; \quad (9.11.20)$$

пластической

$$[a^p] = \frac{3F(\sigma_i, T^0)}{2\sigma_i} \begin{bmatrix} (\sigma_1 - \sigma)^2 & (\sigma_2 - \sigma)(\sigma_1 - \sigma) & \tau_{12}(\sigma_1 - \sigma) \\ (\sigma_1 - \sigma)(\sigma_2 - \sigma) & (\sigma_2 - \sigma)^2 & \tau_{12}(\sigma_2 - \sigma) \\ (\sigma_1 - \sigma)\tau_{12} & (\sigma_2 - \sigma)\tau_{12} & \tau_{12}^2 \end{bmatrix}. \quad (9.11.21)$$

Приращение деформаций, связанных с изменением температуры, состоит из трех частей:

$$\left\{ d\epsilon^T \right\} = \left\{ \frac{d(\alpha T^0)}{dT^0} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{E^2} \frac{dE}{dT^0} [a^e] \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \right\} - F(\sigma_i, T^0) \frac{\partial \sigma_T}{\partial T^0} \begin{bmatrix} \sigma_1 - \sigma \\ \sigma_2 - \sigma \\ \tau_{12} \end{bmatrix} dT^0. \quad (9.11.22)$$

Первый вектор - приращение температурной деформации, второй отражает влияние температуры на модуль упругости (изменение коэффициента Пуассона μ от температуры не учитывается), третий учитывает изменение предела текучести при нагреве.

В равенствах (9.11.21) и (9.11.22)

$$F(\sigma_i, T^0) = \begin{cases} \frac{3}{2\sigma_i} & \left(\frac{1}{E_k} - \frac{1}{E} \right) \text{ при нагружении;} \\ 0 & \text{при разгрузке.} \end{cases}$$

Основное уравнение в методе переменных параметров упругости теории пластического течения [уравнение (9.11.19)] соответствует соотношениям упругости анизотропного тела при наличии обобщенной температурной деформации. Матрица пластической податливости содержит "переменные параметры упругости", которые в первом приближении принимаются по напряжениям предыдущего этапа нагружения. При расчете очередного этапа нагружения предполагается выполнение условий (9.11.9) и (9.11. 10). При нарушении хотя бы одного из условий расчет этапа проводится сначала, причем приращение деформаций пластичности не учитывается.

Во втором приближении в равенстве (9.11.21) принимаются средние напряжения (полусумма в начале и конце этапа нагружения). Подобная процедура применяется и для вектора (9.11.22). Расчет заканчивают при достаточной близости двух соседних приближений. При малых этапах нагружения второй расчет обычно не проводится.

В теории пластического течения применяется метод дополнительных деформаций [8].

Учет деформации ползучести. Приращение деформаций ползучести

$$\begin{aligned} d\epsilon_1^c &= \Phi(\sigma_i, T^0, q)(\sigma_1 - \sigma)dt, \dots; \\ 0,5d\tau_{12}^c &= \Phi(\sigma_i, T^0, q)\tau_{12}dt, \dots, \end{aligned} \quad (9.11.23)$$

где dt - приращение времени; Φ - скалярная функция интенсивности напряжений σ_i (температуры T^0 и параметра q , характеризующего историю нагружения).

В теории течения [23] принимается

$$q = t, \quad (9.11.24)$$

в теории упрочнения

$$q = \epsilon_{i*}^c,$$

где ϵ_{i*}^c - накопленная деформация ползучести.

В качестве параметра q можно принять степень повреждения [2]

$$q = \int_0^t \frac{dt}{t_p(\sigma_i, T^0)},$$

где $t_p(\sigma_i, T^0)$ - время до разрушения при напряжении σ_i и температуре T^0 .

Параметр q служит для сопоставления условий нагружения с экспериментальными данными по ползучести при растяжении образцов.

Функция $\Phi(\sigma_i, T^0, q)$ определяется по кривым ползучести (рис. 9.11.5)

$$\Phi(\sigma_i, T^0, q) = \frac{3}{2\sigma_0} V(\sigma_0, T^0, q). \quad (9.11.25)$$

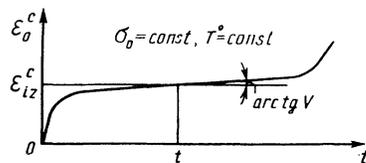


Рис. 9.11.5. Кривая ползучести

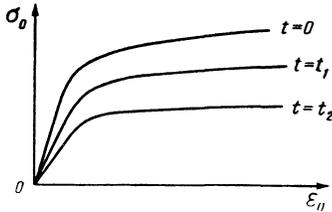


Рис. 9.11.6. Изохронные кривые для различных значений времени

Скорость деформации ползучести при напряжении $\sigma_0 = \sigma_i$

$$V(\sigma_0, T^0, q) = \left. \frac{\partial \varepsilon_0^c}{\partial t} \right|_{T^0 = \text{const}}$$

В стадии установившейся ползучести (ползучесть с постоянной скоростью деформации) скорость ползучести

$$V = B(T)\sigma_i^n(T^0). \quad (9.11.26)$$

При монотонном процессе нагружения часто применяется теория старения, в соответствии с которой деформация ползучести [23]

$$\varepsilon_i^c = f(\sigma_i, T^0, t).$$

Расчет ведется по изохронным кривым ползучести в разное время нагружения. В начальный момент ($t=0$) изохронная кривая ползучести (рис. 9.11.6) совпадает с обычной кривой деформирования, при возрастании времени изохронные кривые проходят ниже - материал "старееет".

9.11.2. ОБЩИЕ АЛГОРИТМЫ РАСЧЕТА ПРИ УЧЕТЕ ДЕФОРМАЦИЙ ПЛАСТИЧНОСТИ И ПОЛЗУЧЕСТИ

Физические модели материала и алгоритмы расчета могут быть различными в зависимости от задач исследования, условий нагружения и др. При расчете применяется принцип суммирования деформации различной физической природы

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1^e + \varepsilon_1^p + \varepsilon_1^c + \varepsilon_1^T + \dots$$

или в дифференциальной форме

$$d\varepsilon_1 = d\varepsilon_1^e + d\varepsilon_1^p + d\varepsilon_1^c + d\varepsilon_1^T + \dots \quad (9.11.27)$$

Верхние индексы e, p, c, T относятся соответственно к деформациям упругости, пластичности, ползучести и термическим.

Монотонное нагружение. При монотонном нагружении часто используют теории:

деформационную пластичности и старения для деформаций ползучести. В рассматриваемом алгоритме расчета деформации пластичности и ползучести объединены и для связи деформаций и напряжений применяют уравнения

$$\{\varepsilon\} = [a]\{\sigma\} + \{\alpha T^0\},$$

где

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \gamma_{12}\}^T; \quad \{\sigma\} = \{\sigma_1 \sigma_2 \gamma_{12}\}^T;$$

$$\{\alpha T^0\} = \alpha_T T^0 \{1, 1, 0\}^T.$$

Матрица податливости в соответствии с равенствами (9.11.13) для плоского напряженного состояния и изотропного материала

$$[a] = \frac{1}{E^*} \begin{bmatrix} 1 & -\mu^* & 0 \\ -\mu^* & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1 + \mu^*) \end{bmatrix}.$$

Приведенные модуль упругости и коэффициент Пуассона определяют по изохронным кривым ползучести для времени t. При расчете используется метод переменных параметров упругости.

Если применен метод дополнительных деформаций, то уравнение "деформации - напряжения" имеют вид

$$\{\varepsilon\} = [a]\{\sigma\} + \{\varepsilon^0\} + \{\alpha T^0\}.$$

Здесь

$$[a] = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\mu & 0 \\ -\mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1 + \mu) \end{bmatrix}.$$

Вектор дополнительных деформаций $\{\varepsilon^0\} = \{\varepsilon^p\} + \{\varepsilon^c\}$. Он определяется методом последовательных приближений по изохронным кривым ползучести. Часто при учете деформаций ползучести можно пренебречь пластическими деформациями, так как ползучесть при повышенных температурах протекает при напряжениях ниже предела текучести материала.

Установившаяся ползучесть. При длительном нагружении, постоянных нагрузках и температуре возникает установившаяся ползучесть. Распределение напряжений при установившейся ползучести находят при пренебрежении упругими деформациями из уравнений (9.11.23) для скоростей деформации

$$V_1 = \Phi(\sigma_i, T^0, q)(\sigma_1 - \sigma), \dots;$$

$$0,5V_{12} = \Phi(\sigma_i, T^0, q)\tau_{12}, \dots$$

Из сопоставления соотношений (9.11.27) и (9.11.1) при $\varepsilon = 0$ ($\mu = 0,5$) следует, что напряжения при установившейся ползучести будут такими же, как в упругопластическом теле (при тех же нагрузках и температуре), имеющем кривую деформирования:

$$\varepsilon_i = \frac{2}{3}\sigma_i\Phi(\sigma_i, T^0, q).$$

В частности, для зависимости (9.11.26)

$$\varepsilon_i = B(T^0)\sigma_i^{n(T^0)}.$$

При установившейся ползучести напряжения (во времени) постоянны, деформации возрастают с постоянной скоростью.

Общий случай нагружения. Нагружение разбивается по времени на ряд этапов. Используется принцип суммирования в дифференциальной форме (9.11.27). Приращение деформаций в соответствии с равенствами (9.11.18) и (9.11.27)

$$\{d\varepsilon\} = \left([a^e] + [a^p] \right) \{d\sigma\} + \{d\varepsilon^c\} + \{d\varepsilon^T\}. \tag{9.11.28}$$

Матрицы упругой и пластической податливости определяются соотношениями (9.11.20) и (9.11.21). Приращение деформаций связанное с изменением температуры, вычисляется по равенству (9.11.22). Приращение деформации ползучести определяется с помощью зависимостей (9.11.23) и (9.11.25):

$$\{d\varepsilon^c\} = \begin{Bmatrix} d\varepsilon_1^c \\ d\varepsilon_2^c \\ \frac{1}{2}d\gamma_{12}^c \end{Bmatrix} = \frac{3}{2\sigma_i} V(\sigma_i, T^0, q) \begin{Bmatrix} \sigma_1 - \sigma \\ \sigma_2 - \sigma \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} dt, \tag{9.11.29}$$

где $\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2)$ - среднее напряжение (при плоском напряженном состоянии); V - скорость ползучести в испытаниях на ползучесть при растяжении при напряжении $\sigma_0 = \sigma_i$ и температуре T^0 в точке, соответствующей

длительности нагружения t (теория течения) или достигнутой деформации ползучести (теория упрочения), или степени повреждения.

На каждом этапе нагружения имеется полная система уравнений для определения приращения деформаций и напряжений. Для построения алгоритма расчета уравнения (9.11.28) следует представить в приращениях. После интегрирования соотношения (9.11.28) по времени от начала этапа t_k до его конца t_{k+1} (опускается индекс этапа)

$$\{\Delta\varepsilon\} = \left(\left[\langle a^e \rangle \right] + \left[\langle a^p \rangle \right] \right) \{\Delta\sigma\} + \left\{ \langle \Delta\varepsilon^c \rangle \right\} + \left\{ \langle \Delta\varepsilon^T \rangle \right\},$$

где $\langle a^e \rangle$, $\langle a^p \rangle$ - средние значения элементов матрицы (в начале и конце этапа) для температурного приращения и приращения деформации ползучести.

Расчет проводится методом последовательных приближений. В первом приближении принимаются значения параметров, соответствующие начальному моменту этапа нагружения. Во втором - средние значения как полусумма параметров в начале и конце этапа и т. д. Процесс заканчивается при достаточной близости двух соседних приближений.

9.11.3. РАСЧЕТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК ПРИ УЧЕТЕ ПЛАСТИЧНОСТИ И ПОЛЗУЧЕСТИ

Круглые пластины при осесимметричном растяжении. Рассматриваются тонкие пластины переменной толщины (рис. 9.11.7); температура изменяется только по радиусу, внешние нагрузки на контуре и центробежные силы создают растяжение пластины. С учетом пластичности (по деформационной теории) и ползучести (по теории старения) получена система уравнений

$$\frac{d}{dr} \begin{Bmatrix} T_1 \\ u \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1-\mu^*}{r} & \frac{E^*h}{r^2} \\ \frac{1-\mu^{*2}}{E^*h} & -\frac{\mu^*}{r} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ u \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \rho\omega^2 rh \\ 0 \end{Bmatrix} + \left\{ \frac{-E^*h}{r} \alpha T^0 \right. \\ \left. \left. \left(\frac{1+\mu^*}{1-\mu^*} \right) \alpha T^0 \right\},$$

где T_1 - радиальная сила; $u=u(r)$ - радиальное перемещение; $h=h(r)$ - толщина пластины; ρ - плотность материала; ω - угловая скорость.

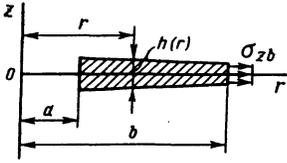


Рис. 9.11.7. Схема расчета круглого диска переменной толщины

Переменные параметры упругости E^* и μ^* определяют по изохронным кривым ползучести, методом переменных параметров упругости. Для частных случаев (пластина постоянной толщины, кривая деформирования без упрочения) имеются точные решения [8].

Круглые пластины при осесимметричном растяжении и изгибе. Деформации в пластине

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{01} \\ \varepsilon_{02} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \frac{d\varphi}{dr} \\ \frac{\varphi}{r} \end{Bmatrix},$$

где φ - угол поворота нормали; $\varepsilon_{01}=du/dr$, $\varepsilon_{02}=u/r$ - деформации в координатной плоскости; $u=u(r)$ - радиальное перемещение.

Силы и моменты

$$\{M\} = [A]\{\varepsilon\} - \{N_T\} - \{N^0\}.$$

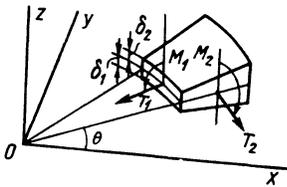


Рис. 9.11.8. Схема расчета круглой пластины при растяжении и изгибе

Здесь

$$\{M\} = \{T_1 T_2 M_1 M_2\}^T;$$

$$\{\varepsilon\} = \left\{ \frac{du}{dr}, \frac{u}{r}, \frac{d\varphi}{dr}, \frac{\varphi}{r} \right\}^T,$$

где T_1 и T_2 - соответственно радиальная и окружная силы; M_1 и M_2 - соответственно радиальный и окружной моменты (рис. 9.11.8).

Температурные силы и моменты

$$N_{1T} = N_{2T} = \int_{-\delta_1}^{\delta_2} \frac{E\alpha T^0}{1-\mu} dz;$$

$$M_{1T} = M_{2T} = \int_{-\delta_1}^{\delta_2} \frac{zE\alpha T^0}{1-\mu} dz.$$

Дополнительные силы:

$$N_1^0 = \int_{-\delta_1}^{\delta_2} \frac{E}{1-\mu} (\varepsilon_1^0 + \mu\varepsilon_2^0) dz;$$

$$N_2^0 = \int_{-\delta_1}^{\delta_2} \frac{E}{1-\mu} (\varepsilon_2^0 + \mu\varepsilon_1^0) dz;$$

$$M_1^0 = \int_{-\delta_1}^{\delta_2} \frac{zE}{1-\mu} (\varepsilon_1^0 + \mu\varepsilon_2^0) dz;$$

$$M_2^0 = \int_{-\delta_1}^{\delta_2} \frac{zE}{1-\mu} (\varepsilon_2^0 + \mu\varepsilon_1^0) dz,$$

(9.11.30)

где ε_1^0 и ε_2^0 - дополнительные деформации, в качестве которых можно рассматривать деформации пластичности или ползучести.

Элементы симметричной матрицы жесткости

$$A_{11} = A_{22} = \int_{-\delta_1}^{\delta_2} \frac{E}{1-\mu} dz;$$

$$A_{12} = A_{21} = \int_{-\delta_1}^{\delta_2} \frac{\mu E}{1-\mu} dz;$$

$$A_{13} = A_{31} = A_{24} = A_{42} = \int_{-\delta_1}^{\delta_2} \frac{zE}{1-\mu} dz;$$

$$A_{14} = A_{41} = A_{23} = A_{32} = \int_{-\delta_1}^{\delta_2} \frac{\mu zE}{1-\mu} dz;$$

$$A_{33} = A_{44} = \int_{-\delta_1}^{\delta_2} \frac{z^2 E}{1-\mu} dz;$$

$$A_{34} = A_{43} = \int_{-\delta_1}^{\delta_2} \frac{\mu z^2 E}{1 - \mu^2} dz. \tag{9.11.31}$$

Предполагается, что параметры упругости E и μ могут изменяться по толщине пластины и вдоль радиуса. Существенно, что в предыдущих равенствах положение координатной плоскости можно выбрать произвольно, в частности $\delta_1 = \delta_2 = 0,5h$, особенно если E и μ постоянны по толщине и отличны от нуля только следующие элементы матрицы жесткости:

$$\begin{aligned} A_{11} = A_{22} &= \frac{Eh}{1 - \mu^2}; \quad A_{12} = A_{21} = \frac{\mu Eh}{1 - \mu^2}; \\ A_{33} = A_{44} &= \frac{Eh^3}{12(1 - \mu^2)}; \\ A_{34} = A_{43} &= \frac{\mu Eh^3}{12(1 - \mu^2)}. \end{aligned} \tag{9.11.32}$$

При учете пластичности по деформационной теории в равенствах (9.11.31) под E и μ понимаются переменные модули упругости, по методу дополнительных деформаций под ε_1^0 и ε_2^0 [соотношения (9.11.30)] - деформации пластичности.

При учете деформаций ползучести по теории старения расчет ведется по методу переменных параметров упругости с помощью изохронных кривых ползучести. При использовании теории течения для деформации пластичности и упрочнения, ползучести нагружение разбивается на ряд этапов. Приведенные соотношения применяют для каждого этапа нагружения.

Прямоугольные пластины. Гипотеза жесткой нормали считается справедливой в условиях пластичности и ползучести. В соответствии с равенством (9.10.18) силовые факторы (рис. 9.11.9):

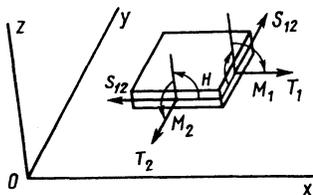


Рис. 9.11.9. Силы и моменты в прямоугольной пластине

$$\{N\} = [A_0]\{\varepsilon_0\} + [S]\{\varepsilon\} - \{N_T\} - \{N^0\}; \tag{9.11.33}$$

$$\{M\} = [S]\{\varepsilon_0\} + D\{\varepsilon\} - \{M_T\} - \{M^0\}; \tag{9.11.34}$$

где $\{N\} = \{T_1, T_2, S_{12}\}^T$; $\{M\} = \{M_1, M_2, M_{12}\}^T$ - силовые факторы; $\{\varepsilon_0\} = \{\varepsilon_{01}, \varepsilon_{02}, \gamma_{012}\}^T$; $\{\varepsilon\} = -\left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right\}$ - векторы деформации; $\{N_T\}, \{M_T\}, \{N^0\}, \{M^0\}$ - температурные и дополнительные силы и моменты.

Матрицы:

$$\begin{aligned} [A_0] &= \int_{-\delta_1}^{\delta_2} [A] dz; \quad [S] = \int_{-\delta_1}^{\delta_2} z [A] dz; \\ [D] &= \int_{-\delta_1}^{\delta_2} z^2 [A] dz. \end{aligned} \tag{9.11.35}$$

Матрица материала

$$[A] = \frac{E}{1 - \mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5(1 - \mu) \end{bmatrix}.$$

В равенствах (9.11.35) величины δ_1 и δ_2 могут быть произвольными. Удобно в качестве координатной поверхности выбрать срединную и $\delta_1 = \delta_2 = 0,5h$. При модуле упругости и коэффициенте Пуассона, постоянных по толщине $[S] = 0$, уравнения (9.11.33) и (9.11.34) упрощаются. При расчете по методу переменных параметров упругости под E и μ понимаются их значения по (9.11.14).

Предельное состояние пластин при пластических деформациях. По схеме жесткопластического тела (рис. 9.11.10) предельное состояние при изгибе пластин имеет место при условии

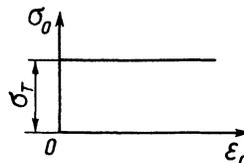


Рис. 9.11.10. Диаграмма жесткопластического тела

$$M_1^2 - M_1 M_2 + M_2^2 + 3M_{12} = M_s^2, \quad (9.11.36)$$

где

$$M_1 = \frac{h^2}{4} \sigma_1; \quad M_2 = \frac{h^2}{4} \sigma_2;$$

$$M_{12} = \frac{h^2}{4} \tau_{12}; \quad M_s = \frac{h^2}{4} \sigma_T.$$

Предельная нагрузка, при которой реализуется условие (9.11.36), определяется из анализа кинематически возможных полей скоростей (верхняя граница) или статически возможных состояний (нижняя граница). В табл. 9.11.1 даны расчетные зависимости для определения предельных нагрузок при изгибе пластин.

Цилиндрические оболочки. При осесимметричной деформации формулы для осевых и окружных напряжений имеют вид

$$\sigma_1 = E \left[\frac{T_1}{A} - z \frac{M_1}{B} + \frac{1}{A} \int_{-\delta_1}^{\delta_2} E \Delta_1 dz + \frac{z}{B} \int_{-\delta_1}^{\delta_2} z E \Delta_1 dz - \Delta_1 \right];$$

$$\sigma_2 = E \left[\frac{T_2}{A} - z \frac{M_2}{B} + \frac{1}{A} \int_{-\delta_1}^{\delta_2} E \Delta_2 dz + \frac{z}{B} \int_{-\delta_1}^{\delta_2} z E \Delta_2 dz - \Delta_2 \right], \quad (9.11.37)$$

где

$$\Delta_1 = (1 + \mu) \alpha T + \varepsilon_1^0 + \mu \varepsilon_2^0; \quad (9.11.38)$$

$$\Delta_2 = (1 + \mu) \alpha T + \varepsilon_2^0 + \mu \varepsilon_1^0.$$

В равенствах (9.11.37)

$$A = \int_{-\delta_1}^{\delta_2} E dz; \quad B = \int_{-\delta_1}^{\delta_2} z^2 E dz = D(1 - \mu^2).$$

Модуль упругости E переменный по толщине оболочки; значения δ_1 и δ_2 (положение основной поверхности) выбраны в соответствии с условием (9.10.17). Величины ε_1^0 и ε_2^0 в соотношениях (9.11.38) представляют дополнительные деформации: пластические

или при ползучести. Расчет по методу переменных параметров упругости проводят по уравнению (9.10.27), в котором в правой части вводят члены, зависящие от внешней нагрузки.

Оболочки вращения при осесимметричной деформации. Расчет по деформационной теории пластичности и учет ползучести по теории старения можно проводить по уравнениям (9.10.27), в которых в правые части добавлены члены

$$\psi_{1q} = -\frac{\operatorname{ctg} \varphi}{A} \left[\left(\frac{1}{R_2} + \frac{\mu}{R_1} + \frac{R_2}{R_1} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{\mu}{R_2} \right) \right) \frac{P}{2\pi \sin^2 \varphi} - \left(\mu R_2 + \frac{R_2^2}{R_1} \right) q_n \right] - \frac{d}{ds} \left[\left(\frac{1}{R_1} + \frac{\mu}{R_2} \right) \frac{R_2 P}{2\pi A \sin^2 \varphi} - \frac{R_2^2}{A} q_n \right];$$

$$\psi_{2q} = 0. \quad (9.11.39)$$

Применяются метод переменных параметров упругости и изохронные кривые ползучести.

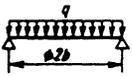
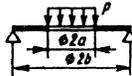
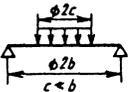
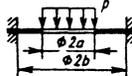
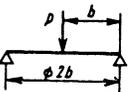
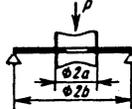
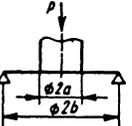
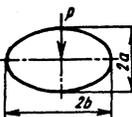
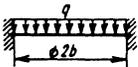
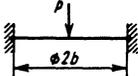
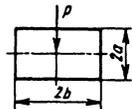
Общий случай нагружения оболочек. Расчетные соотношения для сил и деформаций при учете пластичности и ползучести

$$\begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A_0] & [S] \\ [S] & [D] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\varepsilon_0\} \\ \{\varepsilon\} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \{N_T\} \\ \{M_T\} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \{N^0\} \\ \{M^0\} \end{Bmatrix}, \quad (9.11.40)$$

где $\{N\} = \{T_1 \ T_2 \ S_{12}\}^T$; $\{M\} = \{M_1 \ M_2 \ M_{12}\}^T$ - векторы соответственно сил и моментов; $\{\varepsilon_0\} = \{\varepsilon_{01} \ \varepsilon_{02} \ \gamma_{012}\}^T$ и $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_1 \ \varepsilon_2 \ \varepsilon_{12}\}^T$ - векторы соответственно деформаций и кривизн; нижние индексы Т и 0 относятся к температурным и дополнительным силам. Блочная матрица 6×6 представляет матрицу коэффициентов жесткости.

При использовании теории пластического течения и при расчете неустановившейся ползучести соотношение (9.11.40) применяется для каждого этапа отдельно.

9.11.1. Предельные нагрузки для пластин $M_s \frac{h^2}{4} \sigma_T$

Схема нагружения	Формула	Схема нагружения	Формула
Круглые опертые пластины		Круглые кольцевые пластины	
	$q = \frac{6M_s}{b^2}$		$P = 2\pi M_s$
	$q = \frac{6bM_s}{c^2(3b-2c)}$		$P = 2\pi M_s \frac{1 + \ln(b/a)}{\ln(b/a)}$
	$P = 2\pi M_s$		$P = \frac{2\pi M_s}{1 - a/b}$
	$P = \frac{2\pi M_s}{1 - a/b}$	Пластины, опертые по контуру	
Круглые заделанные пластины			$P = \pi M_s \frac{a^2 + b^2}{ab}$
	$q = 11,3 \frac{M_s}{b^2}$		$0,86 < \frac{qa^2}{6M_s} < 1,06$
	$P = 4\pi M_s$		$P = 4M_s \frac{a^2 + b^2}{ab}$
			$P = 2M_s \pi \text{tg} \frac{\pi}{n}$

Примечание: для полигональной пластины n - число сторон.

Глава 9.12

УСТОЙЧИВОСТЬ
УПРУГИХ ПЛАСТИН И
ОБОЛОЧЕК9.12.1. ОСОБЕННОСТИ ПОВЕДЕНИЯ
ТОНКИХ УПРУГИХ ПЛАСТИН
И ОБОЛОЧЕК
ПРИ ПОТЕРЕ УСТОЙЧИВОСТИ

Задача устойчивости пластин в классической постановке формулируется при следующих допущениях:

1) пластина идеально плоская и до потери устойчивости равнодействующие всех внешних сил и реакций опор действуют строго в ее срединной плоскости;

2) до потери устойчивости начальное напряженное состояние пластины описывается соотношениями линейной теории упругости, а изменением размеров пластины пренебрегают;

3) изгиб пластины при потере устойчивости описывается с помощью обычных гипотез теории изгиба пластин (см. гл. 9.2).

Пусть все внешние силы возрастают пропорционально параметру P . Согласно первому допущению при любых значениях P возможно плоское состояние равновесия пластины, при котором поперечные перемещения $w_0(x, y) = 0$. Очевидно, что при достаточно малых значениях P плоское начальное состояние равновесия будет единственным и устойчивым. Когда параметр P превысит некоторое конечное критическое значение P_k ($P > P_k$), плоское начальное состояние становится неустойчивым и пластина теряет устойчивость, т.е. переходит в новое состояние с искривленной срединной плоскостью.

Возможны два качественно разных случая заkritического поведения пластин. Если закрепления контура пластины не препятствуют ее чисто изгибным деформациям, при которых срединная плоскость переходит в развертывающуюся поверхность, малейшее превышение критической нагрузки приводит к очень быстрому росту поперечных прогибов и изгибных напряжений (кривая 1, рис. 9.12.1). Потеря устойчивости практически означает потерю несущей способности пластины. Но у пластин, входящих в состав силовой конструкции, контур обычно закреплен относительно поперечных прогибов и после потери устойчивости срединная плоскость становится поверхностью двоякой кривизны, что неизбежно связано с появлением в ней дополнительных удлинений и углов сдвига. В этом случае пластина после потери устойчивости может продолжать воспринимать возрастающую нагрузку (кривая 2). Однако возникающие изгибные-

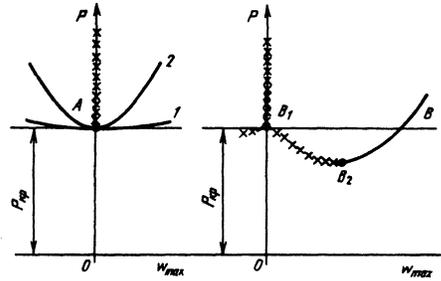


Рис. 9.12.1. Диаграммы равновесных состояний

напряжения существенно увеличивают максимальные эквивалентные напряжения в пластине.

Диаграммы равновесных состояний пластин имеют критическую точку бифуркации (рис. 9.12.1): в точке A начальное устойчивое состояние равновесия сменяется новым (тоже устойчивым) состоянием с искривленной срединной плоскостью (ветвление). При плавном нарастании нагрузки в точке A тоже происходит плавный переход от начального плоского устойчивого состояния к новому устойчивому состоянию (см. гл. 7.4).

Классическая постановка задачи устойчивости оболочек базируется на таких допущениях:

1) срединная поверхность оболочки имеет идеально правильную форму;

2) начальное напряженно-деформированное состояние безмоментное и изменением размеров оболочки до потери устойчивости пренебрегают;

3) изгиб оболочки при потере устойчивости описывается с помощью гипотез Кирхгофа-Лява (см. гл. 9.1).

Все внешние силы считают возрастающими пропорционально одному параметру P . Как и в задаче устойчивости пластин, при $P < P_k$ начальное состояние оболочки остается устойчивым (но не обязательно единственным). И для оболочки возможны два качественно различных случая заkritического поведения. Когда закрепления краев оболочки допускают ее чисто изгибные деформации, потеря устойчивости оболочки происходит так же, как и пластины (кривая 1, рис. 9.12.1). Примером может служить задача устойчивости нагруженной внешним давлением цилиндрической оболочки с одним свободно опертым торцом, а другим полностью свободным. Но поведение оболочки принципиально меняется, если оба торца оболочки будут закреплены. В этом случае чисто изгибные деформации оболочки становятся невозможными и любой ее изгиб неизбежно сопровождается удлинениями и сдвигами в срединной поверхности. Следует

отметить, что если при изгибе пластины с закрепленным контуром деформации в срединной плоскости становятся существенными только при больших прогибах, деформации в срединной поверхности оболочки необходимо учитывать и в линейных задачах.

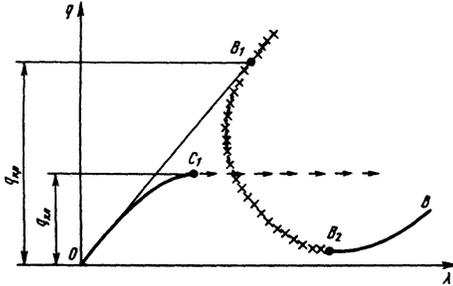


Рис. 9.12.2. Диаграмма равновесных состояний оболочек

На рис. 9.12.2 показана типичная для задач устойчивости оболочек диаграмма равновесных состояний. Критическая точка B_1 бифуркации качественно отличается от критической точки A бифуркации на рис. 9.12.1. В точке B_1 перестает быть устойчивым начальное безмоментное состояние равновесия, но в окрестности точки B_1 отсутствуют новые устойчивые состояния равновесия оболочки. Участок B_2B новых устойчивых состояний равновесия удален от участка OB_1 начального устойчивого состояния на конечное расстояние. Поэтому даже при плавном нарастании нагрузки переход оболочки в новое устойчивое состояние равновесия не может произойти плавно; такой переход неизбежно должен носить скачкообразный характер, происходить в виде хлопка.

Еще одна качественная особенность диаграммы деформирования оболочки состоит в том, что новые устойчивые состояния равновесия становятся возможными еще до достижения критической точки B_1 бифуркации. Эти новые состояния (участок B_2B) отделены от начального состояния устойчивого равновесия некоторым энергетическим барьером, уменьшающимся по мере приближения к критической точке бифуркации.

Диаграммы равновесных состояний оболочки предельно упрощены: на рис. 9.12.2 показана только одна ветвь состояния равновесия, отличного от начального. В действительности, полное нелинейное решение включает серию таких ветвей, соответствующих как устойчивым, так и неустойчивым состояниям равновесия.

9.12.2. КРИТИЧЕСКИЕ НАГРУЗКИ ТОНКИХ УПРУГИХ ПЛАСТИН

В расчете пластины на устойчивость центральное место занимает определение точек бифуркации начального плоского состояния ее равновесия. Эту задачу можно решить с помощью либо энергетического критерия, либо однородного линейризованного уравнения теории устойчивости пластин.

Энергетический критерий бифуркационной потери устойчивости пластин. Рассмотрим пластину в новом изгибном состоянии равновесия, смежном с начальным. Полная потенциальная энергия пластины в новом состоянии

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 + \Delta\mathcal{E},$$

где \mathcal{E}_0 - энергия в начальном состоянии; $\Delta\mathcal{E}$ - приращение полной энергии при переходе пластины в новое состояние.

Новое состояние считается равновесным, поэтому \mathcal{E} имеет стационарное значение, т.е. выполняется условие $\delta\mathcal{E} = \delta\mathcal{E}_0 + \delta(\Delta\mathcal{E}) = 0$. Поскольку начальное состояние равновесно, $\delta\mathcal{E}_0 = 0$. Тогда энергетический критерий бифуркационной потери устойчивости

$$\delta(\Delta\mathcal{E}) = 0. \tag{9.12.1}$$

Очевидно, что для определения точек бифуркации приращение энергии $\Delta\mathcal{E}$ следует подсчитывать с точностью до квадратов бифуркационных перемещений w , переводящих пластину из начального состояния в новое смежное изгибное состояние равновесия. Энергетический критерий дает возможность найти все точки бифуркации начального состояния равновесия и соответствующие им собственные значения параметра нагрузки P_n ; наименьшее из них будет критическим, т.е.

$$P_k = (P_n)_{\min}.$$

Если действующие в плоскости пластины нагрузки "мертвые", не изменяющие значений и направлений при деформациях пластины, то на бифуркационных перемещениях w они работы не совершают и приращение полной потенциальной энергии для изотропной пластины

$$\Delta\mathcal{E} = U_x + W, \tag{9.12.2}$$

где

$$U_x = 0,5 \iint D \left[(\alpha_1 + \alpha_2)^2 + 2(1 - \mu) (\alpha_{12}^2 - \alpha_1 \alpha_2) \right] dx dy;$$

$$W = \iint (T_1^0 \varepsilon_1 + T_2^0 \varepsilon_2 + S^0 \gamma_{12}) dx dy.$$

Первое слагаемое - энергия изгиба пластины (D - изгибная жесткость пластины), второе - работа начальных сил в срединной плоскости на дополнительных удлинениях ε_1 , ε_2 , γ_{12} , вызываемых бифуркационными перемещениями w . Причем

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \varepsilon_2 = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \\ \varepsilon_{12} &= \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}; \quad \varepsilon_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2; \quad (9.12.3) \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2; \quad \gamma_{12} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}. \end{aligned}$$

Энергетический критерий можно использовать как для получения линейризованного уравнения теории устойчивости пластин, так и для построения приближенного решения задач их устойчивости.

Следует отметить, что, во-первых, для решения задачи устойчивости с помощью выражения (9.12.2) нужно предварительно найти, решив плоскую задачу, начальные силы T_1^0, T_2^0, S^0 (для решения задач устойчивости без определения начальных сил следует использовать иной вариант энергетического критерия [1]); во-вторых, выражение (9.12.2) можно использовать независимо от причины возникновения начальных сил в пластине: контурных или массовых нагрузок, неравномерного нагрева, структурных превращений и т.д. Различие в причинах никак не отражается на критических значениях начальных сил, но существенным образом влияет на закритическое поведение пластины.

Однородное линейризованное уравнение пластины. Оно может быть получено тремя разными путями: линейризацией полных нелинейных уравнений (см. гл. 9.4) в окрестности начального состояния равновесия; непосредственно рассматривая условия равновесия элемента пластины в отклоненном от начального состоянии; из энергетического критерия, т.е. из условия стационарности функционала (9.12.2). Для изотропной пластины постоянной толщины, нагруженной только контурными силами, это уравнение имеет вид

$$D \nabla^2 \nabla^2 w - p_z^\Phi = 0, \quad (9.12.4)$$

где $p_z^\Phi = T_1^0 \varepsilon_1 + 2S^0 \varepsilon_{12} + T_2^0 \varepsilon_2$.

При заданных на контуре пластины однородных граничных условиях однородное уравнение (9.12.4) дает возможность найти собственные значения параметра нагрузки P_n

и соответствующие собственные функции w_n . Как уже отмечалось, $P_k = (P_n)_{\min}$, соответствующая собственная функция $w_k = w_k(x, y)$ описывает с точностью до масштаба форму, по которой происходит потеря устойчивости пластины.

Точное аналитическое решение задачи устойчивости пластин удается получить только для нескольких частных случаев. Например, для прямоугольной пластины, равномерно сжатой вдоль одной из сторон распределенной силой q , начальные силы в срединной плоскости $T_1^0 = -q$; $S^0 = 0$; $T_2^0 = 0$. Если все стороны пластины свободно оперты, т.е. заданы граничные условия $w = 0$, $\partial^2 w / \partial x^2 = 0$ при $x=0$, $x=a$ и $w=0$, $\partial^2 w / \partial y^2 = 0$ при $y=0$ и $y=b$, то из уравнения (9.12.4) нетрудно найти полный спектр собственных функций и соответствующий им набор собственных значений нагрузки:

$$\begin{aligned} w_{nm} &= \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}; \\ q_{nm} &= \frac{\pi^2 D}{(n/a)^2} \left[\left(\frac{n}{a} \right)^2 + \left(\frac{m}{b} \right)^2 \right]^2, \end{aligned} \quad (9.12.5)$$

где n, m - целые числа.

Наименьшим значение q_{nm} может быть только при $m_k=1$, а величина n_k , обеспечивающая наименьшее значение q_{nm} , зависит от отношения сторон пластины a/b . Окончательная расчетная формула имеет вид

$$q_k = \kappa \pi^2 D / b^2. \quad (9.12.6)$$

В рассматриваемой конкретной задаче коэффициент κ подсчитывается просто. В частности, при $a/b=1$ и $a/b=2$ получают $\kappa=4$, а при $a/b>3$ этот коэффициент практически перестает зависеть от отношения сторон и в расчетах принимают $\kappa=4$.

При других граничных условиях в задаче устойчивости прямоугольной пластины, равномерно сжатой в одном направлении, окончательный результат представляют в виде формулы (9.12.6); значения коэффициента κ , полученные с помощью точных или приближенных решений, табулированы [1, 31, 33]. Аналогичные решения получены и результаты их табулированы для прямоугольных пластин, нагруженных распределенными нормальными силами, изменяющимися вдоль пластины по линейному закону.

Для прямоугольной пластины, нагруженной равномерно распределенными контурными

ми касательными силами q_τ , начальные силы в срединной плоскости $T_1^0 = 0$, $S^0 = q_\tau$, $T_2^0 = 0$. В этом случае задачу устойчивости пластины конечных размеров удастся решить только приближенными методами. Окончательный результат и в этой задаче сводят к формуле (9.12.6); для основных вариантов граничных условий значения κ тоже табулированы. Например, в случае свободно опертой по всему контуру пластины при $a/b=1$ и $a/b=2$ соответственно $\kappa=9,34$ и $\kappa=6,34$.

Если на пластину действуют несколько независимо изменяющихся нагрузок, то вместо одного критического значения параметра нагрузки можно построить границу области устойчивости. Например, для прямоугольной пластины, нагруженной равномерно распределенными касательными контурными силами q_τ и нормальными (сжимающими или растягивающими) силами q , критические сочетания касательных и нормальных сил (т.е. граница области устойчивости), найденные в этой задаче с помощью приближенных решений при различных граничных условиях и различных отношениях сторон пластины, достаточно точно аппроксимируются зависимостью

$$\frac{q}{q_\kappa} + \left(\frac{q_\tau}{q_{\tau\kappa}} \right)^2 = 1, \quad (9.12.7)$$

где $q_{\tau\kappa}$ и q_κ - критические касательные и нормальные сжимающие силы, действующие на пластину порознь и подсчитываемые по формуле (9.12.6) при соответствующих граничных условиях и отношении сторон пластины. В случае растягивающих нормальных сил знак перед первым слагаемым меняется на обратный.

Кроме задач устойчивости прямоугольных пластин, имеющих наибольшее практическое значение, достаточно полно исследованы и задачи устойчивости круглых пластин при осесимметричном нагружении [1, 31, 33].

Следует отметить, что большинство задач устойчивости упругих пластин, допускающих точное или приближенное аналитическое решение, решено. Это относится не только к изотропным, но и к анизотропным и подкрепленным пластинам. В настоящее время для решения более сложных задач разработаны эффективные численные методы, доведенные до надежно работающих программных комплексов (см. п. 7.5.4 и гл. 9.8).

9.12.3. КРИТИЧЕСКИЕ НАГРУЗКИ ТОНКИХ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК

Рассмотренное выше определение точек бифуркации начального состояния пластин

полностью относится к задаче устойчивости оболочек. Только выражение для изменения полной потенциальной энергии $\Delta\mathcal{E}$, используемого в энергетическом критерии (9.12.2), и линейризованные уравнения в этой задаче имеют более сложную структуру. Например, для круговой цилиндрической оболочки, нагруженной внешним давлением p и распределенными силами на торцах, вместо выражения (9.12.2) применяют

$$\Delta\mathcal{E} = U_\varepsilon + U_\alpha + W + \Delta\Pi, \quad (9.12.8)$$

где

$$U_\varepsilon = \frac{1}{2} \iint \frac{Eh}{1-\mu} \left(\varepsilon_1^{*2} + 2\mu\varepsilon_1^* \varepsilon_2^{*2} + \varepsilon_2^{*2} + 0,5(1-\mu)\gamma_{12}^{*2} \right) R d\varphi dx;$$

$$U_\alpha = \frac{1}{2} \iint D \left[(\alpha_1^* + \alpha_2^*)^2 + 2(1-\mu)(\alpha_{12}^{*2} - \alpha_1^* \alpha_2^*) \right] R d\varphi dx;$$

$$W = \iint \left(T_1^0 \varepsilon_1^{**} + S^0 \gamma_{12}^{**} + T_2^0 \varepsilon_2^{**} \right) R d\varphi dx;$$

$$\Delta\Pi = \frac{1}{2} \iint p \left[w(\varepsilon_1^* + \varepsilon_2^*) - v\Theta_2^* - u\Theta_1^* \right] R d\varphi dx,$$

где u, v, w - бифуркационные перемещения, описывающие переход оболочки из начального безмоментного состояния в смежное изгибное состояние.

Величины $\varepsilon_i^*, \Theta_i^*, \alpha_i^*$ и $\gamma_{12}^*, \alpha_{12}^*$ выражаются через перемещения u, v, w с помощью линейных зависимостей (9.4.23), а квадратичные деформации определяются формулами

$$\varepsilon_1^{**} = 0,5\Theta_1^{*2}; \quad \varepsilon_2^{**} = 0,5\Theta_2^{*2}; \quad \gamma_{12}^{**} = \Theta_1^* \Theta_2^*.$$

Заметим, что величины U_α и W имеют тот же физический смысл, что и для пластин, а U_ε и $\Delta\Pi$ соответственно равны энергии деформации срединной поверхности оболочки и работе внешнего гидростатического давления на изменении объема, ограниченного оболочкой.

Имея выражение для $\Delta\mathcal{E}$, можно из энергетического критерия (9.12.1) чисто формальным путем получить линейризованные уравнения, описывающие потерю устойчиво-

ти оболочки, и те граничные условия, которые могут быть заданы на торцах. Так, при подсчете Θ_1^* и Θ_2^* и изменений кривизн с помощью упрощенных соотношений пологой оболочки после несложных преобразований получена система однородных линейаризованных уравнений;

$$\begin{aligned} D\nabla^2\nabla^2 w + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - p_z \Phi &= 0; \\ \frac{1}{Eh} \nabla^2\nabla^2 F - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= 0, \end{aligned} \quad (9.12.9)$$

где

$$p_z \Phi = T_2^0 \frac{\partial^2 w}{R^2 \partial \varphi^2} + 2S^0 \frac{\partial^2 w}{R \partial \varphi \partial x} + T_1^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$$

Важно отметить, что энергетический критерий можно использовать и для получения приближенных решений задач устойчивости оболочек с помощью прямых вариационных методов.

Устойчивость цилиндрической оболочки, сжатой в осевом направлении равномерно распределенными силами интенсивностью q . В этом случае $T_1^0 = -q$, $T_2^0 = 0$, $S^0 = 0$ и система уравнений (9.12.9) допускает элементарное аналитическое решение, когда на обоих торцах оболочки при $x=0$ и $x=l$ задано

$$w = 0; \quad M_1 = 0; \quad v = 0; \quad T_1 = 0. \quad (9.12.10)$$

При таких граничных условиях решения будут функции

$$\begin{aligned} w_{nm} &= A_{nm} \sin n\varphi \sin \frac{m\pi x}{l}; \\ F_{nm} &= B_{nm} \sin n\varphi \sin \frac{m\pi x}{l}, \end{aligned}$$

где n, m - целые числа; A_{nm}, B_{nm} - некоторые постоянные.

Подстановкой этих функций в систему уравнений и сокращением общего для всех слагаемых произведения синусов получена система однородных алгебраических уравнений, из условия равенства нулю определителя которой найдены собственные значения

$$q_{nm} = D\eta + \frac{Eh}{R^2} \frac{1}{\eta}, \quad (9.12.11)$$

$$\text{где } \eta = \left(\frac{l}{m\pi} \right)^2 \left[\left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 + \left(\frac{n}{R} \right)^2 \right]^2.$$

Структура полученного выражения характерна для задач устойчивости оболочек: величина q_{nm} определяется двумя слагаемыми, первое из которых пропорционально изгибной жесткости D , а второе - жесткости Eh стенки оболочки на растяжение. Числа волн в окружном и осевом направлениях (n_κ и $2m_\kappa$), при которых величина q_{nm} достигает минимума, следует определять подбором. Но при большом числе волн комплекс η можно условно рассматривать как непрерывно изменяющийся параметр и определять q_κ из условия $dq_{nm}/d\eta = 0$. После элементарных выкладок

$$\begin{aligned} \sigma_\kappa &= \frac{q_\kappa}{h} = \frac{E}{\sqrt{3(1-\mu^2)}} \frac{h}{R} \approx 0,6 E \frac{h}{R}; \\ \eta_\kappa &= \frac{2\sqrt{3(1-\mu^2)}}{Rh}, \end{aligned} \quad (9.12.12)$$

где σ_κ - критические осевые сжимающие напряжения.

Последняя формула не дает конкретных значений n_κ и m_κ , а только устанавливает некоторую связь между ними, т.е. при достижении q_κ у оболочки становится возможным существование серии различных состояний равновесия, отличных от начального безмоментного.

При других вариантах граничных условий на торцах сжатой в осевом направлении цилиндрической оболочки решение задачи устойчивости значительно усложняется. Однако выполненные исследования показали, что если на торцах оболочки не допускаются перемещения w и v , то для тонкой и достаточно длинной изотропной цилиндрической оболочки q_κ практически не зависит от остальных граничных условий и определяется полученной выше формулой.

Устойчивость цилиндрической оболочки, нагруженной равномерным внешним давлением p . В этом случае в начальном безмоментном состоянии внутренние силы $T_1 = 0$, $T_2^0 = -pR$, $S^0 = 0$. Для не слишком коротких оболочек простое и надежное решение дает полубезмоментная теория оболочек (см. п. 9.6.3). Рассмотрев условия равновесия элемента оболочки в отклоненном от начального состоянии и удерживая только первые степени бифуркационных перемещений, можно вместо разрешающего уравнения (9.6.17) получить однородное линейаризованное уравнение

$$B_1 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + \frac{D_2}{R^6} \left(\frac{\partial^8 \Phi}{\partial \varphi^8} + 2 \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \varphi^6} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \varphi^4} \right) +$$

$$+ \frac{p}{R^3} \left(\frac{\partial^6 \Phi}{\partial \varphi^6} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \varphi^4} \right) = 0, \tag{9.12.13}$$

где B_1 и D_2 - соответственно жесткость стенки оболочки на осевое растяжение-сжатие и изгибная жесткость стенки оболочки в окружном направлении.

В случае замкнутой в окружном направлении оболочки с произвольными, но постоянными по всему контуру каждого из торцов граничными условиями решение уравнения (9.12.13) можно искать в виде

$$\Phi = X(x) \sin n\varphi; \quad n = 2, 3, \dots \tag{9.12.14}$$

Тогда обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^4 X(x)}{dx^4} - \frac{\lambda^4}{R^4} X(x) = 0, \tag{9.12.15}$$

где

$$\lambda^4 = \frac{Rn^4(n^2 - 1)}{B_1} \left[p - \frac{(n^2 - 1)D_2}{R^3} \right]. \tag{9.12.16}$$

Дальнейшее решение не составляет особого труда: при заданных на торцах граничных условиях из уравнения (9.12.15) находится первое собственное значение λ_1 и соответствующие ему собственные значения давления

$$p_n = \frac{(n^2 - 1)D_2}{R^3} + \frac{B_1}{R} \frac{\lambda_1^4}{n^4(n^2 - 1)}. \tag{9.12.17}$$

При фиксированных параметрах оболочки, подобрав из условия минимума величины p_n число окружных волн n_k , находится критическое значение внешнего давления p_k .

Если на обоих торцах оболочки заданы граничные условия свободного опирания, то $\lambda_1 = \pi R / l$. Тогда из (9.12.17) при $l / R \rightarrow \infty$ ($n=2$) следует важная формула для критического давления длинной трубы

$$p_k^\infty = 3D_2 / R^3. \tag{9.12.18}$$

В частности, для изотропной оболочки

$$p_k^\infty = \frac{E}{4(1 - \mu^2)} \left(\frac{h}{R} \right)^3. \tag{9.12.19}$$

В общем случае, как уже отмечалось, n_k следует находить подбором из условия минимума p_n . Однако при $n^2 \gg 1$ можно условно считать величину n^2 изменяющейся непрерывно и аналитически получить

$$p_{k0} = \frac{4 \pi R}{3 l} \left(\frac{3D_2}{R^3} \right)^{1/4} \sqrt[4]{\frac{R^2 B_1}{27 D_2}}. \tag{9.12.20}$$

Для изотропной оболочки формула (9.12.20) сводится к формуле П. Ф. Папковича (при $\mu=0,3$):

$$p_{k0} = 0,92E \frac{R}{l} \left(\frac{h}{R} \right)^{5/2}. \tag{9.12.21}$$

Аналогичное решение нетрудно найти и при других граничных условиях. Например, если оба торца оболочки закреплены неподвижно, то $\lambda_1 = 1,5\pi R / l$ и $p_k = 1,5p_{k0}$, а для оболочки с одним неподвижно закрепленным торцом и полностью свободным другим $\lambda_1 = 0,6\pi R / l$ и $p_k = 0,6p_{k0}$.

Большинство реальных случаев нагружения оболочки внешним давлением сопровождается возникновением в ней осевых начальных сил. Тогда, достаточно точное решение можно получить из системы линеаризованных уравнений пологой оболочки (9.12.9). При $T_1^0 < 0$ критические сочетания внешнего давления и осевой силы хорошо аппроксимируются линейной зависимостью

$$\frac{p}{p_k} + \frac{q}{q_k} = 1,$$

где p_k и q_k - критические значения соответственно внешнего давления и осевой сжимающей нагрузки, действующих порознь.

Рассмотренные две основные задачи устойчивости цилиндрической оболочки в классической постановке допускают замкнутое аналитическое решение. Подавляющее большинство других задач устойчивости оболочек удается решить только с помощью различных приближенных методов. В настоящее время разработаны эффективные численные методы решения систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Поэтому все задачи устойчивости упругих оболочек решаются при осесимметричном начальном состоя-

нии, сводящиеся к системам таких уравнений, можно считать принципиально решенными.

9.12.4. О ПРАКТИЧЕСКОМ РАСЧЕТЕ НА УСТОЙЧИВОСТЬ КОНСТРУКЦИЙ, СОСТОЯЩИХ ИЗ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК

При классической постановке задач устойчивости пластин и оболочек исследуется поведение предельно схематизированных моделей. Возникает естественный вопрос, насколько полно и точно такие модели отражают поведение тех реальных пластин и оболочек, с которыми приходится иметь дело при расчетах.

Основное допущение, на котором базируется классическое решение задач устойчивости, состоит в полном пренебрежении начальными геометрическими неправильностями формы реальных пластин и оболочек. Именно это допущение позволяет свести задачу к однородным линеаризованным уравнениям, найти точки бифуркации начального состояния равновесия и определить критическое значение нагрузки, т.е. то значение, при превышении которого начальное состояние равновесия перестает быть устойчивым.

Реальная пластина всегда имеет те или иные начальные неправильности, поэтому нагружение пластины в ее плоскости сразу же приводит к развитию дополнительных поперечных прогибов. Если начальные отклонения формы пластины от идеально плоской невелики, то при нагрузках меньше критических дополнительные поперечные прогибы нарастают медленно и только с приближением нагрузки к критическому значению наблюдается резкий рост поперечных прогибов. Важно отметить, что на диаграмме деформирования реальной пластины отсутствуют точки бифуркации: при монотонном нарастании нагрузки происходит тоже монотонный рост поперечных прогибов.

Если закрепление краев оболочки исключает возможность чисто изгибной деформации, что обычно бывает в реальных конструкциях, то ее поведение при потере устойчивости оказывается качественно иным. Рассмотрим диаграмму деформирования цилиндрической оболочки, сжатой в осевом направлении (см. рис. 9.12.2). На диаграмме, построенной в координатах q, λ (q - интенсивность сжимающей нагрузки; λ - сближение торцов оболочки), прямая OB_1 соответствует равномерному сжатию идеально правильной оболочки, т.е. начальному безмоментному состоянию при классической постановке задачи устойчивости. Кривая $B_1B_2B_3$ характеризует за-

ритическое деформирование идеально правильной оболочки.

Деформирование реальной оболочки с неизбежно существующими начальными геометрическими несовершенствами формы описывается кривой OC_1 , с самого начала отклоняющейся от прямой OB_1 . После достижения нагрузкой значения $q_{кл}$, соответствующего предельной точке C_1 , состояние равновесия реальной оболочки перестает быть устойчивым и оболочка "хлопком" переходит в новое состояние, существенно удаленное от начального.

В теории устойчивости упругих пластин характерным является одно критическое значение нагрузки P_k , при превышении которого начальное состояние идеально правильной пластины перестает быть устойчивым. В теории устойчивости тонких упругих оболочек выделяют два характерных значения нагрузки: P_k - критическая нагрузка, после достижения которой перестает быть устойчивым начальное напряженно-деформированное состояние идеально правильной оболочки; $P_{кл}$ - нагрузка, при достижении которой происходит хлопок реальной оболочки с геометрическими несовершенствами формы.

Значение нагрузки $P_{кл}$ часто представляют в виде $P_{кл} = \kappa_{кл} \cdot P_k$, причем в ряде случаев коэффициент $\kappa_{кл} = 0,3 \dots 0,5$ [5]. Для тонких гладких оболочек коэффициент $\kappa_{кл}$ существенно зависит от форм и размеров начальных неправильностей, что приводит к принципиальным трудностям его определения. Но в рационально спроектированных силовых тонкостенных конструкциях, разрушение которых связано с потерей устойчивости, удается добиться стабильного, а иногда и близкого к единице значения коэффициента $\kappa_{кл}$. Достигается это путем использования трехслойных, вафельных, каркасированных, гофрированных оболочек, т.е. таких конструкций оболочек, в которых существенно увеличивается изгибная жесткость стенки [5].

Глава 9.13

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОБОЛОЧЕК

Динамические свойства тонкостенных конструкций определяются с использованием уравнений динамики оболочек. Они включают статические составляющие, соответствующие

соотношениям моментной теории. Вариант уравнений, который приводит к самосопряженным краевым задачам (9.6.4), особенно важен для исследования динамики.

9.13.1. УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ ОБОЛОЧЕК

В общем случае уравнения динамики оболочки в перемещениях

$$\begin{aligned} L_{11}(u) + L_{12}(v) + L_{13}(w) &= k \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \\ &- k \frac{1}{\rho h} p_1(\alpha, \beta, t); \\ L_{21}(u) + L_{22}(v) + L_{23}(w) &= k \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \\ &- k \frac{1}{\rho h} p_2(\alpha, \beta, t); \\ L_{31}(u) + L_{32}(v) + L_{33}(w) &= k \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \\ &+ k \frac{1}{\rho h} p_3(\alpha, \beta, t), \end{aligned} \quad (9.13.1)$$

где $L_{ij}(\dots)$ - операторы теории оболочек, отнесенные к линиям главных кривизн; $k = \rho(1 - \mu^2)R_0^2 / E$ и $p_i(\alpha, \beta, t)$ - нагрузка, приложенная к срединной поверхности оболочки, соответственно в направлении координатных линий и внешней нормали.

Например, для цилиндрической оболочки при рассмотрении варианта теории оболочек, изложенного в п. 9.6.4, приводящего к самосопряженным краевым задачам, операторы $L_{ij}(\dots)$ имеют вид

$$\begin{aligned} L_{11} &= \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{1 - \mu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}; \\ L_{12} = L_{21} &= \frac{1 + \mu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta}; \\ L_{13} = L_{31} &= \mu \frac{\partial}{\partial \alpha}; \\ L_{22} &= \frac{\partial^2}{\partial \beta} + \frac{1 - \mu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_{33} &= (1 + c^2) + c^2 \left(\mu \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) + \\ &+ c^2 \nabla^2 (1 + \nabla^2); \end{aligned}$$

$$L_{23} = L_{32} = \frac{\partial}{\partial \beta}; \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2};$$

$$c^2 = \frac{h^2}{12R_0^2}.$$

(9.13.2)

Для практики особое значение имеют оболочки вращения. Нагрузки, действующие на такую оболочку, перемещение точек ее срединной поверхности являются периодическими функциями координаты β с периодом 2π . Для оболочек вращения нагрузки и перемещения можно представить в виде

$$\begin{aligned} p_1(\alpha, \beta, t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \left[p_{1m}^{(1)}(\alpha, t) \cos m\beta + \right. \\ &\left. + p_{1m}^{(2)}(\alpha, t) \sin m\beta \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_2(\alpha, \beta, t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \left[p_{2m}^{(1)}(\alpha, t) \sin m\beta + \right. \\ &\left. + p_{2m}^{(2)}(\alpha, t) \cos m\beta \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_3(\alpha, \beta, t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \left[p_{3m}^{(1)}(\alpha, t) \cos m\beta + \right. \\ &\left. + p_{3m}^{(2)}(\alpha, t) \sin m\beta \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(\alpha, \beta, t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \left[u_m^{(1)}(\alpha, t) \cos m\beta + \right. \\ &\left. + u_m^{(2)}(\alpha, t) \sin m\beta \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v(\alpha, \beta, t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \left[v_m^{(1)}(\alpha, t) \sin m\beta + \right. \\ &\left. + v_m^{(2)}(\alpha, t) \cos m\beta \right]; \end{aligned}$$

$$w(\alpha, \beta, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \left[w_m^{(1)}(\alpha, t) \cos m\beta + w_m^{(2)}(\alpha, t) \sin m\beta \right], \quad (9.13.3)$$

где m - число волн упругой поверхности оболочки в окружном направлении.

В этом случае функции $u_m^{(1)}, u_m^{(2)}, v_m^{(1)}, v_m^{(2)}, w_m^{(1)}, w_m^{(2)}$, удовлетворяют системе дифференциальных уравнений, которые получаются из (9.13.1), и в оперативном виде

$$Z\bar{u} = k \frac{\partial^2}{\partial t^2} \bar{u} - k \frac{1}{\rho h} \bar{p}, \quad (9.13.4)$$

где \bar{u} - вектор столбец неизвестных функций, характеризующих перемещение срединной поверхности; \bar{p} - вектор-столбец нагрузок.

Матричный оператор Z получают из (9.13.2) после подстановки (9.13.3).

Здесь

$$Z = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix}; \quad \bar{u} = \begin{Bmatrix} u_m^{(1)} \\ v_m^{(1)} \\ w_m^{(1)} \end{Bmatrix}; \quad \bar{p} = \begin{Bmatrix} p_{1m}^{(1)} \\ p_{2m}^{(1)} \\ p_{3m}^{(1)} \end{Bmatrix}. \quad (9.13.5)$$

Для того чтобы задача (9.13.4) или в более общем случае (9.13.1) была определена, необходимо соответствующие уравнения дополнить начальными и граничными условиями. Начальные условия соответствуют заданию положения точек срединной поверхности оболочки и их скоростей в начальный момент времени $t=0$. Начальные условия применительно к (9.13.4) имеют вид

$$\bar{u} = f_1; \quad \frac{\partial}{\partial t} \bar{u} = f_2. \quad (9.13.6)$$

На каждом краю оболочки может быть задан один из видов граничных условий. В случае упругозакрепленного края ($\alpha = \text{const}$) граничные условия:

$$T_1(\alpha, \beta, t) - c_T u(\alpha, \beta, t) = 0; \\ S_1(\alpha, \beta, t) - c_S v(\alpha, \beta, t) = 0;$$

$$Q_1^*(\alpha, \beta, t) - c_Q w(\alpha, \beta, t) = 0; \\ M_1(\alpha, \beta, t) - c_M \Theta_1(\alpha, \beta, t) = 0, \quad (9.13.7)$$

где T_1, S_1, Q_1^* - соответственно продольные и сдвигающие силы, возникающие в срединной поверхности, и обобщенные (в смысле Кирхгоффа) перерезывающие силы; M_1 - погонный изгибающий момент; c_T, c_S, c_Q, c_M - коэффициенты жесткости упругих связей, накладываемые извне на торцовые сечения оболочки.

В предположении, что все величины c_T, \dots, c_M равны нулю, получены граничные условия для свободных торцов оболочки, а при бесконечно больших значениях жесткостей приведены к граничным условиям для жесткой заделки. Оба варианта граничных условий относятся к крайним случаям. Все остальные виды граничных условий можно получить, задавая c_T, c_S, c_Q, c_M из интервала значений $0 \leq c \leq \infty$. Наиболее распространены следующие граничные условия: для опертого края, свободного в направлении α .

$$w = M_1 = T_1 = v = 0; \quad (9.13.8)$$

для заделки

$$u = \Theta_1 = v = w = 0; \quad (9.13.9)$$

для свободного края

$$T_1 = S_1 = Q_1^* = M_1 = 0. \quad (9.13.10)$$

9.13.2. СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОБОЛОЧЕК

Решение задачи о собственных колебаниях является важным этапом исследований динамики конструкций. Исследования их позволяют определить резонансные частоты, а знание собственных частот и форм колебаний дает возможность определить реакцию оболочки на внешние нагрузки.

Уравнения собственных колебаний оболочки могут быть получены из уравнений (9.13.1), (9.13.4), если положить $\bar{p} = 0$ и представить вектор $u(\alpha, \beta, t)$ в виде

$$\bar{u}(\alpha, \beta, t) = \bar{U}(\alpha, \beta) e^{i\omega t}. \quad (9.13.11)$$

Пусть Z - оператор теории оболочки, порождаемый соответствующими дифференциальными уравнениями и граничными условиями, так что совокупность уравнений и краевых условий можно представить в виде

$$Z(\bar{U}) = \lambda \bar{U}, \quad \lambda = k\omega^2 = \frac{\rho(1-\mu^2)R_0^2}{E} \omega^2. \quad (9.13.12)$$

Введем вещественное гильбертово пространство H , элементы которого суть векторы \bar{U} , определенные в точках срединной поверхности S оболочки. Определим скалярное произведение и их нормы в H формулами

$$(\bar{U}', \bar{U}'') = \int (U'U'' + V'V'' + W'W'') ds;$$

$$\|\bar{U}'\|^2 = \int (U'^2 + V'^2 + W'^2) ds.$$

(9.13.13)

Оператор Z симметричен, т.е. если \bar{U}' и \bar{U}'' входят в область определения оператора, то

$$(Z\bar{U}', \bar{U}'') = (\bar{U}', Z\bar{U}'').$$

(9.13.14)

Если $\bar{U}' = \bar{U}'' = \bar{U}$, то

$$(Z\bar{U}, \bar{U}) = 2W,$$

(9.13.15)

где W - потенциальная энергия деформации упругой оболочки.

Из (9.13.15) следует, что оператор Z положителен, при определенных ограничениях оператор Z можно считать положительно определенным.

Из симметрии и положительной определенности оператора вытекают важные свойства для собственных значений и соответствующих им векторов.

1. Частоты колебаний оболочки суть вещественные числа. Если \bar{U}_0 - собственный вектор, то для приближенного определения собственных частот колебаний оболочки

$$\lambda_0 = \frac{(Z\bar{U}_0, \bar{U}_0)}{\|\bar{U}_0\|^2}.$$

(9.13.16)

2. Совокупность всех форм колебаний оболочки образует ортогональную систему функций. Пусть λ_1, λ_2 - неравные между собой собственные значения, которые пропорциональны собственным частотам, а \bar{U}' и \bar{U}'' - соответствующие им собственные функции (формы собственных колебаний), тогда

$$(\bar{U}', \bar{U}'') = \int (U'U'' + V'V'' + W'W'') ds = 0.$$

(9.13.17)

3. Система собственных форм колебаний ортогональна по энергии оператора L , т.е.

$$(Z\bar{U}', \bar{U}'') = \int (L_{11}U' + L_{12}V' + L_{13}W')U'' ds +$$

$$+ \int (L_{21}U' + L_{22}V' + L_{23}W')V'' ds +$$

$$+ \int (L_{31}U' + L_{32}V' + L_{33}W')W'' ds = 0.$$

(9.13.18)

Отмеченные свойства собственных частот и соответствующих им форм колебаний носят условный характер, так как дают способ построения собственных частот и соответствующих им форм, если их существование установлено другим образом.

Сформулированные свойства для собственных колебаний оболочек позволяют решить и общую задачу о вынужденных колебаниях оболочек под действием приложенных нагрузок. Например, для уравнения (9.13.4) это можно сделать следующим образом. Представить вектор \bar{U} в виде разложения в обобщенный ряд Фурье по формам собственных колебаний:

$$\bar{U} = \sum_{i=1}^{\infty} q_i(t) \bar{U}_i(\alpha, \beta).$$

(9.13.19)

Если в качестве координатных функций при использовании метода Бубнова-Галеркина принять формы собственных колебаний $\bar{U}_i(\alpha, \beta)$, то с учетом свойств, перечисленных выше, он приводит к следующим уравнениям для функций времени $q_j(t)$:

$$\|\bar{U}_j\|^2 (\ddot{q}_j + \omega^2 q_j) = Q_j(t) \quad (j = 1, 2, \dots, \infty);$$

$$Q_j(t) = \int \bar{p} \bar{U}_j ds.$$

(9.13.20)

Для каждого j это уравнение может быть решено известными методами.

9.13.3. МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ И ФОРМ КОЛЕБАНИЙ ОБОЛОЧЕК

При расчете частот и форм колебаний оболочек используют различные методы. Для некоторого класса оболочек и граничных условий могут быть получены точные решения задачи. Однако в общем случае применяют приближенные методы, связанные с расчетами на ЭВМ.

Точные методы ограниченного применения позволяют получить решение в

замкнутой форме и провести анализ влияния различных параметров на формы и частоты колебаний. Это можно продемонстрировать на примере круговой цилиндрической оболочки с шарнирно оперттыми краями, полой и замкнутой сферической оболочек.

Вариационные методы определения собственных частот и форм колебаний более универсальны и позволяют решать задачи для широкого класса граничных условий.

К вариационным методам относится метод Ритца. Потенциальная энергия деформаций тонкой упругой оболочки

$$U = 0,5 \int_s (T_1 \varepsilon_1 + T_2 \varepsilon_2 + S\gamma + M_1 \varepsilon_1 + M_2 \varepsilon_2 + 2H\varepsilon_{12}) ds, \quad (9.13.21)$$

где T_1, T_2, S, M_1, M_2, H - компоненты внутренних сил; $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{12}$ - деформации и изменения кривизн, выражающиеся через перемещения срединной поверхности.

Максимальная кинетическая энергия

$$T_{\max} = 0,5\omega^2 \int_s \rho h (U^2 + V^2 + W^2) ds. \quad (9.13.22)$$

Функционал

$$J = W - \omega^2 T. \quad (9.13.23)$$

Для определения его минимума на классе допустимых функций, удовлетворяющих кинематическим условиям на торцах оболочки, принято, что такой класс допустимых функций построен. Перемещения оболочки в виде разложений по выбранным функциям:

$$\begin{aligned} U &= \sum_{i=1}^{N_1} c_i^{(1)} \varphi_i^{(1)}(\alpha, \beta); \\ V &= \sum_{i=1}^{N_2} c_i^{(2)} \varphi_i^{(2)}(\alpha, \beta); \\ W &= \sum_{i=1}^{N_3} c_i^{(3)} \varphi_i^{(3)}(\alpha, \beta). \end{aligned} \quad (9.13.24)$$

Подстановка в (9.13.23) позволяет представить J в виде квадратичной формы относительно неизвестных c_i . Условия минимума выражения J приводят к однородной системе уравнений относительно коэффициентов c_i , матричная форма записи которой

$$(\mathbf{A} - \omega^2 \mathbf{B}) \bar{c} = 0, \quad (9.13.25)$$

где \mathbf{A} и \mathbf{B} - квадратные матрицы $N \times N$ ($N = N_1 + N_2 + N_3$); \bar{c} - вектор размерности N .

Из равенства нулю определителя этой системы следует уравнение собственных частот

$$\det \|\mathbf{A} - \omega^2 \mathbf{B}\| = 0. \quad (9.13.26)$$

Из решения (9.13.25) для каждого ω , являющегося корнем (9.13.26), получаются вектор c и в соответствии с (9.13.24) формы колебаний.

Наиболее трудным моментом при применении метода Ритца является построение координатных функций φ_i . В ряде случаев в качестве координатных функций целесообразно выбрать произведение балочных функций переменной α и синусоидальных функций переменной β :

$$\begin{aligned} \varphi_i^{(1)}(\alpha, \beta) &= c_{1i} \frac{l}{\lambda_i} F_i' \left(\frac{\lambda_i \alpha}{l} \right) \cos \frac{n\beta}{R}; \\ \varphi_i^{(2)}(\alpha, \beta) &= c_{2i} F_i \left(\frac{\lambda_i \alpha}{l} \right) \sin \frac{n\beta}{R}; \\ \varphi_i^{(3)}(\alpha, \beta) &= c_{3i} F_i \left(\frac{\lambda_i \alpha}{l} \right) \cos \frac{n\beta}{R}. \end{aligned} \quad (9.13.27)$$

При этом балочные функции должны удовлетворять граничным условиям, соответствующим рассматриваемым для оболочки.

Метод Бубнова-Галеркина, как и метод Ритца, позволяет получить приближенное решение задачи о собственных колебаниях оболочки. Согласно этому методу строится система координатных функций $\bar{U}_i(\alpha, \beta)$, удовлетворяющая как кинематическим, так и динамическим граничным условиям, в виде

$$\bar{U} = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \bar{U}_i(\alpha, \beta). \quad (9.13.28)$$

Неизвестные коэффициенты c_i определяются из условий ортогональности выражения $Z(\bar{U}) - \lambda \bar{U}$ к функциям $\bar{U}_i(\alpha, \beta)$, т.е. из уравнений

$$\int_s [Z(\bar{U}) - \lambda \bar{U}] \bar{U}_i(\alpha, \beta) ds = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (9.13.29)$$

После подстановки вместо \bar{U} разложения (9.13.28), аналогично как и в методе Ритца

ца, получаются уравнения вида (9.13.25), (9.13.26).

Требования, чтобы система координатных функций удовлетворяла граничным условиям, являются очень жесткими, что существенно усложняет решение задачи о собственных колебаниях. Построение такой системы координатных функций связано с большими трудностями и не всегда может быть просто выполнено, особенно это относится к дифференциальным операторам теории оболочек.

Рассмотрим важный класс оболочек, какими являются оболочки вращения, т.е. замкнутые оболочки по координатной линии β . Для такого класса оболочек составляющие вектора $\bar{U}(\alpha, \beta)$ можно представить в виде (9.13.3), т.е. освободиться от переменной β . В дальнейшем предполагается, что эта операция проведена и сохранены прежние обозначения. Изложим модификацию метода Бубнова-Галеркина, когда система координатных функций может не удовлетворять граничным условиям. Допустим, что граничные условия на торцах оболочки имеют вид

$$\bar{M}_j \bar{U} = 0 \quad (j = 1, 2, 3, 4, \text{ при } \alpha = \alpha, \beta), \tag{9.13.30}$$

где \bar{M}_j - векторный дифференциальный оператор.

Если на отрезке $[\alpha, \beta]$ известна некоторая полная система функций $\{\bar{\Psi}_k \alpha\}$, дифференцируемая достаточное число раз, то решение задачи можно искать в виде

$$\bar{U}(\alpha) = \sum_{i=1}^8 c_i \bar{Z}_i(\alpha) + \sum_{k=1}^N a_k \bar{\Psi}_k(\alpha), \tag{9.13.31}$$

где $\bar{Z}_i(\alpha)$ таковы, что определитель, составленный из величин $\bar{M}_i \bar{Z}_i(\alpha), \bar{M}_j \bar{Z}_i(\beta),$

$$\begin{vmatrix} \bar{M}_1 \bar{Z}_1(\alpha) & \bar{M}_1 \bar{Z}_2(\alpha) & \dots & \bar{M}_1 \bar{Z}_8(\alpha) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{M}_4 \bar{Z}_1(\alpha) & \bar{M}_4 \bar{Z}_2(\alpha) & \dots & \bar{M}_4 \bar{Z}_8(\alpha) \\ \bar{M}_1 \bar{Z}_1(\beta) & \bar{M}_1 \bar{Z}_2(\beta) & \dots & \bar{M}_1 \bar{Z}_8(\beta) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

и ни одна из функций $\bar{Z}_i(\alpha)$ не являются линейной комбинацией конечного числа функций $\bar{\Psi}_k(\alpha)$, причем $\bar{M}_j \bar{\Psi}_k \neq 0$ ($j=1, 2, \dots, 4, k=1, 2, \dots, N$ при $\alpha=\alpha, \beta$).

Выполнение граничных условий достигается путем подбора постоянных c_i так, чтобы выражение (9.13.31) удовлетворяло граничным условиям (9.13.30), т.е.

$$\sum_{i=1}^8 c_i \bar{M}_j \bar{Z}_i + \sum_{k=1}^N a_k \bar{M}_j \bar{\Psi}_k = 0 \quad (j=1, 2, 3, 4 \text{ при } \alpha=\alpha, \beta). \tag{9.13.32}$$

Коэффициенты a_k определяются из уравнений

$$\sum_{i=1}^8 c_i [\bar{Z} \bar{Z}_i - \lambda \bar{Z}_i] + \sum_{k=1}^{\infty} a_k [Z(\bar{\Psi}_k - \lambda \bar{\Psi}_k) \bar{\Psi}_m] = 0. \tag{9.13.33}$$

Скалярное произведение для оболочек вращения

$$\bar{Z} \bar{Z}_i, \bar{\Psi}_m = \int_{\alpha}^{\beta} \bar{Z} \bar{Z}_i \Psi_m A B d\alpha. \tag{9.13.34}$$

В совокупности уравнения (9.13.32), (9.13.33) образуют замкнутую систему однородных уравнений. Из равенства нулю определителя следует выражение для частот собственных колебаний оболочки, а из их решения - формы собственных колебаний.

В ряде случаев система значительно упрощается. Например, если $\bar{\Psi}_k$ является собственными функциями оператора, Z и a_m - соответствующие им собственные значения, но с другими граничными условиями, то ввиду их ортогональности уравнения (9.13.33) примут вид

$$\sum_{i=1}^8 c_i [Z_i(\bar{Z}_i - \lambda \bar{Z}_i) \bar{\Psi}_m] + a_m (a_m - \lambda) \|\bar{\Psi}_m\|^2 = 0. \tag{9.13.35}$$

В частности, для многих случаев такие решения имеют место, например, для круговой цилиндрической оболочки с шарниро-опертыми краями и свободной сферической оболочкой. В качестве функции \bar{Z}_i в некоторых случаях может быть выбрана фундаментальная система решений уравнения $L \bar{Z} = 0$. Описанный выше модифицированный метод Бубнова-Галеркина позволяет получить не только перемещения, но и силовые факторы.

Численные методы определения собственных частот и форм колебаний оболочек эффективны для решения задач произвольных оболочек, оболочек переменной толщины и подкрепленных дискретным силовым набором. С этой целью в уравнения вводятся канонические переменные

$$\begin{aligned} y_1 &= u; \quad y_2 = v; \quad y_3 = w; \quad y_4 = \Theta_1; \\ y_5 &= \frac{R_0}{B} T_1; \quad y_7 = \frac{2}{1-\mu} \frac{R_0'}{B} S^*; \quad y_6 = \frac{R_0^*}{D} M_1; \\ y_8 &= \frac{R_0^3}{D} Q_1^*; \quad B = \frac{Eh}{1-\mu^2}; \quad D = \frac{h^2 B}{12}, \end{aligned} \quad (9.13.36)$$

где $S^* Q_1^*$ - обобщенные сдвигающие и поперечные силы; Θ_1 - угол поворота касательной к контуру.

В новых обозначениях уравнения оболочки можно представить в виде

$$\frac{d\bar{Y}}{d\alpha} = \|a_{ij}(\alpha)\| \bar{Y}, \quad (9.13.37)$$

где \bar{Y} - матрица-столбец из канонических переменных; $\|a_{ij}(\alpha)\|$ - квадратная матрица 8×8 , элементы которой известны, если задано уравнение для контура оболочки.

К уравнениям (9.13.37) необходимо добавить граничные условия для торцов оболочки, которые могут быть представлены в виде

$$B_0 \bar{Y} = 0 \text{ при } \alpha = \alpha_0; \quad B_1 \bar{Y} = 0 \text{ при } \beta = \beta_0, \quad (9.13.38)$$

где B_0 и B_1 - в общем случае прямоугольные матрицы 8×4 с известными элементами.

Решение задачи (9.13.37), (9.13.38) может быть получено методом ортогональной прогонки, например, методом С. К. Годунова.

9.13.4. СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Ниже приведены частоты и формы собственных колебаний цилиндрических оболочек. Численные результаты даны для теории оболочек, изложенной в п. 9.5.4, при коэффициенте Пуассона $\mu=0,3$.

$$\omega_0 = \omega R \left[\frac{\rho(1-\mu^2)}{Eh} \right]^{1/2} 10^2 \text{ для опертой и защем-$$

ленной круговой цилиндрической оболочки приведены в табл. 9.13.1 в диапазоне безразмерных параметров ($l/R = 1 \div 10$, $R/h = 100 \div 1000$). Верхние значения соответствуют свободно опертой по торцам оболочки, нижние значения - защемленной по торцам оболочки. В скобках указаны соответствующие этим частотам значения параметра m , характеризующего число волн упругой поверхности оболочки в окружном направлении.

Для свободно опертой по торцам оболочки формы колебаний можно представить в виде

$$u = u_0 \cos \frac{k\pi}{l} x \sin m\varphi;$$

$$v = v_0 \sin \frac{k\pi}{l} x \cos m\varphi;$$

$$w = w_0 \sin \frac{k\pi}{l} x \sin m\varphi; \quad (\alpha = x; \quad \beta = R\varphi). \quad (9.13.39)$$

Уравнения для определения частот

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 + \frac{1-\mu}{2} m^2 - \lambda & \frac{1+\mu}{2} \frac{k\pi}{l} m & -\frac{k\pi}{l} \mu \\ \frac{1+\mu}{2} \frac{k\pi}{l} m & \frac{1-\mu}{2} \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 + m^2 - \lambda & -m \\ \mu \frac{k\pi}{l} & -m & c^2 \left[\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 + m^2 \right]^2 + 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

9.13.1. Минимальные частоты ω_0

l/R	R/h					
	100	200	400	600	800	1000
1	23,1 (7)	16,5 (8)	11,6 (10)	9,52(11)	8,23(12)	7,35(13)
	29,3 (7)	21,4 (9)	15,7 (12)	13,0 (13)	11,4 (14)	10,3 (15)
2	11,3 (5)	8,14(6)	6,83(7)	4,73(8)	4,10(9)	3,69(9)
	15,5 (6)	11,3 (7)	8,23(9)	6,79(10)	5,95(11)	5,31(11)
4	5,78(4)	4,14(4)	2,89(5)	2,35 (6)	2,05(6)	1,84(7)
	8,16(4)	5,86(5)	4,23(6)	3,45 (7)	2,04(8)	2,70(8)
6	3,68(3)	2,76(4)	1,93(4)	1,56 (5)	1,36(5)	1,24(5)
	5,62(4)	3,99(4)	2,83(5)	2,32 (6)	2,02(6)	1,83(7)
8	2,93(3)	1,97(3)	1,43(4)	1,16 (4)	1,05(4)	0,914(5)
	4,07(3)	2,97(4)	2,18(5)	1,73 (5)	1,54(5)	1,36(6)
10	2,30(2)	1,58(3)	1,16(3)	0,941(4)	0,800(4)	0,724(4)
	3,27(3)	2,45(3)	1,68(4)	1,44 (5)	1,21 (6)	1,08 (5)

Если пренебречь тангенциальными силами инерции, то собственные частоты

$$\lambda = c^2 \left[\left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 + m^2 \right]^2 + \frac{(1 - \mu^2) \left(\frac{k\pi}{l} \right)^4}{\left[\left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 + m^2 \right]^2}. \quad (9.13.40)$$

В диапазоне безразмерных параметров $1 \leq l/R \leq 10$ для получения приближенных значений минимальных частот колебаний оболочек с защемленными торцами можно использовать формулу, аналогичную (9.13.40):

$$\lambda = c^2 \left(m^2 + \psi^2 \right)^2 + (1 - \mu^2) \frac{\psi^4}{(\psi^2 + m^2)^2},$$

$$\text{где } \psi = (1 + q) \frac{\pi R}{l}.$$

Число q определяется следующим образом:

$$q=0,3 \text{ при } 1 \leq \frac{l}{R} \leq 2;$$

$$100 \leq \frac{R}{h} \leq 200$$

$$q=0,38 \text{ при } 1 \leq \frac{l}{R} \leq 2;$$

$$100 \leq \frac{R}{h} \leq 50.$$

Для остальных значений l/R , R/h в диапазоне параметров, указанных в таблице, необходимо принять $q=0,42$.

9.13.5. СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СФЕРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

При осесимметричных колебаниях сферической оболочки исходят из уравнений, соответствующих теории, изложенной в п. 9.5.4:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{1}{L} \frac{dLu}{d\alpha} \right) + (1 - \mu)u + (1 + \mu) \frac{dw}{d\alpha} + \lambda^2 u &= 0; \\ (1 + \mu) \frac{1}{L} \frac{dLu}{d\alpha} + 2(1 + \mu)w + c^2 (\nabla^2 + & \\ + 1 + \mu) (\nabla^2 + 2)w - \lambda^2 w &= 0, \end{aligned} \quad (9.13.41)$$

где u и w - перемещения соответственно вдоль меридиана и по нормали к срединной поверхности; $L = \sin \alpha$; $c^2 = h^2 / 12R^2$; h - толщина; R - радиус срединной поверхности.

Общее решение уравнений

$$\begin{aligned} u &= \sum_{i=1}^3 \left[C_i P_{n_i}^{(1)}(\cos \alpha) + D_i Q_{n_i}^{(1)}(\cos \alpha) \right]; \\ w &= \sum_{i=1}^3 \left[A_i P_{n_i}(\cos \alpha) + B_i Q_{n_i}(\cos \alpha) \right], \end{aligned} \quad (9.13.42)$$

где A_i, \dots, D_i - произвольные постоянные; $P_{n_i}(\cos \alpha)$, $Q_{n_i}(\cos \alpha)$ - сферические функции порядка n_i .

Для оболочки без отверстий у полюсов $B_i = D_i = 0$. Из свойств сферической функции следуют уравнения, связывающие постоянные A_i и C_i , а также частоты колебаний с порядком n_i :

$$C_i = \frac{1 + \mu}{P_{n_i} - \lambda^2 - 1 + \mu} A_i; \quad P_n = (n + 1)n;$$

$$-(1 - \mu)^2 P_{n_i} + (P_{n_i} - \lambda^2 - 1 + \mu) [2(1 + \mu) +$$

$$+ c^2 (-P_{n_i} + 1 + \mu)(-P_{n_i} + 2) - \lambda^2] = 0. \quad (9.13.43)$$

Недостающие уравнения для A_i могут быть получены из граничных условий. Например, в случае, когда край ($\alpha = \alpha_0$) сферического купола защемлен, $u = w = w' = 0$, эти уравнения имеют вид

$$A_1 P_{n_1}(x_0) + A_2 P_{n_2}(x_0) + A_3 P_{n_3}(x_0) = 0;$$

$$A_1 P_{n_1}^{(1)}(x_0) + A_2 P_{n_2}^{(1)}(x_0) + A_3 P_{n_3}^{(1)}(x_0) = 0;$$

$$\sum_{i=1}^3 \eta_i A_i P_{n_i}^{(1)}(x_0) = 0, \quad (9.13.44)$$

где $x_0 = \cos \alpha_0$; $\eta_i = \frac{1 + \mu}{P_{n_i} - \lambda^2 - 1 + \mu}$.

Из равенства нулю определителя системы получается уравнение, связывающее угол раствора, купола, порядок сферических функций и частотный параметр:

$$\begin{vmatrix} P_{n_1}(x_0) & P_{n_2}(x_0) & P_{n_3}(x_0) \\ P_{n_1}^{(1)}(x_0) & P_{n_2}^{(1)}(x_0) & P_{n_3}^{(1)}(x_0) \\ \eta_1 P_{n_1}^{(1)}(x_0) & \eta_2 P_{n_2}^{(1)}(x_0) & \eta_3 P_{n_3}^{(1)}(x_0) \end{vmatrix} = 0. \quad (9.13.45)$$

Уравнения (9.13.43) - (9.13.45) дают полное решение задачи об осесимметричных колебаниях сферической оболочки. Аналогичное решение может быть найдено и для общего случая неосесимметричных колебаний.

Другой метод решения, основанный на использовании метода, изложенного в п. 9.13.3, является более эффективным.

Например, для защемленного купола

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda^2 + 1 - \mu) A_n + (1 + \mu) B_n}{P_n} P_{v_n}^{(1)}(x);$$

$$w = -\frac{1}{2c^2} C_1 + \frac{\alpha^2 B_0}{2(1 + \mu)} + C_2 P_1(x) + C_3 P_n(x) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(B_n \alpha^2 + G^2 A_n \right) \frac{P_{v_n}(x)}{(-P_n + 2)(-P_n + 1 + \mu)}, \quad (9.13.46)$$

где

$$C_3 = -\frac{P_1^{(1)}(x_0)}{P_{n^*}^{(1)}(x_0)} C_2; \quad B_0 = \frac{C_1}{1 + \mu}; \quad A_n =$$

$$= \frac{1 + \mu}{P_n - 1 + \mu - \lambda^2} B_n; \quad C_1 = \frac{1 - \mu}{2(1 - x_0)} \sin \alpha \times$$

$$\times P_1^{(1)}(x_0) \left\{ 1 - (1 + \mu) \left[\frac{\alpha^2}{2(1 + \mu)^2} - \frac{1}{2c^2} \right] \right\}^{-1} C_2;$$

$$B_n = \frac{(1 - \mu) \sin \alpha_0 P_1^{(1)}(x_0) P_{v_n} x_0}{N_{v_n} (-P_n + 2)(-P_n + 1 + \mu)} \left[1 - \right.$$

$$\left. - \frac{\xi_n^2}{(-P_n + 2)(-P_n + 1 + \mu)} \right]^{-1} C_3;$$

$$x_0 = \cos \alpha_0; \quad n^* (n^* + 1) - 1 - \mu = 0; \quad \alpha^2 =$$

$$= \frac{\lambda^2 (1 - \mu^2)}{c^2}; \quad N_{v_n} = \int_0^{\alpha_0} P_{v_n}^2(\cos \alpha) \sin \alpha d\alpha, \quad v_n -$$

корни уравнения $P_v'(\cos \alpha_0) = 0$.

В случае полусферы ($\alpha_0 = \pi/2$) уравнение частот

$$-\frac{1 - \mu}{2(1 + \mu)} \left[1 - (1 + \mu) \left(\frac{\alpha^2}{2(1 + \mu)^2} - \frac{1}{2c^2} \right) \right]^{-1} +$$

$$+ \left[\frac{1 - \mu}{2(1 + \mu)} + \frac{P_{n^*}(0)}{P_{n^*}^{(1)}(0)} \right] - (1 - \mu) \sum_{n=1}^{\infty} \left[1 - \right.$$

$$\left. \frac{\xi_n^2}{(-p_n + 2)(-p_n + 1 + \mu)} \right]^{-1} \times \times \frac{\xi_n^2 (4n + 1)(2n!)^2}{16^n (n!)^4 (-p_n + 2)(-p_n + 1 + \mu)} = 0. \tag{9.13.47}$$

В табл. 9.13.2 приведены значения двух низших безразмерных частот λ в зависимости от отношения R/h для полусферы без учета тангенциальных сил инерции.

9.13.2. Значения безразмерных частот

R/h	λ_1^m	λ_1^6	λ_2^m	λ_2^6
20	0,877	0,824	1,03	0,917
50	0,852	0,824	0,971	-
100	0,843	-	0,927	-
500	0,833	-	0,920	-
1000	0,830	0,834	0,919	0,917

Безразмерные частоты $\lambda_i^{(m)}$ получены из уравнения (9.13.47), а λ_i^6 - на основании безмоментной теории. Для $R/h \geq 100$ частоты низших тонов, полученные по моментной и безмоментной теориям, практически совпадают.

Глава 9.14

ПЛАСТИНЫ И ОБОЛОЧКИ ИЗ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

Композитными пластинами и оболочками называют плоские или искривленные тонкостенные элементы, образованные из слоев, среди которых могут быть анизотропные слои из армированных композиционных материалов, изотропные слои из металла и термопласта, слои легкого заполнителя из сот или пенопласта, эластичные прослойки из резины и других материалов. Широкое применение таких элементов в машиностроении определяется возможностью создавать конструкции с заданным комплексом свойств: механическими, теплофизическими и другими характерис-

тиками слоистых систем путем рационального выбора параметров слоев. Вывод и более полный анализ приведенных ниже уравнений прикладной теории композитных оболочек рассмотрен в литературе [11].

9.14.1. УРАВНЕНИЯ ПРИКЛАДНОЙ ТЕОРИИ КОМПОЗИТНЫХ ОБОЛОЧЕК

Геометрия слоистой оболочки, элемент которой показан на рис. 9.14.1, определяется координатной поверхностью, отстоящей на расстоянии e и s от внутренней и наружной поверхностей оболочки. Положение произвольной точки слоистой стенки определяется ортогональными криволинейными координатами α, β, z , причем координатные линии α и β совпадают с линиями кривизны координатной поверхности, а координата z отсчитывается по наружной нормали к этой поверхности. Коэффициенты первой квадратичной формы и главные радиусы кривизны координатной поверхности, соответствующие линиям α и β , обозначены через A, B и R_1, R_2 .

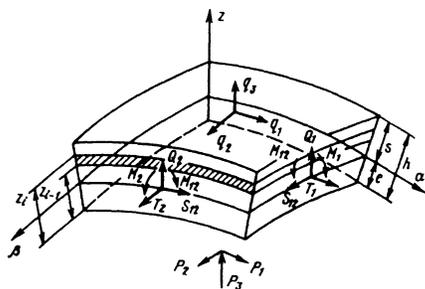


Рис. 9.14.1. Элемент слоистой оболочки

Уравнения прикладной теории включают три основные группы уравнений: равновесия, геометрические и физические, которые базируются на следующих гипотезах:

- 1) толщина стенки h мала по сравнению с главными радиусами R_1 и R_2 кривизны координатной поверхности и размерами рассматриваемого элемента конструкции;
- 2) толщина стенки в процессе деформации не меняется;
- 3) перемещения в направлениях осей α и β распределяются по толщине стенки по линейному закону;
- 4) материал слоев является ортотропным.

Уравнения равновесия, связывающие силы T, Q и моменты M , приведенные к координатной поверхности, с поверхностными p, q и объемными F силами, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 L_1(T) + \frac{AB}{R_1} Q_1 + ABf_1 &= 0; \\
 L_2(T) + \frac{AB}{R_2} Q_2 + ABf_2 &= 0; \\
 \frac{\partial}{\partial \alpha} (BQ_1) + \frac{\partial}{\partial \beta} (AQ_2) - AB \left(\frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} \right) + \\
 + ABf_3 &= 0; \\
 L_1(M) - ABQ_1 + ABm_1 &= 0; \\
 L_2(M) - ABQ_2 + ABm_2 &= 0,
 \end{aligned} \tag{9.14.1}$$

где

$$\begin{aligned}
 L_1(\Phi) &= \frac{\partial}{\partial \alpha} (B\Phi_1) - \Phi_2 \frac{\partial B}{\partial \beta} + \frac{\partial}{\partial \beta} (A\Phi_{12}) + \Phi_{12} \frac{\partial A}{\partial \beta}; \\
 L_2(\Phi) &= \frac{\partial}{\partial \beta} (A\Phi_2) - \Phi_1 \frac{\partial A}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial \alpha} (B\Phi_{12}) + \\
 + \Phi_{12} \frac{\partial B}{\partial \alpha}; \quad \Phi &= (T, M);
 \end{aligned}$$

$$f_1 = \int_{-e}^s F_1 dz + p_1 + q_1; \quad f_2 = \int_{-e}^s F_2 dz + p_2 + q_2;$$

$$f_3 = \int_{-e}^s F_3 dz + p_3 - q_3;$$

$$m_1 = \int_{-e}^s F_1 z dz + sq_1 - ep_1;$$

$$m_2 = \int_{-e}^s F_2 z dz + sq_2 - ep_2.$$

Геометрические соотношения связывают обобщенные деформации ε , ε , характеризующие растяжение, сжатие, сдвиг, изгиб и кручение координатной поверхности, углы поворота нормали к координатной поверхности Θ , осредненные по толщине стенки деформации поперечного сдвига ψ , и перемещения u , v , w точки координатной поверхности в направлении осей α , β , z :

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + A_{12} v + \frac{w}{R_1};$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + A_{21} u + \frac{w}{R_2};$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{1}{B} \frac{\partial u}{\partial \beta} - A_{12} u - A_{21} v;$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{A} \frac{\partial \Theta_1}{\partial \alpha} + A_{12} \Theta_2; \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{B} \frac{\partial \Theta_2}{\partial \beta} + A_{21} \Theta_1;$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{A} \frac{\partial \Theta_2}{\partial \alpha} + \frac{1}{B} \frac{\partial \Theta_1}{\partial \beta} - A_{12} \Theta_1 - A_{21} \Theta_2;$$

$$\Theta_1 = \psi_1 + \frac{u}{R_1} - \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha}; \quad \Theta_2 = \psi_2 + \frac{v}{R_2} - \frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta}; \tag{9.14.2}$$

$$\text{где } A_{12} = \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta}; \quad A_{21} = \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha}.$$

Завершающая группа уравнений - физические соотношения, которые связывают силы и моменты с обобщенными деформациями:

$$T_1 = B_{11}\varepsilon_1 + B_{12}\varepsilon_2 + C_{11}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2;$$

$$T_2 = B_{21}\varepsilon_1 + B_{22}\varepsilon_2 + C_{21}\varepsilon_1 + C_{22}\varepsilon_2;$$

$$T_{12} = T_{21} = S = B_{33}\varepsilon_{12} + C_{33}\varepsilon_{12};$$

$$M_1 = C_{11}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2 + D_{11}\varepsilon_1 + D_{12}\varepsilon_2;$$

$$M_2 = C_{21}\varepsilon_1 + C_{22}\varepsilon_2 + D_{21}\varepsilon_1 + D_{22}\varepsilon_2;$$

$$M_{12} = M_{21} = H = C_{33}\varepsilon_{12} + D_{33}\varepsilon_{12};$$

$$Q_1 = K_1 \psi_1; \quad Q_2 = K_2 \psi_2. \tag{9.14.3}$$

Жесткость стенки характеризуется мембранными B , смешанными C , изгибными D и сдвиговыми K коэффициентами жесткости:

для тонкой стенки

$$B_{mn} = \int_{-e}^s A_{mn} dz; \quad C_{mn} = \int_{-e}^s A_{mn} z dz;$$

$$D_{mn} = \int_{-e}^s A_{mn} z^2 dz \quad (mn = 11, 12, 21, 22, 33);$$

$$K_1 = h^2 \left(\int_{-e}^s \frac{dz}{A_{44}} \right)^{-1}; \quad K_2 = h^2 \left(\int_{-e}^s \frac{dz}{A_{55}} \right)^{-1};$$

для тонкой слоистой стенки

$$B_{mn} = I_{mn}^{(0)}; \quad C_{mn}^{(1)} = I_{mn}^{(1)} e I_{mn}^{(0)};$$

$$D_{mn} = I_{mn}^{(2)} - 2eI_{mn}^{(1)} + e^2I_{mn}^{(0)}, \quad (9.14.4)$$

где

$$I_{mn}^{(r)} = \frac{1}{r+1} \sum_{i=1}^k A_{mn}^{(i)} (z_i^{r+1} - z_{i-1}^{r+1})$$

$$(r = 0, 1, 2; z_0 = 0, z_k = h);$$

$$K_1 = h^2 \left(\sum_{i=1}^k \frac{z_i - z_{i-1}}{A_{44}^{(i)}} \right)^{-1};$$

$$K_2 = h^2 \left(\sum_{i=1}^k \frac{z_i - z_{i-1}}{A_{55}^{(i)}} \right)^{-1};$$

k - число слоев; z_i - координата i -го слоя, равная расстоянию от внутренней поверхности оболочки до наружной поверхности i -го слоя.

Величины $A_{mn}^{(i)}$ ($mn=11, 12, 21, 22, 33, 44, 55$) являются коэффициентами жесткости материала i -го слоя.

Для изотропного слоя

$$A_{11} = A_{22} = \bar{E}; A_{12} = A_{21} = \mu\bar{E}; A_{33} = A_{44} = A_{55} = G,$$

$$\text{где } \bar{E} = E / (1 - \mu^2); G = E / 2(1 + \mu).$$

Для слоя из композиционного материала с углами армирования $\pm\varphi$;

$$A_{11} = \bar{E}_1 \cos^4 \varphi + \bar{E}_2 \sin^4 \varphi + 2(\mu_{12} \bar{E}_1 + 2G_{12}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi;$$

$$A_{22} = \bar{E}_1 \sin^4 \varphi + \bar{E}_2 \cos^4 \varphi + 2(\mu_{12} \bar{E}_1 + 2G_{12}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi;$$

$$A_{12} = A_{21} = \mu_{12} \bar{E}_1 + [\bar{E}_1 + \bar{E}_2 - 2(\mu_{12} \bar{E}_1 + 2G_{12})] \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi;$$

$$A_{33} = (\bar{E}_1 + \bar{E}_2 - 2\mu_{12} \bar{E}_1) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + G_{12} \cos^2 2\varphi;$$

$$A_{44} = G_{13} \cos^2 \varphi + G_{23} \sin^2 \varphi;$$

$$A_{55} = G_{13} \sin^2 \varphi + G_{23} \cos^2 \varphi,$$

где $\bar{E}_{1,2} = \bar{E}_{1,2} / (1 - \mu_{12}\mu_{21})$; направление 1, составляющее в чередующихся элементарных слоях углы $\pm\varphi$ с осью α , совпадает с направлением волокон; направление 2 ортогонально направлению волокон; направление 3 ортогонально слою (т.е. параллельно оси z).

Формулы (9.14.4) включают положение координатной поверхности, соответствующим выбором которой можно обратить в нуль смешанные жесткости, т.е. потребовать выполнения уравнений

$$C_{mn} = I_{mn}^{(1)} - eI_{mn}^{(0)} = 0 \quad (mn = 11, 12, 22, 33). \quad (9.14.5)$$

В общем случае эти четыре уравнения являются несовместными, т.е. координатной поверхности, позволяющей одновременно обратить в нуль все смешанные жесткости, в общем случае не существует. Наиболее простые зависимости получаются, если в равенствах (9.14.4) принять $e=0$, т.е. совместить координатную поверхность с внутренней поверхностью оболочки.

Условия $C_{mn}=0$ всегда можно выполнить, если структура тонкой стенки симметрична относительно срединной поверхности, разделяющей толщину пополам. В этом случае решение уравнений (9.14.5) имеет вид $e=h/2$, т.е. координатная поверхность совпадает с срединной поверхностью, и равенства (9.14.4) упрощаются следующим образом:

$$B_{mn} = 2 \sum_{i=1}^{k/2} A_{mn}^{(i)} (z_{0i} - z_{0i-1});$$

$$C_{mn} = 0; D_{mn} = \frac{2}{3} \sum_{i=1}^{k/2} A_{mn}^{(i)} (z_{0i}^3 - z_{0i-1}^3),$$

где $z_{0i} = z_i - (h/2)$; $k/2$ - число слоев, лежащих с одной стороны от срединной поверхности.

Если число слоев в стенке нечетное, то первый слой ($i=1$), срединная поверхность которого совпадает с срединной поверхностью оболочки, условно разделяется этой поверхностью на два слоя.

При соответствующем задании коэффициентов жесткости соотношения (9.14.3) позволяют описать широкий класс композитных элементов конструкций. В частности, если стенка включает жесткие несущие слои и слои заполнителя (из сот, пенопласта, резины и

других материалов с низкой жесткостью), то для несущих слоев можно не учитывать деформации поперечного сдвига, принимая $A_{44} \rightarrow \infty$, $A_{55} \rightarrow \infty$, а для слоев заполнителя можно не учитывать жесткости в плоскости несущего слоя, принимая $A_{11}=A_{12}=A_{22}=A_{33}=\infty$. Если стенка подкреплена регулярно и часто расположенными одинаковыми ребрами, то элементы ребер с одинаковой высотой (например, полки, стенки и т.д.) можно заменить условными слоями, толщина которых равна реальной высоте соответствующего элемента ребра. Такой условный слой обладает приведенными жесткостями, зависящими от направления, площади сечения ребер и расстояния между ними.

Пусть, например, ребра направлены по оси, совпадающей с направлением α , имеют модуль упругости и модуль сдвига E_p , G_p , прямоугольное сечение с высотой h и шириной b и расположены на расстоянии a между собой. Тогда условный слой, моделирующий ребра, обладает толщиной h и следующими жесткостями: $A_{11}=E_p b/a$, $A_{12}=A_{21}=A_{33}=\infty$, $A_{44}=G_p b/a$, $A_{55} \rightarrow \infty$.

Система уравнений (9.14.1) - (9.14.3) является полной (она содержит 21 уравнение и включает столько же неизвестных функций T , M , Q , ε , ε , Θ , ψ , u , v , w) и имеет десятый порядок по переменным α и β . Соответствующий вариационный функционал Лагранжа, лежащий в основе многих прикладных методов расчета, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \delta L = & \iint (T_1 \delta \varepsilon_1 + T_2 \delta \varepsilon_2 + S \delta \varepsilon_{12} + Q_1 \delta \psi_1 + \\ & + Q_2 \delta \psi_2 + M_1 \delta \varepsilon_1 + M_2 \delta \varepsilon_2 + H \delta \varepsilon_{12} - \\ & - f_1 \delta u - f_2 \delta v - f_3 \delta w - m_1 \delta \Theta_1 - \\ & - m_2 \delta \Theta_2) AB d\alpha d\beta = 0. \end{aligned}$$

Исключая ε , ε , φ с помощью геометрических соотношений (9.14.2), варьируя по кинематическим переменным u , v , w , Θ_1 , Θ_2 , можно получить пять уравнений равновесия (9.14.1) и следующие естественные граничные условия:

на краю $\alpha = \text{const}$

$$T_1 \delta u = 0, \quad S \delta v = 0, \quad Q_1 \delta w = 0,$$

$$M_1 \delta \Theta_1 = 0, \quad H \delta \Theta_2 = 0;$$

на краю $\beta = \text{const}$

$$T_2 \delta v = 0, \quad S \delta u = 0, \quad Q_2 \delta w = 0,$$

$$M_2 \delta \Theta_2 = 0, \quad H \delta \Theta_1 = 0.$$

Эти соотношения позволяют выразить кинематические, статические или смешанные граничные условия. Например, если край $\alpha = \text{const}$ жестко закреплен, то в точках края $u = v = w = \Theta_1 = \Theta_2 = 0$; если край свободен, то $T_1 = S = Q_1 = M_1 = H = 0$; если на краю реализуются условия свободного опирания, то

$$T_1 = v = w = M_1 = \Theta_2 = 0.$$

Если найдено решение системы (9.14.1) - (9.14.3), т.е. определены функции T , M , Q , ε , ε , Θ , ψ , u , v , w , удовлетворяющие заданным граничным условиям, то далее в любой точке оболочки:

перемещения вдоль осей

$$u = u(\alpha, \beta) + z \Theta_1(\alpha, \beta); \quad v = v(\alpha, \beta) + z \Theta_2(\alpha, \beta);$$

$$w = w(\alpha, \beta);$$

деформации

$$e_1 = \varepsilon_1 + z \varepsilon_1; \quad e_2 = \varepsilon_2 + z \varepsilon_2; \quad e_{12} = \varepsilon_{12} + z \varepsilon_{12};$$

напряжения в слоях

$$\sigma_1 = A_{11} e_1 + A_{12} e_2; \quad \sigma_2 = A_{21} e_1 + A_{22} e_2;$$

$$\tau_{12} = A_{33} e_{12}; \quad (9.14.6)$$

межслоевые касательные и нормальные напряжения

$$\begin{aligned} \tau_{1z} = & -\frac{1}{A^2 B} \int_{-e}^z A \frac{\partial}{\partial \alpha} (B \sigma_1) + \frac{\partial}{\partial \beta} (A^2 \tau_{12}) - \\ & - \sigma_2 A \frac{\partial B}{\partial \alpha} + F_1 A^2 B \Big] dz - p_1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{2z} = & -\frac{1}{AB^2} \int_{-e}^z B \frac{\partial}{\partial \beta} (A \sigma_2) + \frac{\partial}{\partial \alpha} (B^2 \tau_{12}) - \\ & - \sigma_1 B \frac{\partial A}{\partial \beta} + F_2 AB^2 \Big] dz - p_2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma = & -\frac{1}{AB} \int_{-e}^z \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} (B \tau_{1z}) + \frac{\partial}{\partial \beta} (A \tau_{2z}) - \right. \\ & \left. - AB \left(\frac{\sigma_1}{R_1} + \frac{\sigma_2}{R_2} \right) + F_z AB \right] dz - p. \end{aligned}$$

Приведенные выше уравнения относятся к оболочкам произвольной формы. Среди

композитных оболочек наибольшее распространение получили оболочки вращения, изготавливаемые способом непрерывной намотки. Если за координату α принять угол между нормалью к поверхности и осью вращения, а за координату β - полярный угол в поперечном (ортогональном оси) сечении, то для описания оболочек вращения в общих уравнениях следует принять $A_1 = R_1$, $A_2 = r$, $R_2 = r / \sin \alpha$ (где R_1 - радиус кривизны меридиана, а r - радиус параллели). Для цилиндрической оболочки, координатная поверхность которой имеет радиус R , координату α следует заменить на осевую координату x и принять $A_1 = 1$, $A_2 = R$, $R_1 \rightarrow \infty$, $R_2 = R$. Для пластины, координатная плоскость которой отнесена к декартовым координатам x , y , следует принять $A_1 = 1$, $A_2 = 1$, $R_1 \rightarrow \infty$, $R_2 \rightarrow \infty$.

9.14.2. ОБОЛОЧКИ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

Возможность сравнительно просто изменять толщину стенки конструкции является существенным преимуществом композиционных материалов по сравнению с металлами и композитные оболочки часто имеют переменную толщину. Пусть уравнения внутренней и наружной поверхностей оболочки, элемент которой показан на рис. 9.14.1, имеют вид $z = s(\alpha, \beta)$, $z = -e(\alpha, \beta)$. При $s = \text{const}$ и $e = \text{const}$ оболочка имеет постоянную толщину, что было рассмотрено выше. При принятых малых углах между касательными к поверхностям оболочки и координатными линиями α , β

$$\left(\begin{aligned} \eta_1 &= \frac{1}{A} \frac{\partial s}{\partial \alpha}; \quad \eta_2 = \frac{1}{B} \frac{\partial s}{\partial \beta}; \quad \zeta = \frac{1}{A} \frac{\partial e}{\partial \alpha}; \quad \zeta_2 = \\ &= \frac{1}{B} \frac{\partial e}{\partial \beta} \end{aligned} \right) \text{ для описания оболочек переменной}$$

толщины в системе (9.14.1) - (9.14.3) необходимо осуществить следующие изменения.

В уравнениях равновесия (9.14.1) задать нагрузки в виде

$$f_1 = \int_{-e(\alpha, \beta)}^{s(\alpha, \beta)} F_1 dz + p_1 + q_1 + p\zeta_1 + q\eta_1;$$

$$f_2 = \int_{-e(\alpha, \beta)}^{s(\alpha, \beta)} F_2 dz + p_2 + q_2 + p\zeta_2 + q\eta_2;$$

$$f_3 = \int_{-e(\alpha, \beta)}^{s(\alpha, \beta)} F_3 dz + p - p_1\zeta_1 - p_2\zeta_2 - q + p_1\eta_1 + q_2\eta_2;$$

$$m_1 = \int_{-e(\alpha, \beta)}^{s(\alpha, \beta)} F_1 z dz + s(q_1 + q\eta_1) - e(p_1 + p\zeta_1);$$

$$m_2 = \int_{-e(\alpha, \beta)}^{s(\alpha, \beta)} F_2 z dz + s(q_2 + q\eta_2) - e(p_2 + p\zeta_2).$$

В равенствах (9.14.4) для коэффициентов жесткости учесть, что e и координаты слоев z_i зависят от α и β .

9.14.3. УРАВНЕНИЯ ТЕРМОУПРУГОСТИ

Композиционные материалы обладают, как правило, низкой теплопроводностью и часто используются в конструкциях, подвергающихся кратковременному поверхностному нагреву, без специального теплозащитного покрытия. Одни композиты (на основе углеродной и керамической матриц) предназначены для работы в условиях интенсивного нагрева, другие (на основе минеральных волокон) используются для образования теплозащитных слоев. Температурное воздействие часто является расчетным для оболочек из композиционных материалов и должно быть отражено в описывающих эти оболочки уравнениях.

При наличии температурного воздействия соотношения (9.14.6) обобщаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= A_{11}e_1 + A_{12}e_2 - A_{1T}T^0; \\ \sigma_2 &= A_{21}e_1 + A_{22}e_2 + A_{2T}T^0; \\ \tau_{12} &= A_{33}e_{12}, \end{aligned} \quad (9.14.7)$$

где T^0 - температура, отсчитываемая от некоторого начального значения, при котором температурные напряжения считаются равными нулю; A_{1T} , A_{2T} - коэффициенты, зависящие от упругих характеристик и коэффициентов линейного температурного расширения α_T .

$$\text{Для изотропного слоя } A_{1T} = A_{2T} = \bar{E}\alpha_T(1 + \mu).$$

В случае композитного слоя, армированного под углами $\pm\varphi$ по отношению к оси α ,

$$A_{1T} = \bar{E}_1(\alpha_{T1} + \mu_{12}\alpha_{T2})\cos^2\varphi + \bar{E}_2(\alpha_{T2} + \mu_{21}\alpha_{T1})\sin^2\varphi;$$

$$A_{2T} = \bar{E}_1(\alpha_{T1} + \mu_{12}\alpha_{T2})\sin^2\varphi + \bar{E}_2(\alpha_{T2} + \mu_{21}\alpha_{T1})\cos^2\varphi.$$

Индексы 1 и 2 в правых частях уравнений относятся к направлениям соответственно вдоль и поперек волокон.

С учетом (9.14.7) физические соотношения (9.14.3) включают дополнительные слагаемые

$$T_1^T = T_1 - B_{1T}; \quad T_2^T = T_2 - B_{2T};$$

$$S^T = S; \quad M_1^T = M_1 - D_{1T}; \quad M_2^T = M_2 - D_{2T};$$

$$H^T = H; \quad Q_1^T = Q_1; \quad Q_2^T = Q_2.$$

(9.14.8)

Силы и моменты, не имеющие верхнего индекса "Т", связаны с обобщенными деформациями соотношениями (9.14.3), а температурные составляющие определяются равенствами

$$B_{1T} = \int_{-e}^s A_{1T} T^0 dz; \quad B_{2T} = \int_{-e}^s A_{2T} T^0 dz;$$

$$D_{1T} = \int_{-e}^s A_{1T} T^0 z dz; \quad D_{2T} = \int_{-e}^s A_{2T} T^0 z dz.$$

Для тонкой слоистой оболочки, считая, что температура i -го слоя не меняется по его толщине,

$$B_{mT} = I_{mT}^{(0)}; \quad D_{mT} = I_{mT}^{(1)} - eI_{mT}^{(0)},$$

где

$$I_{mT}^{(r)} = \frac{1}{r+1} \sum_{i=1}^k A_{mT}^{(i)} T_i^0 (z_i^{r+1} - z_{i-1}^{r+1})$$

$$(m = 1, 2; \quad r = 0, 1).$$

Уравнения равновесия имеют вид (9.14.1), только силы и моменты заменяются силами и моментами с верхним индексом "Т", которые определяются равенствами (9.14.8). Геометрические соотношения (9.14.2) не изменяются.

Некоторые типы композиционных материалов обладают свойством гигроскопичности. Под воздействием влажности W они испыты-

вают линейное расширение, определяемое коэффициентом α_W . Уравнения, учитывающие воздействие влаги на композитные оболочки, получаются из приведенных выше, если заменить T на W .

9.14.4. НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Конструкционные композиционные материалы, как правило, считаются линейно-упругими и не допускают больших деформаций, т.е. их использование обычно приводит к получению жестких конструкций, для описания которых могут быть привлечены линейные уравнения, приведенные выше. Однако для композитных оболочек характерен один вид нелинейности, связанный с особенностями композиционных материалов. В связи с высокой прочностью материала стенки оболочки, спроектированной по условию прочности, часто оказывается достаточно тонкой и допускает изгибные деформации, приводящие к заметному изменению радиусов кривизны оболочки. Для приближенного учета этого эффекта третье уравнение равновесия (9.14.1) необходимо заменить следующим:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}(BQ_1) + \frac{\partial}{\partial \beta}(AQ_2) - AB \left[T_1 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{A} \frac{\partial \Theta_1}{\partial \alpha} \right) + S \left(\frac{1}{A} \frac{\partial \Theta_2}{\partial \alpha} + \frac{1}{B} \frac{\partial \Theta_1}{\partial \beta} \right) + T_2 \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{B} \frac{\partial \Theta_2}{\partial \beta} \right) \right] + ABf_3 = 0,$$

(9.14.9)

где $\Theta_1 = \frac{u}{R_1} - \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha}$ и $\Theta_2 = \frac{v}{R_2} - \frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta}$ - углы поворота касательных к осям соответственно α и β .

Все остальные уравнения системы (9.14.1) - (9.14.3) остаются без изменения. Естественные граничные условия следующие: на краю $\alpha = \text{const}$

$$T_1 \delta u = 0; \quad S \delta v = 0; \quad (Q_1 - T_1 \omega_1 - S \omega) \delta w = 0;$$

$$M_1 \delta \Theta_1 = 0; \quad H \delta \Theta_2 = 0;$$

на краю $\beta = \text{const}$

$$T_2 \delta v = 0; \quad S \delta u = 0; \quad (Q_2 - T_2 \omega_2 - S \omega_1) \delta w = 0;$$

$$M_2 \delta \Theta_2 = 0; \quad H \delta \Theta_1 = 0.$$

Полезной расчетной моделью является безмоментная оболочка, стенка которой не обладает изгибной жесткостью. Принимая в физических соотношениях (9.14.3) коэффициенты C и D равными нулю и учитывая нелинейную форму уравнения (9.14.9), система уравнений нелинейной безмоментной теории композитных оболочек

$$L_1(T) + ABf_1 = 0; \quad L_2(T) + ABf_2 = 0; \quad (9.14.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} = f_3 - \frac{T_1}{A} \frac{\partial \Theta_1}{\partial \alpha} - S \left(\frac{1}{A} \frac{\partial \Theta_2}{\partial \alpha} + \right. \\ \left. + \frac{1}{B} \frac{\partial \Theta_1}{\partial \beta} \right) - \frac{T_2}{B} \frac{\partial \Theta_2}{\partial \beta}; \end{aligned} \quad (9.14.11)$$

$$\begin{aligned} T_1 = B_{11}\varepsilon_1 + B_{12}\varepsilon_2; \quad T_2 = B_{21}\varepsilon_1 + B_{22}\varepsilon_2; \\ S = B_{33}\varepsilon_{12}; \end{aligned} \quad (9.14.12)$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + A_{12}v + \frac{w}{R_1};$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + A_{21}u + \frac{w}{R_2};$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{1}{B} \frac{\partial u}{\partial \beta} - A_{12}u - A_{21}v. \quad (9.14.13)$$

Обозначения для оператора L и коэффициентов A_{12} и A_{21} были приведены выше в п. 9.14.1.

9.14.5. УРАВНЕНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ

Если в тонкой оболочке или пластине под действием внешних нагрузок возникают сжимающие нормальные и касательные силы $T_1 = -T_{10}$, $T_2 = -T_{20}$, $S = -S_0$, то она может потерять устойчивость. Критическая нагрузка, при которой это происходит, определяется на основе линеаризованных уравнений устойчивости в виде

$$L_1(T) + \frac{AB}{R_1} Q_1 = 0; \quad L_2(T) + \frac{AB}{R_2} Q_2 = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} (BQ_1) + \frac{\partial}{\partial \beta} (AQ_2) - AB \left(\frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} \right) =$$

$$\begin{aligned} = AB \left[\frac{T_{10}}{A} \frac{\partial \Theta_1}{\partial \alpha} + S_0 \left(\frac{1}{A} \frac{\partial \Theta_2}{\partial \alpha} + \frac{1}{B} \frac{\partial \Theta_1}{\partial \beta} \right) + \right. \\ \left. + \frac{T_{20}}{B} \frac{\partial \Theta_2}{\partial \beta} \right]; \end{aligned}$$

$$L_1(M) - ABQ_1 = 0; \quad L_2(M) - ABQ_2 = 0.$$

Силы и моменты, входящие без нижних индексов "0", связаны с соответствующими обобщенными деформациями и с перемещениями физическими и геометрическими соотношениями (9.14.2) и (9.14.3) и соответствуют малому дополнительному возмущению, наложенному на докритическое состояние, которое определяется силами T_{10} , T_{20} , S_0 . Поскольку эти силы учитывают условия нагружения оболочки, система уравнений устойчивости, описывающая реакцию оболочки на дополнительное возмущение, и соответствующая система граничных условий являются однородными. Согласно статическому критерию устойчивости Эйлера критической будет первая (по мере того, как увеличивается внешняя нагрузка) комбинация докритических сил T_{10} , T_{20} , S_0 , при которой система уравнений устойчивости имеет отличное от тождественно нулевого (нулевое дополнительное состояние соответствует исходной докритической форме равновесия) решение, удовлетворяющее заданным граничным условиям.

9.14.6. УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ

Уравнения движения могут быть получены из уравнений равновесия (9.14.1) в результате добавления инерционных членов:

$$L_1(T) + \frac{AB}{R_1} Q_1 - AB \left(B_p \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + C_p \frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial t^2} \right) +$$

$$+ ABf_1 = 0;$$

$$L_2(T) + \frac{AB}{R_2} Q_2 - AB \left(B_p \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + C_p \frac{\partial^2 \Theta_2}{\partial t^2} \right) +$$

$$+ ABf_2 = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} (BQ_1) + \frac{\partial}{\partial \beta} (AQ_2) - AB \left(\frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} \right) -$$

$$- AB B_p \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + ABf_3 = 0;$$

$$\begin{aligned}
 L_1(M) - ABQ_1 - AB \left(C_p \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + D_p \frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial t^2} \right) + \\
 + ABm_1 = 0; \\
 L_2(M) - ABQ_2 - AB \left(C_p \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + D_p \frac{\partial^2 \Theta_2}{\partial t^2} \right) + \\
 + ABm_2 = 0.
 \end{aligned}
 \tag{9.14.14}$$

Силы и моменты связаны с деформациями, а деформации - с перемещениями физическими и геометрическими соотношениями (9.14.2) и (9.14.3). При заданных внешних нагрузках f и m уравнения описывают вынужденные колебания, а если эти нагрузки принять равными нулю, то можно найти частоты и формы свободных (собственных) колебаний оболочки.

Инерционные свойства элемента стенки определяются коэффициентом B_p , соответствующим поступательному движению элемента (перемещения u, v, w), смешанным коэффициентом C_p , связывающим поступательное и вращательное движения, и коэффициентом D_p , соответствующим повороту элемента (углам Θ_1 и Θ_2). Для тонкой оболочки:

$$B_p = I_p^{(0)}, \quad C_p = I_p^{(0)}(e_p - e),$$

$$D_p = I_p^{(2)} - e(2e_p - e)I_p^{(0)},$$

$$\text{где } e_p = \frac{I_p^{(1)}}{I_p^{(0)}}; \quad I_p^{(r)} = \int_0^h \rho z^r dz \quad (r = 0, 1, 2).$$

Для слоистой оболочки

$$I_p^{(r)} = \frac{1}{r+1} \sum_{i=1}^k \rho_i (z_i^{r+1} - z_{i-1}^{r+1}),$$

где ρ_i - плотность материала i -го слоя.

В прикладных задачах эффект связанности форм колебаний и инерцию поворота элемента стенки часто не учитывают, полагая $C_p=0$ и $D_p=0$.

Глава 9.15

ОПТИМАЛЬНЫЕ ОБОЛОЧКИ

При проектировании оболочек определяются формы, распределение толщин, характеристики подкрепляющих элементов, интенсивности и направления армирования, отве-

чающие наилучшим значениям критерия качества проекта или функции цели. Для оболочки, рассматриваемой как механическая система, в качестве функции цели обычно используются ее масса, несущая способность, перемещение под действием заданной нагрузки (жесткость), низшие частоты собственных колебаний. Наибольшее распространение получили задачи проектирования оболочек минимальной массы. Этот критерий не только является естественным для ряда областей техники (авиации, ракетостроения, космонавтики), но и часто соответствует более общим экономическим критериям (например, стоимости конструкции, затратам на ее создание и эксплуатацию).

9.15.1. ПРОЕКТИРОВАНИЕ ОБОЛОЧЕК МИНИМАЛЬНОЙ МАССЫ

В общем виде задача проектирования оболочки минимальной массы m сводится к минимизации функционала

$$m(S, h, \rho) = \int_S \rho h dS. \tag{9.15.1}$$

Варьируемыми параметрами или фазовыми переменными являются форма оболочки, площадь S ее поверхности, распределение толщины $h(S)$ и плотности $\rho(S)$ материала.

Требования, предъявляемые к конструкции, накладывают ограничения (прямые или косвенные) на варьируемые параметры оболочки

$$F_i(S, h, \rho) \leq A_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \tag{9.15.2}$$

где A_i - константы ограничений; n - число ограничений.

В конкретных задачах неравенства (9.15.2) могут объединять ограничения разных типов. Это прежде всего прочностные ограничения, формулируемые в виде ограничений на напряжения:

$$F(\sigma_{ij}) \leq A(\sigma_{ij}^0),$$

где σ_{ij} - компоненты тензора напряжений; σ_{ij}^0 - заданные константы (предельные напряжения).

Примером интегральных ограничений являются ограничения на перемещения (податливость) оболочки вида

$$\int_S w q ds \leq C,$$

где w - функция прогибов; q - распределенная по поверхности оболочки нагрузка; C - заданная константа.

Обычны также прямые ограничения на варьируемые параметры задачи, например:

$$\delta_1 \leq h(S) \leq \delta_2, \quad \rho_1 \leq \rho(S) \leq \rho_2,$$

где $\delta_1, \delta_2, \rho_1, \rho_2$ - заданные константы, ограничивающие значения функций распределения толщин и плотностей материала.

Задача минимизации функционала (9.15.1) при полном наборе ограничений (9.15.2) не имеет общего решения. При практическом проектировании оболочечных конструкций сложились два основных приближенных подхода.

Один подход связан с выделением доминирующего "активного" ограничения. В практических задачах ограничения (9.15.2) обычно не равноактивны. Опыт и интуиция проектировщика часто позволяют выделить основное доминирующее ограничение. Задача минимизации функционала (9.15.1) без ограничений (9.15.2) имеет очевидное тривиальное решение. Поэтому при единственном активном ограничении (9.15.2) оно должно выполняться как равенство. В этом случае задача (9.15.1) - (9.15.2) сводится к поиску параметров оболочки, удовлетворяющих активному ограничению как равенству. Наибольшее применение этот подход получил в задачах проектирования однородных оболочек с активным ограничением по прочности оболочки, когда задача сводится к поиску равнопрочных оболочек, среди которых находится и оболочка минимальной массы. Можно показать, что такой оболочкой является равнопрочная $F(\sigma_{ij}) = A(\sigma_{ij}^0)$ во всем объеме, равнонапряженная ($\sigma_1 = \sigma_2$, где σ_1 и σ_2 - главные напряжения) оболочка.

Другой подход связан с заменой задачи о минимизации функционала (9.15.1) с непрерывными фазовыми переменными задачей о минимизации аналогичной по физическому смыслу функции конечного числа варьируемых параметров конструкции. В последнем случае задача может быть сформулирована в терминах, так называемого, математического программирования.

9.15.2. РАВНОНАПРЯЖЕННЫЕ ОБОЛОЧКИ

Для анализа условий равновесия равнонапряженной оболочки произвольной формы, нагруженной равномерным давлением и краевыми силами, применен принцип возможных перемещений. Пусть α, β - координатные параметры оболочки. За возможные перемещения принято поле перемещений $u(\alpha, \beta)$, $v(\alpha, \beta)$ и $w(\alpha, \beta)$ при котором объем W , ограниченный оболочкой, не изменяется и краевые

силы не производят работу. Тогда работа внутренних сил на возможных перемещениях

$$\delta U = T \iint_S (\delta \epsilon_1 + \delta \epsilon_2) dS = T \delta S, \quad (9.15.3)$$

где $T = T_1 = T_2$ - силы в равнонапряженной оболочке, приходящиеся на единицу длины; $\delta \epsilon_1, \delta \epsilon_2$ - возможные приращения деформаций; δS - приращение площади поверхности оболочки.

Работа внешних сил на возможных перемещениях $\delta R = q \delta W$. Тогда

$$\delta u = \delta R = T \delta S = 0; \quad \delta S = 0 \text{ и } S \rightarrow \text{extrem.} \quad (9.15.4)$$

Таким образом, среди всех оболочек, нагруженных равномерным нормальным давлением и краевыми силами, ограничивающих заданный объем, равнонапряженная оболочка имеет минимальную площадь поверхности. Согласно принципу взаимности вариационного исчисления такие оболочки при заданной площади поверхности ограничивают наибольший объем, т.е. обладают изоэпифантными свойствами.

Из уравнения равновесия элемента равнонапряженной оболочки, нагруженной равномерным давлением при $\delta_1 = \delta_2 = \delta$, средняя кривизна поверхности оболочки

$$H = 0,5 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = 0,5q / T, \quad (9.15.5)$$

где R_1, R_2 - главные радиусы кривизны оболочки.

В частном случае оболочек постоянной кривизны $H=0$ ($q=0$). Такие поверхности, имеющие минимальную площадь среди всех поверхностей, ограниченных заданным пространственным контуром, принято называть минимальными поверхностями.

Для оболочек вращения справедливо геометрическое соотношение

$$\frac{dR_2}{d\theta} = (R_2 - R_1) \text{ctg} \theta, \quad (9.15.6)$$

где θ - угол между осью оболочки и нормалью к ее поверхности.

С учетом выражения для средней кривизны (9.15.5) и соотношения $R_2 = r / \sin \theta$ после разделения переменных в (9.15.6) и его интегрирования получается уравнение

$$Hr^2 - r \sin \theta + C = 0. \quad (9.15.7)$$

Уравнение (9.15.7) удобно для графического построения меридианов исследуемого класса оболочек вращения.

Постоянная C определяется из условия $C = r_H - Hr_H^2$ при $r = r_H \sin \theta = 1$, где r_H - максимальное значение r . При минимальном радиусе ($r = r_B$) $\sin \theta = \pm 1$. Тогда

$$H = (r_H + r_B)^{-1} \text{ или } H = (r_H - r_B)^{-1}. \quad (9.15.8)$$

Равенства (9.15.8) определяют среднюю кривизну двух типов оболочек, соединяющих цилиндрические поверхности с радиусами r_H и r_B . Они обладают изопопифантными свойствами и являются равнонапряженными, если при нагружении их внутренним давлением q к их краям приложены силы $T=0,5q/H$. Их вес минимален для такой системы нагрузок.

После подстановки в (9.15.7) очевидного геометрического соотношения

$$\sin \theta = \left[1 + (r')^2 \right]^{-1/2}, \text{ где штрихом обозначена}$$

производная по осевой координате оболочки вращения y , получено выражение, удобное для аналитического определения координат меридиана:

$$y(r^*) = \int_{r_1}^{r^*} \frac{(C^* - r^2) dr}{r \sqrt{r^2 / H^2 - (C^* - r^2)^2}}. \quad (9.15.9)$$

Интеграл в (9.15.9) может быть записан через эллиптические интегралы или взят численно. Формы меридианов, соответствующие решению уравнения (9.15.9), приведены на рис. 9.15.1.

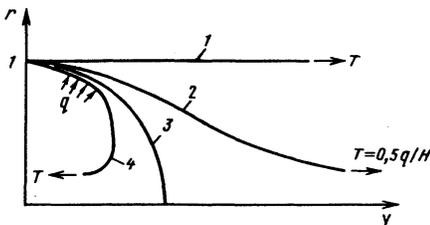


Рис. 9.15.1. Геометрия равнонапряженных оболочек, нагруженных равномерным давлением и крайними силами:

- 1 - цилиндр, $H=0,5$; 2 - нодоид;
3 - сфера, $H=1$; 4 - ундулоид

Известны другие примеры построения равнонапряженных оболочек (купола, находящегося под действием собственного веса; кап-

леобразного резервуара, воспринимающего гидростатическую нагрузку; вращающегося диска).

9.15.3. АРМИРОВАННЫЕ ОБОЛОЧКИ СОСУДОВ ДАВЛЕНИЯ

Для любого деформируемого тела, находящегося в состоянии равновесия под действием заданной системы поверхностных нагрузок, справедливо соотношение

$$\iiint_V I_1(T_{\sigma}) dV = \iint_S \bar{F} r dS, \quad (9.15.10)$$

где $I_1(T_{\sigma})$ - первый инвариант тензора напряжений; \bar{F} - вектор поверхностной нагрузки, отнесенный к единице поверхности S ; r - радиус-вектор.

Для замкнутой оболочки произвольной формы, нагруженной равномерным внутренним давлением q ,

$$\iiint_V (\sigma_1 + \sigma_2) dV = 3qW. \quad (9.15.11)$$

Объем материала оболочки сосуда давления, образованного системой ортотропных лент, минимален, если их напряженное состояние однородно и главные напряжения в лентах равны некоторым предельным (σ_1^* и σ_2^*).

Объем материала такой оболочки минимален:

$$V = 3qW / (\sigma_1^* + \sigma_2^*). \quad (9.15.12)$$

Объем материала оболочки сосуда давления, образованного системой равнонапряженных лент (9.15.12), не зависит от формы оболочки (овалоид, сфера, цилиндр, тор) и свойств материала лент. Для оболочки вращения из одного семейства равнонапряженных лент меридиональные и окружные силы T_1 и T_2 связаны с напряжениями в ленте:

$$\begin{aligned} T_1 / h &= \sigma_1^* (\cos^2 \varphi + \lambda \sin^2 \varphi); \\ T_2 / h &= \sigma_1^* (\sin^2 \varphi + \lambda \cos^2 \varphi), \end{aligned} \quad (9.15.13)$$

где $\lambda = \sigma_2^* / \sigma_1^*$.

В случае, когда ленты уложены по геодезическим линиям поверхности оболочки (рис. 9.15.2),

$$r \sin \varphi = const = a \sin \varphi_a,$$

где a - радиус экватора оболочки; φ_a - угол

между лентой и меридианом оболочки на экваторе.

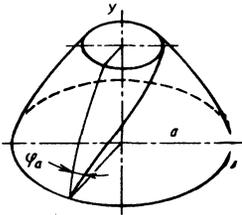


Рис. 9.15.2. Оболочка вращения, армированная лентами

Используя известные соотношения для лил в безмоментных сосудах давления

$$T_1 = 0,5qR_2 \text{ и } T_2 = T_1 / (2 - R_2 / R_1) \quad (9.15.14)$$

и выражения для радиусов кривизны, входящие в (9.15.14),

$$R_1 = - \left[1 + (y')^2 \right]^{3/2} / y'' \text{ и} \\ R_2 = -r \left[1 + (y')^2 \right]^{1/2} / y', \quad (9.15.15)$$

можно получить уравнение, определяющее форму меридиана оболочки,

$$\bar{y}(\bar{r}) = - \int_1^{\bar{r}} \frac{\bar{r}^3 d\bar{r}}{\sqrt{\left[\bar{r}^2 - (1-\lambda) \sin^2 \varphi_a \right]^{1+\lambda} - \bar{r}^6}}, \quad (9.15.16)$$

где $\bar{r} = r/a$; $\bar{y} = y/a$; $a \geq r \geq a \sin \varphi_a$; $y = 0$ и $y' = -\infty$ при $r=a$.

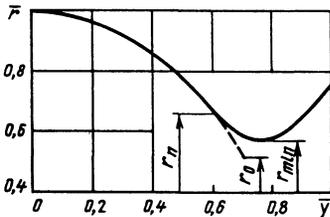


Рис. 9.15.3. Форма меридиана оболочки

Уравнение (9.15.16) при $\varphi_a \neq 0$ определяет неограниченно длинную гофрированную поверхность. Меридиан оптимальной оболочки имеет три характерные точки (рис. 9.15.3):

$\bar{r} = 1$ - максимальный радиус $(y')^{-1} = 0$;

$\bar{r} = \bar{r}_{\min}$ - минимальный радиус $(y')^{-1} = 0$;

$\bar{r} = \bar{r}_{\Pi}$ - точка перегиба меридиана;

$$\bar{r}_{\Pi} = \sqrt{\frac{3(1-\lambda)}{2-\lambda}} \sin \varphi_a.$$

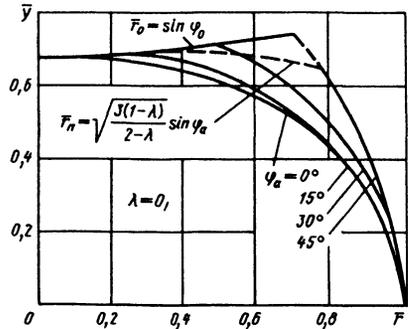


Рис. 9.15.4. Формы дна равнонапряженных сосудов давления

На практике оболочки такой формы используют в качестве дна сосудов давления. При этом для обеспечения непрерывной геодезической намотки образующую дна на участке $\bar{r} \leq \bar{r}_{\Pi}$ продолжают до $\bar{r} = \bar{r}_0 = \sin \varphi_a$. Формы дна равнонапряженных сосудов давления приведены на рис. 9.15.4.

9.15.4. ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ОБОЛОЧЕК КАК ЗАДАЧА МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Формулировка задачи оптимального проектирования конструкции как задачи математического программирования предполагает установление некоторой целевой функции G (критерия оптимальности), определяемой вектором варьируемых параметров конструкции $\bar{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}^T$, и отыскание значения \bar{X}^* , определяющего экстремальное значение этой функции при соблюдении некоторых функциональных ограничений, наложенных на компоненты вектора \bar{X} :

$$\bar{X}^* : G(\bar{X}^*) \rightarrow \text{extr}; f_k(\bar{X}) \leq A_k \quad (9.15.17) \\ (k = 1, 2, \dots, m_0).$$

Форма конструкции и ее габаритные размеры, как правило, считаются заданными и не варьируются в процессе оптимизации, а варьируемые параметры x_1, x_2, \dots, x_n представляют собой структурные характеристики различных конструктивных схем оболочек.

Целевой функцией при проектировании силовых оболочек обычно является масса конструкции, а функциональные ограничения, как правило, сводятся к обеспечению ее заданной несущей способности и конструктивно-технологической выполнимости.

Проектирование оболочек может проводиться с учетом нескольких расчетных случаев нагружения, отличающихся совокупностью компонент нагрузки. В этом случае оптимизация осуществляется с условием обеспечения заданной несущей способности во всех расчетных случаях при учете всех возможных механизмов разрушения. В результате оптимизации могут быть получены параметры конструкции, не являющейся оптимальной в каждом из отдельных случаев нагружения (недогруженной в отдельных случаях), но оптимальной по отношению к их совокупности.

Расчет несущей способности при оптимизации оболочек проводится, как правило, в предположении пропорционального нагружения конструкции в каждом расчетном случае. Ограничения, связанные с обеспечением заданной несущей способности, могут быть представлены в виде

$$P_j^{(i)}(\bar{X}) \geq P_j \quad (j = 1, 2, \dots, m_1), \quad (9.15.18)$$

где P_j - действующее значение параметра нагрузки в j -м расчетном случае (m_1 - число учитываемых расчетных случаев нагружения); $P_j^{(i)}(\bar{X})$ - предельное значение параметра нагрузки по i -му критерию исчерпания несущей способности для конструкции, определяемой текущими значениями компонент вектора \bar{X} , в j -м расчетном случае.

Каждой конструктивной схеме оболочечной конструкции может быть поставлен в соответствие набор критериев $P^{(i)}$, соответствующих различным механизмам исчерпания несущей способности (прочностное разрушение, различные формы общей и местной потери устойчивости, специфические виды разрушения).

Ограничения (9.15.18) в задачах проектирования оболочек, как правило, задаются алгоритмами. Это обуславливает необходимость численного решения задачи (9.15.17) для конкретных значений габаритов оболочки, действующих нагрузок и характеристик материалов элементов заданной конструктивной схемы. Существенно осложняет поиск возмож-

ность неединственности решения и локальных экстремумов.

К настоящему времени создано и опробовано на конкретных задачах большое число методов и разработанных на их основе алгоритмов решения задач математического программирования. В практических задачах широкое применение находят регулярные детерминированные, а также статистические методы поиска, позволяющие просто и эффективно решать задачи оптимизации при наличии целочисленных переменных, алгоритмических ограничений, локальных экстремумов.

Гладкая армированная цилиндрическая оболочка. При оптимизации многослойной цилиндрической оболочки, каждый слой которой состоит из набора одинаковых элементарных монослоев волокнистого композиционного материала (однонаправленных либо перекрестно-армированных), варьируемыми параметрами являются толщины отдельных слоев (определяемые дискретными характеристиками - числами элементарных монослоев), а также углы их ориентации :

$$\bar{X} = \{n_i, \varphi_i\}^T, \quad i = 1, 2, \dots, m_2, \quad (9.15.19)$$

где m_2 - число слоев.

Целевая функция - масса оболочки

$$G(\bar{X}) = 2\pi RL \sum_{i=1}^{m_2} n_i h_i \rho_i, \quad (9.15.20)$$

где L - длина оболочки; h_i и ρ_i - соответственно толщина элементарного монослоя и плотность материала i -го слоя.

Ограничения задачи оптимизации (9.15.18) определяются в данном случае условиями прочности и устойчивости конструкции. Прочность многослойного пакета обусловлена структурой пакета и предельными напряжениями для каждого слоя. В простейшем случае критерий разрушения может быть принят в виде

$$-F_{-1} \leq \sigma_1 \leq F_{+1}; \quad -F_{-2} \leq \sigma_2 \leq F_{+2};$$

$$|\tau_{12}| \leq F_{12},$$

где $\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12}$ - напряжения в направлении армирования монослоя, в поперечном направлении и сдвиговые; F - соответствующие пределы прочности.

Предельное значение параметра нагрузки по устойчивости многослойной оболочки в каждом расчетном случае может быть определено как произведение наименьшего из собственных значений, соответствующих различным комбинациям параметров волнообразова-

ния, на понижающий коэффициент, учитывающий влияние несовершенств реальной оболочки.

При действии на оболочку в j -м расчетном случае осевой сжимающей силы N_j и внешнего давления q_j собственные значения параметра нагрузки P_j определяются решениями уравнения

$$\det \begin{bmatrix} A - B_j P_j \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - b_{33}^{(j)} P_j \end{bmatrix} = 0. \quad (9.15.21)$$

Здесь

$$a_{11} = B_{11} \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 + B_{33} \left(\frac{n}{R} \right)^2;$$

$$a_{12} = a_{21} = (B_{12} + B_{33}) \frac{m\pi}{L} \frac{n}{R};$$

$$a_{13} = a_{31} = -\frac{m\pi}{L} \left[\frac{B_{12}}{R} + C_{11} \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 + C_{12} \left(\frac{n}{R} \right)^2 + 2C_{33} \left(\frac{n}{R} \right)^2 \right];$$

$$a_{22} = B_{22} \left(\frac{n}{R} \right)^2 + B_{33} \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2;$$

$$a_{23} = a_{32} = -\frac{n}{R} \left[\frac{B_{22}}{R} + C_{12} \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 + C_{22} \left(\frac{n}{R} \right)^2 + 2C_{33} \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \right];$$

$$a_{33} = \frac{B_{22}}{R^2} + \frac{2}{R} \left[C_{12} \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 + C_{22} \left(\frac{n}{R} \right)^2 \right] + D_{11} \left(\frac{m\pi}{L} \right)^4 + (2D_{12} + 4D_{33}) \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \left(\frac{n}{R} \right)^2 + D_{22} \left(\frac{n}{R} \right)^4;$$

$$b_{33}^{(j)} = \frac{\psi_1^{(j)}}{2\pi R} \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 + \frac{\psi_2^{(j)}}{R} \left(\frac{n}{R} \right)^2, \quad (9.15.22)$$

где $\psi_1^{(j)}, \psi_2^{(j)}$ - безразмерные коэффициенты, определяющие соотношение компонент нагрузки в j -м расчетном случае; $N_j = \psi_1^{(j)} P_j$; $q_j = \psi_2^{(j)} P_j / R^2$; m и n - числа соответственно полуовал в осевом направлении и волн по окружности для очередной собственной формы.

Величины B, C и D в (9.15.22) являются жесткостными характеристиками многослойного пакета, определяющими связь между внутренними силовыми факторами (погонные силы T и моменты M) и деформациями ε и изменениями кривизн α оболочки

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_{12} \\ M_1 \\ M_2 \\ M_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ & B_{22} & 0 \\ & & B_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ 2\alpha_{12} \end{bmatrix},$$

причем ось "1" совпадает с осью оболочки, а перекрестно-армированные слои расположены симметрично относительно этой оси.

В большинстве случаев возможно только численное решение задач оптимизации оболочек. Одним из немногих исключений является оптимизация удлиненной тонкостенной обо-

лочки (трубчатого стержня) из изотропного линейно-упругого материала при действии на нее равномерной осевой сжимающей нагрузки. Это задача об отыскании совокупности варьируемых параметров конструкции (R, h) , обеспечивающей минимальную массу:

$$G(R, h) = 2\pi L \rho R h. \quad (9.15.23)$$

Ограничения сводятся к обеспечению заданной несущей способности, определяемой наименьшей из предельных нагрузок, соответствующих различным механизмам истощения несущей способности конструкции:

прочностного разрушения

$$P \leq P_{\text{пр}} = 2\pi \sigma_{\text{в}} R h; \quad (9.15.24)$$

общей (стержневой) потери устойчивости

$$P \leq P_{\text{к}}^{\text{ст}} = \frac{\pi^2 E}{L^2} R^3 h; \quad (9.15.25)$$

местной (оболочечной) потери устойчивости

$$P \leq P_{\text{к}}^{\text{об}} = k \frac{2\pi E}{\sqrt{3(1-\mu^2)}} h^2, \quad (9.15.26)$$

где P - заданная осевая сжимающая сила; $\sigma_{\text{в}}$ - предел прочности; k - понижающий коэффициент, отражающий влияние несовершенств реальной оболочки; в практических расчетах $k=0,25\dots 0,8$.

Формула (9.15.25) справедлива для граничных условий шарнирного опирания на торцах стержня, (9.15.26) - для граничных условий, когда не допускаются окружные и радиальные перемещения и разрешены осевые смещения и поворот торцов оболочки.

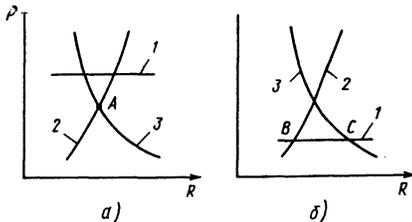


Рис. 9.15.5. Случаи взаимного расположения функций-ограничений по прочности общей и местной устойчивости

На рис. 9.15.5 показаны два возможных случая взаимного расположения функций - ограничений по прочности 1, общей 2 и местной 3 устойчивости для фиксированного значения целевой функции (9.15.23), определяющего связь двух варьируемых параметров, так что кривые построены в зависимости от одной величины R .

Решением задачи оптимизации является зависимость минимально возможной массы конструкции G_{min} от действующей на нее нагрузки P :

$$G_{\text{min}} = \frac{1,302(1-\mu^2)^{1/6} L^{5/3} \rho}{k^{1/3} E^{2/3}} P^{2/3} \text{ при}$$

$$P < \frac{4\sqrt{3(1-\mu^2)} \sigma_{\text{в}}^3 L^2}{\pi k E^2};$$

$$G_{\text{min}} = \frac{\rho L}{\sigma_{\text{в}}} P \text{ при } P > \frac{4\sqrt{3(1-\mu^2)} \sigma_{\text{в}}^3 L^2}{\pi k E^2}. \quad (9.15.27)$$

При малых значениях заданной нагрузки P , когда справедлива первая зависимость (9.15.27), конфигурация ограничений соответствует рис. 9.15.5, а, и оптимальная конструкция определяется единственной совокупностью варьируемых параметров:

$$R = 0,394 \frac{k^{1/6} L^{2/3}}{(1-\mu^2)^{1/2} E^{1/6}} P^{1/6};$$

$$h = 0,525 \frac{(1-\mu^2)^{1/4}}{k^{1/2} E^{1/2}} P^{1/2}.$$

Эти параметры соответствуют точке А.

С увеличением нагрузки P , когда выполняется второе условие (9.15.27), минимум массы конструкции достигается при любом наборе параметров R, h , соответствующем участку линии BC на рис. 9.15.5, при соблюдении условия $Rh = P / (2\pi \sigma_{\text{в}})$:

$$R \in \left[\frac{L}{\pi} \sqrt{\frac{2\sigma_{\text{в}}}{E}}; \frac{1}{\sigma_{\text{в}}} \sqrt{\frac{kEP}{2\pi\sqrt{3(1-\mu^2)}}} \right];$$

$$h \in \left[\sqrt{\frac{P\sqrt{3(1-\mu^2)}}{2\pi k E}}; \frac{P}{2\sigma_{\text{в}} L} \sqrt{\frac{E}{2\sigma_{\text{в}}}} \right].$$

Подкрепленная многослойная цилиндрическая оболочка. Варьируемыми параметрами при оптимизации подкрепленной цилиндрической оболочки наряду со структурными характеристиками многослойной обшивки являются параметры, характеризующие число, и размеры подкрепляющих элементов:

$$\bar{X} = \left\{ n_i, \varphi_i, m^{(k)}, z_l^{(k)} \right\}^T, \quad (9.15.28)$$

где $i=1,2,\dots,m_2$; $k=1,2,\dots,m_3$; $l=1,2,\dots,m_4^{(k)}$; $m^{(k)}$ - число подкрепляющих элементов k -го семейства; m_3 - число семейств подкрепляющих элементов; $z_l^{(k)}$ - величина, характеризующая размер сечения подкрепляющего элемента k -го семейства; $m_4^{(k)}$ - число варьируемых размеров сечения элемента k -го семейства.

$$G(\bar{X}) = 2\pi RL \sum_{i=1}^{m_2} n_i h_i \rho_i + \sum_{k=1}^{m_3} F_k \left(z_l^{(k)} \right) \rho_k l_k, \quad (9.15.29)$$

где $F_k \left(z_l^{(k)} \right)$ - площадь сечения подкрепляющего элемента k -го семейства, определяемая текущими значениями переменных $z_l^{(k)}$; ρ_k - плотность материала элемента; l_k - длина элемента k -го семейства.

Наиболее типичными вариантами подкрепленных оболочек являются: стрингерно-шпангоутная и со спиральными ребрами.

Ограничения (9.15.18) определяют условия прочности обшивки и подкрепляющих элементов, общей и местной устойчивости конструкции, а также наличием специфических форм разрушения, зависящих от типа подкреплений и материалов конструкции. Для стрингерно-шпангоутной оболочки условия прочности находятся в предположении о совместном деформировании обшивки и подкрепляющих ребер. Нагрузки распределяются между элементами конструкции пропорционально их жесткостям; предельное значение параметра нагрузки определяется сравнением действующих и предельных напряжений для многослойной обшивки (см. выше) и ребер.

Предельное значение параметра нагрузки по общей устойчивости оболочки может быть получено в рамках континуальной модели ("размазывание ребер") аналогично (9.15.21) с учетом жесткостных характеристик подкрепляющих элементов:

$$B_{11} = B_{11}^0 + \frac{n_1}{2\pi R} E_1 F_1; \quad B_{12} = B_{12}^0;$$

$$B_{22} = B_{22}^0 + \frac{n_2}{L} E_2 F_2; \quad B_{33} = B_{33}^0;$$

$$C_{11} = C_{11}^0 + \frac{n_1}{2\pi R} E_1 F_1 h_{01}; \quad C_{12} = C_{12}^0;$$

$$C_{22} = C_{22}^0 + \frac{n_2}{L} E_2 F_2 h_{02}; \quad C_{33} = C_{33}^0;$$

$$D_{11} = D_{11}^0 + \frac{n_1}{2\pi R} E_1 \left(J_1 + F_1 h_{01}^2 \right); \quad D_{12} = D_{12}^0;$$

$$D_{22} = D_{22}^0 + \frac{n_2}{L} E_2 \left(J_2 + F_2 h_{02}^2 \right); \quad D_{33} = D_{33}^0,$$

где B^0 , C^0 и D^0 - жесткостные характеристики многослойной обшивки относительно ее внешней поверхности; n_1, n_2 - число соответственно осевых и кольцевых ребер; E_1, F_1 и J_1 - соответственно модуль упругости, площадь и центральный момент инерции сечения продольного подкрепляющего элемента; E_2, F_2 и J_2 - соответственно модуль упругости, площадь и центральный момент инерции сечения кольцевого подкрепляющего элемента; h_{01} и h_{02} - расстояние от внешней поверхности обшивки до центра тяжести сечения соответственно продольного и кольцевого ребра.

Предельное значение параметра нагрузки может быть получено умножением верхнего критического значения на коэффициент устойчивости k .

Возможные формы местной потери устойчивости подкрепленной оболочки зависят от вида и расположения подкрепляющих элементов и способа крепления к их обшивке. Наиболее характерны такие формы, как потеря устойчивости обшивки между ребрами подкрепляющих элементов.

Местная потеря устойчивости обшивки для стрингерно-шпангоутной оболочки представляет собой потерю устойчивости прямоугольной в плане цилиндрической панели, размеры которой определяются расстоянием между соседними ребрами. Критическое значение параметра нагрузки в этом случае можно получить аналогично (9.15.21), причем в формулы (9.15.22) вместо размеров L и R подставляются величины l_1 (расстояние между соседними кольцевыми ребрами) и l_2/π (l_2 - расстояние между соседними осевыми ребрами), а величина $\psi_1^{(j)}$ пересчитывается пропорционально доле осевой силы, приходящейся на панель обшивки. Следует отметить, что во многих случаях оболочка может сохранять несущую способность и после местной потери устойчивости.

Различают два типа местной потери устойчивости подкрепляющих элементов ребер. В случае тонкостенного сечения ребра возможна потеря устойчивости полок профиля и критические напряжения потери устойчивости определяются для удлиненной пластины, сжатой вдоль длинной стороны, а граничные условия - особенностями конкретного профиля.

Если подкрепляющие элементы приклеены к обшивке (характерно, например, для композитных подкрепленных оболочек), то возможна потеря устойчивости элементов ребер с разрушением связующего слоя между обшивкой и ребром. Критические значения параметра нагрузки в этом случае зависят от величины

удельной работы разрушения γ материала связующего слоя.

Для оценки критических нагрузок местной потери устойчивости элементов продольно поперечного силового набора могут быть использованы формулы:

при потере устойчивости продольных ребер

$$P_{\text{пр}}^{(j)} = \frac{\left(A_1 \frac{k_1 E_1 J_1^*}{l_1^2} + \sqrt{2\gamma A_1 b_1} \right) E_1^0 h}{\frac{\Psi_1^{(j)}}{2\pi R} \left[1 - \frac{\mu_{12}^0 \mu_{21}^0}{1 + \frac{E_2^0 h L}{n_2 E_2 F_2}} \right] - \frac{\Psi_2^{(j)}}{R} \frac{\mu_{12}^0}{1 + \frac{n_2 E_2 F_2}{E_2^0 h L}}}; \quad (9.15.30)$$

при потере устойчивости кольцевых ребер

$$P_{\text{пр}}^{(j)} = \frac{\left(A_2 \frac{k_2 E_2 J^*}{l_2^2} + \sqrt{2\gamma A_2 b_2} \right) E_2^0 h}{\frac{\Psi_2^{(j)}}{R} \left[1 - \frac{\mu_{12}^0 \mu_{21}^0}{1 + \frac{2\pi R E_1^0 h}{n_1 E_1 F_1}} \right] - \frac{\Psi_1^{(j)}}{2\pi R} \frac{\mu_{21}^0}{1 - \frac{n_1 E_1 F_1}{2\pi R E_1^0 h}}}. \quad (9.15.31)$$

Здесь A_1 и A_2 - обобщенные характеристики соответственно осевой и окружной податливости;

$$A_1 = \frac{1}{E_1 F_1} + \frac{n_1}{2\pi R E_1^0 h} \left(1 - \frac{\mu_{12}^0 \mu_{21}^0}{1 + \frac{E_2^0 h L}{n_2 E_2 F_2}} \right);$$

$$A_2 = \frac{1}{E_2 F_2} + \frac{n_2}{L E_2^0 h} \left(1 - \frac{\mu_{12}^0 \mu_{21}^0}{1 + \frac{2\pi R E_1^0 h}{n_1 E_1 F_1}} \right);$$

b_1, b_2 - ширина соединительного слоя между обшивкой и ребром; $E_1^0, E_2^0, \mu_{12}^0, \mu_{21}^0$ - технические константы жесткости многослойной обшивки; h - ее толщина; J_1^* и J_2^* - наименьший момент инерции сечения соответственно продольного и кольцевого ребра; k_1, k_2 - коэффициенты граничных условий.

Как правило, высота ребер больше их ширины, и их изгиб происходит в касательной плоскости. В этих случаях значения k_1, k_2 зависят от конструктивного оформления места

пересечения ребер и изменяются от π^2 (шарнирное опирание) до $4\pi^2$ (жесткое защемление). Если геометрия сечения ребра такова, что изгиб происходит "из плоскости", следует принять коэффициент равным $4\pi^2$.

При проектировании оболочек со спиральными ребрами обычно делается допущение о безмоментном напряженном состоянии ребер. В этом случае напряжения в ребре σ_s и обшивке σ_1, σ_2 следующие:

$$\sigma_s^{(j)} = -\frac{P_j \xi}{2\pi R h} \left[\Psi_1^{(j)} \left(\cos^2 \alpha - \mu_{12}^0 \sin^2 \alpha \right) \times \right. \\ \left. \times E_s / E_1^0 + \Psi_2^{(j)} \frac{2\pi E_s}{E_2^0} \left(\sin^2 \alpha - \mu_{21}^0 \cos^2 \alpha \right) \right]; \\ \sigma_1^{(j)} = -\frac{P_j \xi}{2\pi R h} \left[\Psi_1^{(j)} + \frac{\tilde{E}_s}{E_2^0} \left(\sin^2 \alpha - \right. \right. \\ \left. \left. - \mu_{21}^0 \cos^2 \alpha \right) \left(\Psi_1^{(j)} \sin^2 \alpha - \pi \Psi_2^{(j)} \cos^2 \alpha \right) \right];$$

$$\sigma_2^{(j)} = -\frac{P_j \xi}{2\pi R h} \left[\pi \psi_2^{(j)} + \frac{\tilde{E}_s}{E_1^0} \left(\cos^2 \alpha - \mu_{12}^0 \sin^2 \alpha \right) \left(\pi \psi_2^{(j)} \cos^2 \alpha - \psi_1^{(j)} \sin^2 \alpha \right) \right];$$

$$\xi = \left[1 + \tilde{E}_s \left(\cos^4 \alpha / E_1^0 - 2\mu_{12}^0 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha / E_1^0 + \sin^4 \alpha / E_2^0 \right) \right]^{-1};$$

$$\tilde{E}_s = n_s E_s F_s / \pi R h \cos \alpha, \tag{9.15.32}$$

где n_s - число пар спиральных ребер; E_s и F_s - соответственно модуль упругости и площадь спирального ребра; α - угол наклона ребра к оси оболочки; положительные значения напряжений в (9.15.32) соответствуют растяже-

нию, а нагрузок при определении $\psi_1^{(j)}, \psi_2^{(j)}$ - сжатию.

Следует иметь в виду, что при увеличении угла α и уменьшении длины свободного участка ребра формулы (9.15.32) могут давать значительную погрешность ввиду неучета изгиба ребер.

Критическое значение параметра нагрузки по общей устойчивости оболочки со спиральными ребрами определяют согласно (9.15.21), причем жесткостные характеристики оболочки в (9.15.22) находят с учетом дополнительного условно-однородного слоя ребер со следующими жесткостными характеристиками:

$$B_{11}^p = \tilde{E}_s h \cos^4 \alpha; \quad B_{12}^p = \tilde{E}_s h \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha;$$

$$B_{22}^p = \tilde{E}_s h \sin^4 \alpha; \quad B_{33}^p = \tilde{E}_s h \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha.$$

Критическое значение параметра нагрузки местной потери устойчивости для оболочки со спиральными ребрами

$$P_{пр}^{(j)} = \frac{n_s^2 b_s^2 \sin^2 \alpha / 12 R \xi + 2 R \Gamma_s}{\psi_1^{(j)} \left(\cos^2 \alpha - \mu_{12}^0 \sin^2 \alpha \right) / 2 \pi h E_1^0 + \psi_2^{(j)} \left(\sin^2 \alpha - \mu_{21}^0 \cos^2 \alpha \right) / h E_2^0};$$

$$\Gamma_s = \sqrt{\gamma b_s / E_s F_s \xi},$$

(9.15.33)

где b_s - ширина спирального ребра в месте контакта с обшивкой.

Если ребра не связаны с обшивкой, то следует положить в (9.15.30), (9.15.31), (9.15.33) $\gamma=0$, что соответствует нижней оценке предельной нагрузки местной потери устойчивости элементов ребер подкрепленной оболочки.

Для композитных оболочек со спиральными ребрами, выполняемых намоткой, характерна специфическая форма разрушения ребер, связанная с расслаиванием однонаправленного материала при сжатии в направлении армирования. Предельное напряжение

$$\sigma = \frac{\pi E}{3} \left(\frac{h_0}{l} \right)^2 + 2 \sqrt{\frac{\gamma E}{h_0} \left(1 - \frac{h_0}{H} \right)}, \tag{9.15.34}$$

где γ и E - соответственно удельная работа разрушения и модуль упругости материала стержня в направлении армирования; l и H - соответственно длина и толщина участка ребра; h_0 - толщина отслаивающейся части.

Предельное значение σ получается при численной минимизации (9.15.34) по параметру h_0 . Для случая $h_0 \ll H$ можно использовать

формулу $\sigma_k = 3,64 E^{3/5} \gamma^{2/5} l^{-2/5}$, при этом $h_0 = 0,471 E^{-1/5} \gamma^{1/5} l^{4/5}$.

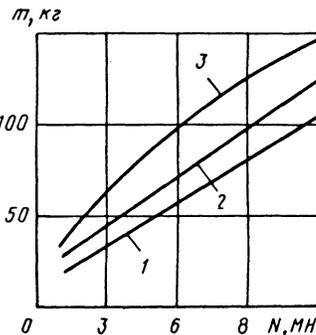


Рис. 9.15.6. Зависимость минимальной массы цилиндрических оболочек, подкрепленных спиральными ребрами, от действующих нагрузок: 1 - $R/L=0,5$; 2 - $R/L=1$; 3 - $R/L=1,5$

Оптимизационный расчет подкрепленных оболочек иллюстрируется зависимостью минимальной массы конструкции от действующих нагрузок (рис. 9.15.6).

При расчете ставились ограничения по прочности ребер и обшивки, местной устой-

чивости элементов ребер и общей устойчивости облоочки, учитывалась также возможность расслаивания материала ребер:

$$E_1=90 \text{ ГПа}, E_2=9 \text{ ГПа}, G_{12}=6,5 \text{ ГПа}, \\ \mu_{12}=0,2, F_{+1}=500 \text{ МПа}, F_{-1}=250 \text{ МПа}, \\ F_{+2}=300 \text{ МПа}, F_{-2}=150 \text{ МПа}, \\ F_2=45 \text{ МПа}, \rho=1450 \text{ кг/м}^3;$$

величины удельной работы разрушения для материалов ребер и связующего слоя принимались равными $0,1 \text{ кДж/м}^2$.

Исследование предельных зависимостей, показанных на рис. 9.15.6, и сравнение их с аналогичными зависимостями, построенными для других типов оболочек, позволяет оценить области рационального применения каждой конструктивной схемы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алфатов Н. А. Основы расчета на устойчивость упругих систем. М.: Машиностроение, 1991. 334 с.
2. Алфатов Н. А., Зиновьев П. А., Попов Б. Г. Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1984. 446 с.
3. Амбарцумян С. А., Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974. 446 с.
4. Амбарцумян С. А., Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1967, 266 с.
5. Балабух Л.И., Алфатов Н. А., Усюкин В. И. Строительная механика ракет. М.: Высшая школа, 1984. 391 с.
6. Баничук Н. В., Кобелев В. В., Рикардс Р.Б. Оптимизация элементов конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988. 224 с.
7. Бадерман В. Л. Механика тонкостенных конструкций. М.: Машиностроение, 1977. 488 с.
8. Биргер И. А. Круглые пластины и облоочки вращения. М.: Оборонгиз, 1961. 366 с.
9. Бубнов И. Г. Труды по теории пластин. М.: ГИТТЛ, 1953. 424 с.
10. Валишвили Н. В. Методы расчета оболочек вращения на ЭЦВМ. М.: Машиностроение, 1976. 278 с.
11. Васильев В. В. Механика конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988. 272 с.
12. Власов В. З. Избранные труды. М.: Изд-во АН СССР, 1962. Т. 1. 528 с.
13. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
14. Григolloк Э. И., Кабанов В. В. Устойчивость оболочек. М.: Наука, 1978. 360 с.
15. Доннел Л. Г. Балки, пластины и облоочки. М.: Наука, 1982. 567 с.
16. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 279 с.
17. Ильющин А. А. Пластичность. М.: ГИТТЛ, 1948. 376 с.
18. Кармишин А. В., Мяченков В. И., Фролов А. Н. Статика и динамика тонкостенных оболочечных конструкций. М.: Машиностроение, 1975. 376 с.
19. Качанов Л. М. Теория упругости М.: Физматгиз, 1960. 455 с.
20. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. М.: ГИТТЛ, 1957. 355 с.
21. Лурье А. И. Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
22. Ляв А. Математическая теория упругости. М.-Л.: ОНТИ, 1935. 674 с.
23. Малинин Н. Н. Расчеты на ползучесть элементов машиностроительных конструкций. М.: Машиностроение, 1981. 210 с.
24. Муштари Х. М., Галимов К. З. Нелинейная теория упругих оболочек. Казань: Таткиногиздат, 1957. 431 с.
25. Мяченков В. И., Григорьев И. В. Расчет составных оболочечных конструкций на ЭВМ. М.: Машиностроение, 1981. 216 с.
26. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Л.: Судпромгиз, 1962. 431 с.
27. Новожилов В. В. Теория упругости. Л.: Судпромгиз, 1958. 370 с.
28. Образцов И. Ф., Васильев В. В., Бунаков В. А. Оптимальное армирование оболочек вращения из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1977. 144 с.
29. Основы строительной механики ракет/Л. И. Балабух, К. С. Колесников и др. М.: Высшая школа, 1969. 496 с.
30. Постнов В. А. Численные методы расчета судовых конструкций. Л.: Судостроение, 1977. 279 с.
31. Прочность, устойчивость, колебания: Справочник. Т. 1, 2, 3/Под ред. И. А. Биргера, Я. Г. Пановко. М.: Машиностроение, 1968. 831, 463, 541 с.
32. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
33. Справочник по строительной механике корабля. Т. 2/ Г. В. Бойцов, О. М. Палий, В. А. Постнов, В. С. Чувиковский. Л.: Судостроение, 1982. 464 с.
34. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластины и облоочки. М.: Наука, 1966. 636 с.
35. Тонкостенные оболочечные конструкции: Пер. с англ. / Под ред. Э. И. Григolloка. М.: Машиностроение, 1980. 607 с.
36. Усюкин В. И. Строительная механика конструкций космической техники. М.: Машиностроение, 1988. 390 с.
37. Фялин А. П. Элементы теории оболочек. Л.: Стройиздат, 1976. 255 с.

38. Флюгге В. Статика и динамика оболочек. М., 1961. 306 с.

39. Черных К. Ф. Линейная теория оболочек. Л.: Изд-во ЛГУ, 1962. Ч. I. 374 с. Ч. II. 396 с.

40. Bruce G. Johnston. Guide to stability design criteria for metal structures//3-rd ed. John Wiley and Sons 1976. Vol. 4. 616 p.

41. Pietraczkiewicz W. Finite rotation and Lagrangian description in the non-linear theory of shells. Warszawa-Posnan//Polish scientific publishers. 1979. 103 p.

Р а з д е л 10

ТОЛСТОСТЕННЫЕ ЦИЛИНДРЫ И ДИСКИ

Глава 10.1

ЦИЛИНДРЫ С ПОСТОЯННЫМИ ПО ДЛИНЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫМИ НАГРУЗКАМИ

10.1.1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Деформации в радиальном ε_r , окружном ε_θ и осевом ε_z направлениях следующие:

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}; \quad (10.1.1)$$

$$\varepsilon_\theta = u/r; \quad (10.1.2)$$

$$\varepsilon_z = \frac{dw}{dr} = e = \text{const}, \quad (10.1.3)$$

где $u(r)$ - радиальное перемещение.

Соотношение упругости для изотропного материала:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} = (\sigma_r - \mu(\sigma_\theta + \sigma_z)) + \alpha T;$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E} = (\sigma_\theta - \mu(\sigma_z + \sigma_r)) + \alpha T; \quad (10.1.4)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} = (\sigma_z - \mu(\sigma_r + \sigma_\theta)) + \alpha T,$$

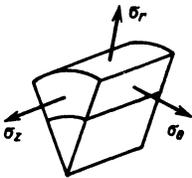


Рис. 10.1.1. Напряжения, действующие в цилиндре

где $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$ - соответственно радиальные, окружные и осевые напряжения (рис. 10.1.1); αT - температурная деформация.

Условия равновесия элемента цилиндра

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{1}{r}(\sigma_r - \sigma_\theta) + \rho\omega^2 r = 0, \quad (10.1.5)$$

где ω - частота вращения цилиндра.

При построении решения потребуются обратные соотношения упругости:

$$\sigma_r = \frac{E}{1+\mu} \varepsilon_r + \frac{3\mu E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \varepsilon - \frac{E}{1-2\mu} \alpha T; \quad (10.1.6)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1+\mu} \varepsilon_\theta + \frac{3\mu E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \varepsilon - \frac{E}{1-2\mu} \alpha T; \quad (10.1.7)$$

$$\sigma_z = \frac{E}{1+\mu} \varepsilon_z + \frac{3\mu E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \varepsilon - \frac{E}{1-2\mu} \alpha T, \quad (10.1.8)$$

где $\varepsilon = \frac{1}{3}(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z)$ - средняя деформация.

Соотношения упругости для ортотропного материала:

$$\varepsilon_r = \frac{\sigma_r}{E_r} - \mu_{r\theta} \frac{\sigma_\theta}{E_\theta} - \mu_{rz} \frac{\sigma_z}{E_z} + \alpha_r T; \quad (10.1.9)$$

$$\varepsilon_\theta = -\mu_{\theta r} \frac{\sigma_r}{E_r} + \frac{\sigma_\theta}{E_\theta} - \mu_{\theta z} \frac{\sigma_z}{E_z} + \alpha_\theta T; \quad (10.1.10)$$

$$\varepsilon_z = -\mu_{zr} \frac{\sigma_r}{E_r} - \mu_{z\theta} \frac{\sigma_\theta}{E_\theta} + \frac{\sigma_z}{E_z} + \alpha_z T. \quad (10.1.11)$$

Уравнения содержат шесть независимых параметров, так как

$$\frac{\mu_{r\theta}}{E_\theta} = \frac{\mu_{\theta r}}{E_r}, \quad \frac{\mu_{rz}}{E_z} = \frac{\mu_{zr}}{E_r}, \quad \frac{\mu_{z\theta}}{E_\theta} = \frac{\mu_{\theta z}}{E_\theta}. \quad (10.1.12)$$

Обратные соотношения упругости

$$\sigma_r = A_{11}\varepsilon_r + A_{12}\varepsilon_\theta + A_{13}\varepsilon_z - \beta_r T; \quad (10.1.13)$$

$$\sigma_\theta = A_{21}\varepsilon_r + A_{22}\varepsilon_\theta + A_{23}\varepsilon_z - \beta_\theta T; \quad (10.1.14)$$

$$\sigma_z = A_{31}\varepsilon_r + A_{32}\varepsilon_\theta + A_{33}\varepsilon_z - \beta_z T. \quad (10.1.15)$$

Здесь

$$A_{11} = \frac{E_r}{D} (1 - \mu_{\theta z} \mu_{z\theta});$$

$$A_{12} = A_{21} = \frac{E_r}{D} (\mu_{r\theta} + \mu_{rz} \mu_{z\theta});$$

$$A_{13} = A_{31} = \frac{E_r}{D} (\mu_{rz} + \mu_{r\theta} \mu_{\theta z});$$

$$A_{22} = \frac{E_\theta}{D} (1 - \mu_{rz} \mu_{zr});$$

$$A_{23} = A_{32} = \frac{E_\theta}{D} (\mu_{\theta z} + \mu_{\theta r} \mu_{rz});$$

$$A_{33} = \frac{E_z}{D} (1 - \mu_{r\theta} \mu_{\theta r});$$

$$D = 1 - 2\mu_{r\theta}\mu_{\theta z}\mu_{zr} - \mu_{r\theta}\mu_{\theta r} - \mu_{\theta z}\mu_{z\theta} - \mu_{zr}\mu_{rz}. \quad (10.1.17)$$

Температурные коэффициенты:

$$\beta_r = A_{11}\alpha_r + A_{12}\alpha_\theta + A_{13}\alpha_z; \quad (10.1.18)$$

$$\beta_\theta = A_{21}\alpha_r + A_{22}\alpha_\theta + A_{23}\alpha_z;$$

$$\beta_z = A_{31}\alpha_r + A_{32}\alpha_\theta + A_{33}\alpha_z.$$

Дифференциальное уравнение относительно $u(r)$ получается после внесения в (10.1.5) соотношений упругости и зависимостей (10.1.1) - (10.1.3).

10.1.2. ИЗОТРОПНЫЕ ЦИЛИНДРЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ДАВЛЕНИЯ НА ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЯХ И ОСЕВОЙ СИЛЫ

Краевые условия на внутреннем a и внешнем b радиусах заданы:

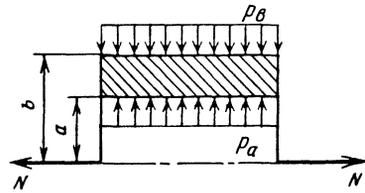


Рис. 10.1.2. Цилиндр, нагруженный давлением на цилиндрических поверхностях и осевой силой

$$\begin{aligned} \sigma_r(a) &= \sigma_{ra} = -p_a; \\ \sigma_z(b) &= \sigma_{rb} = -p_b, \end{aligned} \quad (10.1.19)$$

где p_a, p_b - давление на цилиндрических поверхностях (рис. 10.1.2).

Напряжения в изотропном цилиндре при постоянных значениях E и μ :

$$\begin{aligned} \sigma_r(r) &= p_a \frac{a^2}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right) - p_b \frac{b^2}{b^2 - a^2} \times \\ &\times \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right); \end{aligned} \quad (10.1.20)$$

$$\begin{aligned} \sigma_\theta(r) &= p_a \frac{a^2}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right) - p_b \frac{b^2}{b^2 - a^2} \times \\ &\times \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right); \end{aligned} \quad (10.1.21)$$

$$\sigma_z(r) = \frac{N}{\pi(b^2 - a^2)}. \quad (10.1.22)$$

В сплошном изотропном цилиндре

$$\sigma_r(r) = \sigma_\theta(r) = -p_b; \quad \sigma_z(r) = \frac{N}{\pi b^2}. \quad (10.1.23)$$

Упругие перемещения в изотропном цилиндре

$$\begin{aligned} u(r) &= \frac{1 - \mu}{E} \frac{a^2 p_a - b^2 p_b}{b^2 - a^2} r + \frac{1 + \mu}{E} \times \\ &\times \frac{a^2 b^2 (p_a - p_b)}{b^2 - a^2} \frac{1}{r} - \frac{\mu N}{E \pi (b^2 - a^2)} r. \end{aligned} \quad (10.1.24)$$

В сплошном цилиндре в формуле (10.1.24) следует положить $a = 0$.

10.1.3. ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ИЗОТРОПНОМ ЦИЛИНДРЕ

Температурное поле предполагается осесимметричным. Параметры упругости постоянны вдоль радиуса. Температурные напряжения в полом цилиндре при свободных торцах:

$$\sigma_{rT} = \frac{E}{1-\mu} \left[F(b) \frac{b^2}{b^2-a^2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) - F(r) \right]; \quad (10.1.25)$$

$$\sigma_{\theta T} = \frac{E}{1-\mu} \left[F(b) \frac{b^2}{b^2-a^2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) + F(r) - \alpha T \right]; \quad (10.1.26)$$

$$\sigma_{zT} = \frac{E}{1-\mu} \left[F(b) \frac{2b^2}{b^2-a^2} - \alpha T \right], \quad (10.1.27)$$

где

$$F(r) = \frac{1}{r^2} \int_a^r r\alpha T dr. \quad (10.1.28)$$

Для сплошного цилиндра:

$$\begin{aligned} \sigma_{rT} &= \frac{E}{1-\mu} [F(b) - F(r)]; \\ \sigma_{\theta T} &= \frac{E}{1-\mu} [F(b) + F(r) - \alpha T]; \\ \sigma_z &= \frac{E}{1-\mu} [2F(b) - \alpha T], \end{aligned} \quad (10.1.29)$$

где

$$F(r) = \frac{1}{r^2} \int_0^r r\alpha T dr. \quad (10.1.30)$$

На внешней поверхности цилиндра как полого, так и сплошного

$$\sigma_{\theta T}(b) = \sigma_{zT}(b). \quad (10.1.31)$$

Перемещение, связанное с нагревом цилиндра,

$$\begin{aligned} u(r) &= \frac{r}{1-\mu} \left\{ F(b) \frac{b^2}{b^2-a^2} \times \right. \\ &\times \left[1 - 3\mu + (1+\mu) \frac{a^2}{r^2} \right] + (1+\mu) F(r) \left. \right\}. \end{aligned} \quad (10.1.32)$$

Равенство (10.1.32) справедливо и для сплошного цилиндра, если положить $a = 0$.

10.1.4. НАПРЯЖЕНИЯ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ ИЗОТРОПНОМ ЦИЛИНДРЕ

При вращении цилиндра с угловой скоростью ω напряжения:

$$\sigma_{r\omega} = \frac{3-2\mu}{8(1-\mu)} \rho \omega^2 \left(a^2 + b^2 - \frac{a^2 b^2}{r^2} - r^2 \right); \quad (10.1.33)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\omega} &= \frac{3-2\mu}{8(1-\mu)} \rho \omega^2 \left(a^2 + b^2 + \frac{a^2 b^2}{r^2} - \right. \\ &\left. - \frac{1+2\mu}{3-2\mu} r^2 \right); \end{aligned} \quad (10.1.34)$$

$$\sigma_{z\omega} = \frac{\mu}{4(1-\mu)} \rho \omega^2 (a^2 + b^2 - 2r^2). \quad (10.1.35)$$

Перемещение, связанное с вращением цилиндра,

$$\begin{aligned} u(r) &= \frac{3-2\mu}{8(1-\mu)} \frac{\rho \omega^2}{E} \left[\frac{3-5\mu}{3-2\mu} (a^2 + b^2) + \right. \\ &\left. + \frac{1+\mu}{r^2} a^2 b^2 - \frac{1-\mu-2\mu^2}{3-2\mu} r^2 \right]. \end{aligned} \quad (10.1.36)$$

Для сплошного цилиндра следует положить в предыдущих формулах $a = 0$.

10.1.5. ЦИЛИНДР С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ ДЕФОРМАЦИЯМИ

Уравнения упругости:

$$\epsilon_r = \frac{1}{E} (\sigma_r - \mu(\sigma_\theta + \sigma_z)) + \epsilon_r^0; \quad (10.1.37)$$

$$\epsilon_\theta = \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \mu(\sigma_z + \sigma_r)) + \epsilon_\theta^0; \quad (10.1.38)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - \mu(\sigma_r + \sigma_\theta)) + \varepsilon_r^0, \quad (10.1.39)$$

где $\varepsilon_r^0, \varepsilon_\theta^0, \varepsilon_z^0$ - дополнительные деформации.

Сущность дополнительных деформаций не конкретизируется. Например, может рассматриваться первоначальная пластическая деформация при обдуве шариками поверхности цилиндра. Температурные напряжения получают при

$$\varepsilon_r^0 = \varepsilon_\theta^0 = \varepsilon_z^0 = \alpha T. \quad (10.1.40)$$

Напряжения :

$$\sigma_r = \frac{E}{1+\mu} \left[\frac{b^2}{b^2-a^2} \left(1 - \frac{a^2}{b^2} \right) \left(F(b) + \frac{1-2\mu}{1-\mu} \times \right. \right. \\ \left. \left. - \times \Phi(b) - \varphi(b) \right) - F(r) - \frac{1-2\mu}{1-\mu} \Phi(r) + \varphi(r) \right]; \quad (10.1.41)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1+\mu} \left[\frac{b^2}{b^2-a^2} \left(1 + \frac{a^2}{b^2} \right) \left(F(b) + \frac{1-2\mu}{1-\mu} \times \right. \right. \\ \left. \left. - \times \Phi(b) - \varphi(b) \right) + F(r) + \frac{1-2\mu}{1-\mu} \Phi(r) + \right. \\ \left. + \frac{\mu}{1-\mu} \varphi(r) - f(r) + \varepsilon_r^0 - \varepsilon_\theta^0 \right]; \quad (10.1.42)$$

$$\sigma_z = \frac{E}{1+\mu} \left[\frac{2\mu b^2}{b^2-a^2} \left(F(b) + \frac{1-2\mu}{1-\mu} \Phi(b) - \right. \right. \\ \left. \left. - \varphi(b) \right) - f(r) + \frac{\mu}{1-\mu} \varphi(r) + \varepsilon_r^0 - \varepsilon_z^0 \right] + Ee, \quad (10.1.43)$$

где e - осевая деформации.

В равенствах (10.1.41) - (10.1.43)

$$F(r) = \frac{1}{r^2} \int_a^r r f(r) dr;$$

$$\Phi(r) = \frac{1}{r^2} \int_a^r r \varphi(r) dr;$$

$$f(r) = \varepsilon_r^0 + \frac{\mu}{1-\mu} (\varepsilon_\theta^0 + \varepsilon_z^0);$$

$$\varphi(r) = \int_a^r \frac{1}{r} (\varepsilon_r^0 - \varepsilon_\theta^0) dr. \quad (10.1.44)$$

При отсутствии осевой деформации (цилиндр между двумя абсолютно жесткими плоскостями) следует положить $e = 0$. При свободных торцах цилиндра постоянная e определяется из условия

$$2\pi \int_a^b \sigma_z r dr = 0. \quad (10.1.45)$$

Напряжение

$$\sigma_z = \frac{E}{1+\mu} \left[\frac{2b^2}{b^2-a^2} \left(F(b) - \frac{\mu}{1-\mu} \Phi(b) \right) - \right. \\ \left. - f(r) + \frac{\mu}{1-\mu} \varphi(r) + \varepsilon_r^0 - \varepsilon_z^0 - \frac{2}{b^2-a^2} \times \right. \\ \left. \times \int_a^b r (\varepsilon_r^0 - \varepsilon_z^0) dr \right]. \quad (10.1.46)$$

Для сплошного цилиндра в формулах (10.1.41) - (10.1.45) следует положить $a = 0$.

10.1.6. ЦИЛИНДРЫ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ УПРУГОСТИ

Модуль упругости E и коэффициент Пуассона μ переменны по радиусу. На основании уравнения совместности деформаций

$$\frac{d}{dr} (\varepsilon_\theta r) = \varepsilon_r, \quad (10.1.47)$$

из уравнения равновесия (10.1.5) получается интегральное уравнение относительно

$$y(r) = \sigma_\theta(r) - \sigma_r(r) \quad (10.1.48)$$

следующего вида:

$$y = L_y + f_1 + f_\omega + f_1 \sigma_{ra} + f_2 \sigma_{\theta a} + f_3 e, \quad (10.1.49)$$

где

$$L_y = -(1-\mu_0) \int_a^r \frac{1}{r} y(r) dr - E \int_a^r \frac{1+\mu_0}{r E_0} \times \\ \times y(r) dr;$$

$$f_1 = -E_0 (\alpha_0 T - \alpha_{0a} T_a); \quad f_3 = \mu - \mu_a;$$

$$f_{\omega} = \frac{1 - \mu_0}{2} \rho \omega^2 (r^2 - a^2); \quad E_0 = \frac{E}{1 - \mu^2};$$

$$f_1 = \left[1 - \mu_0 + \mu_{0a} \frac{E_0}{E_{0a}} \right]; \quad \mu_0 = \frac{\mu}{1 - \mu};$$

$$f_2 = E_0/E_{0a}; \quad \alpha_0 = (1 + \mu)\alpha. \quad (10.1.50)$$

Решение уравнения (10.1.49)

$$y = F_T + F_{\omega} + F_1 \sigma_{ra} + F_2 \sigma_{\theta a} + F_3 e. \quad (10.1.51)$$

Здесь

$$F_i = f_i + L f_i + L(L f_i) + \dots$$

при $i = T, \omega, 1, 2, 3.$

(10.1.52)

Ряд (10.1.51) Неймана сходится после трех-четырех приближений.

Радиальное напряжение из равенства (10.1.5)

$$\sigma_r(r) = \int_a^r \frac{1}{r_1} y(r_1) dr_1 - 0,5 \rho \omega^2 (r^2 - a^2) + \sigma_{ra}. \quad (10.1.53)$$

В задаче для трех неизвестных параметров $\sigma_{ra}, \sigma_{\theta a}$ и e имеются три граничных условия:

$$\sigma_r(a) = \sigma_{ra}; \quad \sigma_r(b) = \sigma_{rb};$$

$$2\pi \int_a^b r \sigma_z dr = N, \quad (10.1.54)$$

где σ_{ra}, σ_{rb} и N - заданные соответственно радиальные напряжения и осевая сила.

10.1.7. БИМЕТАЛЛИЧЕСКИЕ ЦИЛИНДРЫ

Тонкостенная труба испытывает нагрузки: внутреннее давление q , осевую силу N (на единицу длины, полную осевую силу $2\pi r N$), температурные деформации $\alpha_1 T_1, \alpha_2 T_2$ (рис. 10.1.3).

Средний радиус цилиндра

$$r = 0,5(r_1 + r_2).$$

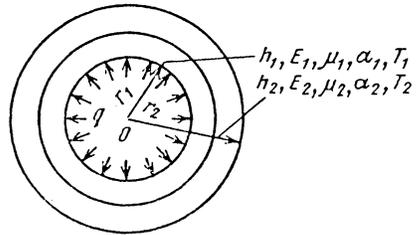


Рис. 10.1.3. Биметаллический цилиндр

Напряжения в стенках цилиндра:

$$\begin{aligned} \sigma_{1\theta} = & q \frac{r}{h_1} \frac{E_1 h_1}{E_1 h_1 + E_2 h_2} \xi_1 + (\mu_1 - \mu_2) \times \\ & \times \frac{N}{h_1} \xi_2 - (\alpha_1 T_1 - \alpha_2 T_2) \frac{1}{h_1} \times \\ & \times \frac{E_1 h_1 E_2 h_2}{E_1 h_1 + E_2 h_2} \xi_3; \end{aligned} \quad (10.1.55)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{2\theta} = & q \frac{r}{h_2} \frac{E_2 h_2}{E_1 h_1 + E_2 h_2} \xi_4 - (\mu_1 - \mu_2) \times \\ & \times \frac{N}{h_2} \xi_2 + (\alpha_1 T_1 - \alpha_2 T_2) \frac{1}{h_2} \times \\ & \times \frac{E_1 h_1 E_2 h_2}{E_1 h_1 + E_2 h_2} \xi_3; \end{aligned} \quad (10.1.56)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{1z} = & (\mu_1 - \mu_2) q \frac{r}{h_1} \xi_2 + \frac{N}{h_1} \xi_5 - \\ & - (\alpha_1 T_1 - \alpha_2 T_2) \frac{1}{h_1} \frac{E_1 h_1 E_2 h_2}{E_1 h_1 + E_2 h_2} \xi_3; \end{aligned} \quad (10.1.57)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{2z} = & -(\mu_1 - \mu_2) q \frac{r}{h_2} \xi_2 + \frac{N}{h_2} \xi_6 + \\ & + (\alpha_1 T_1 - \alpha_2 T_2) \frac{1}{h_2} \frac{E_1 h_1 E_2 h_2}{E_1 h_1 + E_2 h_2} \xi_3. \end{aligned} \quad (10.1.58)$$

Здесь безразмерные коэффициенты:

$$\begin{aligned} \xi_1 = & \frac{1}{H} \left[(E_1 h_1)^2 (1 - \mu_2^2) + E_1 h_1 E_2 h_2 \times \right. \\ & \left. \times (2 - \mu_1 \mu_2 - \mu_2^2) + (E_2 h_2)^2 (1 - \mu_1 \mu_2) \right]; \end{aligned}$$

$$\xi_2 = \frac{1}{H} E_1 h_1 E_2 h_2;$$

$$\xi_3 = \frac{1}{H} [E_1 h_1 (1 + \mu_2) + E_2 h_2 (1 + \mu_1)] \times (E_1 h_1 + E_2 h_2);$$

$$\xi_4 = \frac{1}{H} [(E_1 h_1)^2 (1 - \mu_1 \mu_2) + E_1 h_1 E_2 h_2 \times (2 - \mu_1 \mu_2 - \mu_1^2) + (E_2 h_2)^2 (1 - \mu_2^2)];$$

$$\xi_5 = \frac{1}{H} [(E_1 h_1)^2 (1 - \mu_2^2) + E_1 h_1 E_2 h_2 \times (1 - \mu_1 \mu_2)];$$

$$\xi_6 = \frac{1}{H} [(E_2 h_2)^2 (1 - \mu_1^2) + E_1 h_1 E_2 h_2 \times (1 - \mu_1 \mu_2)];$$

$$H = (E_1 h_1)^2 (1 - \mu_2^2) + 2 E_1 h_1 E_2 h_2 (1 - \mu_1 \mu_2) + (E_2 h_2)^2 (1 - \mu_1^2). \quad (10.1.59)$$

Радиальными напряжениями ($\sigma_{1r} < q$,

$\sigma_{2r} < q$) пренебрегают.

При одинаковых коэффициентах Пуассона

$$\mu_1 = \mu_2 \quad (10.1.60)$$

формулы (10.1.55) - (10.1.58) значительно упрощаются:

$$\sigma_{10} = q \frac{r}{h_1} \frac{E_1 h_1}{E_1 h_1 + E_2 h_2} - \frac{\alpha_1 T_1 - \alpha_2 T_2}{1 - \mu} \times \frac{E_1 h_1 E_2 h_2}{E_1 h_1 + E_2 h_2} \frac{1}{h_1}; \quad (10.1.61)$$

$$\sigma_{20} = q \frac{r}{h_2} \frac{E_2 h_2}{E_1 h_1 + E_2 h_2} + \frac{\alpha_1 T_1 - \alpha_2 T_2}{1 - \mu} \times \frac{E_1 h_1 E_2 h_2}{E_1 h_1 + E_2 h_2} \frac{1}{h_2}; \quad (10.1.62)$$

$$\sigma_{1z} = \frac{N}{h_1} \frac{E_1 h_1}{E_1 h_1 + E_2 h_2} - \frac{\alpha_1 T_1 - \alpha_2 T_2}{1 - \mu} \times \frac{E_1 h_1 E_2 h_2}{E_1 h_1 + E_2 h_2} \frac{1}{h_1}; \quad (10.1.63)$$

$$\sigma_{2z} = \frac{N}{h_2} \frac{E_2 h_2}{E_1 h_1 + E_2 h_2} + \frac{\alpha_1 T_1 - \alpha_2 T_2}{1 - \mu} \times \frac{E_1 h_1 E_2 h_2}{E_1 h_1 + E_2 h_2} \frac{1}{h_2}. \quad (10.1.64)$$

Если цилиндры находятся в пластической области, то соответствующим образом модули упругости заменяются на текущие модули. Следует отметить равенство окружных и осевых температурных напряжений

$$\sigma_{10T} = \sigma_{1zT}; \quad \sigma_{20T} = \sigma_{1zT}. \quad (10.1.65)$$

10.1.8. ДЛИННЫЕ ОРТОТРОПНЫЕ ЦИЛИНДРЫ

С помощью соотношений п. 10.1.1 получается дифференциальное уравнение (при постоянных параметрах упругости)

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{A_{22}}{A_{11}} \frac{u}{r} = \frac{1}{A_{11}} \left[\frac{d}{dr} (\beta_r T) + \frac{1}{r} (\beta_r - \beta_\theta) T \right] - \frac{A_{13} - A_{23}}{A_{11}} \frac{e}{r}. \quad (10.1.66)$$

Рассмотрим случай, когда нагрев и осевая деформация отсутствуют ($e = 0$). Цилиндр находится под давлением p_a и p_b на цилиндрических поверхностях, торцы цилиндра не имеют осевых смещений (рис. 10.1.4). Напряжения:

$$\sigma_r = p_a \frac{b^{-n-1} r^{n-1} - a^{-n-1} r^{-n-1}}{a^{-n-1} b^{-n-1} - a^{-n-1} b^{n-1}} - p_b \frac{a^{n-1} r^{-n-1} - a^{-n-1} r^{n-1}}{a^{-n-1} b^{-n-1} - a^{-n-1} b^{n-1}}; \quad (10.1.67)$$

$$\sigma_\theta = p_a \frac{\lambda_{22} b^{-n-1} r^{-n-1} - \lambda_{12} b^{-n-1} r^{n-1}}{\lambda_{21} a^{-n-1} b^{-n-1} - \lambda_{11} a^{-n-1} b^{n-1}} - p_b \frac{\lambda_{22} a^{-n-1} r^{-n-1} - \lambda_{12} a^{-n-1} r^{n-1}}{\lambda_{21} a^{-n-1} b^{-n-1} - \lambda_{11} a^{-n-1} b^{n-1}}; \quad (10.1.68)$$

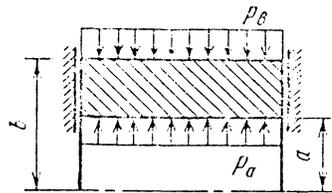


Рис. 10.1.4. Ортотропный цилиндр при отсутствии осевой деформации

$$\sigma_z = p_a \frac{\frac{\lambda_{23}}{\lambda_{21}} b^{n-1} r^{n-1} - \frac{\lambda_{13}}{\lambda_{11}} b^{-n-1} r^{n-1}}{a^{n-1} b^{-n-1} - a^{-n-1} b^{n-1}} - p_b \frac{\frac{\lambda_{23}}{\lambda_{21}} a^{n-1} r^{n-1} - \frac{\lambda_{13}}{\lambda_{11}} a^{-n-1} r^{n-1}}{a^{n-1} b^{-n-1} - a^{-n-1} b^{n-1}}, \quad (10.1.69)$$

где

$$n = \sqrt{A_{22}/A_{11}}; \quad \lambda_{1j} = nA_{j1} + A_{j2};$$

$$\lambda_{2j} = A_{j2}nA_{j1} \quad \text{при } j = 1, 2, 3.$$

Глава 10.2

ПРЕССОВЫЕ СОЕДИНЕНИЯ И СОСТАВНЫЕ ЦИЛИНДРЫ

10.2.1. ПРЕССОВЫЕ СОЕДИНЕНИЯ

Часто применяемая прессовая посадка втулок, шестерен и других деталей на валы осуществляется с помощью прессы, а также нагревом или охлаждением одной из сопрягаемых деталей (рис. 10.2.1). В этом случае в соединении предусматривается диаметральный натяг Δ . Возникающие радиальные перемещения компенсируют натяг

$$u_2(a) - u_1(a) = 0,5\Delta. \quad (10.2.1)$$

Из формулы (10.1.24) для радиального перемещения в цилиндрах находится контактное давление

$$p_a = 0,5 \frac{\Delta}{a} \left(\frac{1 - \mu_1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \left(\frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} + \mu_2 \right) \right)^{-1}, \quad (10.2.2)$$

где E_2 и μ_2 - соответственно модуль упругости и коэффициент Пуассона внешней детали; E_1 и μ_1 - то же, внутренней детали.

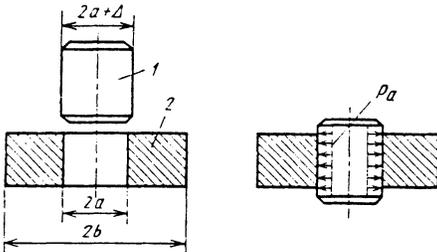


Рис. 10.2.1. Схема прессовой посадки:

1 - внутренний цилиндр; 2 - наружный цилиндр

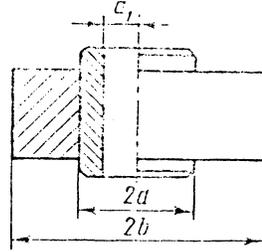


Рис. 10.2.2. Прессовая посадка полого вала

При больших размерах охватываемой детали ($b > 3a$)

$$p_a = 0,5 \frac{\Delta}{a} \left(\frac{1 - \mu_1}{E_1} + \frac{1 + \mu_2}{E_2} \right)^{-1}. \quad (10.2.3)$$

В случае полого вала (рис. 10.2.2)

$$p_a = 0,5 \Delta \left(\frac{1}{E_1} \left(\frac{a^2 + a_1^2}{a^2 - a_1^2} - \mu_1 \right) + \frac{1}{E_2} \left(\frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} + \mu_2 \right) \right)^{-1}. \quad (10.2.4)$$

Напряжения во внешней детали на поверхности радиуса a

$$\sigma_{2\theta}(a) = \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} p_a; \quad \sigma_{2r}(a) = -p_a. \quad (10.2.5)$$

Деталь будет находиться в упругом состоянии, если

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_r^2 - \sigma_r \sigma_\theta + \sigma_\theta^2} = p_a \frac{\sqrt{3b^4 + a^4}}{b^2 - a^2} < \sigma_{T2}, \quad (10.2.6)$$

где σ_{T2} - предел текучести материала внешней детали.

При $b > 3a$ приближенно

$$p_a < \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_{T2}. \quad (10.2.7)$$

Для внутренней детали условие отсутствия пластических деформаций в сплошном вале

$$\sigma_i = p_a < \sigma_{T1}; \quad (10.2.8)$$

полом при $r = a$

$$\sigma_i = p_a \frac{\sqrt{a^4 + 3a_1^4}}{a^2 - a_1^2} \quad (10.2.9)$$

и при $r = a_1$

$$\sigma_i = p_a \frac{2a^2}{a^2 - a_1^2}. \quad (10.2.10)$$

Определяющими являются точки на радиусе a_1 . Тогда условие отсутствия пластических деформаций в полом вале

$$p_a \frac{2a^2}{a^2 - a_1^2} < \sigma_{T1}, \quad (10.2.11)$$

где σ_{T1} - предел текучести материала вала.

Следует отметить, что наличие гребешков, волнистости и других дефектов поверхности делает эффективный натяг Δ_e меньше чертежного:

$$\Delta_e < \Delta. \quad (10.2.12)$$

Обычно принимают $\Delta_e = (0,7+0,9)\Delta$, причем меньшие значения - для более грубой обработки.

10.2.2. СОСТАВНЫЕ ЦИЛИНДРЫ

Для уменьшения напряжений и деформаций на внутренней цилиндрической поверхности иногда применяют составные (двухслойные) цилиндры, создавая натяг при посадке наружного цилиндра 2 (рис. 10.2.3). Контактное давление на радиусе r_2 по формуле (10.2.4)

$$p = 0,5 \frac{\Delta}{r_2} \left(\frac{1}{E_1} \left(\frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} - \mu_1 \right) + \frac{1}{E_2} \left(\frac{r_3^2 + r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} + \mu_2 \right) \right)^{-1}. \quad (10.2.13)$$

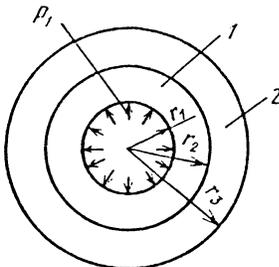


Рис. 10.2.3. Составный цилиндр:
1 - внутренний цилиндр; 2 - наружный цилиндр

Напряжения в первом цилиндре от посадки на радиусе:

$$r = r_1$$

$$\sigma_{r1} = 0; \quad \sigma_{\theta 1} = -p \frac{2r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}; \quad (10.2.14)$$

$r = r_2$

$$\sigma_{r1} = -p; \quad \sigma_{\theta 1} = -p \frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}. \quad (10.2.15)$$

Напряжения во втором цилиндре от посадки на радиусе:

$r = r_2$

$$\sigma_{r2} = -p; \quad \sigma_{\theta 2} = p \frac{r_3^2 + r_2^2}{r_3^2 - r_1^2}; \quad (10.2.16)$$

$r = r_3$

$$\sigma_{r2} = 0; \quad \sigma_{\theta 2} = p \frac{2r_2^2}{r_3^2 - r_2^2}. \quad (10.2.17)$$

Напряжения от действия внешней нагрузки (давления p_1 на цилиндрической поверхности радиуса r_1) определяются наиболее просто для случая, когда материал цилиндров одинаковый. По принципу спаянного стыка для цилиндра с внутренним радиусом r_1 и наружным r_3

$$\sigma_r(r) = p_1 \frac{r_1^2}{r_3^2 - r_1^2} \left(1 - \frac{r_3^2}{r^2} \right); \quad (10.2.18)$$

$$\sigma_{\theta}(r) = p_1 \frac{r_1^2}{r_3^2 - r_1^2} \left(1 + \frac{r_3^2}{r^2} \right). \quad (10.2.19)$$

На рис. 10.2.4 показано распределение напряжений при посадке, от внешней нагрузки и суммарных.

Напряжения в составном цилиндре, на внутреннем радиусе при посадке наружной трубы с натягом, уменьшаются. Для составной трубы из разнородных материалов расчет напряжений от давления проводится отдельно для внутреннего и внешнего цилиндров. Для внутренней трубы

$$\sigma_r(r) = p_1 \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(1 - \frac{r_2^2}{r^2} \right) - p_2 \frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(1 - \frac{r_1^2}{r^2} \right); \quad (10.2.20)$$

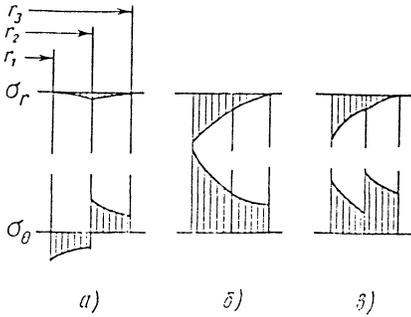


Рис. 10.2.4. Эпюры радиальных и окружных напряжений в составной трубе: а - при натяге; б - при внутреннем давлении; в - суммарная

$$\sigma_{\theta}(r) = p_1 \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(1 + \frac{r_2^2}{r^2} \right) - p_2 \frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(1 + \frac{r_1^2}{r^2} \right). \quad (10.2.21)$$

Для внешней трубы

$$\sigma_r(r) = p_2 \frac{r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} \left(1 - \frac{r_3^2}{r^2} \right); \quad (10.2.22)$$

$$\sigma_{\theta}(r) = p_2 \frac{r_3^2}{r_3^2 - r_2^2} \left(1 + \frac{r_3^2}{r^2} \right), \quad (10.2.23)$$

где p_2 - давление на поверхности радиуса r_2 .

Из условия равенства радиальных перемещений на радиусе r_2 для обоих цилиндров

$$p_2 = p_1 \frac{1}{E_1} \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \left\{ \frac{1}{E_1} \left(\frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} - \mu_1 \right) + \frac{1}{E_2} \left(\frac{r_3^2 + r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} + \mu_2 \right) \right\}^{-1}. \quad (10.2.24)$$

Глава 10.3

ЦИЛИНДРЫ, ИСПЫТЫВАЮЩИЕ ДЕФОРМАЦИИ ПЛАСТИЧНОСТИ И ПОЛЗУЧЕСТИ

Рассматриваются цилиндры с постоянными по длине осесимметричными нагрузками.

10.3.1. УЧЕТ ДЕФОРМАЦИЙ ПЛАСТИЧНОСТИ

При действии значительного внутреннего давления а полем цилиндре

$$p > \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_T \quad (10.3.1)$$

в нем возникают пластические деформации. Расчет цилиндров с учетом деформаций пластичности при различных упрощающих предположениях рассмотрен в различных литературных источниках. При использовании деформационной теории пластичности для общего случая нагружения цилиндра внешними силами и неравномерным нагревом расчет основан на уравнениях Генки-Ильюшина:

$$\varepsilon_r - \varepsilon = \psi \frac{1 + \mu}{E} (\sigma_r - \sigma);$$

$$\varepsilon_{\theta} - \varepsilon = \psi \frac{1 + \mu}{E} (\sigma_{\theta} - \sigma); \quad (10.3.2)$$

$$\varepsilon_z - \varepsilon = \psi \frac{1 + \mu}{E} (\sigma_z - \sigma).$$

Средние деформации и напряжения

$$\varepsilon = \frac{1}{3} (\varepsilon_r + \varepsilon_{\theta} + \varepsilon_z); \quad (10.3.3)$$

$$\sigma = \frac{1}{3} (\sigma_r + \sigma_{\theta} + \sigma_z). \quad (10.3.4)$$

В равенствах (10.3.2) параметр пластичности

$$\psi = \frac{3E}{2(1 + \mu)} \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}. \quad (10.3.5)$$

Интенсивность напряжений

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_r - \sigma_{\theta})^2 + (\sigma_{\theta} - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2} \quad (10.3.6)$$

и деформаций

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_r - \varepsilon_{\theta})^2 + (\varepsilon_{\theta} - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_r)^2}. \quad (10.3.7)$$

На рис. 10.3.1 показана кривая деформирования при простом растяжении, которая принимается в качестве обобщенной. Для этого полагают

$$\sigma_0 = \sigma_i; \quad (10.3.8)$$

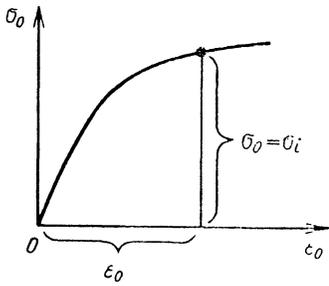


Рис. 10.3.1. Кривая деформирования $\sigma_0 f(\epsilon_0)$ при простом растяжении (обобщенная)

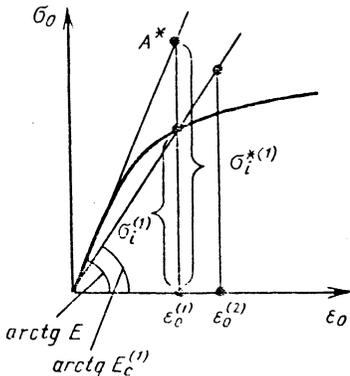


Рис. 10.3.2. Схема расчета по методу переменных параметров упругости

$$\epsilon_0 = \epsilon_i + \frac{1 - 2\mu}{3} \frac{\sigma_i}{E}. \quad (10.3.9)$$

Расчет цилиндра в упругопластической стадии может быть реализован по методу переменных параметров упругости на основе уравнения (10.1.49). В первом приближении

$E^{(1)} = E$ и $\mu^{(1)} = \mu$. Допустим, что для данного радиуса получена точка A^* по деформациям ϵ_0^1 и интенсивности напряжений $\sigma_i^{*(1)}$ (рис. 10.3.2). Во втором приближении принимают для точки A^* новые параметры упругости:

$$E^{(2)} = E_c^{(1)} = \frac{\sigma_i^{(1)}}{\epsilon_0^{(1)}}; \quad (10.3.10)$$

$$\mu^{(2)} = 0,5 - 0,5(1 - 2\mu) \frac{E_c^{(1)}}{E}, \quad (10.3.11)$$

где $E_c^{(1)}$ - секущий модуль для первого приближения; E и μ - соответственно модуль упругости и коэффициент Пуассона в упругой области (их значения могут зависеть от температуры).

После определения на всех радиусах значений $E^{(2)}$, $\mu^{(2)}$ проводится второй расчет и т.д. Расчет заканчивается при достаточной близости двух соседних приближений и при условии, что точки $A^*(h)$ лежат на кривой деформации. Обычно сходимость получается после трех-четырёх приближений.

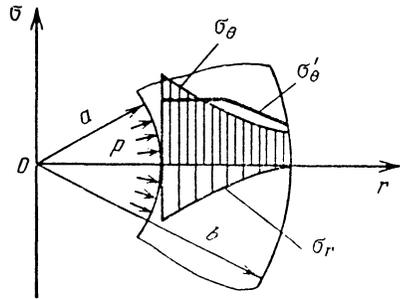


Рис. 10.3.3. Распределение окружных напряжений в упругой и упругопластической областях (осевое усилие $N = 0$)

На рис. 10.3.3 показано распределение напряжений в полном цилиндре при действии внутреннего давления (σ_θ - упругая область; σ'_θ - с учетом пластической деформации). В результате пластической деформации напряжения на внутреннем радиусе падают.

Расчет по деформационной теории пластичности проводится при монотонном нагружении, когда отсутствуют участки разгрузки (например, когда внешние усилия возрастают пропорционально одному параметру).

10.3.2. УЧЕТ ДЕФОРМАЦИИ ПЛАСТИЧНОСТИ ПО НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ

При сложных условиях нагружения при действии внешних сил и тепловых нагрузок применяется теория пластического течения. Нагружение разбивается по времени на ряд этапов. Рассмотрим нагружение на этапе от t_k до t_{k+1} . Приращение деформаций состоит из упругой и пластической части:

$$\Delta \varepsilon_r = \Delta \varepsilon_r^e + \Delta \varepsilon_r^p; \quad (10.3.12)$$

$$\Delta \varepsilon_\theta = \Delta \varepsilon_\theta^e + \Delta \varepsilon_\theta^p; \quad (10.3.13)$$

$$\Delta \varepsilon_z = \Delta \varepsilon_z^e + \Delta \varepsilon_z^p, \quad (10.3.14)$$

где верхний индекс e относится к деформациям упругости, p - к деформациям пластичности, индекс k приращений на k -м этапе нагружения опускается.

Приращения деформаций упругости с учетом влияния температуры

$$\Delta \varepsilon_r^e = \frac{1}{E} [\Delta \sigma_r - \mu (\Delta \sigma_\theta + \Delta \sigma_z)] - \frac{1}{E^2} [\sigma_r - \mu (\sigma_\theta + \sigma_z)] \frac{dE}{dT} \Delta T + \alpha \Delta T; \quad (10.3.15)$$

$$\Delta \varepsilon_\theta^e = \frac{1}{E} [\Delta \sigma_\theta - \mu (\Delta \sigma_z + \Delta \sigma_r)] - \frac{1}{E^2} [\sigma_\theta - \mu (\sigma_z + \sigma_r)] \frac{dE}{dT} \Delta T + \alpha \Delta T; \quad (10.3.16)$$

$$\Delta \varepsilon_z^e = \frac{1}{E} [\Delta \sigma_z - \mu (\Delta \sigma_r + \Delta \sigma_\theta)] - \frac{1}{E^2} [\sigma_z - \mu (\sigma_r + \sigma_\theta)] \frac{dE}{dT} \Delta T + \alpha \Delta T, \quad (10.3.17)$$

где $\Delta \sigma_r, \Delta \sigma_\theta, \Delta \sigma_z$ - приращение напряжений на k -м этапе нагружения; $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$ - значения напряжений в начале нагружения; $\Delta T = T_{k+1} - T_k$ - приращение температуры.

Влиянием температуры на изменение коэффициента Пуассона пренебрегаем. Приращения пластических деформаций на k -м этапе нагружения

$$\Delta \varepsilon_r^p = F_\sigma \left(\Delta \sigma_i - \frac{\partial \sigma_T}{\partial T} \Delta T \right) (\sigma_r - \sigma); \quad (10.3.18)$$

$$\Delta \varepsilon_\theta^p = F_\sigma \left(\Delta \sigma_i - \frac{\partial \sigma_T}{\partial T} \Delta T \right) (\sigma_\theta - \sigma); \quad (10.3.19)$$

$$\Delta \varepsilon_z^p = F_\sigma \left(\Delta \sigma_i - \frac{\partial \sigma_T}{\partial T} \Delta T \right) (\sigma_z - \sigma). \quad (10.3.20)$$

Здесь

$$F_\sigma = \frac{3}{2\sigma_i} \left(\frac{1}{E_{kp}} - \frac{1}{E} \right) = \frac{3}{2\sigma_i E_{kp}}. \quad (10.3.21)$$

В последнем равенстве пластический касательный модуль

$$E_{kp} = \frac{\partial \sigma_0}{\partial \varepsilon_0^p}. \quad (10.3.22)$$

Приращение интенсивности напряжений

$$\Delta \sigma_i = \frac{\partial \sigma_i}{\partial \sigma_r} \Delta \sigma_r + \frac{\partial \sigma_i}{\partial \sigma_\theta} \Delta \sigma_\theta + \frac{\partial \sigma_i}{\partial \sigma_z} \Delta \sigma_z \quad (10.3.23)$$

или

$$\Delta \sigma_i = \frac{3}{2} \left(\frac{\sigma_r - \sigma}{\sigma_i} \Delta \sigma_r + \frac{\sigma_\theta - \sigma}{\sigma_i} \Delta \sigma_\theta + \frac{\sigma_z - \sigma}{\sigma_i} \Delta \sigma_z \right). \quad (10.3.24)$$

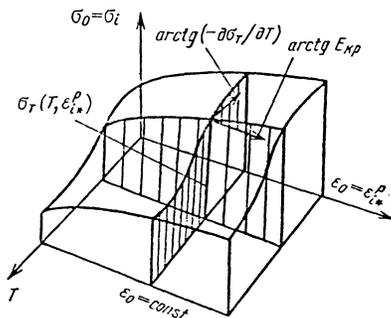


Рис. 10.3.4. Поверхность неизотермического пластического деформирования

На рис. 10.3.4 показана поверхность неизотермического пластического деформирования (напряжение при растяжении образца зависит от пластической деформации при $T = \text{const}$). При сложном напряженном состоянии под ε_0^p понимают накопленную интенсивность пластической деформации (параметр Одквиста):

$$\varepsilon_{i*}^p = \int \Delta \varepsilon_{i*}^p = \int_0^i \frac{\Delta \varepsilon_{i*}^p}{\Delta t} dt. \quad (10.3.25)$$

Здесь

$$\Delta \varepsilon_{i*}^p = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{(\Delta \varepsilon_r^p - \Delta \varepsilon_\theta^p)^2 + (\Delta \varepsilon_\theta^p - \Delta \varepsilon_z^p)^2 + \dots + (\Delta \varepsilon_z^p - \Delta \varepsilon_r^p)^2}. \quad (10.3.26)$$

В равенствах (10.3.18) - (10.3.20) под σ_T понимается мгновенное значение ординаты поверхности пластического деформирования:

$$\sigma_T = \sigma_T(T, \varepsilon_{i*}^p). \quad (10.3.27)$$

Условия нагружения, при которых происходит рост пластической деформации,

$$\Delta \sigma_i > \frac{\partial \sigma_T}{\partial T} \Delta T. \quad (10.3.28)$$

При этом изображающая процесс точка должна находиться на поверхности пластического деформирования

$$\sigma_i = \sigma_T(T, \varepsilon_{i*}^p). \quad (10.3.29)$$

Если не выполняется хотя бы одно из условий (10.3.28) или (10.3.29), то происходит разгрузка и пластическая деформация не возникает.

В равенствах (10.3.18) - (10.3.20) следует считать:

$$F_\sigma = \begin{cases} \frac{3}{2\sigma_i E_{pk}} & \text{- условия нагружения;} \\ 0 & \text{- условия разгрузки.} \end{cases} \quad (10.3.30)$$

Соотношения пластичности (10.3.18) - (10.3.20) с помощью (10.3.25) представлены в следующей форме:

$$\Delta \varepsilon_r^p = a_{rr}^p \Delta \sigma_r + a_{r\theta}^p \Delta \sigma_\theta + a_{rz}^p \Delta \sigma_z + \Delta \varphi_r^p \Delta T; \quad (10.3.31)$$

$$\Delta \varepsilon_\theta^p = a_{\theta r}^p \Delta \sigma_r + a_{\theta\theta}^p \Delta \sigma_\theta + a_{\theta z}^p \Delta \sigma_z + \Delta \varphi_\theta^p \Delta T; \quad (10.3.32)$$

$$\Delta \varepsilon_z^p = a_{zr}^p \Delta \sigma_r + a_{z\theta}^p \Delta \sigma_\theta + a_{zz}^p \Delta \sigma_z + \Delta \varphi_z^p \Delta T. \quad (10.3.33)$$

Здесь

$$a_{mn}^p = \frac{3}{2} F_\sigma \frac{(\sigma_m - \sigma)(\sigma_n - \sigma)}{\sigma_i}; \quad (m, n = r, \theta, z) \quad (10.3.34)$$

$$\Delta \varphi_m^p = -\frac{3}{2} F_\sigma \frac{\partial \sigma_T}{\partial T} (\sigma_m - \sigma) \quad (m = r, \theta, z) \quad (10.3.35)$$

Связь приращений деформаций и напряжений на основе равенств (10.3.12) - (10.3.14)

$$\Delta \varepsilon_r = a_{rr} \Delta \sigma_r + a_{r\theta} \Delta \sigma_\theta + a_{rz} \Delta \sigma_z + \Delta \varphi_r \Delta T; \quad (10.3.36)$$

$$\Delta \varepsilon_\theta = a_{\theta r} \Delta \sigma_r + a_{\theta\theta} \Delta \sigma_\theta + a_{\theta z} \Delta \sigma_z + \Delta \varphi_\theta \Delta T; \quad (10.3.37)$$

$$\Delta e = a_{zr} \Delta \sigma_r + a_{z\theta} \Delta \sigma_\theta + a_{zz} \Delta \sigma_z + \Delta \varphi_z \Delta T, \quad (10.3.38)$$

где

$$a_{rr} = \frac{1}{E} + a_{rr}^p; \quad a_{r\theta} = -\frac{\mu}{E} + a_{r\theta}^p; \quad (10.3.39)$$

$$\Delta \varphi_r = -\frac{1}{E^2} [\sigma_r - \mu(\sigma_\theta + \sigma_z)] \frac{dE}{dT} + \alpha + \Delta \varphi_r^p. \quad (10.3.40)$$

В равенстве (10.3.38) $\Delta e = \Delta \varepsilon_z$ - приращение осевой деформации, одинаковое для всех радиусов. Уравнения (10.3.36) - (10.3.38) вместе с условием равновесия для k -го этапа нагружения

$$\frac{d(\Delta \sigma_r)}{dr} = \frac{1}{r} (\Delta \sigma_\theta - \Delta \sigma_r) - \rho r [(\omega + \Delta \omega)^2 - \omega^2] \quad (10.3.41)$$

и условием совместности деформаций

$$\frac{d}{dr} (\Delta \varepsilon_\theta) = -\frac{1}{r} (\Delta \varepsilon_\theta - \Delta \varepsilon_r) \quad (10.3.42)$$

образуют полную систему уравнений

$$\frac{d}{dr} ([L]\{\Delta \sigma\}) = [M]\{\Delta \sigma\} + \{\Delta \varphi_r\} \Delta T + \{\Delta \varphi_\theta\} \Delta \omega, \quad (10.3.43)$$

где $[L], [M]$ - матрицы, элементы которых для краткости не выписываются.

Вектор

$$\{\Delta \sigma\} = \begin{Bmatrix} \Delta \sigma_r \\ \Delta \sigma_\theta \\ \Delta \sigma_z \end{Bmatrix}.$$

После интегрирования обеих частей равенства (10.3.43) получается интегральное уравнение относительно $\{\Delta \sigma\}$.

10.3.3. УЧЕТ ДЕФОРМАЦИИ ПОЛЗУЧЕСТИ

Приращение деформаций ползучести

$$\Delta \epsilon_r^c = \Phi \Delta t (\sigma_r - \sigma); \quad (10.3.44)$$

$$\Delta \epsilon_\theta^c = \Phi \Delta t (\sigma_\theta - \sigma); \quad (10.3.45)$$

$$\Delta \epsilon_z^c = \Phi \Delta t (\sigma_z - \sigma), \quad (10.3.46)$$

где Δt - приращение времени на рассматриваемом этапе нагружения; σ - среднее напряжение.

Скалярная функция Φ определяется в теории течения:

$$\Phi = \Phi(\sigma_i, T, t). \quad (10.3.47)$$

В теории упрочнения

$$\Phi = \Phi(\sigma_i, T, \epsilon_{i*}^c), \quad (10.3.48)$$

где ϵ_{i*}^c - накопленная деформация ползучести, которая определяется по формуле (10.3.26) для приращений деформации ползучести.

В основу расчета положены результаты испытаний материала на ползучесть при простом растяжении (рис. 10.3.5). Скорость ползучести

$$\xi_0 = \frac{d\epsilon_0^c}{dt}. \quad (10.3.49)$$

Из теории течения

$$\Phi = \frac{3}{2\sigma_i} \xi_0(\sigma_i, T, t). \quad (10.4.50)$$

Из теории упрочнения

$$\Phi = \frac{3}{2\sigma_i} \xi_0(\sigma_i, T, \epsilon_{i*}^c). \quad (10.3.51)$$

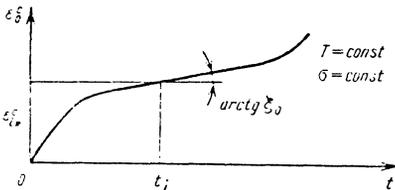


Рис. 10.3.5. Кривая ползучести материала при простом растяжении

Считается, что теория упрочнения дает результаты более близкие к экспериментальным данным, чем теория течения. Ползучесть в реальных конструкциях происходит обычно при достаточно низком уровне напряжений, когда пластичность материала не проявляется. В рассматриваемом случае для расчета может быть использовано решение п. 10.1.5. Нагружение разбивается на этапы, и дополнительная деформация в равенствах (10.3.37) - (10.1.39) определяется формулами (10.3.44) - (10.3.46).

Компоненты девиатора напряжений $\sigma_r - \sigma, \sigma_\theta - \sigma, \sigma_z - \sigma$ принимаются для начала этапа нагружения. При значительном изменении их величины после завершения этапа нагружения расчет проводится сначала, причем деформации ползучести принимаются по средним значениям компонентов девиатора. При стационарном (постоянном во времени) нагружении в цилиндре возникает установившееся состояние: деформации ползучести увеличиваются при постоянном распределении напряжений. Решение задачи установившейся ползучести цилиндров рассмотрено в источниках. В общем случае расчета используются уравнения (10.3.36) - (10.3.38), к которым добавляются деформации ползучести.

Глава 10.4

ЦИЛИНДРЫ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПО ДЛИНЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫМИ НАГРУЗКАМИ

10.4.1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Перемещения в цилиндре: радиальное $u(r, z)$ и осевое $w(r, z)$. Деформации

$$\epsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}; \quad \epsilon_\theta = \frac{u}{r}; \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}; \quad (10.4.1)$$

$$\gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}. \quad (10.4.2)$$

Условия равновесия (рис. 10.4.1):

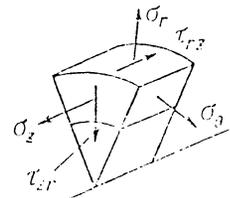


Рис. 10.4.1. Напряжения в диске при переменной по длине осесимметричной нагрузке

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \rho \omega^2 r = 0; \quad (10.4.3)$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0. \quad (10.4.4)$$

Уравнения упругости приведены в п. 10.1.1.

10.4.2. УРАВНЕНИЯ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Рассматривается конечный элемент в виде тора треугольного сечения (рис. 10.4.2). Перемещения в n -м элементе выражаются следующим образом через векторы смещения узлов:

$$\{u_n\} = \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = ([\Phi_i][\Phi_j][\Phi_m]) \begin{Bmatrix} U_i \\ U_j \\ U_m \end{Bmatrix}. \quad (10.4.5)$$

Матрицы

$$[\Phi_i] = (a_i + b_i r + c_i z) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad U_i = \begin{Bmatrix} u_i \\ w_i \end{Bmatrix}. \quad (10.4.6)$$

Коэффициенты

$$a_i = \frac{1}{2\Delta} (r_j z_m - r_m z_j); \quad b_i = \frac{1}{2\Delta} (z_m - z_j);$$

$$c_i = \frac{1}{2\Delta} (r_m - r_j). \quad (10.4.7)$$

Величина 2Δ равна удвоенной площади треугольника i, j, m :

$$2\Delta = \begin{vmatrix} 1 & r_i & z_i \\ 1 & r_j & z_j \\ 1 & r_m & z_m \end{vmatrix}. \quad (10.4.8)$$

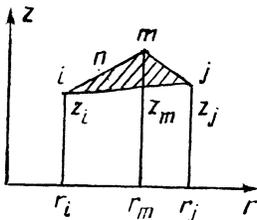


Рис. 10.4.2. Сечение торoidalного конечного элемента плоскостью

Матрицы с индексами j, m получаются с помощью круговой перестановки индексов.

Например, $a_j = \frac{1}{2\Delta} (r_m z_i - r_i z_m)$.

Деформации в торовом треугольном элементе

$$\{\epsilon_n\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_\theta \\ \epsilon_z \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix} = [D] \{u_n\}. \quad (10.4.9)$$

Матрица дифференцирования в соответствии с равенствами (10.4.1) - (10.4.2)

$$[D] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial r} \end{bmatrix}. \quad (10.4.10)$$

С учетом соотношения (10.4.5)

$$\{\epsilon_n\} = [D][\Phi_n] \{U_n\} = [B_n] \{U_n\}. \quad (10.4.11)$$

Матрица формы n -го элемента

$$[\Phi_n] = ([\Phi_i][\Phi_j][\Phi_m]). \quad (10.4.12)$$

Здесь и в некоторых случаях дальше указывается число строк и столбцов в основной матрице и наверху, то же для входящих в нее блоков. При перемножении внутренние индексы исчезают (поглощаются).

Уравнения упругости для изотропного тела в матричной форме

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \tau_{rz} \end{Bmatrix} = [A] \begin{Bmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_\theta \\ \epsilon_z \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix} - \alpha T \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Матрица жесткости материала

$$[A] = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1-\mu & \mu & \mu & 0 \\ \mu & 1-\mu & \mu & 0 \\ \mu & \mu & 1-\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2} \end{bmatrix}. \quad (10.4.13)$$

В другой форме

$$\{\sigma\} = [A](\{\varepsilon\} - \{\alpha T\}). \quad (10.4.14)$$

Применим начало возможных перемещений для всего тела

$$\sum_{n=1}^{N_3} \left(\iiint_{V_n} \{\delta \varepsilon_n\}^T \{\sigma_n\} dV - \iiint_{V_n} \{\delta U_n\}^T \times \right. \\ \left. \times \{F\} dV - \iint_{S_n \in S} \{\delta U_n\}^T \{P\} dS \right) = 0, \quad (10.4.15)$$

где N_3 - общее число элементов.

Векторы объемной и поверхностной нагрузки

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} \rho \omega^2 r \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad \{P\} = \begin{Bmatrix} P_r \\ P_z \end{Bmatrix}. \quad (10.4.16)$$

Последний интеграл распространяется только на участки поверхности элементов, примыкающих к внешней поверхности тела; верхний индекс T означает операцию транспонирования.

С учетом того, что вариация деформаций обусловлена варьированием смещений узлов,

$$\{\delta \varepsilon_n\} = [B] \{\delta U_n\}, \quad (10.4.17)$$

с помощью соотношения (10.4.14) получено

$$\sum_{n=1}^{N_3} \{\delta U_n\}^T \left([K^{(n)}] \{U_n\} - \{Q_F^{(n)}\} - \right. \\ \left. - \{Q_P^{(n)}\} - \{Q_T^{(n)}\} \right) = 0. \quad (10.4.18)$$

Матрица жесткости элемента

$$[K^{(n)}] = \iiint_{V_n} [B_n]^T [A] [B_n] dV. \quad (10.4.19)$$

Внешние нагрузки на элемент:

$$\{Q_F^{(n)}\} = \iiint_{V_n} [\Phi_n]^T \{F\} dV; \quad (10.4.20)$$

$$\{Q_P^{(n)}\} = \iint_{S_n \in S} [\Phi_n]^T \{P\} dS. \quad (10.4.21)$$

Температурные усилия

$$\{Q_T^{(n)}\} = \iiint_{V_n} [B_n]^T [A] \{\alpha T\} dV. \quad (10.4.22)$$

10.4.3. РАЗРЕШАЮЩАЯ СИСТЕМА ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ МКЭ

Матрица

$$[B_n] = ([B_i] [B_j] [B_m]) \quad (10.4.23)$$

Здесь

$$[B_i] = [D][\Phi_i]; \quad [B_j] = [D][\Phi_j]; \\ [B_m] = [D][\Phi_m] \quad (10.4.24)$$

Матрица жесткости элемента (10.4.19) по блочной структуре

$$[K^{(n)}] = \begin{bmatrix} [K_{ii}] & [K_{ij}] & [K_{im}] \\ [K_{ji}] & [K_{jj}] & [K_{jm}] \\ [K_{mi}] & [K_{mj}] & [K_{mm}] \end{bmatrix}. \quad (10.4.25)$$

Здесь

$$[K_{ij}] = \iiint_{V_n} [B_i]^T [A] [B_j] dV. \quad (10.4.26)$$

Матрица $[K_{ij}]$ содержит компоненты усилия в i -м узле при единичном смещении j -го узла в условиях, когда остальные узлы смещений не имеют.

Для получения разрешающей системы линейных алгебраических уравнений (системы уравнений метода МКЭ) в уравнении (10.4.18) следует собрать члены, содержащие вариацию данного узла, так как один и тот же узел может входить сразу в несколько элементов (обычно не более десяти). После суммирования уравнение (10.4.18) имеет вид

$$\sum_{i=1}^N \{\delta U_i\}^T \left(\sum_{n \in I} [K_i^{(n)}] \{U_n\} - \{Q_i^{(n)}\} \right) = 0, \quad (10.4.27)$$

где N - общее число узлов; $n \in i$ - суммирование проводится по элементам n , примыкающим к узлу i .

В уравнении (10.4.27) матрица $[K_i^{(n)}]$ представляет i -ю строку матрицы жесткости элемента n . Соответственно $\{Q_i^{(n)}\}$ - i -ю строку суммарного вектора

$$\{Q^{(n)}\} = \{Q_F^{(n)}\} + \{Q_P^{(n)}\} + \{Q_T^{(n)}\}. \quad (10.4.28)$$

Ввиду произвольности вариации смещения узлов из (10.4.27) с необходимостью вытекает

$$\sum_{n \in I} [K_i^{(n)}] \{U_n\} - \{Q_i^{(n)}\} = 0. \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (10.4.29)$$

Систему линейных алгебраических уравнений (10.4.29) можно представить в матричной форме

$$[K] \{U\} - \{Q\} = 0, \quad (10.4.30)$$

где $[K]$ - матрица жесткости всего тела (конструкции); $\{U\}$ и $\{Q\}$ - векторы узловых смещений и сил в узлах;

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_N \end{Bmatrix}; \quad \{Q\} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_N \end{Bmatrix}.$$

Матрица $[K]$ является квадратной матрицей $N \times N$, имеющей ленточную структуру (каждая строка содержит члены, относящиеся только к элементам, примыкающим к данному узлу, строка содержит обычно не более десяти элементов). Учитывая, что общее число узлов N может достигать 10^3 и более, матрица $[K]$ представляет собой редкозаполненную матрицу.

Следует отметить, что строки матрицы $[K]$ содержат квадратные матрицы 2×2 , так что система (10.4.29) или (10.4.30) состоит из $2N$ линейных уравнений, а матрица $[K]$ в обычной, не блочной форме имеет размерность $2N \times 2N$.

10.4.4. КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА РАСЧЕТА

Рассматривается задача о посадке с натягом кольца на цилиндр. В точках контакта (сечение S) действуют противоположно направленные усилия q , которые вызывают упругие смещения в сечении z :

$$du_1^* = -\kappa_1(z, s)q(s)ds; \quad (10.4.31)$$

$$du_2^* = \kappa_2(z, s)q(s)ds, \quad (10.4.32)$$

где $\kappa_1(z, s), \kappa_2(z, s)$ - смещения в сечении z от единичного кольцевого усилия ($q = 1$) в сечении s .

Полные перемещения точек A_1 и A_2 :

$$u_1(z) = -q(z)\lambda_1(z) - \int_a^b \kappa_1(z, s)q(s)ds; \quad (10.4.33)$$

$$u_2(z) = q(z)\lambda_2(z) + \int_a^b \kappa_2(z, s)q(s)ds, \quad (10.4.34)$$

где $q(z)\lambda_1(z), q(z)\lambda_2(z)$ - упругие смещения поверхностного контактного слоя (при его отсутствии $\lambda_1(z) = 0, \lambda_2(z) = 0$).

Условия контакта

$$u_2(z) - u_1(z) = 0,5\Delta(z),$$

где $\Delta(z)$ - первоначальный диаметральный натяг (при изготовлении).

С помощью соотношений (10.4.33) - (10.4.34) получено интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$q(z)(\lambda_1(z) + \lambda_2(z)) + \int_a^b \kappa(z, s)q(s)ds = 0,5\Delta(z), \quad (10.4.35)$$

где $\kappa(z, s) = \kappa_1(z, s) + \kappa_2(z, s)$ - ядро интегрального уравнения.

При отсутствии поверхностного контактного слоя получено уравнение Фредгольма первого рода

$$\int_a^b \kappa(z, s)q(s)ds = 0,5\Delta(z). \quad (10.4.36)$$

Для расчета зона контакта разбивается на n сечений. Обозначив контактное усилие в j -м сечении через q_j , длину участка $\delta(\delta = (l - a) / n)$, имеем систему линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^n \kappa_{ij}q_j = 0,5\Delta_i/\delta,$$

где $\kappa_{ij} = \kappa(z_i, s_j)$.

Приведенный метод расчета справедлив, когда контакт осуществляется во всех точках.

Возможны случаи при большой протяженности зоны контакта, когда зона контакта прерывается и контакт происходит не по всей длине. Признаком отсутствия контакта является условие $q \leq 0$. Тогда проводят повторный расчет, исключая сечения, в которых контакт отсутствовал, и путем дальнейших повторных расчетов корректируют результат.

Глава 10.5

**ЦИЛИНДРЫ
С НЕОСЕСИММЕТРИЧНЫМИ
НАГРУЗКАМИ**

10.5.1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В цилиндрах, нагруженных неосесимметричными нагрузками (рис. 10.5.1), напряжения, действующие по граням элемента цилиндра (рис. 10.5.2), удовлетворяют уравнениям равновесия

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + F_r = 0; \tag{10.5.1}$$

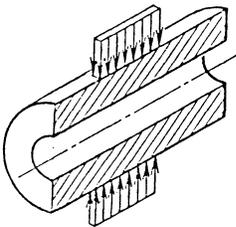


Рис. 10.5.1. Цилиндр с неосесимметричными нагрузками

10.5.2. ПЕРЕХОД К ДВУМЕРНОЙ ЗАДАЧЕ

Допустим, что распределенная внешняя нагрузка на боковых поверхностях цилиндра задана в виде Фурье по угловой координате

$$q(b, \theta, z) = f_0(z) + \sum_{k=1}^n (f_k(z) \cos k\theta + q_k(z) \sin k\theta); \tag{10.5.5}$$

$$q(a, \theta, z) = h_0(z) + \sum_{k=1}^n (h_k(z) \cos k\theta + l_k(z) \sin k\theta). \tag{10.5.6}$$

$$\frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2}{r} \tau_{\theta r} + F_\theta = 0; \tag{10.5.2}$$

$$\frac{\partial \tau_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \tau_{zr} + F_z = 0, \tag{10.5.3}$$

где F_r, F_θ, F_z - компоненты внешних нагрузок на единицу объема.

Деформация материала

$$\begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r}; \quad \epsilon_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r}; \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}; \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}; \quad \gamma_{\theta z} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta}; \\ \gamma_{zr} &= \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}, \end{aligned} \tag{10.5.4}$$

где u, v, w - перемещения вдоль координатных направления.

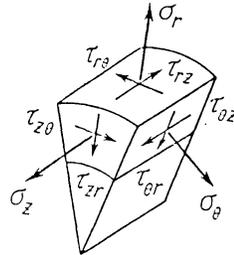


Рис. 10.5.2. Напряжения по граням элемента цилиндра при неосесимметричном нагружении

Рассмотрим напряженно-деформированное состояние от одной составляющей нагрузки, например,

$$q(b, \theta, z) = f_k(z) \cos k\theta. \tag{10.5.7}$$

Из предположения, что материал находится в упругом состоянии, общее решение получено путем суммирования частных решений. Такой подход позволяет свести трехмерную задачу к решению нескольких двумерных задач.

При условии (10.5.7) упругие смещения в цилиндре

$$u(r, \theta, z) = u_k(r, z) \cos k\theta;$$

$$v(r, \theta, z) = v_k(r, z) \sin k\theta;$$

$$w(r, \theta, z) = w_k(r, z) \cos k\theta. \quad (10.5.8)$$

“Амплитудные” значения u_k, v_k, w_k следует определить.

Напряжения:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_r^k(r, z) \cos k\theta; & \tau_{r\theta} &= \tau_{r\theta}^k(r, z) \sin k\theta; \\ \sigma_\theta &= \sigma_\theta^k(r, z) \cos k\theta; & \tau_{\theta z} &= \tau_{\theta z}^k(r, z) \sin k\theta; \\ \sigma_z &= \sigma_z^k(r, z) \cos k\theta; & \tau_{zr} &= \tau_{zr}^k(r, z) \cos k\theta. \end{aligned} \quad (10.5.9)$$

В дальнейшем для упрощения индекс гармоник опускается. Подставляя (10.5.9) в уравнения равновесия (10.5.1) - (10.5.3), получим

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{k}{r} \tau_{r\theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + F_{rk} = 0; \quad (10.5.10)$$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} - \frac{k}{r} \sigma_\theta + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2}{r} \tau_{\theta r} + F_{\theta k} = 0; \quad (10.5.11)$$

$$\frac{\partial \tau_{zr}}{\partial r} + \frac{k}{r} \tau_{z\theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \tau_{zr} + F_{zk} = 0. \quad (10.5.12)$$

Распределенные объемные нагрузки:

$$\begin{aligned} F_r &= F_{rk} \cos k\theta; & F_\theta &= F_{\theta k} \sin k\theta; \\ F_z &= F_{zk} \cos k\theta. \end{aligned} \quad (10.5.13)$$

Деформации:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r}; & \varepsilon_\theta &= \frac{kv}{r} + \frac{u}{r}; & \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}; \\ \gamma_{r\theta} &= -\frac{k}{r}u + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}; \\ \gamma_{\theta z} &= \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{k}{r}w; & \gamma_{zr} &= \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}. \end{aligned} \quad (10.5.14)$$

Подобным образом осуществляется переход к двумерной задаче, если нагрузка задана в виде

$$q(b, \theta, z) = q_k(z) \sin k\theta. \quad (10.5.15)$$

10.5.3. РЕШЕНИЕ ДВУМЕРНОЙ ЗАДАЧИ О РАСЧЕТЕ ЦИЛИНДРА МКЭ

Цилиндр разбивается на тороидальные элементы, причем упругие смещения точек элемента рассматриваются как линейные функции координат (см. рис. 10.4.2).

Перемещения, выраженные через смещения узлов,

$$\{U_n\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \left([\Phi_i][\Phi_j][\Phi_m] \right) \begin{Bmatrix} U_i \\ U_j \\ U_m \end{Bmatrix}. \quad (10.5.16)$$

Вектор смещения i -го узла

$$\{U_i\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix}.$$

Матрицы

$$[\Phi_i] = (a_i + b_i r + c_i z) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (10.5.17)$$

Коэффициенты a_i, b_i, c_i определяются формулами (10.4.7). Деформации в точках конечного элемента в соответствии с равенствами (10.5.14)

$$\{\varepsilon_n\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{r\theta} \\ \gamma_{\theta z} \\ \gamma_{zr} \end{Bmatrix} = [D] \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}. \quad (10.5.18)$$

Матрица дифференцирования

$$[D] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 & 0 \\ \frac{1}{r} & \frac{k}{r} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{k}{r} & \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & -\frac{k}{r} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}. \quad (10.5.19)$$

Деформации, выраженные через узловые смещения по уравнениям (10.5.16) и (10.5.18),

$$\{\varepsilon_n\} = [D][\Phi_n]\{U_n\} = [B_n]\{U_n\}. \quad (10.5.20)$$

Соотношения упругости для изотропного материала

$$\begin{aligned} \{\sigma\} &= \{\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{r\theta}, \tau_{\theta z}, \tau_{zr}\}^T = \\ &= [A](\{\varepsilon\} - \{\alpha T\}). \end{aligned} \quad (10.5.21)$$

Матрица жесткости

$$[A] = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \times \begin{bmatrix} 1-\mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & 1-\mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2} \end{bmatrix}. \quad (10.5.22)$$

Температурная деформация

$$\alpha T(r, \theta, z) = \alpha T(r, z) \cos k\theta. \quad (10.5.23)$$

В равенство (10.5.23) входит косинусоидальная составляющая температурной деформации

$$\{\alpha T\} = \alpha T \{1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0\}^T. \quad (10.5.24)$$

В остальном схема расчета повторяет прежнюю (см. раздел 10.4.2).

Глава 10.6

РАСТЯЖЕНИЕ ДИСКОВ

10.6.1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассматривается практически наиболее важная задача - осесимметричное растяжение (сжатие) дисков. Диски считаются тонкими, в плоскости диска действует радиальное σ_r и окружное σ_θ напряжения; напряжением σ_z пренебрегают, напряжения считаются распределенными по толщине диска (рис. 10.6.1).

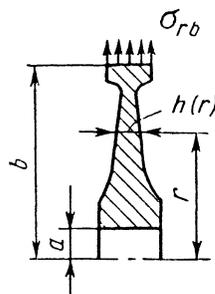


Рис. 10.6.1. Расчетная схема растяжения диска

Деформации в диске

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}; \quad (10.6.1)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r}, \quad (10.6.2)$$

где $u(r)$ - радиальное смещение точек на радиусе r .

Уравнения упругости. Для двухосного напряженного состояния

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - \mu\sigma_\theta) + \alpha T + \varepsilon_r^0; \quad (10.6.3)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \mu\sigma_r) + \alpha T + \varepsilon_\theta^0, \quad (10.6.4)$$

где $\varepsilon_r^0, \varepsilon_\theta^0$ - дополнительные деформации.

В обратной форме соотношения упругости

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{du}{dr} + \mu \frac{u}{r} \right) - \frac{E\alpha T}{1-\mu} - \sigma_r^0; \quad (10.6.5)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{u}{r} + \mu \frac{du}{dr} \right) - \frac{E\alpha T}{1-\mu} - \sigma_\theta^0. \quad (10.6.6)$$

Дополнительные напряжения

$$\sigma_r^0 = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_r^0 + \mu\varepsilon_\theta^0);$$

$$\sigma_\theta^0 = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_\theta^0 + \mu\varepsilon_r^0).$$

Дополнительные деформации и напряжения могут включать первоначальные дефор-

мации. Их используют при расчете деформаций пластичности и ползучести и др.

Уравнения равновесия. Для элемента диска

$$\frac{d}{dr}(\sigma_r r h) - \sigma_\theta h + q(r) r h = 0 \quad (10.6.7)$$

или

$$\frac{d}{dr}(\sigma_r h) - \frac{h}{r}(\sigma_\theta + \sigma_r) + q(r) h = 0, \quad (10.6.8)$$

где $h(r)$ - толщина диска; $q(r)$ - радиальная распределенная нагрузка на единицу объема.

В случае действия центробежных сил

$$q(r) = \rho \omega^2 r. \quad (10.6.9)$$

Уравнение совместимости деформаций.

Применяют

$$\frac{d}{dr}(\varepsilon_\theta r) = \varepsilon_r \quad (10.6.10)$$

или

$$\frac{d}{dr} \left\{ r \left[\frac{1}{E} (\sigma_\theta - \mu \sigma_r) + \alpha T \right] \right\} = \frac{1}{E} (\sigma_r - \mu \sigma_\theta) + \alpha T. \quad (10.6.11)$$

Краевые условия. На внешнем радиусе b

$$\sigma_r(b) = \sigma_{rb}, \quad (10.6.12)$$

где σ_{rb} - заданное радиальное напряжение на внешнем радиусе (обычно от центробежных сил лопаток и замковых частей диска).

На внутреннем радиусе a для диска с отверстием

$$\sigma_r(a) = \sigma_{ra}, \quad (10.6.13)$$

где σ_{ra} - заданное радиальное напряжение.

Если отсутствует посадка диска на вал, то

$$\sigma_r(a) = 0; \quad (10.6.14)$$

при плотной посадке

$$\sigma_r(a) = -p, \quad (10.6.15)$$

где p - давление посадки в рабочих условиях.

Для диска без центрального отверстия в центре

$$\sigma_r(0) = \sigma_\theta(0). \quad (10.6.16)$$

В расчетах последнее условие выполняют на малом радиусе $a \approx (0,05 \dots 0,10)b$.

Основное дифференциальное уравнение.

При растяжении диска получают уравнение для радиального перемещения $u(r)$. После внесения соотношений упругости (10.6.5) и (10.6.6) в уравнение равновесия (10.6.7)

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{d}{dr}(\ln H) \frac{du}{dr} + \left[\frac{\mu}{r} \frac{d}{dr}(\ln H) + \frac{d}{dr} \left(\frac{\mu}{r} \right) - \frac{1}{r^2} \right] u = f(r). \quad (10.6.17)$$

Здесь

$$H = \frac{r h E}{1 - \mu^2}; \quad (10.6.18)$$

$$f(r) = \frac{1}{h} \frac{d}{dr} \left(\frac{E h \alpha T}{1 - \mu} \right) \frac{1 - \mu^2}{E} - q(r) \frac{1 - \mu^2}{E}. \quad (10.6.19)$$

Точные решения уравнения (10.6.17) известны сравнительно для небольшого числа случаев (диски постоянной толщины и др.).

10.6.2. ДИСКИ ПОСТОЯННОЙ ТОЛЩИНЫ С ПОСТОЯННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ УПРУГОСТИ

Для диска с центральным отверстием

$$\begin{aligned} \sigma_r(r) = & \sigma_{rb} \frac{b^2}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) - \sigma_{ra} \times \\ & \times \frac{a^2}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right) + \frac{3 + \mu}{8} \rho \omega^2 \times \\ & \times \left[b^2 + a^2 - \frac{a^2 b^2}{r^2} - r^2 \right] + E \left[F(b) \times \right. \\ & \left. \times \frac{b^2}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) - F(r) \right]; \end{aligned} \quad (10.6.20)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta}(r) = & \sigma_{rb} \frac{b^2}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) - \sigma_{ra} \times \\ & \times \frac{a^2}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right) + \frac{3 + \mu}{8} \rho \omega^2 \times \\ & \times \left[b^2 + a^2 + \frac{a^2 b^2}{r^2} - \frac{1 + 3\mu}{3 + \mu} r^2 \right] + \\ & + E \left[F(b) \frac{b^2}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) + F(r) - \alpha T \right]. \end{aligned} \quad (10.6.21)$$

Здесь

$$F(r) = \frac{1}{r^2} \int_a^r r \alpha T dr. \quad (10.6.22)$$

Для сплошного диска (без центрального отверстия)

$$\begin{aligned} \sigma_r(r) = & \sigma_{rb} + \frac{3 + \mu}{8} \rho \omega^2 (b^2 - r^2) + \\ & + E [F(b) - F(r)]; \end{aligned} \quad (10.6.23)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta}(r) = & \sigma_{rb} + \frac{3 + \mu}{8} \rho \omega^2 \left(b^2 - \frac{1 + 3\mu}{3 + \mu} r^2 \right) + \\ & + E [F(b) + F(r) - \alpha T]. \end{aligned} \quad (10.6.24)$$

Здесь

$$F(r) = \frac{1}{r^2} \int_0^r r \alpha T dr. \quad (10.6.25)$$

В центре диска

$$F(0) = 0,5\alpha(0)T(0). \quad (10.6.26)$$

Радиальное смещение в диске

$$\begin{aligned} u(r) = & \frac{\sigma_{rb}}{E} \frac{b^2 r}{b^2 - a^2} \left[1 - \mu + \frac{a^2}{r^2} (1 + \mu) \right] - \\ & - \frac{\sigma_{ra}}{E} \frac{a^2 r}{b^2 - a^2} \left[1 - \mu + \frac{b^2}{r^2} (1 + \mu) \right] + \\ & + \frac{3 + \mu}{8} \frac{\rho \omega^2 r}{E} \left[(b^2 + a^2)(1 - \mu) + \frac{a^2 b^2}{r^2} \times \right. \\ & \times (1 + \mu) - r^2 \frac{1 - \mu^2}{3 + \mu} \left. \right] + F(b) \frac{b^2 r}{b^2 - a^2} \times \\ & \times \left[1 - \mu + \frac{a^2}{r^2} (1 + \mu) \right] + F(r)(1 + \mu)r. \end{aligned} \quad (10.6.27)$$

На рис. 10.6.2 дано распределение напряжений в диске с отверстием и сплошном при действии контурных нагрузок и центробежных сил, а на рис. 10.6.3 приведены температурные напряжения.

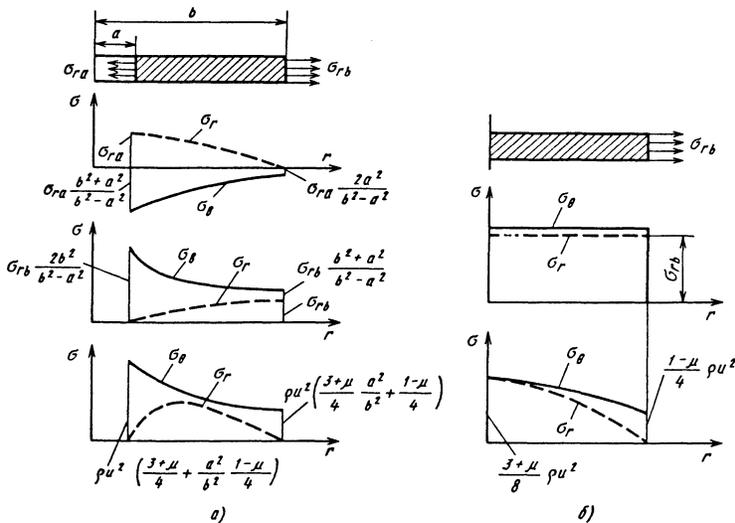


Рис. 10.6.2. Напряжения от контурной нагрузки и центробежных сил в диске: а - с отверстием; б - сплошном

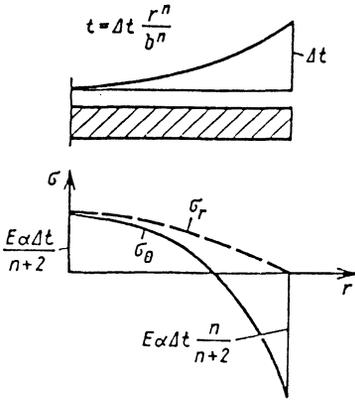


Рис. 10.6.3. Температурные напряжения в диске

10.6.3. ДИСКИ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

Точное решение существует для некоторых профилей, например, для диска гиперболического профиля, толщина которого

$$h(r) = h_0 / r^n, \tag{10.6.28}$$

для диска конического профиля, толщина которого

$$h(r) = h_0 \left(1 - \frac{r}{R_k} \right), \tag{10.6.29}$$

где h_0 и R_k - постоянные.

Так как реальные диски имеют утолщение у ступицы и обода, для их расчета применяются приближенные методы (более сорока). В настоящее время наиболее часто применяется метод непосредственного интегрирования двух уравнений первого порядка. Ниже приведен один из вариантов такой системы, когда за основные переменные принимают: радиальную силу $N_r = \sigma_r h$ и радиальное перемещение $u(r)$, которые непрерывно изменяются по радиусу диска.

Вектор неизвестных

$$\{Y\} = \begin{Bmatrix} N_r \\ u \end{Bmatrix}. \tag{10.6.30}$$

Тогда дифференциальное уравнение

$$\left\{ \frac{dY}{dr} \right\} = [A] \{Y\} + \{f_\omega\} + \{f_T\} + \{f^0\}. \tag{10.6.31}$$

Матрица $[A]$ имеет элементы:

$$A_{11} = -\frac{1-\mu}{r}; \quad A_{12} = \frac{Eh}{r^2};$$

$$A_{21} = \frac{1-\mu^2}{Eh}; \quad A_{22} = -\frac{\mu}{r}.$$

$$\tag{10.6.32}$$

Векторы нагрузки от центробежных сил, неравномерного нагрева и дополнительных деформаций:

$$\{f_\omega\} = \begin{Bmatrix} -\rho\omega^2 rh \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad \{f_T\} = \begin{Bmatrix} -\frac{Eh}{r} \alpha T \\ (1+\mu)\alpha T \end{Bmatrix};$$

$$\{f^0\} = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{r} (N_0^0 \mu N_2^0) \\ \frac{1-\mu^2}{Eh} N_2^0 \end{Bmatrix}.$$

$$\tag{10.6.33}$$

Уравнение (10.6.31) решается методом начальных параметров:

$$\{Y\} = N_{ra} \{Y_1\} + u_a \{Y_2\} + \{Y_*\}, \tag{10.6.34}$$

где $\{Y_1\}$ - решение однородного уравнения,

$$\left\{ \frac{dY_1}{dr} \right\} = [A] \{Y_1\} \tag{10.6.35}$$

при начальном значении $\{Y_1(a)\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$ и т.д.

10.6.4. РАСЧЕТ РАЗРУШАЮЩЕЙ ЧАСТОТЫ ВРАЩЕНИЯ

Приближенный метод расчета разрушающей частоты вращения диска по меридиональному сечению основан на допущении, что в момент разрушения

$$\sigma_\theta(r) = \sigma_{дл}(r), \tag{10.6.36}$$

где $\sigma_{дл}(r)$ - предел длительной прочности материала диска при температуре в сечении r (рис. 10.6.4).

Рассматривается равновесие половины диска в момент разрушения. Центробежная сила половины диска

$$C = 2\rho\omega^2 \int_F r^2 dF = 2\rho\omega^2 J, \tag{10.6.37}$$

где $J = \int_a^b r^2 h dr$ - момент инерции сечения диска относительно оси вращения.

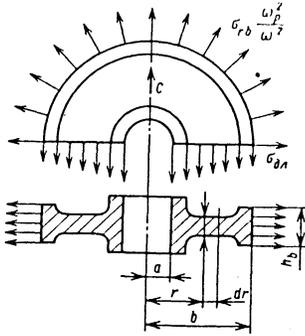


Рис. 10.6.4. Схема определения запаса прочности по разрушающим оборотам

Из условия равновесия

$$2\sigma_{rb}bh_b \frac{\omega_p^2}{\omega_{\max}^2} + 2\rho\omega_p^2 J = 2 \int_a^b \sigma_{dl} h dr.$$

Запас по разрушающей частоте вращения

$$K_{b1} = \frac{\omega_p}{\omega_{\max}} = \left\{ \int_a^b \sigma_{dl} h dr / (\sigma_{rb}bh_b + \rho\omega_{\max}^2 J) \right\}^{0.5} \quad (10.6.38)$$

Формула (10.6.38) справедлива для любого центрального сектора диска. Наиболее типично при разрушении дисков - отрыв фрагмента с центральным углом, примерно равным 120° . В удовлетворительно работающих дисках расчетный запас по разрушающей частоте вращения $K_{b1} > 1,5$. Схема для расчета показана на рис. 10.6.5. Запас по разрушающей частоте вращения

$$K_{b2} = \frac{\omega_p}{\omega_{\max}} = \left\{ \int_{r_*}^b \sigma_{dl} h dr + \sigma_{dl}(r_*) \times r_* h_* \left(1 - \frac{zd}{2\pi r_*}\right) : (\sigma_{rb}bh_b + \rho\omega_{\max}^2 J_*) \right\}^{0.5}, \quad (10.6.39)$$

где

$$J_* = \int_{r_*}^b r^2 h dr.$$

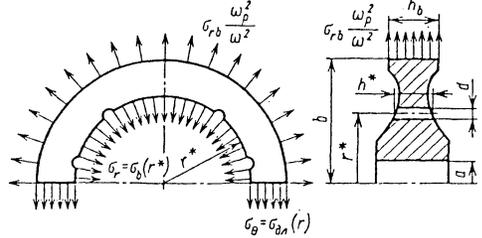


Рис. 10.6.5. Схема определения запаса прочности по разрушающим оборотам при разрушении по цилиндрическому сечению

Предполагается, что разрушение происходит по окружности центров отверстий. Расчет по формуле (10.6.39) проводят для различных радиусов разрушения для нахождения минимального значения K_{b2} . Она справедлива для любого центрального угла сектора диска. В достаточно надежных дисках $K_{b2} > 1.45$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бидерман В. Л. Деформация цилиндров при переменной по длине осесимметричной нагрузке // Прочность, устойчивость, колебания. Т. 2. М.: Машиностроение, 1968. С. 425-454.
2. Биргер И. А., Мавлютов Р. Р. Сопротивление материалов. М.: Наука, 1986. 560 с.
3. Биргер И. А. Круглые пластинки и оболочечки вращения. М.: Оборонгиз, 1961. 365 с.
4. Демьянушко И. В., Биргер И. А. Расчет на прочность вращающихся дисков. М.: Машиностроение, 1978. 245 с.
5. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975.
6. Коваленко А. Д. Пластинки и оболочки в роторах турбомашин. Киев: Изд. АН УССР, 1955. 302 с.
7. Лурье А. И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
8. Малинин Н. Н. Расчет на ползучесть элементов машиностроительных конструкций. М.: Машиностроение, 1981. 180 с.
9. Малинин Н. Н. Метод суперэлементов / Под ред. В. А. Постнова. Л.: Судостроение, 1979. 287 с.
10. Малинин Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1975. 399 с.
11. Постнов В. А. Численные методы расчета судовых конструкций. Л.: Судостроение, 1977. 160 с.

-
12. **Термопрочность** деталей машин / Под ред. И. А. Биргера и Б. Ф. Шорра. М.: Машиностроение, 1975. 455 с.
13. **Тимошенко С. П., Гурьер Дж.** Теория упругости. М.: Наука, 1979. С. 560.
14. **Усюкин В. И.** строительная механика конструкций космической техники. М.: Машиностроение, 1988. 392 с.

Раздел 11

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ДИНАМИКИ И ПРОЧНОСТИ КОНСТРУКЦИЙ

Глава 11.1

ИЗМЕРИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА

11. 1.1. ДАТЧИКИ И МЕТОДЫ ИЗМЕРЕНИЯ ДЕФОРМАЦИЙ, НАПРЯЖЕНИЙ И ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Тензометры. Механические тензометры предназначены для измерений деформаций. На большой металлической пластинке параллельно закреплены две призмы (на некотором расстоянии друг от друга), они упираются острыми в поверхность образца, деформирование которого подлежит исследованию. Одна из призм соединена с пластинкой жестко, другая - шарнирно. Пластину с призмами с помощью специальной струбцины закрепляют на образце или исследуемой детали. При деформировании образца расстояние между острыми призм изменяется, в результате чего шарнирная призма поворачивается вокруг своей оси. С помощью системы рычагов поворачивается стрелка, указывающая на специальной зеркальной шкале величину деформации.

Наиболее известен тензометр конструкции Гутенбергера с коэффициентом усиления 200-300, базой измерений обычно 20 мм, диапазоном измерений без перестановки указателя на новый диапазон $4 \cdot 10^{-3}$. Он отличается простотой схемы, надежностью и достоверностью измерений, однако имеет сравнительно большую базу измерений, практическую непригодность для исследования деформаций при высоких температурах, для измерения быстроизменяющихся деформаций в условиях вибрации и пр.

Механические тензометры вместо рычажной системы могут иметь всего один рычаг, передающий движение на шток индикаторной головки с круглым циферблатом (с базой измерений 25, 50 и 100 мм). Использование таких тензометров (деформометров) целесообразно при изучении процессов деформирования больших конструкций, в которых достаточно крупные элементы находятся в однородном напряженном состоянии, например элементов ферм мостов или сложных строительных металлоконструкций.

Тензофлексиметры - тензометры, с помощью которых одновременно измеряется длина базового участка криволинейной по-

верхности образца и его стрела прогиба. По конструкции они напоминают прибор Гутенбергера, хотя в них может быть использован индикатор часового типа.

Механико - оптические тензометры отличаются от механических тем, что вращательное движение второй призмы приводит к изменению положения приклеенного небольшого зеркала - изменению положения светового пятна от отраженного луча на шкале. На этом принципе основаны тензометры Мартенса, Берга и др. Увеличение измеряемой величины иногда достигает нескольких сотен или тысяч раз. Оптические тензометры могут быть изготовлены с большей чувствительностью, чем механические. Их база измерений может быть уменьшена до 2 мм при точности измерений 10^{-4} мм. Конечно, при этом используются микроскопы либо специальные системы линз и зеркал. В некоторых приборах такого типа увеличение достигает 10 тыс. раз.

Струнные тензометры основаны на зависимости собственной частоты колебаний струны от степени ее натяжения. Струна соединена с опорными частями двух призм, которые прижимаются специальными струбцинами к исследуемой модели. По частоте колебаний можно оценить степень деформирования детали. Для возбуждений колебаний струны и их измерения используют электромагнитные устройства.

Струнные тензометры используют для исследования как статических, так и динамических деформаций. Они отличаются высокой точностью измерений, достигающей 10^{-6} относительных деформаций, но вместе с тем сравнительной сложностью конструкции, чувствительностью частоты колебаний струны к температуре и нелинейностью градуировочных кривых.

Емкостные тензометры (датчики) представляют собой электрическую емкость, которая изменяется при деформировании образца. В случае использования плоского конденсатора емкость прямо пропорциональна площади его обкладок, относительной диэлектрической проницаемости диэлектрика, находящегося между пластинками, и обратно пропорциональна расстоянию между пластинками конденсатора (зазору). При деформиро-

вании заданного участка образца с помощью механических устройств изменяется зазор между обкладками конденсатора или площадью их взаимодействия.

Емкостные датчики могут измерять как линейные, так и угловые перемещения, они очень компактны, удобны в эксплуатации и, главное, почти не содержат элементов трения. Хотя они очень просты по конструкции, но для получения надежных данных и необходимой точности требуют применения в электрических схемах высоких несущих частот, экранированных кабелей и других мер для снижения погрешности. Емкостные датчики очень чувствительны к попаданию в них диэлектрических веществ (воды, масла и др.).

Датчики. Оптические датчики характерны тем, что при их использовании на образце не устанавливаются никакие механические детали, кроме реперов либо отражающих пластин. Отраженные от двух реперов, отличающихся от материала образца другой степенью черноты, лучи попадают в следящую оптическую систему. С помощью специальных устройств сигнал передается на самопишущий прибор. Такие системы позволяют проводить исследования при температуре превышающей 1300 К, отличаются бесконтактностью и безынерционностью, что особенно важно при измерении свойств размягчающихся материалов.

Индуктивные датчики основаны на взаимодействии индуктивного и активного сопротивлений катушки при перемещении деталей магнитопровода. Существует много схем индуктивных датчиков, в которых измерение происходит вследствие изменения зазора магнитопровода, его площади, при вводе в катушку металлического сердечника и др.

Такие датчики трудно использовать для исследования неоднородного деформированного состояния деталей сложной геометрической формы, они сравнительно громоздки и чувствительны к температуре.

Дроссельный и трансформаторный преобразователи основаны на использовании явления изменения магнитной проницаемости и индукции в ферромагнитных телах под действием механических напряжений. Магнитоупругий эффект, возникающий при этом, характеризуется чувствительностью к механическим напряжениям, которая в некотором диапазоне их изменения может быть линейной. В качестве магнитоупругих материалов используют железоникелевые сплавы с содержанием никеля 50...70 %, кремния 2...4 % и железоалюминиевые сплавы с содержанием алюминия 12 %.

Конструктивно такие преобразователи выполнены в виде магнитопроводов с разным

числом витков обмотки. Их целесообразно использовать для оценки напряженного состояния однородно нагруженных элементов.

Датчик, основанный на методе эффекта магнитных шумов - зависимости доменной структуры ферромагнетиков от степени намагниченности и уровня действующих механических напряжений, имеет две катушки: возбуждающую и приемную. Расшифровка зависимостей, характеризующих магнитные шумы в материале от уровня напряжений, позволяет определить их величину в поверхностном слое. Поскольку датчики можно изготовить сравнительно небольшими, напряжения определяется на участках с базой порядка 1 мм. Последние исследования показали, что с помощью таких датчиков можно одновременно при одном измерении фиксировать не только уровень напряжений, но и значения главных напряжений и их ориентацию. Для этого исследуются многие гармоники колебательных процессов, каждая из которых по-своему зависит от главных напряжений.

Механотронные преобразователи перемещений предназначены для небольших перемещений и представляют собой электровакуумные приборы, в которых с помощью мембран либо других механических устройств, передающих перемещение исследуемого образца на перемещение электродов, изменяется сила электрического тока. Механотроны изготавливают в виде стеклянного баллона, в одном конце которого расположена мембрана с механическим приводом, а в другом - анод, катод, спираль накаливания, электрические выводы.

Механотроны выпускаются в виде вакуумных диодов или триодов: 1) 6МХ1С, 6МХ3С, 6МХ4С, 6МХ5С в малогабаритном исполнении с октальным цоколем; 2) 6МХ1Б, 6МХ2Б в сверхминиатюрном исполнении с электрическими выводами. Механотроны первого типа имеют по два подвижных анода, второго - по одному. Диапазон измерений механотронов (диодов) 0...100 мкм, чувствительностью - 3...1000 мкА/мкм, чувствительность триодных механотронов 0,2...0,3 В/мкм.

Пьезоэлектрические датчики основаны на способности некоторых материалов при механическом нагружении образовывать на гранях электрические заряды. Такими свойствами обладают кристаллы кварца, турмалина, сегнетовой соли, дигидрофосфат алюминия и некоторых керамических материалов (титанат бария, необаты, цирко-

нат-титанат свинца и т.д.). Между разностью электрических потенциалов, возникающих на гранях пластинок, и приложенной силой существует линейная зависимость.

Коэффициент пропорциональности (пьезомодуль) для такого материала, как кварц, практически не зависит от температуры. Пьезомодуль сегнетовой соли в 150 раз превышает эту величину для кварца.

Пьезокерамические датчики целесообразно использовать для исследования процессов, при которых происходит весьма быстрое циклическое изменение напряжений, главным образом, растяжения-сжатия. Пьезодатчики, работающие на изгиб, имеют большую чувствительность по сравнению с датчиками, работающими по схеме растяжение-сжатие.

Методы. Ультразвуковой метод определения напряжений основан на анализе закономерностей прохождения упругой волны через твердое тело. Плоские поляризованные волны можно направлять под различными углами к плоскостям действия главных напряжений, благодаря чему можно найти ориентацию этих напряжений в конструкции и средний уровень действующих напряжений. Направления действия главных напряжений также могут быть определены по максимальной разности прохождения звуковой волны в двух плоскостях, а также по характеру последовательных отражений ультразвукового сигнала. Изменение скорости ультразвуковых волн под действием напряжений очень мало. Поэтому для проведения таких измерений требуется аппаратура с очень высокой разрешающей способностью.

Наиболее точными являются методы прямого и косвенного измерения времени распространения ультразвуковой волны. Прямое измерение времени основано на оценке фазовых, частотных и других характеристик. При косвенных методах время распространения ультразвука в исследуемой среде сравнивается со временем его распространения в эталонной среде, для которой скорость распространения ультразвука известна. Измерение скорости распространения ультразвука может быть основано на автоциркуляции импульса. При этом способе скорость распространения ультразвука может быть измерена с точностью 0,001 %.

Метод гальванических покрытий для оценки напряжений при повторно-переменном нагружении и в зонах концентрации напряжений основан на том, что под действием нагрузки в тонких покрытиях, например медных, происходит изменение структуры, проявляющееся в появлении темных пятен. С ростом числа циклов нагружения постепенно увеличиваются размеры и число пятен. Вместо гальванизации поверх-

ности на деталь иногда наклеивают электролитическую фольгу.

Для определения деформаций на исследуемой детали используют тарировочные графики. Исследуемая деталь нагружается тем же числом циклов, что и тарировочный образец. Визуальное сравнение фотографий темных пятен исследуемого участка и эталонного дает возможность оценить напряженное состояние этого участка.

Этот метод отличается очень низкой точностью измерений, но вместе с тем позволяет оценить состояние детали в труднодоступном месте.

Рентгенографический метод измерения деформаций используется для материалов с кристаллической структурой при упругом деформировании и основан на явлении интерференции лучей. Погрешность измерений зависит от исследуемого материала и составляет $3,5 \cdot 10^{-5} \dots 1,5 \cdot 10^{-4}$ мм/мм. Недостатками метода является то, что измеряются только упругие деформации, и небезопасность его применения. Рентгенографический метод весьма эффективно может быть использован для определения модуля упругости.

Метод линий скольжения позволяет исследовать некоторые процессы, характеризующие пластическое деформирование. Он основан на известном явлении появления на поверхности пластически деформированного материала характерных линий Чернова - Людерса, которые совпадают с линиями максимальных касательных напряжений. Метод линий скольжения используют, главным образом, для качественной оценки деформированного состояния плоских элементов конструкций.

Метод хрупких покрытий основан на том, что при деформировании детали, на поверхность которой они нанесены, одновременно деформируются и покрытия. При определенном значении деформации покрытие разрушается: образуются трещины, направление которых перпендикулярно к направлению действия наибольшего главного напряжения. Степени нагруженности материала можно оценить по густоте появившихся трещин: чем они гуще, тем более напряжен материал. Первое семейство трещин характеризует поле распределения напряжений σ_1 , а второе семейство трещин при большем нагружении - напряжения σ_2 .

Метод хрупких покрытий используют в основном для выявления мест наибольшей нагруженности деталей и определения направления действия главных напряжений. В качестве материала хрупкого покрытия обычно применяют канифоль с добавлением целлулоида в качестве пластификатора, а также различные эмали. Растворителем служит ацетон

либо другая жидкость, хорошо растворяющая канифоль, а затем легко испаряющаяся. Этот метод практически непригоден для точной количественной оценки деформированного состояния исследуемой детали. Его преимуществами являются простота, доступность, возможность использования для исследования состояний элементов сложной геометрической формы при различных режимах нагружения и сравнительно широком диапазоне температур.

Метод сеток заключается в том, что на поверхность детали наносят сетку или какие-либо метки и измеряют их геометрию перед нагружением и деформированием исследуемой детали и после него. Размер ячеек сеток всех типов 0,01...20 мм. Слишком мелкие сетки использовать нецелесообразно, поскольку измеряемые величины на порядок или два меньше размеров ячеек сетки, необходима оптическая аппаратура для измерения очень малых геометрических величин и повышаются требования к качеству нанесенных на деталь сеток.

Кроме прямого измерения геометрических параметров искажений сетки непосредственно на исследуемой детали или на фотографии ее поверхности проводят измерения по фотопластинке, на которую экспонированы одновременно два изображения сетки (перед деформацией и после нее).

Метод муаровых полос предусматривает нанесение не менее двух сеток: на поверхность нагружаемой детали и на прозрачную пленку (эталонная). В недеформированном состоянии рабочая и эталонная сетки совпадают. При нагружении (деформировании) детали совмещение изображений рабочей и эталонной сетки дает картину с характерными полосами. По известным расстояниям между ними и углом наклона к осям координат могут быть рассчитаны линейные и угловые деформации.

Сетки, используемые в методе муара, представляют собой систему параллельных линий, толщина которых часто равна ширине между ними. Для исследования деформирования тел вращения используют сетки в виде концентрических окружностей, иногда в виде радиальных линий, равномерно расходящихся от центра. Такие линии выполняют с линейно изменяющейся толщиной: нулевой в центре и равной φr на расстоянии r от центра, где φ - малый угол. В отличие от метода сеток в методе муаровых полос в основном используют очень мелкие сетки: на 1 мм приходится 3-80 линий.

Сущность муарового эффекта заключается в том, что при повороте на небольшой угол одной сетки относительно другой появляются муаровые полосы, представляющие собой геометрическое место точек, которые перемести-

лись на один шаг сетки по отношению к точкам, лежащим на смежной полосе, т.е. муаровая картина представляет собой поле полос, имеющих смысл линий равного перемещения.

Точность метода муара повышается при увеличении числа линий, входящих на 1 мм. При очень большом их числе проявляется эффект дифракции света, ограничивающий возможность точных измерений. Наиболее эффективным способом предупреждения искажений муаровых картин является оптическое фильтрование. В простейшем случае муаровую картину наблюдают с помощью двух одинаковых линз, расположенных на расстоянии двух фокусных расстояний. В фокальной плоскости устанавливают диафрагму, пропускающую лучи, прошедшие через дифракционную решетку (эталонная и рабочие сетки) под строго определенными углами и фокусирующимися в фокальной плоскости. Пропуская лучи через определенные точки, можно из изображения муаровой картины исключить все линии сетки и оставить только изображения полос, увеличить число полос, улучшить резкость и качество изображения и др.

Метод муарового эффекта может быть применен для измерения перемещений (деформаций), происходящих в направлении, перпендикулярном к исследуемой поверхности. При этом используется эффект отраженных сеток, заключающийся в том, что перед матовой поверхностью исследуемой детали на некотором расстоянии устанавливается эталонная сетка. Плоский пучок света, наклоненный под небольшим углом к нормали, направляется на сетку. На поверхности детали образуется ее тень. Совмещенное изображение сетки и ее тени дает интерференционную картину с муаровыми полосами.

Метод голографической и интерферометрии основан на явлении интерференции света при совпадении двух когерентных лучей монохроматического света, описываемого простой синусоидальной функцией и ориентированного в одной плоскости (поляризованного света), попадающих на экран со сдвигом по фазе. Необходимое количество лучей может быть получено от лазеров.

Это один из самых точных методов измерения деформаций и перемещений. Он позволяет проводить измерения деформации с точностью половины длины световой волны. Существенно также и то, что отсутствуют какие-либо требования к качеству исследуемой поверхности. Благодаря бесконтактности метода отсутствуют погрешности, обусловленные взаимодействием измерительной системы и поверхности исследуемой детали. Кроме того, имеется возможность измерения небольших температурных деформаций.

В процессе эксперимента на одной фотопластине последовательно регистрируются две интерференционные картины (голограммы), полученные для двух последовательных мало отличающихся состояний детали в процессе ее деформирования. Совмещение двух голограмм дает изображение, на котором появляются характерные темные полосы - линии равных перемещений. Точки, лежащие на одной полосе, имеют перемещения по сравнению с точками, лежащими на соседней полосе, равные половине длины световой волны (в простейшем случае).

Метод фотоупругости основан на свойстве некоторых прозрачных материалов (стекла, целлулоида, смолы, пластмассы) изменять оптические свойства в зависимости от действующих в них механических напряжений. В этом методе обычно используется эффект двойного лучепреломления: плоскополяризованный луч при попадании на прозрачную плоскую модель исследуемой конструкции может быть разложен на две взаимно перпендикулярные составляющие, параллельные направления действия главных напряжений. Эти две составляющие после прохождения через однородный изотропный напряженный материал снова могут быть совмещены. Когда в модели действуют механические напряжения, скорости прохождения составляющих этой волны в плоскости главных напряжений σ_1 и σ_2 будут соответственно пропорциональны этим напряжениям, вследствие чего две взаимно перпендикулярные составляющие будут отличаться по фазе. Сведенные анализатором компоненты лучей могут интерферировать.

Линейная разность фаз по Вертгейму

$$\delta = 2\pi h C(\sigma_1 - \sigma_2) / \lambda,$$

где h - толщина пластины; C - постоянная, характеризующая индивидуальные оптические свойства используемого оптически активного материала; λ - длина световой волны.

Если на входе в пластинку компоненты луча имели одинаковую частоту и отсутствовал сдвиг по фазе, то на выходе из пластины появляется сдвиг по фазе δ и компоненты луча могут быть представлены в виде

$$x = a \cos \alpha \cos \psi; \quad y = a \sin \alpha \cos(\psi - \delta),$$

где x, y - оси, совпадающие с направлением действия главных напряжений σ_1, σ_2 ; a - амплитуда волны; α - угол между плоскостью поляризации луча поляризатором и направлением σ_1 ; $\psi = \omega t + C$; $\omega = 2\pi/\lambda$ - частота колебаний; t - время.

Если поставить на пути луча, состоящего из этих двух взаимно перпендикулярных компонент, анализатор, плоскость поляризации которого ориентирована перпендикулярно к плоскости поляризации поляризатора, то после прохождения через него лучей

$$x_A = x \sin \alpha = 0,5a \sin 2\alpha \cos \psi;$$

$$y_A = -y \cos(-\alpha) = -0,5a \sin 2\alpha \cos(\psi - \delta).$$

Суммирование этих компонент, расположенных в одной плоскости, дает

$$s = x_A + y_A = 0,5a \sin 2\alpha [\cos \psi - \cos(\psi - \delta)] = -a \sin 2\alpha \sin 0,5\delta \times \sin(\psi - 0,5\delta).$$

Множитель a представляет собой амплитуду колебаний исходного светового луча. Следовательно, чем ярче исходящий луч, тем четче картина на экране. Множитель $\sin 2\alpha$ зависит от угла α . При значениях $\alpha = 0$ и $\alpha = \pi/2$ он равен нулю, т.е. на экране будет темный участок. Эти участки образуют два взаимно ортогональных семейства кривых (изоклины), указывающих на точки, в которых направления главных напряжений совпадают с направлением плоскости поляризации. По полям изоклин, поворачивая постоянно скрещенные под углом 90° поляризатор и анализатор, делая пометки на экране, можно получить поля траекторий главных напряжений. Следовательно, по изоклинам можно определить направления действия главных напряжений в любой точке модели.

Множитель $\sin 0,5\delta$ зависит от разности δ хода лучей, которая в соответствии с законом Вертгейма зависит от длины волны и разности напряжений $\sigma_1 - \sigma_2$. Каждый цвет полосы изохром на экране соответствует длине световой волны λ . При монохроматическом свете останется одноцветное семейство линий. По изохромам можно рассчитать величину $\sigma_1 - \sigma_2$. Линии будут темными в том случае, когда $\sin 0,5\delta = 0$ либо $\delta = 2\pi k$ (где $k = 0, 1, 2, \dots$). При $k = 0$ независимо от длины волны λ света полосы черные и не зависят от угла α . При $k = 1, 2, \dots$ каждая изохрома соответствует напряженному состоянию, отличающемуся на величину $\sigma_1 - \sigma_2 = C\lambda/h$ от предыдущего. При монохроматическом свете и одинаковой толщине модели, изготовленной из материала, характе-

ризуемого оптической константой C , точки, лежащие на смежных полосах, отличаются одинаковыми значениями $\sigma_1 - \sigma_2$.

Проведя специальную тарировку на изгибаемом либо на растягиваемом образце, определяется разность $\sigma_1 - \sigma_2$ для смежных полос. Таким образом, удается определить поле наибольших касательных и, при определенном пересчете, поле главных нормальных напряжений. Если поставить дополнительно две прозрачные пластины в четверть волны ($\delta = 90^\circ$), ориентированные под углом 45° к

оси главных напряжений (одну перед моделью, другую - после), то на экране полностью исчезнут изоклины и останутся только изохромы. Такая методика позволяет упростить процесс исследования.

Метод фотоупругости позволяет наглядно и просто определять поля распределений напряжений в телах сложной формы, в том числе в зонах концентрации напряжений. Однако исследование приходится проводить не на реальном, а на модельном материале, который отражает действительные свойства материалов только в упругой области. Для изучения закономерностей пластического деформирования покрытие из оптически активного материала наносится на реальную деталь, например, на вращающийся диск. Используя стробоскопические эффекты и исследуя напряжения покрытий, можно оценить деформированное состояние реальной детали.

Для изучения упругих напряжений в объеме используется много различных приемов, например "замораживание", при котором используется оптически активный материал, имеющий двухфазную структуру. При нагреве до 373 К одна фаза размягчается и не

принимает участия в сопротивлении деформированию, а другая под воздействием нагрузки деформируется. Затем нагруженную деталь охлаждают ("замораживают"). Размягченная фаза становится твердой и сохраняет состояние твердой деформированной фазы. Объемную модель разрезают на плоские пластинки, которые изучают с помощью обычных методов фотоупругости.

Известны методы погружения модели детали в сосуд с плоскопараллельными стенками и заполненный жидкостью с тем же коэффициентом преломления света, что и материал модели.

11.1.2. СРЕДСТВА ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЙ ПРИ ИСПЫТАНИЯХ НА ПРОЧНОСТЬ

Современное состояние и тенденции развития средств измерительной техники характеризуются максимальной автоматизацией процессов измерения и обработки результатов экспериментальных исследований. Средствами измерений являются датчики, преобразующие измеряемый параметр в электрический сигнал, автоматические аналоговые регистраторы, цифровые приборы и устройства отображения информации, цифровые информационно-измерительные системы и измерительно-вычислительные комплексы, средства вычислительной техники, в первую очередь, микропроцессоры и микро-ЭВМ.

Тензорезисторы. Чувствительный элемент тензорезистора является пассивным преобразователем, в связи с чем для получения от него электрического сигнала, пропорционального измеряемой деформации, используют чаще всего электрические мостовые и потенциометрические схемы преобразования (табл. 11.1.1).

11.1.1. Основные виды измерительных цепей тензорезисторов

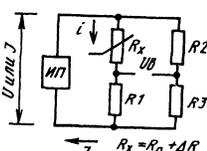
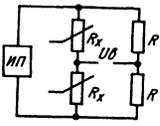
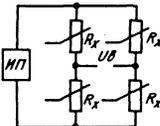
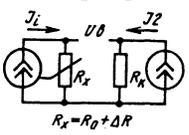
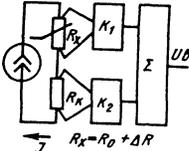
Схема измерения	Выходное напряжение при заданном	
	$U = \text{const}$	$I = \text{const}$
<p>Мостовая:</p> 	$U_B = \frac{U \Delta R}{4 R_0} \left(\frac{1}{1 + \frac{\Delta R}{2 R_0}} \right)$ <p>или $U_B = 0,5 I \Delta R_0$ при $R_0 = R,$ $R_1 = R_2 = R_3 = R$</p>	$U_B = \frac{1}{4} I \Delta R$

Схема измерения	Выходное напряжение при заданном	
	$U = \text{const}$	$I = \text{const}$
	$U_B = \frac{E \Delta R}{2 R_0}$	$U_B = 0,5 I \Delta R;$
	$U_B = E \frac{\Delta R}{R_0}$	$U_B = I \Delta R$
<p>Компараторная:</p>  	-	<p>при</p> $U_B = I \Delta R$ $I_1 = I_2 = I,$ $R_0 = R_k = R$ <p>при</p> $U_B = I K \Delta R$ $K_1 = K_2 = K,$ $R_0 = R_k = R$

Условия, при которых могут использоваться тензорезисторы, приведены ниже.

Максимальная деформация, м/м, не более	$15 \cdot 10^{-2}$
Вибропрочность - достижимое число циклов нагружения N при заданной максимальной амплитуде переменной деформации ϵ , м/м:	
$5 \cdot 10^{-4}$	$N \geq 10^9$
$1 \cdot 10^{-3}$	$N \geq 10^8$
$2 \cdot 10^{-3}$	$N \geq 10^7$
$3 \cdot 10^{-3}$	$N \geq 10^5$
Динамика	0 до 50 кГц и выше, ударные волны до 500 кГц
Ускорение, м/с ² , не более	$1,6 \cdot 10^6$
Температура, К	4 до 1200
Давление окружающей среды, МПа	До 10^3
Магнитная индукция, Тл, не более	8
Ядерное (радиоактивное) излучение	Длительность зависит от характера излучения, дозы и типа датчика

Приведенным условиям при различном сочетании отвечают многочисленные модификации тензорезисторов. Создаются конструкции тензорезисторов, которые удовлетворяли бы реальным условиям эксплуатации при сочетании параметров: при повышенных температурах при наличии и отсутствии теплосмен; в широком диапазоне криогенных и повышенных температур; в случае усталостных испытаний при повышенных температурах и т.д. Точность измерения деформаций с помощью тензорезисторов определяется самим объектом измерения, тензорезистором, креплением тензорезистора к объекту, защитой тензорезистора, выбранной схемой преобразования изменения сопротивления в электрический сигнал, электронной аппаратурой, условиями окружающей среды.

Решетки тензорезисторов изготавливают либо фототравлением из тонкой фольги (толщиной 3...5 мкм), либо намоткой из проволоки (диаметром 15...25 мкм). Фольговый тензорезистор предпочтительнее использовать при коротких базах, при решетках сложной формы и в многоэлементных тензорезисторах (в виде розеток, цепочек и др.). Проволочный тензорезистор технически равноценен фольговому, экономически выгоден при длинных решетках (20 мм), а технически - при использовании в области высоких температур. Базы тензорезисторов 0,3...150 мм. Обычно оптимальной считается решетка с базой 5...10 мм при сопротивлении тензорезистора 50...800 Ом, наиболее часто 100...400 Ом.

Тензорезисторы принципиально пригодны для измерения статических и динамических нагрузок. Число возможных циклов нагружения зависит от материалов, использованных в тензорезисторе, амплитуды деформации и характера приложенной нагрузки. Число циклов нагружения, выдерживаемых тензорезистором, обычно превышает устойчивость испытываемых деталей к знакопеременным нагрузкам, если последние не изготовлены из особо прочного материала. Максимальная частота колебательных или импульсных процессов, которая может быть измерена тензорезисторами, окончательно не установлена. Известны примеры успешных измерений при частоте выше 50 кГц. При изучении импульсных процессов были получены сигналы, крутизна фронта которых соответствует ударной волне, значительно превышающей 500 кГц.

Для измерения деформаций применяют также полупроводниковые, интегральные и пленочные тензорезисторы [89]. Несмотря на высокую чувствительность полупроводниковых тензорезисторов, их используют сравнительно редко ввиду нелинейности характеристики и трудностей компенсации различных тепловых эффектов.

К нормируемым метрологическим характеристикам тензорезисторов относятся: функция преобразования деформаций и чувствительность при нормальной температуре; относительная поперечная чувствительность; функция влияния температуры на чувствительность; ползучесть; механический гистерезис; температурная характеристика сопротивления; дрейф выходного сигнала; сопротивление изоляции. Тензорезисторы являются средством измерения, конкретные экземпляры которых не тарируются, а их метрологические характеристики определяются статистически и выражаются в основном в виде средних значений и средних квадратических отклонений в выборке, распространяемых на всю партию.

Основной причиной погрешностей при измерениях с помощью тензорезисторов, особенно в условиях переменных температур, является изменение сопротивления от температуры, которое может в несколько раз превысить изменение сопротивления от деформации. Применяется ряд способов компенсации и учета температурной характеристики сопротивления тензорезисторов: термообработка тензочувствительного материала чувствительного элемента; схемная компенсация температурной характеристики; специальные конструкции тензорезисторов; внесение поправки на температурное приращение сопротивления и др.

При использовании тензорезисторов важно учитывать следующее: тип тензорезисторов и клея; возможность тепловой обработки; необходимость герметизации; измерительную аппаратуру. В случае массового тензометрирования натурных конструкций при повышенных температурах следует принимать во внимание дополнительные факторы: одновременное использование сотен и тысяч тензорезисторов; удобство установки тензорезисторов и монтажных цепей; компенсацию влияния изменения сопротивления длинных (до 1000 м и более) измерительных линий; недоступность тепловой обработки при монтаже тензорезисторов; минимальное число отказов при монтаже и в процессе эксперимента.

Механические испытания и теплофизические исследования современных материалов требуют проведения измерения деформаций при температуре до 3000° С и выше. Наиболее достоверные измерения деформаций можно провести с использованием бесконтактных методов, среди которых выделяют оптический компараторный, интерференционный и оптоэлектронный [4, 27, 60]. Перспективный оптоэлектронный метод базируется на законах когерентной оптики, отображающих связь пространств предметов и изображений. Исследуемый объект помещают в пространство предметов, а изменения его размеров измеряют по соответствующим параметрам изображения.

Приборы, реализующие оптоэлектронный метод измерения, содержат осветитель для освещения объекта, объектив для проецирования его изображения на фотоприемник и электронные устройства для обработки сигнала с выхода фотоприемника. В качестве фотоприемника предпочтительнее отдадут дискретным, многоэлементным (линейным и матричным), твердотельным фотоприемникам в интегральном исполнении - ФПЗС - приборам с зарядовой связью. Каждая ячейка ФПЗС - миниатюрный конденсатор со структурой металл - оксид - полупроводник (МОП), с толщиной слоя диэлектрика примерно 0,1 мкм. При освещении ячейки ФПЗС происходит фотогенерация электронно-дырочных пар - дырки оттекают в глубину полупроводника, а электроны накапливаются в потенциальной яме и могут существовать, не рекомбинируя. Величина заряда электронов пропорциональна времени, освещенности и площади ячейки.

Основные достоинства ФПЗС - высокая точность размещения отдельных фоточувствительных ячеек на подложке, составляющая доли микрометра, большой динамический диапазон, отсутствие геометрических искажений, малая инерционность, высокая надежность, нечувствительность к магнитным и электрическим полям. В испытательных камерах ФПЗС применяются для исследований при температурах до 3273 К. Применение высококачественной оптики и ЭВМ для обработки электрических сигналов с ФПЗС и управления режимами их работы обеспечивают точность измерения порядка 0,1 мкм.

Датчики перемещений. При измерении перемещений во многих случаях могут быть определены другие параметры - деформации, силы, давление, параметры вибраций, механические напряжения и др. Датчики перемещений классифицируют по следующим основным признакам: принципу действия чувствительного элемента; структуре построения; виду выходного сигнала [1, 22, 27, 69].

По физическому принципу все датчики делятся на следующие типы: тензорезисторные, фотоэлектрические (оптоэлектронные), использующие эффект периодического изменения освещенности; электростатические - емкостные (основанные на эффекте периодического изменения емкости) и пьезоэлектрические (основанные на эффекте возникновения электрического заряда на поверхности некоторых материалов в момент деформации); электромагнитные (использующие, например, эффект периодического изменения индуктивности или взаимоиндуктивности); электроакустические (основанные, например, на эффекте изменения энергии поверхностей акустической волны); электромеханические, электроконтактные (основанные на эффекте резкого изменения сопротивления парных электроконтактов

при их замыкании и размыкании); реостатные (использующие эффект линейного изменения сопротивления); механотропные (основанные на механическом управлении электронным током электровакуумных приборов путем непосредственного механического перемещения их электродов).

В зависимости от способа соединения элементов датчиков различают три основные структурные схемы: с последовательным преобразованием, дифференциальные и компенсационные [22]. По характеру изменения во времени выходного сигнала различают датчики непрерывного и дискретного действия. В зависимости от вида параметра выходного сигнала, находящегося в линейной зависимости от измеряемого перемещения, датчики непрерывного действия разделяют на амплитудные, частотные и фазовые. Соответственно датчики дискретного действия могут быть амплитудно-импульсными, частотно-импульсными, время-импульсными; кодоимпульсными.

Амплитудные и амплитудно-импульсные датчики обладают наибольшей простотой конструкции и электронной схемы, высокой надежностью и достаточным быстродействием. Они могут быть как генераторными, так и параметрическими. Среди генераторных датчиков наибольшее распространение получили индукционные и фотоэлектрические датчики, преобразующие контролируемое перемещение и напряжение (ЭДС) переменного тока. Среди параметрических широко применяют тензорезисторные, индуктивные; взаимоиндуктивные, фотоэлектрические и емкостные датчики.

Общим недостатком амплитудных датчиков является их низкая помехозащищенность, что недопустимо в условиях эксплуатации. У частотных, фазовых и соответственно частотно-импульсных и время-импульсных датчиков этот недостаток отсутствует, поскольку амплитуда их выходного сигнала постоянна и не зависит от контролируемого перемещения. Эти датчики обладают более высокой точностью, линейной характеристикой управления, быстродействием, но меньшей надежностью по сравнению с амплитудными датчиками ввиду более сложных конструкции и электронной схемы.

Контактные и емкостные датчики характеризуются большой простотой изготовления, но обладают известными недостатками: контактные - малой надежностью, ограниченной выходной частотой и небольшим сроком службы; емкостные - малым выходным сигналом и влиянием емкости монтажа на частоту выходного сигнала. Индуктивные датчики обычно характеризуются высокой надежностью и большим сроком службы, но обеспечивают невысокую частоту выходного сигнала,

ограниченную наличием переходных процессов. Следует отметить, что практически неограниченной выходной частотой и очень малым нагрузочным моментом отличаются фотоэлектрические датчики. Однако они отличаются определенной сложностью конструкции и эксплуатации.

Все датчики дискретного типа, особенно время-импульсные, число-импульсные и код-импульсные, по сравнению с аналоговыми (в частности, с амплитудными) обладают возможностью наиболее простого преобразования в цифровую форму выходных сигналов. Особое место при прочностных исследованиях занимают датчики, использующие для преобразования перемещений в электрический сигнал тензорезистор. Широкая номенклатура таких датчиков и новые разработки обусловлены относительной простотой их конструкции и технологии изготовления, возможностью во многих случаях получить требуемые параметры, имеющейся измерительной аппаратурой, а также наибольшей подготовленностью специалистов, работающих в этой области.

Датчики сил. При измерении сил используют физические эффекты, для которых характерна определенная зависимость между силой и другой величиной, например, деформацией (относительной или абсолютной), давлением, пьезоэлектричеством, магнитострикцией и т.д. [67, 72]. Наиболее распространено использование упругой деформации пружинных элементов в динамометрах. Электрические динамометры, позволяющие в части измерения и регулирования нагрузки полностью автоматизировать процесс испытаний, обладают необходимыми метрологическими характеристиками, принципиально применимы в большинстве условий эксплуатации.

При выборе типа динамометра основными характеристиками, на которые ориентируются, являются: точность, чувствительность, линейность, гистерезис, воспроизводимость, ползучесть, влияние температуры, давления, радиации, механических и других внешних воздействий на "дрейф" нуля и точность; чувствительность к механическим помехам (поперечные силы, изгибающие и крутящие моменты), пригодность для измерения статических и (или) динамических нагрузок; частотный диапазон; перегрузочная способность (предельная нагрузка, защита от разрушения); "жесткость" динамометра (деформация при номинальной нагрузке); условия применения - защита от влияния окружающей среды; коррозионная, температурная, радиационная, вибрационная и другая стойкость; размеры, возможности монтажа, демонтажа, калибровки в процессе эксплуатации; требования к измерительным трассам; особенности электроснабжения - род, вид, величина, стабильность, флюк-

туации; род и величина выходного электрического сигнала - аналоговый, дискретный, частотный. При оптимальном сочетании всех характеристик можно получить с использованием выбранного динамометра необходимую достоверность экспериментальных данных.

Среди всех электрических динамометров наибольшее распространение имеют тензорезисторные. Диапазон измерения этих диаметров необычайно широк - 5 Н ... 10 МН и более. Решающим фактором, однако, является обеспечиваемая ими высокая точность измерения: погрешность может быть меньше 0,03 %. Тензорезисторные динамометры пригодны как для статических, так и для динамических измерений. Вследствие большой жесткости эти динамометры отличаются достаточно высокой собственной частотой, которая может достигать несколько килогерц.

Индуктивные динамометры, характеризующиеся большим измерительным сигналом, используют в лабораторной и испытательной практике для статических и динамических измерений, в классах точности 0,2 до 1 %, на номинальные силы (растяжения или сжатия) до 10 МН. Магнитоупругие динамометры обычно целесообразно применять в таких условиях эксплуатации, при которых затруднено или невозможно использование тензорезисторных динамометров - радиационное облучение, большие нагрузки. При прецизионной технологии изготовления динамометра и материала упругого элемента класс точности прибора составляет примерно 1 %, но может достигать 0,03 %.

Пьезоэлектрические динамометры отличаются большой жесткостью, позволяют измерять динамические силы до частот выше 100 кГц и исследовать незначительные по величине динамические составляющие нагрузки, класс точности обычно 1 %.

Датчики температуры. К обычным средствам измерения температуры относятся контактные термометры - расширения, термоэлектрические и сопротивления; пирометры излучения - энергетические и спектрального распределения (цветовые), основанные на специальных способах измерения температуры (спектроскопические, термоиндикаторные и др.) [38].

В технике прочностных испытаний наибольшее распространение получили электрические контактные термометры (термоэлектрические термометры - термопары и термометры сопротивления) и пирометры, основанные на методах измерения температуры тел по их излучению [1, 38].

Термопары из платины и сплава с родием обладают высокой точностью и воспроизводимостью термоэлектрической характеристики, более устойчивы к коррозии и окислению, используются при температуре 0...1700°С.

Термопары из благородных металлов имеют сравнительно низкую чувствительность к изменению температуры, но относительно высокую стоимость.

Термопары из неблагородных металлов, используемые для измерения более низких температур, составляют большую часть всех применяемых термопар. К нормированным относятся медь - константан (-250...+400° С); железо - константан (-250...+700° С); хромель-алюмель (-200...+1300° С). Наиболее распространены хромель-алюмеливые термопары, достаточно точные и устойчивые, со сравнительно линейной характеристикой. Однако они развивают меньшую термоЭДС, чем медь - константановые и железо - константановые термопары, и имеют ограниченное время использования при высоких температурах ввиду окисления при температуре выше 600° С. Приведенные диапазоны температур эксплуатации даны для воздушной среды. Для инертной среды используют термопары из других материалов, например, вольфрам-ренийевые (выше 2000° С).

В отличие от термопар, с помощью которых можно измерять только разность температур, термометры сопротивления позволяют определить абсолютные значения температур, но при их использовании необходим вспомогательный источник напряжения. Линейность температурной характеристики существенно зависит от материала чувствительного элемента термометра, в качестве которого используют металлы и полупроводники. Наиболее известны металлические термометры сопротивления - медные (-50...+180° С), никелевые (-60...+180° С), платиновые (-220...+750° С), в нейтральной атмосфере 1000° С.

Пирометры реализуют бесконтактный метод измерения температуры, различие их типов позволяет охватить диапазон измерения температур -50...+3000° С при точности 1-2 %. Применение пирометров наиболее оправдано в следующих случаях: области высоких температур, где другие приборы не обладают требуемой термостойкостью; для измерения температуры труднодоступных, удаленных или движущихся объектов, чего невозможно достичь контактными термометрами. С помощью современных инфракрасных камер возможно получение изображения температурных полей различных объектов.

Для правильного выбора средства измерения температуры необходимо учитывать погрешности, обусловленные как этим средством и его соединительными и измерительными элементами, так и свойствами объектов измерения и окружающей среды. С учетом конкретных условий при использовании известных методов можно в большей или меньшей степени уменьшить погрешность измерения температуры.

Измерительные приборы и системы. Информация об измеряемом параметре, поступающая от датчика и преобразованная в электрический сигнал, обрабатывается прибором или системой для дальнейшего представления в заданном виде для анализа и принятия решений. Наибольшее значение имеют цифровые измерительные приборы (ЦИП), информационно-измерительные системы (ИИС) и измерительно-вычислительные комплексы (ИВК) [22, 27, 48, 60, 84]. Развитие цифровой измерительной техники основано на широком использовании более совершенных алгоритмов цифровой и аналоговой обработки сигналов, новых физических принципов, возможностей современных средств микроэлектроники (микропроцессоров, в том числе и аналоговых, микро-ЭВМ, кодоуправляемых коммутаторов, аналоговых и кодовых интегральных измерительных функциональных преобразователей и др.).

Цифровой измерительный прибор снабжен устройствами выборки и хранения информации на входе, а также различными видами памяти на выходе. Информационно-измерительная система освобождает оператора от регистрации и функций обработки результатов измерения. Каждая измеряемая величина преобразуется в датчике в унифицированную величину, обычно в напряжение, которое подается через коммутатор на цифровой измерительный прибор. Обработка результатов измерения выполняется вычислительным устройством.

Измерительно-вычислительный комплекс как автоматизированное средство представляет собой программно-управляемую совокупность измерительных, вычислительных и вспомогательных устройств, предназначенную для контроля и испытания сложных объектов. ИВК включает устройства ввода программ (УПВ); программное управление большинством агрегатов комплекса; развитую систему отображения информации (СОИ - цифровая печать, магнитная запись, аналого-цифровые отображения, мнемонические устройства, дисплеи и др.).

Для современных ИИС характерен агрегатный или модульный принцип построения: объединение автономных цифровых измерительных приборов с приемниками и источниками информации в виде измерительных преобразователей, преобразователей аналог-код, счетчиков импульсов, устройств накопления, регистрации информации и управляющих устройств-контроллеров. Для этого все ЦИП и другие устройства должны обладать свойствами совместности - конструктивной, информационной, метрологической, энергетической, эксплуатационной. Устройства соединены между собой при помощи унифицированной системы взаимосвязи - интерфейса.

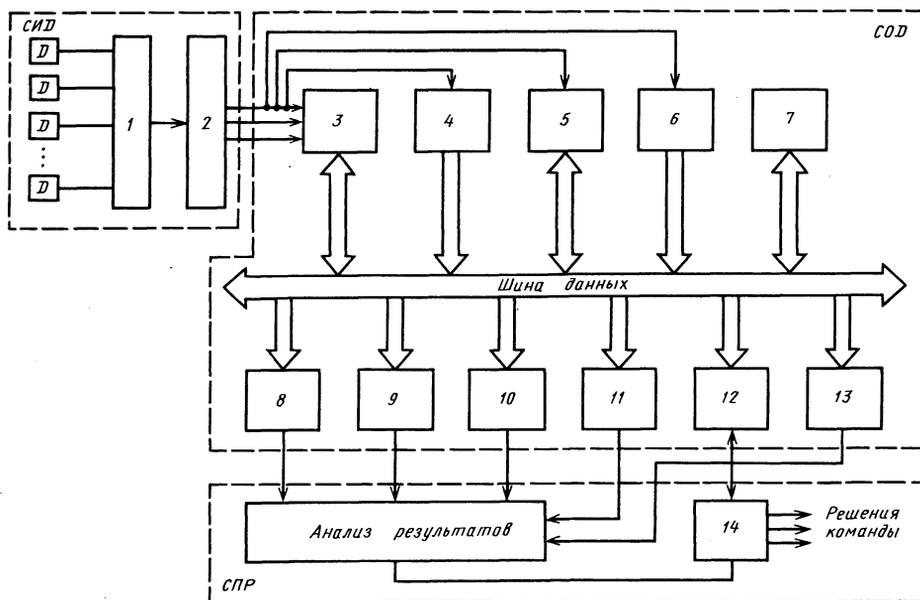


Рис. 11.1.1. Микропроцессорная информационно-измерительная система:

1 - коммутатор; 2 - микроконтроллер, сбор и предварительная обработка данных; 3 - порт согласования и ввода данных; 4 - клавиатура; 5 - накопитель на гибких магнитных дисках; 6 - специализированные устройства ввода; 7 - микровычислитель; 8 - рулонный графопостроитель; 9 - планшетный графопостроитель; 10 - дисплей; 11 - алфавитно-цифровое устройство; 12 - накопитель на гибких дисках; 13 - специализированные устройства ввода; 14 - блок исполнительных устройств; Д - датчик; СИД - система измерения данных; СОД - система обработки данных; СПР - система принятия решений

Современные ЦИП, ИИС и ИВК построены на базе микропроцессоров (МП) [44] - центральных арифметико-логических устройств на одном или нескольких кристаллах, каждый из которых может выполнять обработку информации под управлением программ. Современные тензометрические системы или устройства представляют собой автоматический комплекс аппаратных и программных средств для получения и обработки результатов измерения деформации и физических величин, характеризующих напряженно-деформированное состояние объекта (рис. 11.1.1). В зависимости от назначения возможны различные варианты приведенной структуры, когда те или иные структурные элементы отсутствуют или вводятся новые. Тенденции развития ИИС позволяют выделить два основных направления в построении их структур: с жесткими алгоритмами функционирования и программируемые.

В случае применения тензорезисторов при выборе измерительной цепи и параметров ее источника электроснабжения следует учитывать: допустимую мощность рассеяния тен-

зорезисторов; число измерительных каналов; скорость изменения измеряемого процесса (статический или динамический процесс); длину измерительных линий; входное сопротивление измерительного прибора, подключаемого к выходу измерительной цепи и др. В многоканальных ИИС (особенно при удалении тензорезисторов на значительные и различные в каждом канале расстояния) следует отдать предпочтение электроснабжению измерительных цепей напряжением постоянного тока или постоянным током.

С тензорезисторами и тензорезисторными преобразователями, в основном, используются три вида измерительных цепей: потенциометрические, мостовые и компараторные. Выбор той или иной измерительной цепи и вида электроснабжения определяются: задачами, решаемыми ИИС; параметрами и условиями применения используемых тензорезисторов; электрическими схемами тензорезисторных преобразователей механических величин; характером распределения тензорезисторов по объекту и удалением их от измерительного прибора; характером влияния на погрешность

измерения элементов, составляющих измерительную цепь; параметрами входной цепи (сопротивление, емкость и др.) и измерительного прибора и т.д.

Современные ЦИП характеризуются: цифровыми измерителями линейных и угловых перемещений до 0,02 мкм и долей угловой секунды соответственно; цифровыми измерителями температуры, охватывающими диапазон температур -200...+2500° С (при этом цифровые кварцевые измерители температуры имеют разрешающую способность до 10^{-6} °С); цифровыми параметрами с диапазоном от десятков до 2000° С класса 0,05, высокого быстродействия с расстоянием до объекта до 30 м; АЦП двукратного интегрирования для тензометрии с коэффициентом подавления до 120 дБ как для первой, так и для высших гармоник сетевой частоты; цифровыми виброметрами, динамометрами, манометрами и др.

Среди цифровых программируемых приборов широкое применение получили логтеры - портативные (масса не более 5 кг) микропроцессорные программируемые системы сбора, обработки, хранения и выдачи информации в цифровой форме. По информационным возможностям они близки к стационарным информационно-измерительным системам, многие из них способны работать в диалоговом режиме, выполняя в простейших случаях роль цифровой управляющей системы. Логтеры используют преимущественно для сигналов термо- и тензодатчиков, датчиков давления и других неэлектрических величин, сигналов постоянного и переменного напряжений. В качестве памяти в них служат миниатюрные кассетные магнитографы, их дисплеи построены на жидкокристаллических индикаторах и электронно-лучевых трубках.

Переносные микропроцессорные ИВК типа К537 и программируемые контролеры "МикроДАТ" по своим характеристикам близки к логтерам.

Интеллектуальные ИИП позволяют достичь максимальной степени автоматизации измерений в экспериментальных исследованиях вследствие более гибкого осмысленного машинного учета всех априорных данных об измерениях и шумовых процессах, а также данных о технических возможностях подсистем ИИС. Характерными чертами этих ИИС являются: возможность свободного взаимодействия человека и компьютера (на естественных языках и образцах); восприятие и переработка измерительной и служебной информации не только на количественном, но и качественном уровнях; широкое использование методов обучения и самообучения, а также методов аналогий, процедур принятия решений, прогнозирования; возможность анализа больших цепочек причинно-следственных связей.

Глава 11.2

СТАТИЧЕСКИЕ ИСПЫТАНИЯ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ ВЫСОКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ

11.2.1. ОСОБЕННОСТИ ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНЫХ ИСПЫТАНИЙ

Методы кратковременных статических прочностных испытаний при нормальных и повышенных до 1500 К температурах достаточно хорошо известны и освещены в литературных источниках [64], а также регламентированы стандартами (ГОСТ 9.910-88, ГОСТ 25.503-80, ГОСТ 25.506-85, ГОСТ 9651-84, ГОСТ 14019-80) на основные виды испытаний материалов при растяжении, сжатии, изгибе, кручении и др. В дальнейшем механические испытания тугоплавких материалов, проводимые в интервале 1500...3300 К, будут считаться высокотемпературными. При высокотемпературных испытаниях тугоплавких материалов для сопоставимости определяемых характеристик важно обеспечить соблюдение закона подобия механических испытаний в отношении формы и размеров образцов, одинаковых условий силового и теплового нагружения, учета влияния состава среды, способов нагрева и других факторов [3].

Прочностные свойства тугоплавких материалов вследствие их чувствительности к окислению на воздухе обычно определяют в вакууме (не менее 0,1 МПа, при натекании воздуха в вакуумную систему примерно 0,1...0,3 мкл/с) или инертной среде. В процессе кратковременных испытаний, когда в качестве защитной среды используют аргон, минимальные температурные выдержки (3...10 мин) приводят к небольшому поверхностному насыщению образцов остаточными газами из объема рабочей камеры и не оказывают заметного влияния на прочностные характеристики. Испытания сплавов ниобия и тантала вообще не желательно проводить в среде аргона или динамического вакуума (при натекании воздуха в вакуумную систему более 0,5 мкл/с). В некоторых случаях, при высокотемпературных механических испытаниях псевдосплавов тугоплавких материалов, содержащих легкоплавкую составляющую, необходимо регулировать интенсивность испарения, тогда в рабочей камере испытательной установки создается инертным газом избыточное давление 0,1...10 МПа.

При проведении механических испытаний тугоплавких материалов применяют различные методы нагрева образцов: радиационный, электронно-лучевой, плазменный, индукционный, непосредственным пропусканием тока через образец, комбинированный, с соответствующей комплектацией высокотемпературных установок.

Наибольшее распространение получил радиационный (лучевой) метод нагрева образцов, осуществляемый за счет теплового нагревателя.

11.2.2. СПЕЦИАЛИЗИРОВАННЫЕ ИСПЫТАТЕЛЬНЫЕ УСТАНОВКИ И СТЕНДЫ

Высокотемпературные установки и специализированные стенды для определения характеристик кратковременной прочности тугоплавких материалов и элементов конструкций созданы на базе универсальных испытательных машин НПО "Машиностроитель" и "Измеритель", фирм Instron, МТ (США), Шенк (Германия) и др. [3, 28, 63, 64]. В них использованы стандартные унифицированные блоки и системы, которые обеспечивают нагружение и нагрев образцов, вакуумирование, измерение и регистрацию параметров механических испытаний (рис. 11.2.1).

Блоки нагружения осевой силой (0...1 кН) - универсальные испытательные машины с электромеханическим, гидравлическим, электромагнитным или другим приводом. Высокая точность измерения нагрузки обеспечивается специальными сменными датчиками усилий, которые устанавливаются внутри рабочих камер. Специальные устройства позволяют поддерживать постоянную нагрузку длительное время.

Для проведения циклических испытаний и на кратковременную секундную ползучесть дополнительно предусмотрена блок-приставка

для нагружения с автоматическим программным регулированием режимов. Электродвигатель постоянного тока, электронный тиристорный регулятор вместе с задатчиком программы обеспечивают проведение циклических испытаний при пульсирующем растяжении для любой формы цикла нагружения.

Установки для испытания трубчатых конструктивных элементов при сложном напряженном состоянии в условиях кратковременного нагружения осевой растягивающей силой и внутренним давлением оснащены блоком высокого давления рабочей газовой среды, основу которого составляют газовый компрессор, система емкостей, регулирующие и запорные клапаны [63]. Устройство для нагружения образца растягивающими и сжимающими нагрузками установки "Микрат-4-6" расположено внутри испытательной камеры, а силовозбудитель - вне камеры [3].

Вакуумная система высокотемпературной установки состоит из рабочих испытательных камер, вакуум-проводов с движками, форвакуумных и диффузионных насосов, которые позволяют создавать и поддерживать разрежение в пределах $1 \cdot 10^{-5}$ Па при нормальной температуре и $1 \cdot 10^{-4}$ Па при температуре 2000 К [63]. Для измерения давления применяют термоманометры и ионизационные вакуумметры.

Рабочие вакуумные камеры, как правило, сменные и могут быть применены на установках различных типов в зависимости от видов

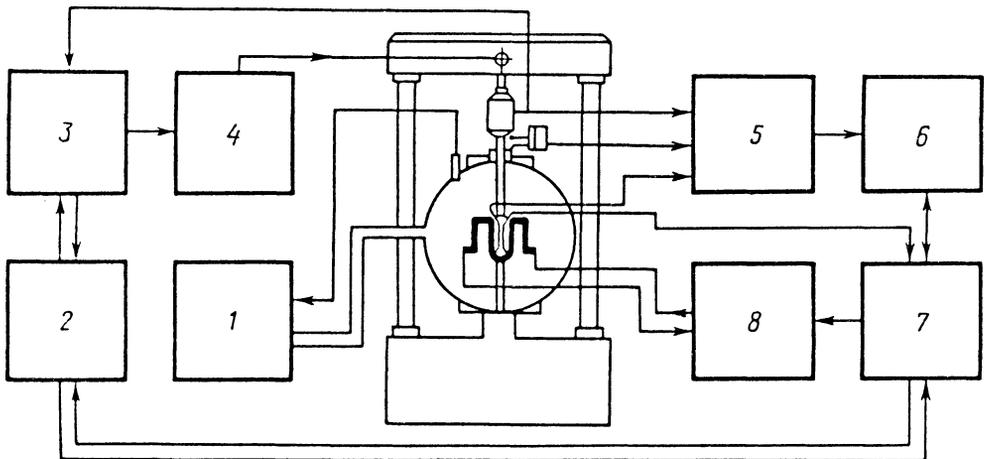


Рис. 11.2.1. Типовая схема высокотемпературной установки для кратковременных испытаний:

1 - система создания и измерения вакуума; 2 - блок синхронизации управления нагружением и нагревом; 3 - блок автоматического управления нагружением; 4 - блок систем нагружения постоянной и циклической нагрузкой; 5 - блок измерения и регистрации основных параметров механических испытаний; 6 - устройство согласования сигналов ЭВМ; 7 - блок автоматического управления нагревом; 8 - система нагрева

испытания. Для испытаний на растяжение, сжатие, срез и изгиб при высоких температурах в рабочих камерах некоторых установок предусмотрены специальные захватные устройства и приспособления [29, 63]. При испытании на растяжение в сменных захватных устройствах устанавливают плоские, круглые, трубчатые и другие образцы общей длиной 20...200 мм с любым поперечным сечением (включая и микрообразцы на установках типа "Микрат-4-6"). При испытании на изгиб сосредоточенной силой захваты имеют специальные пазы, на которых устанавливаются образцы размерами 25×3×3 мм для металлических материалов (или увеличенные до 100×10×10 мм для композиционных материалов [28, 63, 64]). Датчики для измерения сил и деформаций в зависимости от уровня температуры устанавливают внутри камеры или вне ее (при этом учитываются потери на трение в вакуумных резиновых уплотнениях). Испытания на сжатие и срез при высоких температурах проводят на цилиндрических или призматических образцах (размеры зависят от свойств материалов, уровня температур и др.) на специальных приспособлениях.

Система нагрева включает наиболее часто радиационный (лучевой) источник нагрева образцов [63, 64] в высокотемпературных установках различного назначения с применением малогабаритных электропечей сопротвления.

Пластиначатые нагреватели различной формы и размеров (диаметр печного пространства 10...20 мм, высота 50...100 мм) обеспечивают устойчивый нагрев до 3300 К при кратковременных испытаниях. Они потребляют небольшую мощность 6,5...8 кВт при 3300 К, в тепловом отношении малоинерционны и пригодны при проведении термоциклических испытаний.

В рабочем пространстве печи обеспечивается достаточно равномерный нагрев: продольный градиент температуры по длине рабочего участка 25...30 К при температуре 2300...2500 К. Управление режимом нагрева установок по заданным программам (циклам) осуществляет программный электронный регулятор напряжения. В регуляторе применена тиристорная схема, построенная на принципе фазово-импульсного регулирования напряжения, которое при постоянном сопротивлении нагрузки пропорционально разрешающей пропускной мощности. Регулятор вместе с автоматическим задатчиком программ РУ-5-02 при кратковременных испытаниях задают оптимальные режимы нагрева, обеспечивают стабилизацию температуры на образце в пределах $\pm 1\%$. Регулятор имеет автоматическую и ручную регулировку управления нагрева (при использовании термопар ВР-5/20 до 2300 К и оптических пирометров до 3300 К). В

режиме "ускоренного" нагрева можно получить максимальную скорость нагрева 50...200 К/с.

Методики кратковременных высокотемпературных испытаний [28, 63] рекомендуют различные скорости нагрева образцов и стабилизирующие выдержки (5...20 мин). Для кратковременных статических высокотемпературных испытаний на растяжение приемлем следующий режим нагрева:

медленное повышение температуры до 500...700 К со скоростью 0,3...1,0 К/с;

ускоренный подъем температуры до заданных рабочих значений со скоростью 5...100 К/с;

выдержка при температуре испытания в течение 3...5 мин.

Электропечи к термокамерам универсальных и специальных установок большей мощности имеют разнообразные конструкции. Для измерения температуры образцов широко применяют термопары и оптические пирометры [28, 63]. Термопары типа вольфрам-рений в среде инертного газа и в вакууме позволяют измерять температуру до 3000°С, обладают высокой стабильностью и чувствительностью, имеют срок службы, намного превышающий продолжительность кратковременных испытаний. Применение термопар ограничено термостойкостью изоляции. Термопары с изоляцией из оксида алюминия Al_2O_3 можно использовать до температуры 1800°С, с изоляцией из BeO - до 2500°С. При более высоких температурах применяют пирометры [28].

Блок измерения и регистрации основных параметров (нагрузки, температуры, времени и др.) состоит из автоматических показывающих и записывающих приборов [3, 28]. При высокотемпературных испытаниях, особенно с использованием вакуумных камер, системы измерений более сложные, чем при обычных температурах, причем не всегда удается исключить влияние температуры на сигналы датчиков. В одних случаях предпочтение отдают оптическим системам, а в других - разрабатывают бесконтактные системы измерения линейных величин (см. гл. 11.1). Датчики перемещений (по захватам) при высокотемпературных испытаниях обеспечивают качественную запись процесса пластического деформирования образца, но не дают достаточно корректных значений характеристик упругости.

Полученные экспериментальные кривые деформирования "нагрузка - удлинение" перестраивают в диаграммы "напряжение - деформация". В случае применения специальных автоматизированных систем [27] информация с ЭВМ поступает в виде протоколов испытаний, содержит графический материал в виде диаграмм растяжений, формирует банк данных и др.

Глава 11.3

ИСПЫТАНИЯ НА ПОЛЗУЧЕСТЬ
И ДЛИТЕЛЬНУЮ ПРОЧНОСТЬ
ПРИ ВЫСОКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ

Важную роль в открытии ползучести Ко-риолисом и Вика в 1830-1834 г. сыграла постановка прецизионных экспериментов при разрешающей возможности измерений деформации примерно 10^{-7} . Систематические исследования, проведенные к 1910 г., позволили Андраде предложить уравнение ползучести, которое и сейчас относится к числу базовых. В настоящее время примерно 100 фирм в мире выпускают более 1000 единиц наименований экспериментального оборудования для исследования ползучести [28].

Камеры позволяют проводить исследования в различных средах. В зависимости от температуры испытаний [73] различают термокамеры, криокамеры и термокриокамеры. Термокамеры могут быть низкотемпературные (до 673 К) и высокотемпературные (электропечи). Электропечи обеспечивают нагрев до 1773 (воздушные), 2073 (инертный газ), 3273 К (вакуумные) [28, 63, 64].

В низкотемпературных камерах (и при отрицательных температурах) испытывают полимеры, пластмассы, резину, цветные и другие металлы. Установки для испытания этих материалов характеризуются универсальностью, многоцелевым назначением, значительным числом одновременно испытываемых образцов, тщательностью контроля основных характеристик нагружения. Измерения деформации проводятся с помощью индикаторов, оптических методов, индуктивных датчиков, фотоследящих систем.

Тугоплавкие материалы на воздухе в основном испытывают при температуре до 1273 К. Нагрев до 1773 К затруднен в связи с применением для испытаний на воздухе в основном хромоникелевых нагревателей. В высокотемпературных камерах [64] проводят испытания преимущественно в вакууме или среде инертного газа при температуре 1073...3173 К и нагрузке 0,005...30 кН. Например, испытания на установке ПВ-3012Н [28] осуществляют при нагрузке 0,005...0,5 кН и температуре 1473...2473 К, а на установках ПРВ-203 и ПРВ-303 - при нагрузке 0,05...30 кН и температуре 1273...3173 К. Карбиды тугоплавких металлов испытывают при более высокой температуре (3473 К и выше).

Установки с камерами, независимо от температуры испытаний, как правило, имеют цокольную конструкцию; замкнутый силовой контур образован станиной, ходовым винтом, установленным на станине корпусом камеры, тягами и рычажным механизмом. Резкое по-

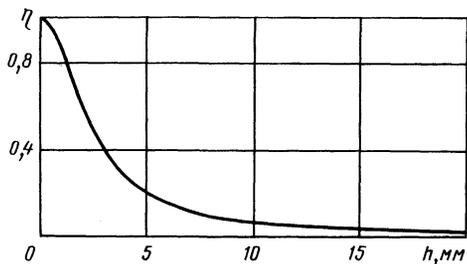


Рис. 11.3.1. Зависимость эффективности теплообмена от расстояния между поверхностями нагревателя и образца

нижение прикладываемых при высокой температуре нагрузок делает необходимым обеспечение как непосредственного нагружения, так и нагружения с помощью рычажной системы.

В различных установках много общего имеют системы нагрева, измерения и контроля температуры, деформации, обеспечения газовой среды и т.п. При этом конструкция печи, размеры камер, элементов различных систем, трудоемкость обслуживания во многом определяется мощностью, затрачиваемой на нагрев испытываемого образца. При этом мощность, затрачиваемая на достижение одной и той же температуры, может различаться на порядок, что объясняется существенной зависимостью эффективности η теплообмена между поверхностями образца и нагревателя при малых расстояниях h между ними (рис. 11.3.1). Большинство печей характеризуется большим расстоянием h между нагревателем и образцом (рис. 11.3.2, а) и соответственно большой мощностью, затрачиваемой на нагрев.

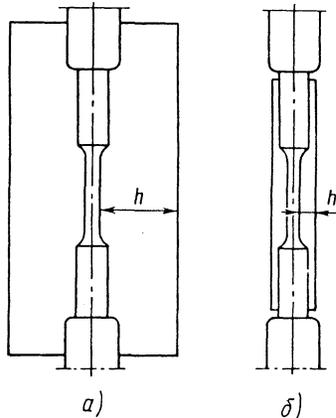


Рис. 11.3.2. Взаимное расположение образца и нагревателя

При уменьшении расстояния h (рис. 11.3.2, б) снижаются затраты мощности, но возникает трудность точной установки образца, контроля температур ввиду приближения нагревателя к термопаре.

Радиационный нагрев при температуре выше 2773 К сопровождается значительным повышением скорости испарения даже наиболее тугоплавкого вольфрама. При этом интенсифицируется химическое взаимодействие образующихся паров с материалом образца. Индукционный нагрев, лишенный этого недостатка, позволяет проводить испытания при температуре до 4273 К. Равномерный нагрев обеспечивается соответствующими расположением и конфигурацией витков индуктора [63].

При испытаниях тугоплавких металлов с покрытиями в агрессивной среде возникают трудности нагрева при значительно более низкой температуре, в частности при 1573...1973 К. В этом случае целесообразно применить открытую печь [28, 63]. В отражательной печи, состоящей из водоохлаждаемого эллиптического цилиндра, в одном из фокусов расположен испытуемый образец, в другом - нагреватель электросопротивления из графита. Рабочее пространство нагревателя и образца разделены, что позволяет проводить испытания в разных агрессивных средах. Нагреватель электросопротивления помещен в кварцевую трубку, заполненную инертным газом (аргоном) для предотвращения окисления. Внутренние поверхности эллиптического цилиндра и крышек полированы и покрыты никелем (хромом) для обеспечения высокой направленной отражательной способности и коррозионной стойкости. Это позволяет концентрировать энергию источника излучения в фокальной области, где помещен образец для осуществления необходимого нагрева. Возможно использование и других методов нагрева [28]. Значительные методические трудности могут возникнуть при необходимости создания особой газовой среды, проведения испытаний в условиях радиационного воздействия и др.

Свойства тугоплавких металлов при высокотемпературном нагреве могут существенно изменяться вследствие насыщения примесями внедрения. Интенсивность насыщения примесями определяется температурой нагрева, составом газовой среды, исследуемого материала, условиями нагружения и др.

Для проведения испытаний в вакууме при температуре 2373 К необходим предварительный прогрев не менее 15 ч, а при дальнейшем повышении температуры еще больше. Это свидетельствует о трудоемкости проведения исследований в глубоком вакууме, принципиальных трудностях обеспечения необхо-

димых условий, необходимости дифференцированного подхода к выбору оборудования, целесообразности проведения испытаний в обычном вакууме при защите металла от насыщения с помощью геттеров и др. Для повышения эффективности дифференцированного выбора экспериментального оборудования необходимо расширение использования расчетной оценки газонасыщения.

Специфические трудности нагрева, измерения и контроля деформации испытаний в различных газообразных и жидких средах приводят к естественной необходимости проведения многообразных испытаний, испытаний на микрообразцах. Целесообразность проведения многообразных испытаний связана также со статистическим характером устанавливаемых значений механических свойств. При исследовании жаропрочных материалов число образцов увеличивалось в соответствии с числом стоек с идентичными системами нагрева, измерений деформаций и др. или числом образцов, испытываемых на одной стойке [28]. При проведении многообразных испытаний существенно затруднены измерение и контроль деформаций. С повышением температуры испытания существенное значение приобретает мощность, затрачиваемая на нагрев. Этому особое внимание уделялось при создании шестистоечной установки для высокотемпературных испытаний тугоплавких материалов в вакууме [63].

Поскольку для многих элементов конструкции характерна существенная неоднородность механических свойств по объему, точность определения их механических свойств существенно зависит от уменьшения размеров испытуемого материала до микрообразцов. Требования к испытаниям микрообразцов и стандартных во многом идентичны [28]. Микрообразцы должны сохранять геометрическое подобие со стандартными образцами. Широко испытывают на растяжение образцы диаметром 0,8; 1,0; 1,2 мм и на кручение - диаметром 1,2; 1,6 и 2 мм. Оптимальная длина рабочей части образца при статических испытаниях на растяжение составляет $5d$ (где d - диаметр).

Прецизионное оборудование для испытаний микрообразцов отличается универсальностью [28]. Например, машина М1 44 предназначена для испытаний микрообразцов на растяжение, кручение, изгиб, сжатие и срез, имеются машины для испытаний в вакууме, различных газообразных и жидких средах.

Принято считать, что ползучесть начинает развиваться при близких для ОЦК-металлов к $0,3 T/T_{пл}$ температурам. Вместе с тем все больше расширяются низкотемпературные

исследования ползучести. Создана установка для испытаний металлов при активном нагружении, релаксации, в режиме ползучести при 1,65...300 К [84].

Усовершенствование методики измерения твердости путем вдавливания шарика в образец с лункой способствует повышению точности контроля сопротивления ползучести. В многообразном устройстве для проведения испытаний на ползучесть методом вдавливания шариков образцы цилиндрической формы с вырезанными на торцах лунками располагают в цепочку, к которой прикладывают осевую силу. В результате измеряется общая деформация.

Исследования на ползучесть и длительную прочность в близких к реальным условиям радиационного повреждения сопряжены с преодолением целого ряда методических трудностей [87]. Разработана аппаратура для изучения ползучести металлов в условиях бомбардировки их низкоэнергетическими ионами. Установка для испытаний на растяжение в условиях действия постоянных и импульсных магнитных полей обеспечивает достаточно сильные и однородные магнитные поля в малых объемах, при относительно небольшой мощности позволяет исследовать микрообразцы.

Ползучесть материала в условиях плоского напряженного состояния исследуют обычно на тонкостенных трубчатых образцах, нагруженных осевой силой, внутренним давлением, вращением, в основном, крутящим моментом. Модернизация установок применительно к исследованию материалов с существенно различным сопротивлением растяжению и сжатию позволяет расширить возможности варьирования величины и направлением осевой силы. Создана установка для испытаний на ползучесть при программном ступенчатом изменении крутящего момента, осевого усилия в тонкостенном трубчатом образце при температуре испытаний до 1273 К.

Многие исследования [2, 79] приводят к выводу, что в сопротивлении материалов статической и циклической ползучести наряду с особенностями есть много общего. Соответственно трудно провести резкую грань и в экспериментальных исследованиях, прежде всего это касается установок для статического нагружения и нагружения с программным изменением температуры и напряжения. Расширяются исследования статической и циклической ползучести при сложном нагружении. В ряде случаев реализация статического и нестационарного нагружения может вызвать особые методические трудности. Например, при дополнительном действии ультразвуковых колебаний выраженными оказались трудности измерений деформаций.

Глава 11.4

МЕТОДЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ ТРЕЩИНОСТОЙКОСТИ КОНСТРУКЦИЙ

11.4.1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ, НАЗНАЧЕНИЕ И ОБЛАСТЬ ПРИМЕНЕНИЯ

При оценке долговечности и остаточной прочности конструкций ответственного назначения широко используется принцип безопасного повреждения, допускающий наличие трещин в силовых элементах изделий. Частично разрушенный элемент сопротивляется дальнейшему развитию трещин, в чем и выражается трещиностойкость конструкции. Трещиностойкость конструкции устанавливают экспериментальными либо аналитическими методами.

Испытания натуральных конструкций могут подтвердить возможность безопасной эксплуатации данной конструкции, или ей подобной, при отсутствии значительных отклонений от условий их проведения. Ограниченная применимость результатов натуральных испытаний, как правило, сочетается с трудоемкостью, высокой стоимостью и невозможностью получения всесторонней оценки конструкции с учетом широкого диапазона варьирования большого числа эксплуатационных факторов. Эти недостатки натуральных испытаний можно исключить сочетанием их с методами расчетного определения трещиностойкости конструкций.

Мерой трещиностойкости конструкций служат характерные параметры разрушения, которые позволяют определить поля напряжений и деформаций в области кончика трещины в ответственный момент процесса разрушения. Применительно к наиболее распространенным в реальных изделиях трещинам нормального отрыва хорошо обоснованными и апробированными параметрами разрушения являются: коэффициент K_1 интенсивности напряжений, интеграл J_1 , раскрытие δ_1 и угол α_1 раскрытия вершины трещины. Для качественной оценки трещиностойкости конструкции используют также следующие величины: критическую температуру хрупкости $T_{кр1}$, $T_{кр2}$, предел трещиностойкости I_c , коэффициенты интенсивности напряжений $K_{с\sigma}$ и деформаций $K_{с\epsilon}$.

Характеристики трещиностойкости конструкции и металлических материалов могут существенно отличаться между собой, поскольку последние определяют при стандартных испытаниях на одноосно нагруженных образцах, имеющих относительно малые размеры. Однако эксперименты по исследованию трещиностойкости проводят только при от-

сутствии приемлемой альтернативы, когда окончательное разрушение конструкции может сопровождаться катастрофическими последствиями. В таких исследованиях выявляют зоны повышенной поврежденности конструкции, проверяют аналитические оценки характеристик ее трещиностойкости и обрабатывают методики обнаружения начальных дефектов и контроля за развивающимися трещинами.

Из разнообразных сторон явления разрушения и многочисленных методических аспектов проведения экспериментальных исследований трещиностойкости конструкций ниже рассмотрены только наиболее изученные

и важные в практическом отношении: методы определения характерных величин параметра K_1 . Следовательно, в дальнейшем постулируется линейно-упругое поведение всего объема материала конструкции за исключением маломасштабных зон пластичности у кончиков трещин. Общее представление об области применения и назначения рассматриваемой совокупности экспериментальных методов дает таблица 11.4.1. В ней упорядочено (по видам испытаний) представлены характеристики трещиностойкости и параметры трещин в конструкции, относящиеся к трем основным стадиям процесса ее разрушения.

11.4.1. Виды натуральных испытаний и характеристики трещиностойкости конструкций

Вид испытаний	Характеристики сопротивления разрушению и параметры дефектности, определяемые на стадиях		
	раскрытия стационарной трещины	стабильного роста трещины	нестабильного разрушения и торможения трещины
Электронная фрактография изломов	a_0, c_0 - начальные размеры трещины; w, h - ширина и высота зоны вытяжки	$\frac{da}{dN}$ - скорость роста усталостной трещины; Δa_c - стабильный прирост трещины	Направление роста трещины; скорость роста трещины и ее ветвление
Неразрушающим методом дефектоскопии	Идентификация расположения, формы, размеров и ориентации начальных дефектов	Определяемый момент старта	-
Разрушающее контрольное	Идентификация наиболее опасных трещин и других дефектов	-	Определяемые критическая нагрузка и параметр K_1
Кратковременное статическое	K_{10}, K_{1e}, K_{1i} - характерные значения параметра K_1	K_R - кривая; $\frac{da}{dt} - K_{1r}$ - диаграмма статического разрушения; K_{1r} - величина K_1 в начале неустойчивости	$K_{1c}, \Delta a_c, \Delta a_a,$ $K_{1m}, K_{1a},$ $\left(\frac{da}{dt} - K_1\right)$
Длительное статическое	K_{2sc} - пороговое значение параметра K_1 при коррозионном растрескивании	$\frac{da}{dt} - K_1$ - диаграмма замедленного разрушения	-

Продолжение табл. 11.4.1

Усталостное	$(K_1)_{th}$ - пороговое значение параметра K_1 при циклическом нагружении	$\frac{da}{dN} - \Delta K_{1max}$ - диаграмма усталостного разрушения	K_{fc} - критический параметр K_1 при циклическом нагружении
Динамическое	$(K_{1i})_D$ - стартовое значение параметра K_1 при динамическом нагружении	-	$\frac{da}{dt} - K_{ID}$ - диаграмма динамического разрушения; $(K_{1a})_D$; K_{1min} ; T_{CAT} - температура остановки трещины

Примечание: индексы 0; e; i; r; c; m и a обозначают характерные моменты процесса разрушения.

Экспериментальные исследования трещиностойкости конструкции целесообразно начинать с детального анализа данных эксплуатационных разрушений аналогичных серийных изделий. Наиболее ценными являются объективные данные, полученные методами электронной фрактографии изломов, которые позволяют выявить причины поломок. Правильность фрактографического анализа зависит от сохранности эксплуатационных изломов и возможности тщательного изучения их поверхностей в лабораторных условиях.

Следующим этапом исследований является определение картины реальной дефектности рассматриваемой конструкции. Необходимо установить место расположения, число, размеры, форму и направления развития трещин и трещиноподобных дефектов. С этой целью применяют неразрушающие методы дефектоскопии, базирующиеся на использовании рентгеновских лучей, магнитных частиц, проникающих красителей, электросопротивления, ультразвуковой и акустической эмиссии, а также визуального наблюдения. Поскольку ни один из этих методов не способен дать исчерпывающие сведения о поврежденности сложных, например крупногабаритных сварных или литых конструкций, их дополняют разрушающими контрольными испытаниями.

Контрольным испытаниям обычно подвергают сосуды высокого давления, трубопроводы, силовые элементы авиаконструкций и судов, а также быстро вращающиеся детали машин, например, роторы и диски турбогенераторных установок. Первые два типа изделий подвергают гидротестированиям под давлением, а последние испытывают на специальных разгонных стендах. Уровень статической нагрузки в контрольных испытаниях подбирают таким образом, чтобы можно было обнаружить и идентифицировать наиболее опасные трещины и трещиноподобные дефекты.

В зависимости от целей испытаний и условий эксплуатации конструкций осуществляют последующее раздельное или совместное исследование ее трещиностойкости при статическом, циклическом и динамическом нагружении. При этом определяют характерные значения K_1 на стадии затупления трещины, строят кривые сопротивления разрушению K_R и кинетические диаграммы разрушения (зависимости скорости роста трещин от параметра K_1), а также устанавливают характерные величины K_1 в процессе нестационарного распространения и в момент остановки трещины.

11.4.2. КОНСТРУКЦИИ СО СТАНДАРТНЫМИ ТРЕЩИНАМИ

Испытаниям на трещиностойкость подвергают конструкции, ее натурные элементы и модели. При этом начальные повреждения, напряженное состояние, граничные условия и условия испытаний должны быть близки экстремальному случаю безаварийной эксплуатации конструкций такого типа.

Для обеспечения подобия повреждений в испытаниях и эксплуатации вводится предположение о том, что конструкция содержит, так называемые, максимально необнаруживаемые или регламентированные (допустимые) дефекты типа трещин. Наибольший размер первых для серийных изделий из металлических материалов обычно принимается равным 1 мм. Последний может быть уточнен на основе результатов дефектоскопического контроля поврежденности конструкции. Расположение, ориентация и геометрические параметры регламентированной трещины, обеспечивающие требуемые минимальные величины характеристик трещиностойкости, устанавливаются пу-

тем обобщения данных о трещинах, образующихся в конструкциях рассматриваемого типа вследствие усталостных, коррозионных, производственных и случайных повреждений. Предполагается также, что в наиболее опасном сечении содержится, по крайней мере, одна необнаруживаемая или регламентированная трещина.

Если оценка статической трещиностойкости конструкции осуществляется без дополнительного исследования усталостного и коррозионного разрушения, то регламентированное повреждение может представлять собой сквозной или поверхностный надрез с инициированной из его вершин усталостной трещиной (рис. 11.4.1). Ее расчетная длина l должна удовлетворять требованиям стандарта [50], а способ и условия выращивания имитировать таковые при экспериментальном режиме эксплуатации конструкции со стабильно развивающейся трещиной.

Моменту i старта трещины предшествует момент O начала раскрытия ее берегов вблизи линии фронта и момент e начала пластического затупления кончика трещины. Для идентификации этих условных моментов в кратковременных или длительных статических испытаниях обычно регистрируют диаграмму (нагрузка P , нормальная к линии трещины, - относительное смещение v берегов последней) и с помощью того или иного метода убеждаются в отсутствии физических приростов трещины вплоть до момента i . По диаграмме $P-v$ устанавливают значения нагрузки P и смещения v в указанные моменты и вычисляют соответствующие им величины параметра K_I . Последние позволяют рассчитать уровни нагрузки P в моменты O , e и i при наличии стационарной трещины произвольных размеров.

Изложенный подход к определению сопротивления разрушению конструкций, как и все известные сейчас аналоги, не учитывает

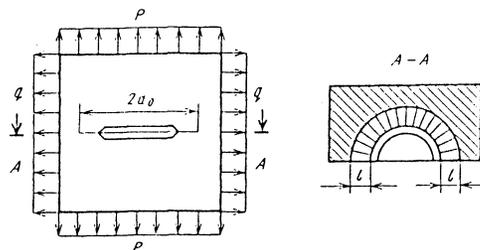


Рис. 11.4.1. Пластина с острым поверхностным надрезом и начальной трещиной длиной l , выращенной из его вершины

возможно существенной зависимости стартовых и достартовых величин параметров разрушения от знака и уровня нагрузки q (см. рис. 11.4.1), действующей вдоль линии трещины. Влияние этой нагрузки на текущие и характерные значения параметра K_I нельзя корректно учесть с помощью теоретических моделей линейной механики разрушения.

11.4.3. КОНСТРУКЦИИ С РАЗВИВАЮЩИМИСЯ ТРЕЩИНАМИ

В большинстве конструкций после старта трещины наблюдается стадия стабильного разрушения, которая обычно завершается переходом к нестабильному, а затем динамическому развитию процесса разрушения. Сопротивление конструкции росту трещины характеризуют кривой K_R (рис. 11.4.2) либо диаграммами статического (рис. 11.4.3, а) или усталостного (рис. 11.4.3, б) разрушения. По ним определяют параметры разрушения в момент r начала стадии нестабильного роста трещины (см. рис. 11.4.2) и в момент s достижения развивающейся трещиной (рис. 11.4.3, а) некоторой критической скорости \dot{a}_c , а также оценивают безопасный срок службы и остаточную прочность конструкции.

Методики построения кривых K_R и диаграмм разрушения по данным испытаний конструкций и образцов из металлических материалов концептуально подобны. Однако геометрию инициирующего надреза и размеры начальной трещины в конструкции можно варьировать, как правило, в более широких

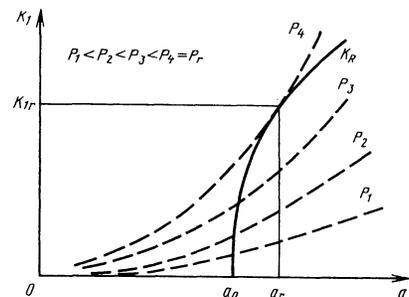


Рис. 11.4.2. Схематическое представление кривой K_R и процедуры графического определения параметра K_I в момент начала нестабильного разрушения (штрихом показаны силы $P_1 - P_4$), движущие трещину при повышающихся уровнях нагрузки P

диапазонах, чем это допустимо при испытании стандартных образцов. В данном случае указанные параметры целесообразно выбирать такими, чтобы процедура определения сопротивления конструкции разрушению при статическом нагружении совмещалась с оценкой длительности роста трещины от максимально обнаруживаемых до регламентированных размеров. Поэтому в качестве начальных повреждений используют, если это возможно, конструктивные концентраторы напряжений с производственными, случайными или специально выращенными поверхностями трещин. Размеры последних должны быть равны, сопоставимы или эквивалентны размерам максимально обнаруживаемых или наиболее типичных для данного изделия трещиноподобных дефектов.

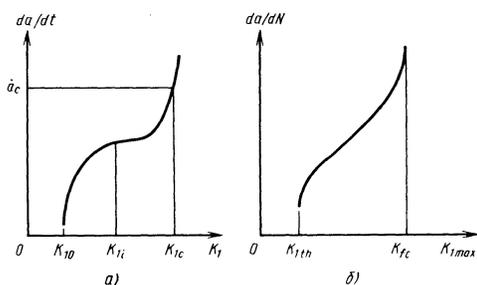


Рис. 11.4.3. Зависимости скорости роста трещин от параметра при нагружении:

а - статическом; б - циклическом; K_{I0}, K_{Ith} - пороговые значения; K_I, K_{II} - стартовая величина K_I ; K_{Ic}, K_{Ic} - критические значения K_I

Испытуемая конструкция должна подвергаться воздействию некоторого обобщенного спектра нагружения, учитывающего взаимодействие постоянных и повторно-переменных нагрузок, остаточных напряжений, температурных и других физических полей, коррозионных сред и поверхностно-активных веществ. Спектр нагружения устанавливается на основе анализа статистических данных об изменениях напряженно-деформированного состояния рассматриваемой зоны повреждений в процессе изготовления, монтажа, эксплуатации и ремонта конструкции. Во время испытаний регистрируют нагрузку и размеры трещины, по которым определяют величины ее приростов и скорости распространения в том или ином направлении. С их помощью строят диаграммы статического или усталостного разрушения.

При достаточно протяженных участках стабильного роста трещины возникает воз-

можность после получения необходимых данных прекратить процесс разрушения и полностью восстановить несущую способность конструкции путем осуществления ремонтных операций. В таких случаях для построения соответствующих диаграмм разрушения рекомендуется проводить дополнительные испытания с поочередной реализацией основных составляющих спектра эксплуатационного нагружения: длительного статического, многоциклового, малоциклового и кратковременного статического нагружения.

Для повышения достоверности оценок характеристик остаточной прочности конструкции надо, чтобы к началу последнего из перечисленных режимов испытаний трещина имела регламентированные размеры. В ходе кратковременных статических испытаний регистрируют диаграммы $P - v$, синхронно с ней измеряют приросты трещины. По ним определяют характеристики достартовой и стартовой трещиностойкости конструкции, строят кривые K_R и устанавливают значения параметров разрушения, соответствующие началу нестабильного роста трещины. Последние позволяют рассчитать остаточную прочность конструкции с трещинами произвольных размеров.

Кратко рассмотрим методы косвенной оценки характеристик сопротивления разрушению конструкций с развивающимися трещинами, которые основаны на фрактографических исследованиях пространственного расположения бороздок усталости и определении размеров зоны вытяжки. Обычно бороздки и зона вытяжки образуются на изломе металлических материалов в процессе усталостного разрушения. Анализ изменений ширины бороздок в сочетании с данными о режиме нагружения позволяет определять скорость роста трещины, вычислять значения параметра K_I и строить диаграмму усталостного разрушения. По ширине и высоте зоны вытяжки можно приблизительно установить стартовое значение раскрытия δ_1 в вершине острой усталостной трещины, а также число циклов нагружения, в течение которых происходило разрушение конструкции. Кроме того, анализ изломов выявляет места инцидирования и наиболее опасные направления роста трещин, а также их критические размеры, соответствующие началу стадии нестабильного разрушения.

11.4.4. ТОРМОЖЕНИЕ И ОСТАНОВКА ТРЕЩИН В КОНСТРУКЦИЯХ

Целью применения описанных выше экспериментальных методов является предотвращение нестабильного роста трещины путем ограничения действующих напряжений. По-

следние определенным образом связаны с размерами трещины и характеристиками трещиностойкости конструкции. Создание конструкций гарантированной надежности часто невозможно.

Методы и средства, предназначенные для остановки нестабильно растущей трещины до аварийного разрушения, широко применяют при создании конструкций повышенной живучести, в частности, силовых элементов летательных аппаратов. Конструкция обладает повышенной живучестью, если частичное или полное разрушение какого-либо из силовых элементов не имеет катастрофических последствий для конструкции в целом. Для этой цели используют либо специальные конструктивные решения, либо целенаправленно подбирают или изменяют свойства материала. В обоих случаях необходимы данные о трещиностойкости конструкции на стадии торможения и в момент остановки нестабильной трещины.

Многообразие и специфичность известных методов и средств остановки трещин ограничивают дальнейшее изложение общими методическими положениями по проведению соответствующих исследований. Прежде всего требуется определить трещиноопасные направления и границы допустимого расположения вершин заторможенной трещины в тех элементах конструкции, разрушение которых может сопровождаться катастрофическими последствиями. С учетом этих сведений создают начальные повреждения и выбирают места расположения и направленность принятых средств воздействия на распространяющуюся трещину: накладок, многослойных вставок, ребер жесткости, полостей, сварных швов или полос повышенной трещиностойкости.

Остановка трещины может произойти только тогда, когда условия для ее непрерывного распространения перестают выполняться, что должно учитываться при определении характеристик трещиностойкости на стадии

торможения и остановки нестабильной трещины. Достаточно точный динамический анализ поведения конструкции с трещиной можно провести с помощью зависимости скорости ее роста $\frac{da}{dt}$ и величины динамической трещиностойкости K_{ID} .

Искомой характеристикой трещиностойкости конструкции считают [42] минимальное значение $K_{ID} = K_{I \min}$ на диаграмме динамического разрушения (рис. 11.4.4). Нестабильная трещина остановится, если в процессе ее торможения будет достигнуто условие $K_I = K_{ID} = K_{I \min}$.

Необходимые для определения характеристики $K_{I \min}$ экспериментальные данные получают в ходе реализации, описанной в предыдущем разделе, методики оценки остаточной прочности конструкции. Значения параметра K_I для распространяющейся трещины устанавливают с помощью соответствующих динамических решений и данных о нагрузке P , размерах и скорости роста трещины. С этой целью используют также прямые способы, основанные на методах фотоупругих и других покрытий [42]. Однако с любой из известных подходов к построению зависимости, показанной на рис. 11.4.4, очень сложен и специфичен как при получении исходных экспериментальных данных, так и при осуществлении динамического анализа при расчете величин K_I . Поэтому, как правило, используют относительно простые методы одноточечной оценки характеристики $K_{I \min}$ без построения полной диаграммы динамического разрушения. Они основаны на определении величины $K_I = K_{Ia}$ в вершине остановленной трещины после того, как испытуемая конструкция вернулась в состояние статического равновесия.

На участке торможения нестабильной трещины параметр K_I , вычисленный с использованием статического и динамического решений, обычно изменяется, как показано на рис. 11.4.5, с соблюдением условия $K_{Ia} = (K_{Ia})_{st} \leq (K_{Ia})_D = K_{I \min}$. В результате определения величины K_{Ia} получают приближенную и вместе с тем консервативную оценку характеристики $K_{I \min}$. При этом отсутствует необходимость в сложных измерениях скорости роста трещины и трудоемких динамических расчетах, поскольку величину K_{Ia} вычисляют с помощью обычных статиче

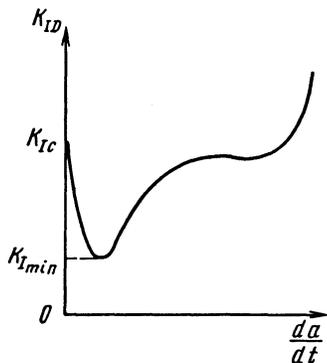


Рис. 11.4.4. Возможное изменение величины K_{ID} в функции скорости динамического роста трещины

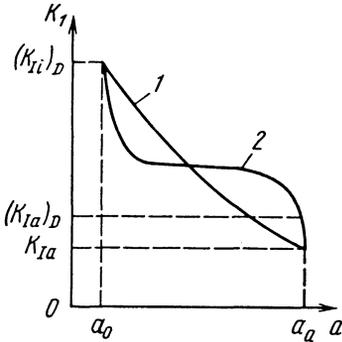


Рис. 11.4.5. Значения параметра K_I в момент инициирования нестабильного роста трещины (K_{II}) и в процессе ее торможения:

1 - статическое решение; 2 - динамическое решение

ских решений по нагрузке и длине трещины, соответствующих моменту ее остановки.

Еще один подход в создании конструкций повышенной живучести основан на представлении о температуре остановки трещины $T_{САТ}$. Суть его состоит в создании температурного градиента, обеспечивающего повышение характеристик трещиностойкости материала вдоль траектории нестабильной растущей трещины. В зоне с достаточно высокой температурой, большей температуры $T_{САТ}$, трещина самопроизвольно останавливается, что подтверждается многочисленными опытами.

Глава 11.5

ИСПЫТАНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ НА УСТАЛОСТЬ ПРИ МЕХАНИЧЕСКИХ ПОВТОРНО-ПЕРЕМЕННЫХ НАГРУЗКАХ

11.5.1. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ИСПЫТАНИЙ НА УСТАЛОСТЬ

На сопротивление усталости деталей влияет огромное число факторов, совокупное значение которых носит неопределенный характер и не всегда может быть оценено по раздельному влиянию каждого из них.

Усталостное разрушение происходит путем возникновения трещины, ее развития и окончательного разрушения. Оно характеризуется, как правило, весьма малой пластической деформацией, внезапностью и приводит к катастрофическим последствиям. В изломе образца или элемента конструкции можно различить две зоны: токоволокнистую разви-

тия усталостной трещины и крупнозернистую окончательного долома. В зависимости от вида нагружения (изгиб, растяжение, кручение), уровня напряжений, наличия их концентраторов зоны разрушения могут иметь различный вид.

Кривые усталости аналитически описываются различными уравнениями, в том числе уравнением

$$\sigma_a N^m = C,$$

где m и C - параметры.

Обычно результаты испытаний на усталость представляют в виде кривых усталости (рис. 11.5.1) с осью ординат σ_a и осью абсцисс N (число циклов в логарифмическом масштабе). При использовании двойной логарифмической шкалы напряжение можно наносить в логарифмическом масштабе. В этом случае результаты часто ложатся на прямую линию, особенно если включаются данные при очень больших значениях долговечности.

Для кривой усталости характерными величинами являются: предел выносливости σ_r - максимальное напряжение, которое может выдержать материал без разрушения произвольно большое число циклов; база испытания N_6 - число циклов нагружения, после которого разрушения образца не происходит независимо от длительного нагружения; предел выносливости $(\sigma_r)_N$ на ограниченной базе - напряжение, при котором образец разрушается при определенном заданном числе циклов. База испытания черных металлов 10^7 циклов, а цветных $(5...10) \cdot 10^7$ циклов. При испытаниях в условиях высоких температур, при воздействии коррозионной среды и в некоторых других случаях усталостное разрушение может произойти и после большего числа циклов.

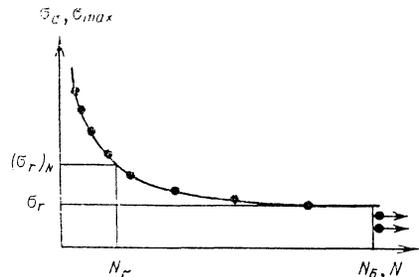


Рис. 11.5.1. Кривая усталости

Характерной особенностью результатов испытаний на усталость является их разброс, что частично связано и с погрешностью эксперимента. Поэтому для точного построения кривых усталости необходимо провести большое число испытаний (не менее десяти). В большинстве случаев этот метод является достаточно точным, но можно использовать, например, метод наименьших квадратов, чтобы провести прямую или кривую выбранной формы.

Если по достижении какого-то числа циклов усталостное разрушение не происходит, то материал имеет физический предел выносливости. Это обычно черные металлы. Цветные металлы, как правило, не имеют физического предела выносливости. Пределы ограниченной выносливости по долговечности меньше чем 10^4 циклов требуются для некоторых специальных целей (область малоциклового усталости). Практически требуемые пределы выносливости $10^9 \dots 10^{10}$ циклов.

11.5.2. УСКОРЕННЫЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПРЕДЕЛА ВЫНОСЛИВОСТИ

Среди ускоренных методов известны методы, состоящие в измерении повышения температуры образца, изменения электрического сопротивления, магнитной проницаемости, магнитных и вихревых потерь электрического тока и теплового расширения.

Иной тип ускоренного метода, впервые предложенного М. Про, довольно близко соответствует методу обычных испытаний на усталость, но амплитуда напряжений не постоянна, а увеличивается с постоянной скоростью до тех пор, пока не произойдет разрушение. М. Про полагал, что разрушающее напряжение

$$\sigma_p = \sigma_r + K\alpha^{0.5},$$

где K - постоянная, зависящая от материала.

Испытания проводятся при различных значениях α и σ_p . При построении в зависимости от $\sqrt{\alpha}$ они дают прямую линию согласно приведенному выше уравнению, пересекающуюся с осью нагружения в точке, которая определяет предел выносливости. Метод М. Про в меньшей степени может быть использован для статической интерпретации результатов, чем метод проб или ступенчатый, поэтому не может быть эффективным с точки зрения экономии образцов. Однако метод М. Про перспективен для определения циклической прочности хрупких керамических материалов, при большом числе образцов, раз-

рушившихся после первого полуцикла нагружения или выдержавших базу испытания без разрушения. Полученные образцы не дают данных о прочности материала или конструкционного элемента, но при использовании метода М. Про несут информацию о циклической прочности.

На линейной гипотезе суммирования повреждений основан метод Локати, который предлагает определение предела выносливости по результатам испытания одного образца при ступенчатом увеличении нагрузки. Согласно гипотезе линейного суммирования повреждений степень повреждения материала пропорциональна отношению числа циклов n_i нагружения при данном уровне напряжения и долговечности N_i при этом уровне напряжения в условиях постоянной амплитуды:

$$\sum_1^k (n_i/N_i) = 1,$$

где k - число уровней напряжений, при которых проводятся испытания.

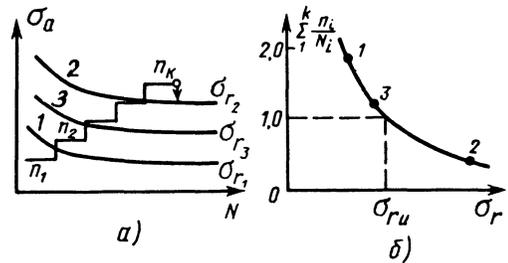


Рис. 11.5.2. Определение предела выносливости по методу Локати

В соответствии с методом Локати (рис. 11.5.2, а) в координатах $\sigma_a - N$ или $\sigma_a - \lg N$ строят условные кривые усталости, предположительно соответствующие возможно низшему (кривая 1) и высшему (кривая 2) предельным положениям и ограничивающим область действительной кривой усталости, и промежуточную кривую 3. Исходя из положения условных кривых усталости намечается программа испытаний образца или детали таким образом, чтобы график ступенчатого увеличения нагрузки накладывался на кривые усталости. Полученные в испытаниях до разрушения образца или конструкционного эле-

мента данные обрабатываются по формуле линейного суммирования повреждений для каждой кривой усталости и наносятся на график

в координатах $\sum_1^k (n_i/N_i) - \sigma_r$ (рис.

11.5.2, б). Напряжение σ_{rn} , соответствующее сумме относительных повреждений, равной единице, является пределом выносливости.

Методы аналитического построения кривой усталости без проведения испытаний на усталость основаны на использовании уравнений, найденных по результатам статических испытаний на растяжение или каких-либо других испытаний. Для этих методов наиболее важным является установление критерия, на основе которого можно получить уравнение кривой усталости с физически обоснованными параметрами. Наиболее часто в качестве такого критерия используют один из энергетических критериев, связывающих энергию, необратимо рассеянную в материале при циклическом нагружении, с энергией статического разрушения.

11.5.3. ВЛИЯНИЕ КОНСТРУКЦИОННЫХ, ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ И ЭКСПЛУАТАЦИОННЫХ ФАКТОРОВ НА УСТАЛОСТЬ КОНСТРУКЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

Значительное влияние на сопротивление усталости элементов конструкций оказывают следующие факторы: конструкционные (размеры деталей, концентрация напряжений); технологические (состояние поверхности, структура и термическая обработка, поверхностная обработка, сварка); эксплуатационные (асимметрия цикла, вид напряженного состояния, режим и частота нагружения, температура, коррозионные среды, фреттинг-коррозия).

Размеры деталей. С увеличением размеров детали ее сопротивление усталости, как правило, уменьшается. Степень влияния размеров детали (эффект масштаба) на предел выносливости оценивается отношением предела выносливости детали заданного диаметра к пределу выносливости лабораторных образцов диаметром 7...10 мм. Проявление эффекта масштаба зависит от свойств материала, вида нагружения (растяжение, изгиб, кручение), состояния поверхности и концентрации напряжений. Согласно экспериментальным данным испытания гладких конструкционных элементов эффект масштаба существенно проявляется при изгибе и кручении и практически отсутствует при растяжении, т.е. в условиях однородного напряженного состояния. Материалы, имеющие существенную структурную неоднородность типа чугуна и литого алюминиевого сплава, весьма существенно реагируют на изменение размера детали.

Концентрация напряжений. Большинство конструкционных элементов в местах изменения формы и размеров (концентраторах напряжений) испытывают значительные напряжения (концентрация напряжений), которые существенно превышают номинальные напряжения (в предположении отсутствия возмущения напряженного состояния). Теоретический концентратор напряжений K_T равен отношению наибольшего местного напряжения σ_{max} к номинальному напряжению при упругом деформировании: $K_T = \sigma_{max}/\sigma_{ном}$.

Степень влияния концентрации напряжений на предел выносливости характеризуется эффективным коэффициентом концентрации напряжений, равным отношению предела выносливости гладкого образца или элемента конструкции к пределу выносливости $(\sigma_r)_k$ конструкционного элемента с концентраторами напряжений: $K_\sigma = \sigma_r/(\sigma_r)_k$. Чувствительность к концентрации напряжений характеризуется коэффициентом $q = (K_\sigma - 1)/(K_T - 1)$. Если материал не чувствителен к концентрации напряжений, то $K_\sigma = 1$ и $q = 0$.

Коэффициент чувствительности к концентрации напряжений зависит от свойств материала, абсолютного значения теоретического коэффициента концентрации напряжений, размеров исследуемой детали и уровня напряжения, при котором проводятся испытания.

Асимметрия цикла. Существенное влияние на предел выносливости оказывает среднее напряжение цикла. Результаты подобных исследований представляют в виде диаграмм предельных напряжений $(\sigma_{max} - \sigma_{min})$ или амплитуд цикла.

Множество известных аналитических описаний диаграмм предельных амплитуд дают хорошее соответствие экспериментальным данным для различных конструкционных материалов.

Вид напряженного состояния. Неоднородность напряженного состояния и соотношение главных напряжений влияют на сопротивление усталости материала. Анализ влияния неоднородного напряженного состояния на предел выносливости свидетельствует о следующем:

предел выносливости при неоднородном напряженном состоянии значительно больше, чем при однородном, что наблюдается как при линейном (изгиб), так и при плоском напряженном состоянии (кручение);

увеличение градиента напряжений приводит к существенному росту местных напряжений, соответствующих пределу выносливости;

предел выносливости при испытаниях в условиях неоднородного напряженного состояния зависит от формы поперечного сечения и схемы нагружения. Он повышается с уменьшением объема металла, находящегося в области максимальных напряжений.

Режим нагружения. Стремление учесть влияние случайного нагружения на характеристики сопротивления усталостному разрушению металла сделало необходимым проведение лабораторных испытаний при различных режимах изменения напряжений. Режимы лабораторных испытаний на усталость можно подразделить на стационарные, монотонного увеличения или уменьшения нагрузки, блочного и случайного нагружения. При стационарном режиме (гармоническом, бигармоническом, треугольном, трапецеидальном и др.) закон изменения σ в пределах одного цикла остается постоянным до разрушения. При монотонном нагружении амплитуда или среднее напряжение плавно или ступенчато изменяется до разрушения детали. Блочное нагружение осуществляется ступенчатым (рис. 11.5.) или непрерывными блоками, которые периодически повторяются вплоть до разрушения. При случайном нагружении последовательность ступеней или единичных значений амплитуд и средних напряжений цикла изменяется случайным образом. Наиболее часто влияние случайного характера приложения нагрузки на долговечность материалов оценивается по результатам испытаний конструктивных элементов или образцов при использовании блоков, отображающих статистические закономерности случайного нагружения.

Частота нагружения. Увеличение частоты нагружения, как правило, приводит к монотонному повышению пределов выносливости исследуемых материалов и конструктивных элементов. Это объясняется тем, что при более высокой частоте нагружения не завершаются в полной мере микропластические деформации, приводящие к усталостному разрушению. Наблюдаемое затем снижение циклической

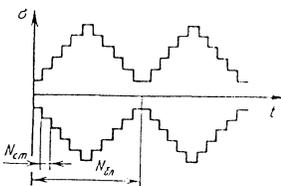


Рис. 11.5.3. Диаграмма ступенчатого блочного нагружения

прочности при повышении частоты нагружения связано с гистерезисным нагревом испытываемых конструктивных элементов, а следовательно, со снижением пределов выносливости этих элементов конструкции. Если применить надежное охлаждение испытываемых деталей жидкостью или газом, не вызывающим в них коррозии, то снижение циклической прочности не наблюдается.

Температура. Характер влияния высоких и низких температур на циклическую прочность конструктивных элементов существенно различен. На рис. 11.5.4 представлены температурные зависимости пределов выносливости углеродистых и теплоустойчивых сталей, а также жаропрочных аустенитных сталей и сплавов. Сложный характер некоторых из них объясняется различными структурными превращениями, имеющими место в разных температурных интервалах.

Каждая группа металлов и сплавов характеризуется предельной температурой, выше которой пределы выносливости резко падают. Так, при температуре до 773 К используют теплоустойчивые ферритные стали, при температуре до 973 К - аустенитные стали, а при температуре до 1273 К - сплавы на основе никеля и кобальта. При более высокой температуре можно применять сплавы на основе тугоплавких металлов при условии их защиты от окисления.

Исследования циклической прочности в области низких температур свидетельствуют о том, что для всех металлов с понижением температуры предел выносливости увеличивается. Наиболее существенен рост сопротивления усталости у углеродистых сталей; причем при наличии концентратора напряжения предел выносливости повышается меньше, чем у гладкого элемента.

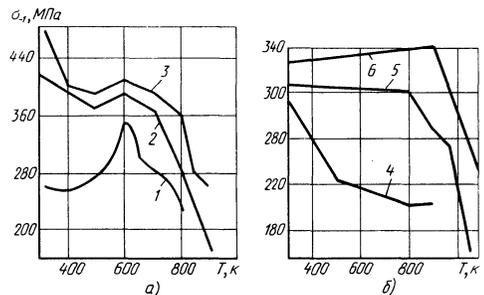


Рис. 11.5.4. Зависимость предела выносливости сталей от температуры испытания:

- а - углеродистых аустенитных сталей и сплавов;
- б - жаропрочных аустенитных сталей и сплавов;
- 1 - углеродистая сталь (0,1 % С); 2 - сталь 40Х и 30ХМ; 3 - сталь 25Х2М1Ф; 4 - сталь 12Х18Н9Т;
- 5 - сталь Х16Н25М6; 6 - сплав ХН77ТЮ

Коррозионная среда. Наличие коррозионных сред (пресная, морская вода и др.) вызывает резкое падение циклической прочности металлов. При этом следует отметить особенно, во-первых, понижение частоты нагружения (значительное снижение предела выносливости с увеличением времени воздействия среды при заданном числе циклов нагружения) и, во-вторых, воздействие высокой температуры (разрушение может иметь место и при весьма низких напряжениях, если число циклов нагружения будет достаточно велико).

Фреттинг-коррозия. В деталях с напряженными посадками вследствие воздействия переменных нагрузок может происходить проскальзывание одной поверхности относительно другой, в результате чего разрушается одна из контактирующих поверхностей, как правило, более напряженная, и образуются локальные каверны, существенно снижающие циклическую прочность конструкционного элемента.

Природа фреттинг-коррозии объясняется по-разному: механический износ; электрофизическое явления, происходящие на границе контактирующих материалов.

Состояние поверхности. Глубина микронеровностей после механической обработки существенно влияет на циклическую прочность конструкционных элементов. Риски и надрезы, являющиеся следами механической обработки, особенно опасны в том случае, когда их направление перпендикулярно к направлению главного растягивающего напряжения. Характерно, что влияние микронеровностей более существенно для высокопрочных материалов.

Структура и термическая обработка сплавов. Поскольку циклическая прочность увеличивается менее интенсивно, чем предел прочности, и с ростом предела прочности более существенно проявляется влияние концентрации напряжений, коррозионных сред, состояния поверхности и др., необходимо тщательно относиться к устранению и нейтрализации действия различных факторов, которые могут привести к снижению сопротивления материала элемента конструкции.

Поверхностная обработка. Она широко используется для повышения циклической прочности образцов и конструкционных элементов и является основным способом нейтрализации действия концентраторов напряжений, коррозионных сред и других факторов, снижающих сопротивление усталости. Применяются следующие методы упрочнения: химико-термические (азотирование, цементирование, цианирование), поверхностная закалка ТВЧ, наклеп поверхностного слоя (обкатка роликами, обдувка дробью, чеканка и т.п.), комбинированные (цементация с последующей обдувкой дробью и др.). Механизм поверхностного упрочнения состоит в создании более

прочного и химически стойкого поверхностного слоя и остаточных напряжений сжатия в этом слое.

Сварка. Имеющиеся данные свидетельствуют о том, что сварка значительно снижает предел выносливости сварных соединений по сравнению с основным металлом. Причиной этому являются напряжения растяжения в сварных швах, концентрация напряжений и неоднородность свойств сварного соединения.

Малоцикловое нагружение. Испытания при малоцикловом нагружении проводят при сравнительно низких частотах нагружения (до 50 циклов/мин), высоких уровнях напряжений (равных и выше предела текучести) и долговечностях до $2 \cdot 10^5$ циклов. Разрушение при малоцикловом нагружении может происходить вследствие исчерпания пластичности (квазистатическое разрушение) или возникновения и развития усталостной трещины (усталостное разрушение). Особенностью такого разрушения при малоцикловом нагружении является наличие значительных пластических деформаций, например у барабанов паровых котлов, фюзеляжей и стоек шасси самолетов.

Результаты экспериментов представляют в этом случае в равномерном, полулогарифмическом или двойном логарифмическом масштабе, как это делается при построении кривых многоциклового усталости. Для описания области малоциклового усталостного разрушения используются те же уравнения, что и при многоциклового усталости.

Термическая усталость. При исследовании усталости металлов при малом числе циклов нагружения, вызванной циклическими колебаниями температуры, изменяют перепад температур или жесткость защемления образца или конструкционного элемента. Для описания кривых термической усталости в координатах $\lg \epsilon_{пл} - \lg N$ используют уравнение Коффина [31]:

$$\epsilon_{пл} N^m = C,$$

где m и C - параметры, определяемые экспериментально.

Термические напряжения имеют место также в незашемленных конструкционных элементах при наличии градиентов температуры, которые возникают при их быстром нагреве и охлаждении.

11.5.4. ПЕРИОДЫ УСТАЛОСТИ И ДИАГРАММА УСТАЛОСТНОГО РАЗРУШЕНИЯ

Области и периоды полной кривой усталости. На рис. 11.5.5 в общем виде представлена кривая усталости в диапазоне нагрузок от предела прочности до предела выносливости. Границей между областями малоциклового I и

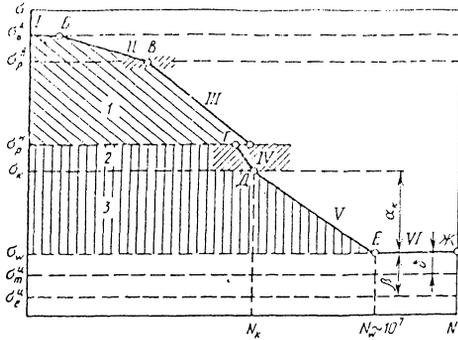


Рис. 11.5.5. Полная кривая усталости:

σ_B^A - предел прочности; σ_B^B - напряжение верхнего разрыва (первый вид разрыва); σ_B^H - напряжение нижнего разрыва (второй вид разрыва); σ_K - критическое напряжение (третий вид разрыва); σ_w - предел выносливости; σ_T^{II} - циклический предел текучести; σ_ϵ^{II} - циклический предел упругости; N_K - критическое число циклов

многоциклового 3 усталости является напряжением, равное динамическому пределу текучести 2 (определенному при скорости нагружения усталостных испытаний).

На участке I квазистатического излома области малоциклового усталости образец или конструкционный элемент разрушается при первом цикле нагружения, либо не разрушается в течение нескольких десятков или сотен циклов. Для участка II циклической ползучести характерно непрерывно возрастающее с числом циклов нагружения накопление пластической деформации. На участке III происходит усталостное разрушение при макропластической циклической деформации.

Диаграмма многоциклового усталости. Обобщенная диаграмма усталости для области низких амплитуд циклической деформации и больших долговечностей (так называемая чистая или многоцикловая усталость) разработана В. С. Ивановой (рис. 11.5.6).

В диапазоне напряжений от σ_K до σ_w процесс усталости в зависимости от числа циклов нагружения в общем случае (для отожженных металлов) состоит из четырех основных периодов: I - инкубационного, связанного с накоплением искажений кристаллической решетки; II - разрыхления, связанного с появлением нарушений сплошности металла (т.е. зарождением и развитием субмикроско-

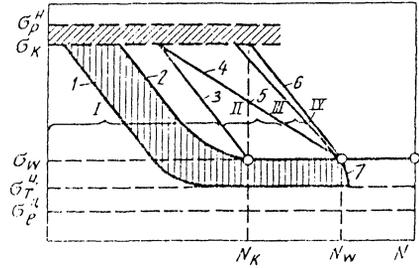


Рис. 11.5.6. Обобщенная диаграмма усталости:

1 - линия начала микроскопического течения; 2 - линия окончания макропластического течения; 3 - линия начала образования субмикроскопических трещин; 4 - линия начала образования микроскопических трещин (линия Френча); 5 - линия начала катастрофического разрушения (долома); 6 - кривая усталости

пических трещин); III - развития микротрещин до макротрещин критического размера; IV - окончательного разрушения или долома.

Каждая из стадий инкубационного периода усталости имеет свои специфические особенности (развитие процесса усталости по стадиям рассмотрено, в основном, на примере железа и малоуглеродистых сталей с ОЦК решеткой).

Стадия циклической микротекучести (с первого цикла нагружения до линии 1) характеризуется деформацией, которую можно обнаружить с помощью высокочувствительного тензомера или электронной аппаратуры. Однако обычные механические свойства (предел текучести, длина площадки текучести, микротвердость и др.) на этой стадии не меняются. К окончанию стадии циклической микротекучести (протяженность стадии $10^2 \dots 10^4$ циклов при напряжении, равном пределу выносливости) все сечение материала претерпевает небольшую микропластическую деформацию (порядка $10^{-3} \dots 10^{-4} \%$), а в поверхностном слое зерен образуется слой металла с повышенной плотностью дислокаций.

Стадия циклической текучести (область между линиями 1 и 2) в малоуглеродистой стали связана с протеканием по всему объему материала микроскопической пластической деформации, которая характеризуется резким увеличением плотности дислокаций по границам зерен в перлите и вокруг включений. Циклическое деформирование приводит к изменению некоторых физико-механических свойств: повышается микротвердость; уменьшается, а затем полностью исчезает зуб и площадка текучести на кривых статического растяжения; снижается предел пропорциональности (к концу этой стадии начи-

нает вновь возрастать); происходит изменение характеристики внутреннего трения, магнитных свойств и др.

Стадия циклического упрочнения (область между линиями 2 и 3) у отожженных материалов характеризуется дальнейшим повышением плотности дислокаций. В поверхностном слое металла развиваются отдельные устойчивые полосы скольжения, в которых к окончанию стадии развиваются экструзии, интрузии и первые субмикроскопические усталостные трещины. На этой стадии продолжают возрастать твердость, условный предел текучести и мгновенный модуль упругости, а пластичность материала несколько снижается. Стадией циклического упрочнения завершается инкубационный период усталостного процесса.

Период зарождения и развития субмикроскопических трещин до микроскопических размеров (область между линиями 3 и 4) - период постепенного увеличения числа поверхностных устойчивых полос скольжения, их расширения, слияния отдельных субмикротрещин, находящихся в полосах скольжения, в микротрещины, не превышающие размера зерна. В этот период новые объемы материала постепенно вовлекаются в интенсивное пластическое течение, пока вся поверхность материала не покроеется большим числом (относительно равномерно расположенных) грубых полос скольжения, фактически являющихся микротрещинами длиной, равной размеру зерна. Окончание этого периода усталости связано с накоплением в материала необратимой поврежденности и достижением линии Френча (кривая 4).

Период зарождения и развития субмикроскопических трещин связан с незначительными изменениями физико-механических интегральных свойств материала, хотя в нем происходит перестройка дислокационной структуры в устойчивых полосах скольжения и возникновение новых полос скольжения.

Период развития микротрещин до мактрещин критического размера (область между линиями 4 и 5) начинается с перехода микротрещины через границу зерна и ее распространения в плоскости, перпендикулярной к направлению приложенной нагрузки в условиях плоскодеформированного напряженного состояния у вершины трещины. На этой стадии распространения трещины на поверхности разрушения наблюдается образование характерной полосчатости (бороздчатости), и трещина распространяется при низких значениях коэффициента интенсивности напряжения у ее вершины.

Период окончательного разрушения или долома (область

между линиями 5 и 6) характеризуется нестабильным ростом усталостной трещины. Напряжение долома в области многоциклового усталости не зависит от его уровня и исходного уровня концентрации напряжений. Прочность близка к истинному напряжению отрыва.

11.5.5. МЕТОДЫ И УСТАНОВКИ ДЛЯ ИСПЫТАНИЙ НА УСТАЛОСТЬ КОНСТРУКЦИОННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Методы механических испытаний конструктивных элементов должны соответствовать ГОСТ 25.502-79. Суммарная погрешность нагружения в интервале 0,2-1,0 каждого диапазона (% измеряемой величины) не должна превышать: $\pm 2\%$ при $f \leq 0,5$ Гц; $\pm 3\%$ при $0,5 \leq f \leq 50$ Гц; $\pm 5\%$ при $f \geq 50$ Гц. При испытаниях на гидропульсационных и резонансных машинах без тензометрического силоизмерения 0-0,2 каждого диапазона нагрузки погрешность не должна превышать $\pm 5\%$ задаваемых напряжений. Абсолютная погрешность измерения, поддержания и регистрации нагрузок и деформаций в интервале 0-0,2 каждого диапазона не должна превышать абсолютных погрешностей в начале этого диапазона нагружения.

Основными критериями разрушения при определении пределов выносливости и построения кривых усталости являются полное разрушение или появление макротрещин заданного размера. Для построения кривой усталости и определения предела выносливости, соответствующей вероятности разрушения 50 %, испытывают не менее 15 одинаковых деталей.

В интервале напряжений 0,95-1,05 предела выносливости, соответствующего вероятности разрушения 50 %, должно быть испытано не менее трех конструктивных элементов. База испытаний для определения пределов выносливости принимается:

10^7 циклов - для материалов и сплавов, имеющих практически горизонтальный участок на кривой усталости;

10^8 - для легких сплавов и других металлов и сплавов, ординаты кривых усталости которых по всей длине непрерывно уменьшаются с ростом числа циклов.

Для сравнительных испытаний база для определения пределов выносливости соответственно принимается $(3 \text{ и } 10) \cdot 10^6$ циклов. Сравнительные испытания рекомендуется проводить на одной частоте нагружения. При испытаниях образцов и конструктивных элементов допускается мягкое и жесткое нагружение, непрерывное до образования трещины заданного размера, полного разрушения или базового числа циклов. В процессе испытаний конструктивных элементов контролируют

стабильность задаваемых нагрузок (деформаций).

Для одной серии испытаний все конструкционные элементы нагружают одним способом и испытывают на однотипных машинах. Для построения семейства кривых усталости по параметру вероятности разрушения и кривой распределения пределов выносливости, оценки средних значений и квадратического отклонения пределов выносливости испытывают серию объемом выборки не менее десяти одинаковых конструкционных элементов на каждом из четырех-шести уровней напряжения. Кривые усталости строят в полулогарифмических координатах $\sigma_{\max} - \lg N$ или $\sigma_a - \lg N$, двойных логарифмических координатах $\lg \sigma_{\max} - \lg N$ или $\lg \sigma_a - \lg N$.

Исследование циклической прочности конструкционных элементов можно осуществлять [29], используя обычные усталостные машины для определения сопротивления усталости образцов: гидравлические, с механическим возбуждением колебаний (с неуравновешенными массами, кривошипные и др.). Обычно приходится делать специальные зажимы для закрепления конструкционных элементов в испытательной машине. Широко применяют электромагнитные, электродинамические, пневматические, магнитострикционные вибраторы. Последние, впрочем, отличаются большой узкополосностью, поэтому для каждого конкретного конструкционного элемента (например, турбинной лопатки) изготавливают специальный магнитостриктор.

Методы нагрева конструкционных элементов при усталостных испытаниях. Для высокотемпературных испытаний конструкционных элементов из жаропрочных сплавов применяют в основном три метода нагрева: радиационный (лучевой) с помощью электрических печей сопротивления; прямого пропуска электрического тока; индукционный токами высокой частоты (ТВЧ). Значительно реже используют нагрев конструкционного элемента в среде продуктов сгорания, в солнечных печах, электронным лучом и др.

Лучевой нагрев позволяет обеспечить равномерное распределение температуры по длине и объему исследуемого элемента, стабильность его теплового режима. К недостаткам этого метода, кроме сложности конструкции нагревательных систем, следует отнести:

- невозможность реализации эксплуатационного распределения температур по длине конструкционного элемента при нестационарных режимах работы агрегатов;
- низкую скорость нагрева;
- ограничение максимальной температуры испытаний;

ограничение возможности программирования температуры, невозможность воспроизведения реальных циклов нагрев - охлаждение конструкционного элемента;

усложнение наблюдения за испытываемым конструкционным элементом и измерения его температуры и деформации.

Непосредственное пропускание тока через конструкционный элемент обеспечивает его нагрев при относительно простом конструкторском оформлении нагревательного устройства практически при неограниченных максимальных температурах испытаний, значительных скоростях (до 700...800 К/с), цикличность изменения температуры в процессе испытаний, а также свободный доступ к испытываемому конструкционному элементу для измерения и непосредственного наблюдения за его поверхностью в процессе испытаний.

Недостатками этого метода являются значительный продольный и поперечный перепад температур, резкий перегрев зоны конструкционного элемента с ослабленным сечением и значительные трудности присоединения токоподводов, что исключает возможность его использования при нагреве многих элементов конструкций, в частности рабочих лопаток ГТД.

Индукционный метод нагрева при соответствующем конструктивном решении индуктора обеспечивает:

заданное (близкое к эксплуатационному) распределение температуры по поперечному сечению испытываемого элемента при термодублировании;

практически неограниченную максимальную температуру испытания (до температуры плавления испытываемого элемента);

значительные скорости нагрева конструкционных элементов;

возможность циклического изменения температуры в процессе испытаний;

малую инерционность системы нагрева; высокую производительность и простоту проведения эксперимента.

Исследования показали, что нагрев ТВЧ не оказывает какого-либо специфического воздействия на прочность испытываемых конструкционных элементов и образцов из жаропрочных сплавов.

При выборе способа нагрева следует учитывать также совокупность особенностей испытания: размеры и конструкцию испытываемых конструкционных элементов как при нагреве, так и при охлаждении (желательно отсутствие специальных устройств, передвигающих деталь из зоны нагрева в зону охлаждения), размещение датчиков деформации, способы измерения и др. Нагрев в печи или ванне требует специального автоматического устройства для перемещения детали из печи в ванну и обратно.

При нагреве пропусканием тока или ТВЧ, а частично горелкой деталь остается неподвижной. Особое внимание следует обратить на возможность подвода к поверхностному слою детали энергии, весьма высокой плотности по сравнению с энергией, подводимой в случае использования других видов нагрева.

Охлаждение системы воздухом как маневренный и эффективный способ позволяет выбирать скорости охлаждения в очень широком диапазоне. Кроме того, позволяет охладить неподвижную деталь, и тем самым, значительно упростить конструкцию, уменьшить габаритные размеры установки, сделать ее более компактной и, главное, уменьшить разброс результатов, неизбежный при охлаждении в воде. Охлаждение водой, естественно, происходит с большей скоростью, но решающее значение при этом имеют размеры деталей. Отсутствует необходимость в применении для охлаждения специальной среды: соляной ванны, кипящей воды, пара и др.

Температуру конструкционного элемента при усталостных испытаниях измеряют при помощи термопар.

Универсальный комплекс машин для программных испытаний на усталость. Одна из главных особенностей комплекса машин для программных испытаний на усталость образцов и натуральных деталей состоит в его общей композиции, предусматривающей сборку на одной несущей плите с крепящими пазами испытательных машин нескольких типов из достаточно простых унифицированных механических узлов с независимым креплением и автономным управлением. Пусковая, программирующая и стабилизирующая аппаратура объединены в приборной стойке. Число вариантов машин не ограничено, поэтому кроме обычных испытаний на изгиб, кручение, растяжение-сжатие (в условиях мягкого и жесткого нагружения) возможны и другие испытания, в том числе при комбинированном или двухчастотном нагружении.

Узлы крепления объектов исследования сменные, что позволяет испытывать различные натурные детали такие, как коленчатые валы двигателей, поворотные кулаки и полуоси автомобилей, тorsiоны, узлы сварных металлоконструкций, а также лабораторные образцы площадью сечения 0,5...20 см². В испытательных машинах предусмотрена дублированная система силоизмерения - оптическая и электрическая. Электрические силоизмерительные (датчики) и нагружающие устройства посредством электронной аппаратуры объединены в замкнутую систему регулирования, обеспечивающую стационарные или программные режимы испытания с управлением амплитудой нагрузки или перемещения.

Машины для программных испытаний на усталость с кривошипным возбуждением

характеризуются универсальностью и, вместе с тем, простотой конструкции.

При разработке силовых схем машин, показанных на рис. 11.5.7, учитывалась возможность использования их для испытания образцов в различных средах и при разных температурах, а также для исследования кинетики усталостного разрушения с наблюдением под микроскопом за поверхностью испытуемой детали благодаря свободному доступу к образцу или детали. Зажимные патроны во всех вариантах выполнены съемными, поэтому они всегда могут быть заменены специальными приспособлениями для крепления натуральных деталей, элементов конструкций или их моделей.

Во всех машинах имеются узлы и детали одинакового назначения: несущая массивная плита 1 с T-образными пазами на верхней поверхности для крепления необходимых механизмов; кривошипный возбудитель 3 динамических перемещений; образец или испытуемая деталь 6; упругий динамометр 7; составной шатун 4, передающий перемещения от возбудителя к нагружаемой системе; задающее устройство 2 с автономным или заимствованным от возбудителя приводом; кронштейн 8, служащий для неподвижного крепления нагружаемой системы к плите; удлинитель 5.

Измерение деформаций динамометра для определения нагруженности образца осуществляется с помощью микроскопа или тензорезисторов. В установке для испытаний консольных образцов на изгиб в одной плоскости (рис. 11.5.7, а) масса m , сосредоточенная на конце удлинителя 5, выбирается так, чтобы частота собственных колебаний системы была близка к частоте возбуждения. Это позволяет существенно повысить коэффициент эффективности и разгрузить детали возбудителя.

Основным узлом установки для испытания образцов или конструкционных элементов на растяжение-сжатие (рис. 11.5.7, б) является деформационный преобразователь 12, с помощью которого возбуждение осевых сил происходит путем изменения длины цилиндрического элемента с косо профрезерованными (по толщине) пазами при его скручивании. Возбуждаемые таким образом силы воспринимаются образцом 6 и динамометром 7, неподвижно закрепленным в поперечине 13, которая соединена с корпусом преобразователя 14 колоннами 15.

Для испытания на кручение жестких образцов и конструкционных элементов, не требующих значительных динамических перемещений, используют машины с неподвижным креплением нагружаемой системы (рис. 11.5.7, в). Возмущающее перемещение возбудителя 3 преобразуется в крутильные колеба-

ния с помощью траверсы 9. Для передачи крутящего момента на образец 6 служит жесткий вал, находящийся в корпусе 10. Конец динамометра 7 неподжно закреплен в кронштейне 8. На концах траверсы 9 размещены грузы, которые подобраны так, чтобы момент инерции массы соответствовал возможно большему коэффициенту эффективности.

С помощью унифицированных возбуждателей воспроизводят бигармонические разно-частотные процессы деформирования (рис. 11.5.7, *з*): два возбуждателя 3 заблокированы с

помощью редуктора 16. Для возможности суммирования возмущающих перемещений разной частоты динамометр укреплен в корпусе 17, свободно поворачивающемся на вертикальной оси 18 качания. С помощью бигармонической машины можно варьировать в широких пределах и независимо друг от друга все параметры каждой гармонической составляющей (частоты, амплитуды и фазы).

Для испытаний податливых деталей используют машину консервативной схемы с креплением динамометра 7 в подвижной си-

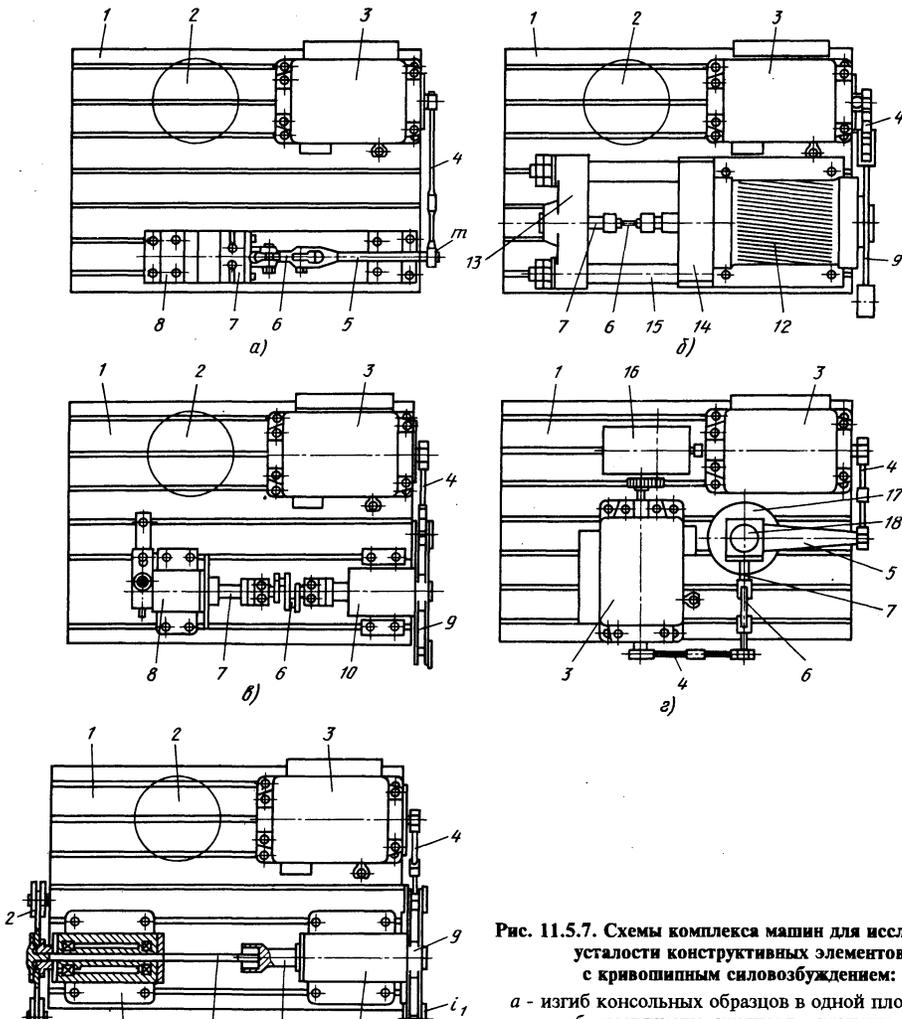


Рис. 11.5.7. Схемы комплекса машин для исследования усталости конструктивных элементов с кривошипным силовозбуждением:

- а* - изгиб консольных образцов в одной плоскости;
- б* - растяжение-сжатие; *в* - кручение;
- г* - усталость при бигармоническом нагружении;
- з* - усталость податливых деталей при крутильных колебаниях

стеме, совершающей крутильные колебания в корпусе *II* (рис. 11.5.7, *д*). Моменты инерции массы этой системы и траверсы выбраны таким образом, чтобы нагруженность и возмущение перемещения возбудителя были минимальными при колебании обеих траверс в противоположных фазах. Выбирая параметры колебательной системы, можно увеличить общий угол закрутки (при сравнении с предыдущим вариантом) в несколько раз и испытывать очень податливые детали, например, многоопорные коленчатые валы двигателей внутреннего сгорания, полуоси задних мостов грузовых автомобилей и др.

Для всех вариантов сборки испытательных машин базовыми узлами являются плита и возбудитель. Остальные узлы монтируют по требованию потребителя. Это же относится и к узлам программирования, поэтому машины

можно использовать не только для программных, но для обычных стационарных испытаний на усталость.

Машины, предназначенные для программных испытаний, отличаются наличием устройства 2, обеспечивающего автоматическое срабатывание исполнительного механизма возбудителя через промежутки времени, предусмотренные программой. Машины сконструированы таким образом, что принцип формирования сигналов, вызывающих срабатывание исполнительного механизма, не определен заранее, а может быть выбран в каждом отдельном случае в зависимости от условий испытания. Благодаря этому оказываются вполне применимыми достаточно хорошо разработанные способы формирования сигналов с помощью перфоленгт, фотоэлементов, записи на магнитной ленте и др.

11.5.1. Техническая характеристика машин

Показатель	Типоразмер комплекса мощности	
	малой	повышенной
Частота возбуждения, Гц	50	25
Максимальная амплитуда возбуждаемого перемещения, мм	16	28
Максимальная амплитуда колебаний усилия, Гц	5000	20000
Максимальная статическая нагрузка, кН	50	200
Максимальная амплитуда изгибающего момента, кН · м	3,5	35
Максимальный статический изгибающий момент, кН · м	2	20
Максимальная амплитуда крутящего момента, кН · м	2	20
Максимальный статический крутящий момент, кН · м	1	10
Максимальное число ступеней в программном блоке	12	12
Потребляемая мощность, кВт	1,0	2,8
Габаритные размеры, м	2×1, 1×1	2,5×1, 3×1
Масса машины, кг	900	2400

Испытательные машины могут быть оснащены дополнительными устройствами: нагревательными печами для высокотемпературных испытаний, камерами для воспроизведения воздействия агрессивных сред, а также другими приспособлениями. Испытательный комплекс выполнен в двух вариантах, отличающихся мощностью привода и уровнем

развиваемых нагрузок. В табл. 11.5.1 приведена техническая характеристика этих машин. Компактность конструкции, простота обслуживания и универсальность комплекса способствуют его внедрению во многих научно-исследовательских институтах, вузах и заводских лабораториях ведущих отраслей машиностроения. Машины комплекса устанавливаются

ся на резиновых амортизаторах и в фундаментах не нуждаются.

Электродинамические и электромагнитные возбудители колебаний. Наиболее эффективны для исследования сопротивления усталости конструкционных элементов электродинамические возбудители. Они отличаются, как правило, широкополосностью (5...5000 Гц), имеют большой диапазон усилий на подвижной платформе, просты в управлении. Что отличает, как правило, испытания конструкционных элементов от испытания образцов, так это определение напряжений в конструкционных элементах (в образце, зная его размеры и значение нагрузки, осевую или поперечные силы несложно определить). Для конструкционных элементов следует использовать тензометрию и метод хрупких покрытий для более обстоятельного изучения их напряженного состояния.

Методы исследования усталости рабочих лопаток турбин и компрессоров ГТД. Ввиду большого разнообразия конструкционных элементов и невозможности из-за малого объема дать подробный анализ методов их усталостных испытаний, более подробно остановимся на усталостных испытаниях рабочих лопаток ГТД, весьма ответственных и конструкционно сложных элементов, испытывающих большое число воздействующих эксплуатационных факторов. Развитие ГТД, повышение степени сжатия и температуры заставляет более глубоко изучать прочностные свойства рабочих лопаток в условиях, максимально приближенных к эксплуатационным.

На рис. 11.5.8 приведена схема зажима для испытания рабочих лопаток ГТД на уста-

лость. Лопатка 5 зажимается в сухариках 2 клином 6 в рамке 1. Диаметр пальца 3 подбирают из условия параллельности сухариков 2. Колебания от подвижного стола 10 электродинамического возбудителя передаются через стержень 9 траверсы 7 с наклеенными тензорезисторами 8, с помощью которых измеряют напряжение на испытываемой лопатке 5. Зажим на струнах 4 подвешен к потолочным балкам помещения для уменьшения потерь энергии во внешнюю среду.

Рассмотрим несколько схем машин для испытания на усталость рабочих лопаток ГТД. В машине для испытания лопаток турбины (или консольных образцов) на усталость с электромагнитным возбуждением колебаний (рис. 11.5.9, а) в зажиме 1 на массивной станине укреплен балка 2 с грузом 3 на свободном конце. В грузе 3 смонтирован захват 4 для зажима корня испытываемой лопатки 5. В грузе смонтирован также якорь электромагнитного возбудителя 6. Изменяя вылет балки и массу груза 3, можно устанавливать необходимую частоту собственных колебаний этой системы. Обычно машины настраивают так, чтобы частота колебаний балки совпадала с собственной частотой поперечных колебаний испытываемой балки. По этой схеме построены, например, машины типов "Турбо-4" и "Турбо-5".

На подвижной системе 1 (рис. 11.5.9, б) электродинамического возбудителя, создающего колебания вдоль вертикальной оси, укреплен датчик 2 изгибающего момента. На датчике смонтирован клиновый захват 3 для зажима корня 4 испытываемой лопатки 5. Плоскость корня лопатки проходит через вертикальную ось возбудителя колебаний. Центр масс всей

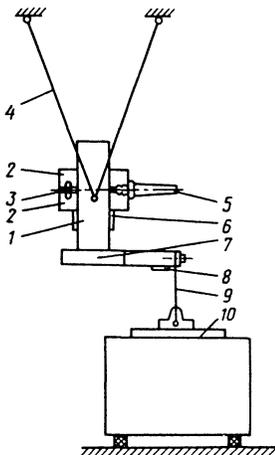


Рис. 11.5.8. Схема зажима для крепления рабочих лопаток при усталостных испытаниях

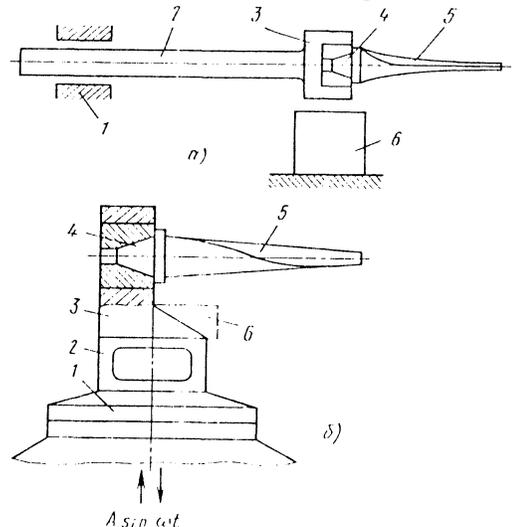


Рис. 11.5.9. Схемы машин для испытания на усталость лопаток турбин при нагружении:

а - косвенном; б - мягком прямом

колебательной системы (вместе с испытуемой лопаткой) должен находиться на вертикальной оси. Для балансировки предназначены сменные грузы 6. Испытуемая лопатка нагружается инерционными силами собственной распределенной массы. Датчик 2 измеряет изгибающий момент, действующий в корне испытуемой лопатки. Такая схема удобна тем, что лопатка с захватом может быть помещена в нагревательную печь, упругий элемент датчика имеет водяное охлаждение через каналы, расположенные между ним и захватом. По этой схеме построены отечественные машины типа МВЛ-4 и МВЛ-5.

Принципы и допущения, положенные в основу при построении приведенных ниже динамических схем машин для испытания на изгиб и кручение. Серия машин типа "Турбо" снабжена электромагнитными возбудителями колебаний, имеет симметричный цикл нагружения испытуемой лопатки (или образца).

На рис. 11.5.10 показана схема машины "Турбо-4". Станина 1 закреплена на массивном блоке, устанавливаемом на полу через виброизоляторы. Как одно целое со станиной выполнен кронштейн 2, на конце которого укреплен якорь 6 электромагнитного возбудителя 7 колебаний, захват 3 для испытуемой лопатки 4 и датчика 5 виброперемещений, контактирующий с ее корневой частью. На кронштейне можно укрепить приспособление для испытания сразу нескольких лопаток, установленных с помощью штатных зажимов.

Машина работает в режиме автоколебаний на частоте испытуемой лопатки, которая является динамическим демпфером, стремящимся уменьшить колебания кронштейна. Частота собственных колебаний выбрана дос-

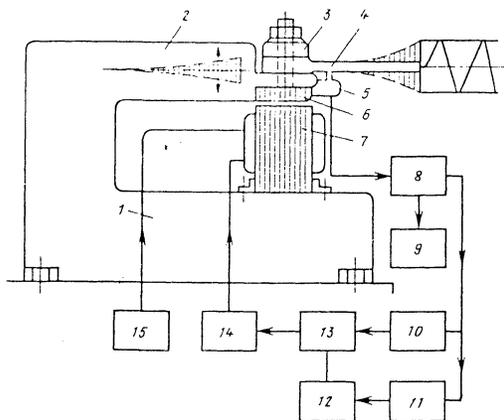


Рис. 11.5.10. Схема машины "Турбо-4" для испытания лопаток турбин на усталость

точно высокой (выше максимальной рабочей частоты машины). Амплитуда колебаний конца лопатки во много раз превышает амплитуду колебаний конца кронштейна, поскольку ее приведенная масса во много раз меньше приведенной массы кронштейна. Сигнал с датчика 5 подается на усилитель 8, а с него на прибор 9. Через аттенюатор сигнал с усилителя 8 поступает на регулируемый фазовращатель 10 и далее на управляемый ограничитель 13. Сигнал с усилителя 8 подается также на формирователь 11, а с него на интегратор 12. Сигнал интегратора управляет степенью ограничения сигнала в ограничителе 13. С выхода ограничителя сигнал подается на усилитель 14 мощности, а затем на катушку возбуждения электромагнитного возбудителя 7 колебаний. Катушка подмагничивания возбудителя 7 соединена с выпрямителем 15.

Баланс амплитуд в автоколебательной системе устанавливают, оперируя аттенюатором в усилителе 8 и изменяя выходную мощность усилителя 14. Баланс фаз устанавливают фазовращателем 10. На выходе формирователя 11 возбуждаются прямоугольные импульсы положительной полярности с частотой колебаний испытуемого конструкционного элемента. Интеграл этого сигнала используют для управления положительной полуволной выходного напряжения фазовращателя. На входе усилителя мощности стоит разделительная емкость, а на выходе фазовращателя - симметричный ограничитель. Такой прием регулирования обеспечивает симметричное изменение как положительной, так и отрицательной полуволн выходного напряжения усилителя мощности.

Описанная система автоматического регулирования поддерживает заданную амплитуду колебаний испытуемого конструкционного элемента, обеспечивая жесткое нагружение.

На рис. 11.5.11 приведен вибровозбудитель машины "Турбо-6". На массивном основании 5 закреплена полуэллиптическая пружина 4 с захватом 2 для испытуемого конструкционного элемента 3. На консольном выступе захвата со стороны, противоположной испытуемому образцу, укреплен якорь 1 электромагнитного возбудителя 6 колебаний. Испытуемая лопатка, как и в машинах "Турбо-4"

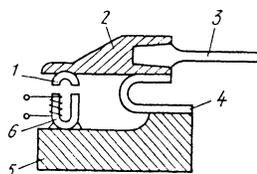


Рис. 11.5.11. Вибровозбудитель машины "Турбо-6"

и "Турбо-5", нагружена силами инерции ее распределенных масс. Амплитуду колебаний лопатки измеряют с помощью микроскопа с окулярмикронметром. Электрическая часть машины такая же, как машины "Турбо-4".

На рис. 11.5.12 показана схема установки типа МВЛ-4 для испытания лопаток турбин на усталость. На столе 1 электродинамического возбудителя колебаний типа ЭДВ-2 закреплен динамометр 2, в захвате которого зажата испытуемая лопатка 3. Электродинамический возбудитель колебаний ЭДВ-2 имеет подвеску подвижной системы, выполненную на двух разнесенных в вертикальном направлении фасонных прорезных мембранах. Мембраны изготовлены из стали 30ХГСА толщиной 4 мм и снабжены покрытием, демпфирующим их собственные колебания. Такое исполнение подвески обеспечивает необходимую жесткость в боковых направлениях для восприятия реакции от изгибающего момента, нагружающего испытуемую лопатку.

Сигнал с блока 6 генераторов емкостного датчика динамометра подается на автоматический указывающий потенциометр 5, шкала которого протарирована в единицах изгибающего момента, на ограничитель 7, а с него на регулирующий фазовращатель 8 и далее на автоматический регулятор 10. Автоматический регулятор содержит задачник, схему сравнения заданного сигнала с сигналом с блока 6 и схему управления электродвигателем, перемещающим движок потенциометра, установленного в канале усилителя 12, который управляет усилителем мощности 13 типа ГУ-5-36, электроснабжения подвижной катушки возбудителя колебаний. Эта цепь обеспечивает настройку режима автоколебаний на резонансной частоте испытуемой лопатки по первой форме ее колебаний с заданным изгибающим моментом, действующим в корневом сечении испытываемой лопатки. Таким образом, на

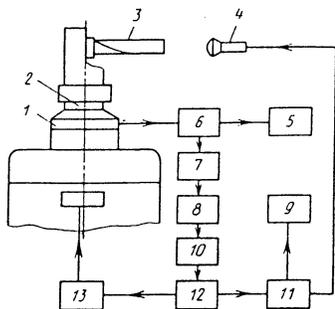


Рис. 11.5.12. Схема машины МВЛ-4 для испытаний лопаток турбин на усталость

установке осуществляют прямое мягкое нагружение испытуемого конструкционного элемента.

Сигнал с усилителя 12 подается на трехдекадный электронный счетчик 11 циклов нагружения, выходная декада которого управляет шестиразрядным электромагнитным счетчиком 9. В счетчике 11 смонтированы переключатель, фазовращатель и схема включения стробоскопической лампы 4. Эти элементы при колебаниях лопатки 3 позволяют зафиксировать ее положение в любой фазе колебаний. В комплекс установки входят катетометр КМ-6, который можно установить в любом месте по длине испытуемой лопатки 3. Фиксируя ряд последовательных фаз колебаний лопатки, можно измерять ее прогиб и строить форму изогнутой оси лопатки.

Машина МВЛ-4 снабжена электрической печью, которая установлена на направляющих над электродинамическим возбудителем колебаний и состоит из двух половин, открывающихся влево и вправо по отношению к динамометру. В правой половине печи на уровне испытуемой лопатки устроены смотровые окна, защищенные кварцевыми стеклами. Через эти окна можно освещать стробоскопом лопатку и наблюдать ее колебания в проходящем свете.

Установка МВЛ-5 отличается от МВЛ-4 частотным диапазоном, максимальными длиной и температурой испытываемых лопаток.

Методика исследования сопротивления усталости трубчатых конструктивных элементов. Для исследования сопротивления усталости прямых трубчатых конструктивных элементов (ТКЭ) можно использовать простейшее приспособление (рис. 11.5.13).

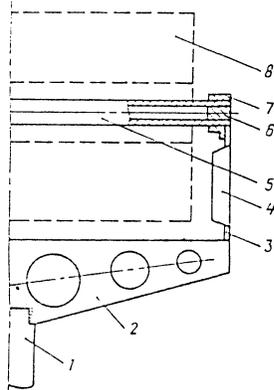


Рис. 11.5.13. Схема закрепления прямой трубы при испытаниях на усталость

Испытания ТКЭ проводятся, как правило, на электродинамическом вибростенде. Труба 5 закреплена на траверсе 2 с помощью зажимов 7, пробок 6, стоек 4 и упругих элементов 3. Траверса с помощью силовой трубы 1 крепится на подвижной платформе электродинамического вибростенда. Для нагрева трубчатых элементов служит электропечь 8. Система работает надежно при частоте собственных колебаний 150...300 Гц. В случае коротких и жестких труб приходится упругие элементы 3 заменять подшипниковыми узлами с возможностью выбора зазоров, неизбежно появляющихся при длительных испытаниях ТКЭ.

Для выбранной схемы нагружения эпюра моментов по длине ТКЭ имеет вид параболы с максимумом по середине ТКЭ. В связи с этим для тарировки ТКЭ тензорезисторы наклеивают в зоне действия максимального изгибающего момента. Амплитуда колебаний ТКЭ измеряется при помощи катетометра или микроскопа типа МБС-2. Катетометр предпочтительнее использовать при высокотемпературных испытаниях, для наблюдения за ТКЭ в печи предусмотрено окно.

За предельное состояние ТКЭ обычно принимают образование в нем усталостной макротрещины, которая фиксируется по падению резонансной частоты системы на 2%. Как правило, прямые ТКЭ разрушались поперек трубы, но со значительным рассеиванием места разрушения.

Изогнутые ТКЭ испытывают на электродинамическом вибростенде при изгибной форме колебаний и симметричном цикле нагружения (рис. 11.5.14). ТКЭ в виде камертона

1 закрепляют в зажиме 2 так, чтобы центр тяжести ТКЭ с присоединенной массой совпадал с осью элементов 6, 7, через которые передаются колебания от подвижной платформы вибростенда 8. Размеры и жесткость элементов 3-5 колебательной системы выбирают так, что при определенных частотах силовозбудителя поддерживается устойчивый режим резонансных колебаний изогнутых ТКЭ. Предельное состояние изогнутых ТКЭ характеризуется появлением усталостной макротрещины, которая фиксируется по изменению резонансной частоты системы на 2% с последующим визуальным наблюдением трещины. Усталостные макротрещины располагаются преимущественно вдоль проката на боковой и вогнутой частях ТКЭ. Подобный характер распределения напряжений и мест разрушения ТКЭ отличается от условий перегиба изгиба сплошных кривых брусьев и возможен вследствие деформации и искажения сечения кривых тонкостенных труб. В результате деформации первоначальное круговое сечение сплющивается, превращаясь в эллиптическое. Это влияет на изгиб трубы таким же образом, как уменьшение ее момента инерции.

Машины для осевого нагружения. Для осевого нагружения используют механический, электрический или гидравлический привод. Переменные нагрузки в машине с механическим приводом обычно получаются либо в результате действия кривошипа, или эксцентрика на пружину, соединенную последовательно с образцом, либо в результате создания центробежных сил вращающимися неуравновешенными грузами. Механические и электрические машины часто работают на резонансной или близкой к ней частоте, что снижает мощность, но большие машины обычно имеют гидравлический привод при относительно низких частотах.

За последние годы широкое распространение получили гидравлические машины фирм "Шенк" (Германия) и МТ (США) различных типоразмеров, нагрузок в широком частотном диапазоне (до нескольких сот герц). Они снабжены управляющими компьютерами, обеспечивающими циклическое нагружение как конструкционных элементов, так и агрегатов и изделий (автомшины, тракторы и т.п.) при программном и случайном силовом нагружении.

Глава 11.6

ИСПЫТАНИЯ ПРИ УДАРНЫХ НАГРУЗКАХ

Деформирование и разрушение материала при ударном нагружении определяется как амплитудой, так и формой импульса нагрузки.

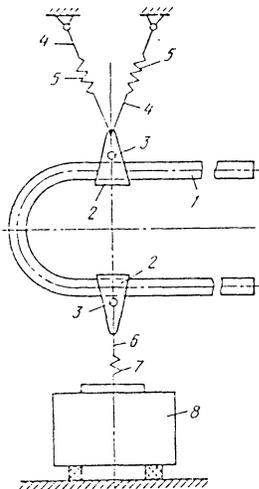


Рис. 11.5.14. Схема закрепления изогнутой трубы при испытаниях на усталость

Большие скорости деформации могут существенно изменить сопротивление материала деформации, а также характеристики прочности и пластичности [20, 80].

11.6.1. Динамическая классификация испытаний материалов по Линдхольму [20]

Фактор	Классификация								
	10^6 10^{-8}	10^4 10^{-6}	10^2 10^{-4}	10^0 10^{-2}	10^{-2} 10^0	10^{-4} 10^2	10^{-6} 10^8	10^{-8} 10^6	t, c $\dot{\epsilon}, c^{-1}$
Условия	Ползучесть		Квазистатические испытания		Промежуточные скорости	Удар стержня	Высокоскоростной удар пластины		
Силы инерции	Пренебрежение				Учет				
Процесс	Изотермический				Адиабатный				
Состояние	Плоское напряженное					Плоское деформированное			

Как следует из табл. 11.6.1, скорости $\dot{\epsilon}$ деформаций в диапазоне $\dot{\epsilon} = 10^{-1} \dots 10^2 \text{ c}^{-1}$ определяются как промежуточные или средние. Именно в этом диапазоне становятся заметными эффекты скорости деформации в большинстве металлов, хотя в некоторых случаях их влиянием можно пренебречь. Скорости деформаций $\dot{\epsilon} \geq 10^3 \text{ c}^{-1}$ характеризуют обычно высокоскоростное деформирование. При интерпретации экспериментальных данных высокоскоростного деформирования особенно важным становится учет эффектов распространения волн.

Разрезной стержень Гопкинсона. Данный стержень является одним из наиболее применяемых в экспериментальной практике устройств для изучения поведения материала при высокой скорости деформации. Принцип действия стержня Гопкинсона заключается в определении динамических напряжений, деформаций или перемещений на его конце по данным, полученным на некотором расстоянии от него [20]. Для достижения высоких скоростей нагружения Г. Кольский предложил разместить два стержня с обеих сторон образца (рис. 11.6.1, а). Образец 3 длиной l расположен между передающим 2 и приемным 4 стержнем одинакового диаметра. Пределы текучести материалов стержней существенно выше предела текучести образца, поэтому в процессе ударно-волнового нагружения стержни 2 и 4 работают в упругой области. Упругая волна инициируется на левом конце стержня 2 ударом ударника 1, ускоряемого либо с помощью пружины, либо с помощью метательной установки.

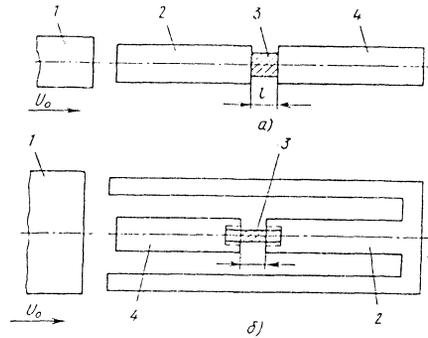


Рис. 11.6.1. Схемы методов испытаний с использованием стержня Гопкинсона:

- а - на сжатие; б - на растяжение; 1 - ударник; 2 - передающий стержень; 3 - образец; 4 - приемный стержень

По импульсам деформации, зарегистрированным тензодатчиками, можно найти перемещения левого u_1 и правого u_2 торцов образца, что, в свою очередь, позволяет определить его деформацию $\epsilon = (u_1 - u_2)/l$. Напряжение в образце

$$\sigma = EA_1\epsilon/A_0,$$

где E - модуль упругости опорного (приемного) стержня; A_1 и A_0 - площади поперечного сечения соответственно приемного стержня и образца.

Тензодатчики расположены на передающем и приемном стержнях на равных расстояниях от образца, так что отраженная и прошедшая волны приходят к каждому датчику одновременно. Тензометрические мосты, как правило, содержат по два рабочих датчика для исключения изгибных составляющих. Информация регистрируется осциллографом или регистратором переходных процессов. Рекомендуется проводить динамическую калибровку системы, пропуская волну напряжения известной амплитуды через датчики передающего и приемного стержней, состыкованных вместе, без образца. Амплитуда импульса деформации в стержнях $v_0/2C_0$ (где v_0 - измеряемая скорость ударника; C_0 - скорость продольной волны).

Методику стержня Гопкинсона можно использовать в испытаниях на растяжение. В одном из вариантов установки (рис. 11.6.1, б) труба передает импульс сжатия сплошному стержню, помещенному внутри этой трубки. Труба и стержень соединены механически. Когда импульс сжатия доходит до свободного конца трубы, где находится соединение, он отражается по внутреннему сплошному стержню в виде импульса растяжения. Модификации стержня Гопкинсона позволяют проводить испытания на сдвиг, кручение и др. [20]. При этом достигаются скорости деформации до 10^4 с⁻¹ и выше.

Недостатками методик, использующих разрезной стержень Гопкинсона, являются радиальная инерция и трение на торцах образца, а также дисперсия волн, связанная с наличием контактных поверхностей, разделяющих материалы с различной акустической жесткостью.

Вертикальный копер с падающим грузом. Для испытания стержневых образцов на ударное растяжение используют вертикальные копры, в которых цилиндрический образец одним концом связан со стержнем-динамометром, а другим - с наковальней, воспринимающей удар бойка кольцевого сечения ("бабы"), который движется вдоль стержня с предварительной заданной скоростью (рис. 11.6.2).

Образцы из исследуемых материалов имеют укороченную рабочую часть (с отношением длины к диаметру 2,5 или 1,5), что способствует выравниванию напряжений и деформаций по длине рабочей части. Напряжения в образце измеряют по деформации упругого динамометра с помощью тензодатчиков сопротивления. Их малая инертность обеспечивает при базе в несколько миллиметров неискаженную регистрацию импульса нагрузки в спектре частот до нескольких килогерц. Для регистрации динамометра использованы два тензодатчика, наклеенные на динамометр

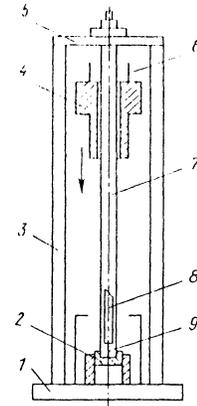


Рис. 11.6.2. Схема вертикального копра:

- 1 - плита; 2 - наковальня; 3 - стойка; 4 - боек;
5 - поперечина; 6 - трос; 7 - направляющая труба;
8 - стержень-динамометр; 9 - образец

симметрично относительно его оси и соединенные последовательно для устранения возможного влияния изгибных волн. Для точной регистрации нагрузки проводится динамическая тарировка тензодатчика, заключающаяся в сопоставлении деформации в упругой волне, распространяющейся по стержню, и изменения сопротивления тензодатчика, наклеенного на поверхности стержня-волновода. Используя при испытаниях различные модификации копров, а также образцы и измерительные устройства, достигаются скорости деформаций в 10^3 с⁻¹ и выше [20].

Пневмопороховая установка для испытаний на ударное сжатие. Трудности регистрации быстротекущих процессов обуславливают применение наиболее простой в отношении измерения и интерпретации результатов схемы нагружения - плоского соударения тел. Многочисленные методы разгона твердых тел можно разделить на два основных - взрывные и пушечные. Во взрывных ударник практически не управляется, а в пушечных - направляется в течение всего процесса ускорения.

В пневмопороховой (пушке) установке ПК-90 (рис. 11.6.3) ствол 5 длиной 3500 мм и калибром 90 мм установлен на станине 6 с помощью двух опор. Камера 3 сжатого воздуха, представляющая собой толстостенный цилиндр, соединена со стволом переходным фланцем. Сжатый воздух из баллона поступает в камеру 3, в которой по достижении давления, необходимого для прорыва диафрагмы 4, последняя разрушается, в результате чего открывается доступ сжатого воздуха в канал ствола и по нему разгоняется ударник 7. Ударник имеет вид стакана (из легкого алюминия -

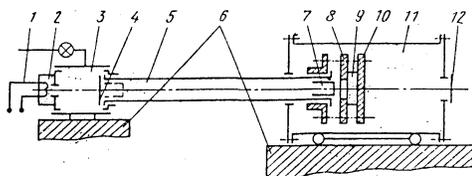


Рис. 11.6.3. Схема пневмопороховой установки ПК-90:

1 - электрическая спираль; 2 - пороховая камера; 3 - камера сжатого воздуха; 4 - диафрагма; 5 - ствол; 6 - станина; 7 - ударник; 8 - опорный фланец; 9 - образец; 10 - прижимной фланец; 11 - вакуумная камера; 12 - предохранительный клапан

вого сплава), к торцу которого может крепиться пластина из требуемого материала.

Разгон ударника сжатым воздухом позволяет достичь скорости соударения 450 м/с, использование пороховых зарядов увеличивает скорость до 1000...1200 м/с. Непосредственное соударение образца с ударником происходит в вакуумной камере 11. Образец 9 прижимается фланцем 10 через амортизатор к опорной поверхности фланца 8.

Регистрация профилей ударных волн датчиками давления. Регистрация напряжений в материале при ударном нагружении осуществляется по различным методикам, основанным на применении разного рода датчиков, которые реагируют на изменение термодинамических (давление, плотность, температура) параметров при ударном сжатии. Вопросы конкретного использования различных датчиков определяются объектами исследований (металлы, неметаллы), их физическими характеристиками (электрическая проводимость, импеданс), геометрией, диапазоном давлений, длительностью процесса и др. Наиболее широко используют кварцевый, манганиновый и диэлектрический датчики.

Кварцевый датчик относится к пьезоэлектрикам и применяется при изучении упругопластических свойств материалов, а также для измерения давления в продуктах взрыва. При проведении исследований используют датчики со сплошным электродом 2, с охранным кольцом 3 (рис. 11.6.4) и шунтируемым охранным кольцом. В датчике с охранным кольцом необходимо, чтобы электрический потенциал на двух электродах был одинаков, для чего сопротивления нагрузки подбирают обратно пропорционально площади электродов. Ширина внешнего электрода $d \geq 1,5h$. Размеры центрального электрода выбирают из условия отсутствия влияния боковой разгрузки за время регистрации. Площадь прокладки, изолирующей центральный электрод от внешнего, менее 4 % площади центрального.

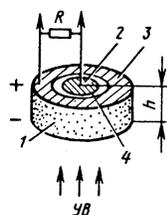


Рис. 11.6.4. Кварцевый датчик:

1 - кварц; 2 - центральный электрод; 3 - охранный кольцо; 4 - изолирующая прокладка; УВ - ударная волна

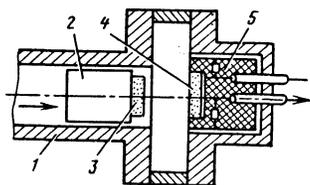


Рис. 11.6.5. Схема использования кварцевого датчика:

1 - ствол метательной установки; 2 - ударник; 3, 4 - кварц; 5 - изолирующая втулка

При проведении экспериментов изолируют боковые поверхности кварца 3, 4 от возможных пробоев по поверхности (рис. 11.6.5), так как при давлении 2000 МПа электрическое поле в кварце достигает величины 10^6 В/см. Временная разрешающая способность датчика определяется симметрией фронта ударной волны и временем установления измерительного тракта. Сигнал от кварцевого датчика регистрируется осциллографом (полоса пропускания 20...150 МГц, $R = 50$ Ом и входная емкость 20 пФ). Точность измерения давления 5 %.

К преимуществам кварцевого датчика, как и всего класса пьезоэлектриков, следует отнести высокую разрешающую способность по времени (примерно 10 нс), простоту и доступность средств регистрации. Недостатками являются: несогласованность импедансов измерительного элемента и объекта измерения, ограниченный предел измерений по давлению (по существу ограничен пределом упругости по Гюгонию), очень высокая степень обработки поверхности кварца.

Манганиновый датчик относится к пьезорезисторам и применяется в технике измерения как статических, так и динамических давлений.

Конструкция датчиков определяется условиями, в которых проводится регистрация

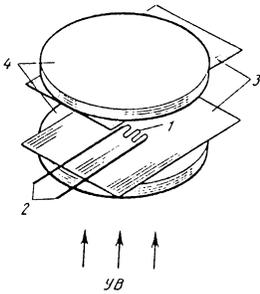


Рис. 11.6.6. Манганиновый датчик

давления. В случае плоского удара в качестве чувствительного элемента используется отрезок расплюсченной проволоки или фольги. Для увеличения сопротивления и уменьшения занимаемой площади его зигзагообразно изгибают (рис. 11.6.6), приваривая точечной сваркой выводы 2 из медной фольги с очень малым сопротивлением. Толщина чувствительного элемента 1 датчика обычно составляет несколько сотых долей миллиметра, в местах крепления вывода к ней добавляется толщина выводов, так что суммарная толщина датчиков 0,04...0,01 мм. От электропроводящих поверхностей тел 4, нагружаемых ударом, чувствительный элемент изолируется с помощью прокладок 3 из фторопласта, лавсана, слюды, эпоксидной смолы.

Разрешающая способность датчика определяется временем установления равновесного состояния в образце и изоляции: обычно в 3-5 раз больше времени пробега волны по толщине изолирующей прокладки (например, при толщине лавсановой изоляции 0,12 мм это время 0,1...0,15 мкс).

Манганиновые датчики отличаются относительная простота в изготовлении, доступность материала и надежность в эксплуатации. К недостаткам следует отнести зависимость коэффициента пьезочувствительности от среды, в которую датчик помещен, а также наличие гистерезиса. Кроме того, этот датчик является вторичным средством (как и многие другие) регистрации давления ударного сжатия и предполагает наличие первичного (абсолютного) точного определения давления косвенным методом, заключающимся в том, что с помощью электромагнитного способа либо лазерного интерферометра определяют скорость свободной поверхности или массовую скорость, а затем на основе законов сохранения энергии определяют действующее давление.

Диэлектрический датчик используется для регистрации профиля импульса давления в твердых телах, вызванного ударным или взрывным нагружением.

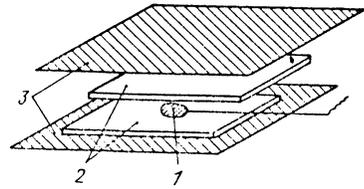


Рис. 11.6.7. Диэлектрический датчик

Принцип работы основан на регистрации изменения при сжатии емкости плоского конденсатора, образованного двумя электропроводящими поверхностями с диэлектрической пленкой между ними. В плоском конденсаторе центральный электрод 1 вместе с выводом расположен между двумя слоями диэлектрической пленки 2, а второй электрод 3 (поверхности проводящих металлических материалов или тонкая металлическая фольга в случае неметаллов) заземлен (рис. 11.6.7).

Перед опытом датчик заряжается от источника постоянного напряжения через сопротивление, которое столь велико, что влияние процесса подзарядки конденсатора в течение времени регистрации не существенно. При сжатии датчика в ударной волне заряд конденсатора сохраняется практически постоянным (проводимостью пленки можно пренебречь), а изменение емкости датчика, вызванное сжатием диэлектрика, приводит к изменению разности потенциалов на электродах датчика, регистрируемой прибором с высокоомным входом. В зависимости от конкретных условий регистрации диэлектрический датчик можно соединить непосредственно с пластинами вертикального отклонения электронно-лучевой трубки осциллографа коротким отрезком кабеля, либо через катодный или эмиттерный повторитель или усилитель с высокоомным входом.

Изменение емкости датчика характеризуется величиной приложенного давления. Тарировочную кривую, связывающую изменение емкости с действующим давлением, строят по данным специальной серии плосковолновых экспериментов, при которых регистрируется изменение разности потенциалов на электродах датчика, а давление в волне нагрузки рассчитывается на основе законов сохранения. Для каждого вида диэлектрика строится своя тарировочная кривая [9].

Разрешающая способность диэлектрического датчика по времени, например, с лавсановой пленкой толщиной 0,06 мм равна 0,05 мкс (в случае расположения датчика между стальными пластинами). К преимуществам диэлектрического датчика следует отнести простоту в изготовлении и эксплуатации, доступность материалов, высокий уровень изме-

ремых сигналов и помехозащищенность. Недостатком является невозможность индивидуальной тарировки каждого элемента, поскольку это метод одноразового использования (как, впрочем, и все другие), что снижает точность измерений.

Испытания металлов на ударное сжатие при скоростях деформации до 10^6 с^{-1} . Избежать трудностей экспериментального характера по методике разрезного стержня Гопкинсона позволяет метод, суть которого заключается в следующем (рис. 11.6.8). Образец 1 в виде диска с прорезями, выполненными с шагом h деформируется между плоскими поверхностями ударника 2 и подкладкой плиты-динамометра 3 на метательной установке. Узкая полоса материала при этом деформируется в условиях плоской деформации (деформация в направлении оси полоски отсутствует), и ее сопротивление пластическому сдвигу (по критерию Мизеса) может быть сопоставлено с сопротивлением сдвигу при одноосном напряженном состоянии. Ширина полоски b выбирается из условия, что усилие ее деформирования не вызывает заметной пластической деформации в ударнике и плите-динамометре. Материал последних находится в условиях стесненной пластической деформации, что способствует снижению возникших в нем деформаций.

Деформирование образца сопровождается распространением волны по ударнику и плите-динамометру. На удалении от поверхности контакта с образцом, равным примерно шагу решетки, волна в плите близка к плоской и регистрация ее интенсивности в области, не затронутой влиянием волн боковой разгрузки, характеризует сопротивление деформированию образца.

Для регистрации волны в плите-динамометре используется диэлектрический датчик давления 5, расположенный между тыльной поверхностью плиты и пластиной из оргстекла 4.

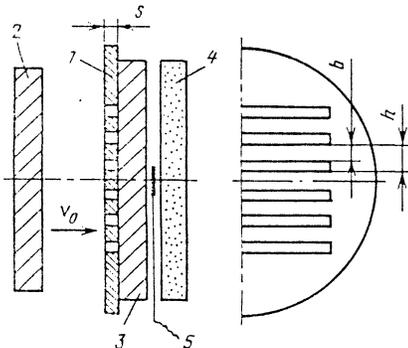


Рис. 11.6.8. Схема эксперимента на ударное сжатие

Напряжение деформирования образца

$$\sigma = ph / [b(1 + \epsilon)],$$

где p - давление в плите-динамометре при прохождении плоской волны.

Давление p определяется по известной тарировочной кривой датчика и ударным адимбатам материала плиты-динамометра и оргстекла. Скорость деформирования $\dot{\epsilon}$ определяют по разности скоростей Δv движения поверхностей ударника и плиты-динамометра:

$$\dot{\epsilon} = \frac{\Delta v}{s} = \frac{v_0 - 2p / (\rho_0 a)}{s},$$

где s - толщина образца (обычно 1...2 мм); a - скорость распространения упругой волны в плите-динамометре (материал ударника и плиты-динамометра деформируется упруго).

Метод предназначен для испытаний относительно мягких металлов. В качестве ударника и плиты-динамометра используют высокопрочную (закаленную) сталь.

Глава 11.7

МЕТОДЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛОВ ПРИ СЛОЖНОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

В настоящее время для экспериментального исследования механических свойств материалов в условиях сложного напряженного состояния имеется большое число методик, использующих образцы различных типов; причем для каждого типа образца существует множество конкретных конструктивных решений. Большинство из этих методик рассчитано на реализацию двухосного (плоского) напряженного состояния, так как практическое создание в достаточно большом рабочем объеме образца однородного и контролируемого в процессе испытания трехосного напряженного состояния, а также корректное количественное определение соответствующего ему деформированного состояния материала все еще представляют собой трудную методическую проблему.

Разнообразие геометрических форм образцов для испытания материалов при сложном напряженном состоянии не позволяет провести их четкую систематизацию по единому признаку. Принято следующее деление видов статических испытаний материалов в

условиях сложного напряженного состояния: тонкостенных трубчатых образцов; плоских образцов; элементов сосудов (см. гл. 11.10); материалов в обоймах и камерах высокого давления; образцов с плоскими гранями и др.

11.7.1. ИСПЫТАНИЯ ТОНКОСТЕННЫХ ТРУБЧАТЫХ ОБРАЗЦОВ ПРИ СЛОЖНОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

Комбинированное воздействие на рабочий объем образца осевой силой (растяжение-сжатие), крутящим моментом и внутренним давлением позволяет получить широкий диапазон напряженных состояний с различными соотношениями главных напряжений и ориентацией этих напряжений относительно оси образца. Этот метод дает возможность вести исследования механического поведения материалов при плоском напряженном состоянии: влияние вида напряженного состояния на закономерности сопротивления деформированию и разрушению; условий предельного перехода (по текучести и прочности) и закономерностей упрочнения материала с позиций теорий пластичности и др.

В зависимости от конструкций захватов и узлов нагружения трубчатого образца в результате действия внутреннего давления в нем может присутствовать или отсутствовать осевая составляющая напряжения. Так как в большинстве случаев образец вместе с захватом представляет собой замкнутый с двух торцов цилиндр, то внутреннее давление создает в рабочем объеме образца напряженное состояние, при котором поперечное (тангенциальное) напряжение σ_{θ} в 2 раза больше продольного (осевого) напряжения σ_z (рис. 11.7.1). Действие осевой силы N (растяжение или сжатие) вызывает равномерные продольные напряжения, а крутящего момента $M_{кр}$ - равномерные касательные на-

пряжения $\tau_{z\theta}$. Совместное воздействие на тонкостенный трубчатый образец внутреннего давления p и соответствующим образом подобранной (по величине и знаку) осевой силы N позволяет получить на образце любое напряженное состояние, соответствующее первому и четвертому квадрантам плоскости главных напряжений. При этом главные напряжения ориентированы вдоль и поперек оси образца. Дополнительное воздействие на образец крутящего момента $M_{кр}$ создает также двухосное напряженное состояние, но ориентация главных напряжений в этом случае изменяется.

Толщину стенки δ_0 трубчатого образца выбирают относительно малой по сравнению с внутренним диаметром D образца ($\delta/D = 0,02...0,05$), что позволяет считать напряженное состояние достаточно однородным по толщине. Расчет условных напряжений проводят в этом случае по достаточно точным формулам (погрешность не более 2 %) [30, 36]

$$\sigma_z^y = \frac{N}{\pi D_{ср} \delta_0} + \frac{p D_{ср}}{4 \delta_0};$$

$$\sigma_{\theta}^y = \frac{p D_{ср}}{2 \delta_0}; \quad \tau_{z\theta} = \frac{2 M_{кр}}{\pi \delta_0 D_{ср}^2},$$

где $D_{ср}$ - средний диаметр образца, $D_{ср} = D + \delta_0$.

Условные деформации

$$\varepsilon_z^y = \frac{\Delta l}{l_0}; \quad \varepsilon_{\theta}^y = \frac{\Delta D}{D_{ср}}; \quad \gamma^y = \frac{D_{ср} \varphi}{l_0},$$

где l_0 - база измерения; Δl - продольное приращение образца (с учетом знака) на базе l_0 ; ΔD - приращение диаметра; φ - угол закручивания образца на базе l_0 .

Истинные деформации рабочей зоны образца в продольном (осевом) и поперечном направлениях:

$$\varepsilon_z = \int_{l_0}^l \frac{dl}{l} = \ln(1 + \varepsilon_z^y);$$

$$\varepsilon_{\theta} = \int_{D_{ср}}^D \frac{dD}{D} = \ln(1 + \varepsilon_{\theta}^y),$$

где l - текущая база измерения продольных деформаций; D - текущий диаметр образца.

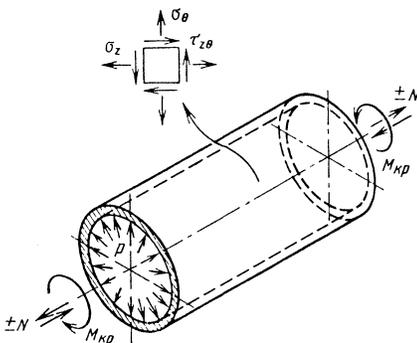


Рис. 11.7.1. Схема нагружения трубчатого образца

Радиальная деформация ε_r определяется из условия только упругого изменения объема

$$\varepsilon_z + \varepsilon_\theta + \varepsilon_r = \theta.$$

Для начально-изотропного материала

$$\theta = \frac{\sigma_0}{K_0} = \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_z + \sigma_\theta).$$

Следовательно,

$$\varepsilon_r = \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_z + \sigma_\theta) - (\varepsilon_z + \varepsilon_\theta).$$

Истинные напряжения:

$$\sigma_z = \frac{N}{\pi[D_{ср}(1+\varepsilon_\theta) + \delta_0(1+\varepsilon_r)]\delta_0(1+\varepsilon_r)} + \frac{p[D_H(1+\varepsilon_\theta) - 2\delta_0(1+\varepsilon_r)]}{4\delta_0(1+\varepsilon_r)},$$

$$\sigma_\theta = \frac{p[D_H(1+\varepsilon_\theta) - 2\delta_0(1+\varepsilon_r)]}{2\delta_0(1+\varepsilon_r)};$$

$$\tau_{z\theta} = \frac{2M_{кр}}{\pi[D_{ср}(1+\varepsilon_\theta) + \delta_0(1+\varepsilon_r)]^2\delta_0(1+\varepsilon_r)}.$$

Зная истинные напряжения и деформации, можно определить и другие параметры напряженного деформированного состояния (в том числе главные напряжения и деформации, интенсивности напряжений и деформаций, компоненты пятимерных девиаторных пространств Ильюшина для напряжений и деформаций и др.).

Разнообразие конструктивных решений головок трубчатых образцов вызвано рядом причин, в том числе - ограничениями по сортаменту исследуемого материала, силовым режимом нагружения, температурным режимом испытаний, конструкцией захватов испытательной машины [17, 29, 30, 36, 46]. Для крепления образцов, изготовленных из тонкостенных трубок, в зависимости от физико-механических свойств испытуемого материала концы трубок развальцовывают или к ним крепят (механически, склеиванием, припайванием, сваркой) отдельные захватные головки однократного или многократного использования.

Минимальная толщина стенки образца в рабочей зоне лимитируется размером зерна

исследуемого материала. Относительная тонкостенность образца (отношение толщины стенки образца к среднему диаметру) $\delta_0/D_{ср} \leq 0,02...0,05$, длина рабочей части образца - не менее $2,5 D$.

Для обеспечения строгой соосности рабочей части образца, головок и захватов испытательной машины высокие требования предъявляют к конструкции образца и технологии его изготовления. Разностенность в рабочей части образца не должна превышать 2...3 %. Режим механической обработки рабочих поверхностей образца должен быть идентичным для всей партии образцов и обеспечивать минимальный механический наклеп. Для снятия остаточных (технологических) напряжений в образцах из металлов их рекомендуется подвергать естественному старению или соответствующей термообработке.

11.7.2. ИСПЫТАНИЯ ПЛОСКИХ ОБРАЗЦОВ ПРИ СЛОЖНОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

В ряде случаев характер решаемых задач, а также сортамент исследуемого материала делают предпочтительными (или практически единственно возможными) испытания на плоских образцах, большое разнообразие которых может быть сведено к следующим основным типам: в виде прямоугольника или параллелограмма; крестообразные; дисковидные; с надрезами и канавками; для испытания односторонним давлением. Недостатком плоских образцов прямоугольной формы (рис. 11.7.2, а), испытываемых в условиях двухосного растяжения (первый квадрант плоскости главных напряжений), является сложность равномерного приложения нагрузки, а также наличие краевых эффектов в местах крепления захватов.

Для определения предельных кривых текучести использовались ромбовидные пластины (рис. 11.7.2, б). Комбинация изгибающих моментов позволяла исследовать кривую текучести на всей плоскости главных напряжений. К числу недостатков относится сложность получения экспериментальных точек в первом и третьем квадрантах (для этого используется суперпозиция данных двух экспериментов), а также неравномерность напряжений по толщине образца.

Крестообразные образцы используются в экспериментальных исследованиях закономерностей упрочнения материалов, при изучении трещиностойкости конструкционных материалов и др. (рис. 11.7.2, в). Разнообразие конструктивных решений крестообразных образцов вызвано, например, конкретными целями исследования, возможностями обработки (в том числе технологическими) исходного материала, габаритными размерами образца. Ограничения размеров образцов могут быть связа-

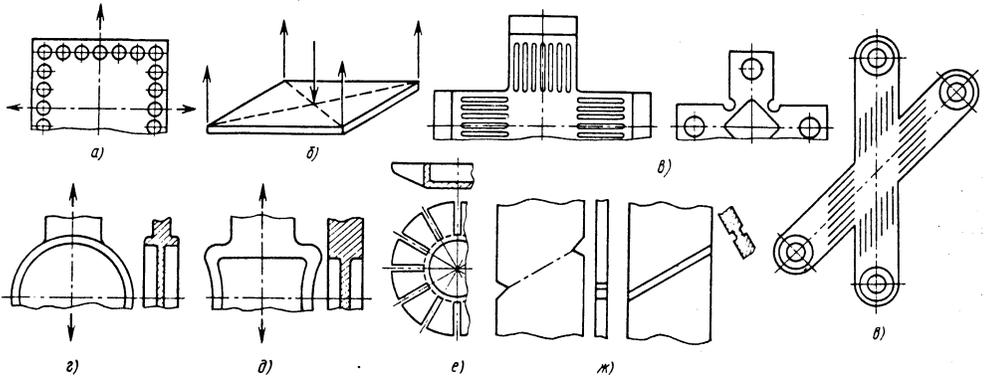


Рис. 11.7.2. Плоские образцы при испытании в сложном напряженном состоянии:

a - прямоугольной формы; *б* - ромбовидный; *в* - крестообразный; *г* - дисковидный с круговым жестким ободом; *д* - то же, с ободом отрицательной кривизны; *е* - то же, с коническим ободом и радиальными прорезями; *ж* - пластина, ослабленная надрезами и канавками

ны с сортаментом исследуемого материала, реальными условиями испытаний (например, в канале ядерного реактора) и др. Поиск в каждом конкретном случае оптимальной конструкции образца (в том числе способ передачи усилий, наличие и геометрические соотношения прорезей, возможности реализации и форма утонченной рабочей зоны и др.) направлен на обеспечение максимальных размеров исследуемой области однородных и равномерных напряжений и деформаций [36, 46]. Следует отметить, что крестообразные образцы отличаются отсутствием градиента напряжений по толщине рабочей части.

Дисковидные образцы в виде круговой пластины, расположенной внутри жесткого обода (рис. 11.7.2, *г*), нагружают растягивающей силой. При этом в центральной части пластины возникает двухосное напряженное состояние с главными напряжениями разных знаков. Соотношения между главными напряжениями можно изменить (в относительно узком диапазоне) путем изменения размеров и жесткости обода. Для расширения диапазона соотношения главных напряжений обод образца подкрепляют вставными кольцами различной жесткости. Изготавливают также ободы эллиптической формы и с отрицательной кривизной (рис. 11.7.2, *д*).

Дисковидный образец, имеющий конический обод с радиальными прорезями (рис. 11.7.2, *е*), позволяет исследовать трещиностойкость конструкционных материалов в условиях двухосного растяжения. При эксперименте образец устанавливают конической поверхностью на круговую опору и равномерно нагружают по внутреннему контуру обода при помощи пуансона. Обод, выгибаясь, упирается внутренней поверхностью в круговую заточку

пуансона, при этом в рабочей части образца реализуется двухосное растяжение. Методика, использующая такой образец, позволяет изучать кинетику развития трещин, произвольно ориентированных относительно осей главных напряжений, определять параметры, необходимые для оценки трещиностойкости материалов, устанавливать условия наступления предельного состояния листовых элементов, содержащих трещины произвольной формы. При этом используют простейшие серийные испытательные машины.

Для определения кривой текучести материала в плоскости главных напряжений применяют также образцы в виде полос, ослабленных надрезами или канавками. Если такой образец подвергнуть одноосному растяжению, то при определенном значении растягивающей силы в ослабленной зоне (вдоль линии, соединяющей надрезы, или в канавке) появятся упругопластические деформации, и напряженное состояние будет двухосным. Материал образца за пределами ослабленной зоны находится при этом в упругом состоянии с незначительными упругими деформациями. Это позволяет считать части образца вне зоны локализации пластических деформаций вполне жесткими.

Взаимное перемещение частей образца характеризуется вектором смещения или скорости смещения, угол наклона которого к зоне деформации зависит как от угла наклона ослабленной зоны, так и от характеристик материала. Испытывая, например, серию образцов из начально-изотропного материала с разными углами наклона канавки, определяют для каждого случая вектор смещения и усилие в момент перехода ослабленной зоны в упругопластическое состояние. Затем аналитически оп-

ределяют соответствующие значения главных напряжений и строят предельную кривую текучести в плоскости $\sigma_1 \sim \sigma_2$.

Образцы для испытания односторонним давлением (методом выпучивания) представляют собой круглые плоские пластины, при изготовлении которых обеспечивается минимальное механическое вмешательство в исходное состояние материала. Образцы заземляют по контуру и нагружают односторонним, равномерно распределенным давлением жидкой или газообразной среды. Такие испытания проводят не только на плоских образцах, но и на полых шаровых сегментах. В процессе нагружения образца происходит его выпучивание с реализацией на рабочей поверхности равномерного двухосного растяжения. Главные напряжения при этом

$$\sigma_1 = \sigma_2 = 0,5 pR/h,$$

где R - текущий радиус формирующейся в ходе эксперимента сферы, $R = (r^2 + 4H^2)/(8H)$; r - радиус контура заземления; H - экспериментально определяемая высота вздутия; h - толщина образца.

Для получения на таких образцах напряженного состояния, отличного от равномерно двухосного, применяют, например, специальные прижимные шайбы с эллиптическим контуром.

11.7.3. ИСПЫТАНИЯ МАТЕРИАЛОВ В ОБОЙМАХ И КАМЕРАХ ВЫСОКОГО ДАВЛЕНИЯ

Исследования материалов в условиях трехосного сжатия ввиду больших методических сложностей их проведения носят эпизодический характер. Первые испытания образцов I проводились в обойме (рис. 11.7.3, *a*). Использование двух обойм (рис. 11.7.3, *б*) позволило существенно увеличить боковое давление на образец. С этой целью между торцами внешней обоймы и пуансоном обеспечивается начальный зазор [36].

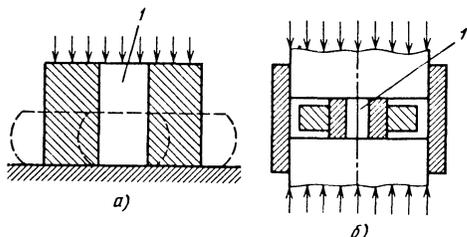


Рис. 11.7.3. Схема испытания образцов в условиях трехосного сжатия:

a - в обойме; *б* - в двойной обойме

Первые систематические исследования механических свойств материалов при высоком и сверхвысоком давлении выполнены П. Бриджменом [13]. Известны устройства для испытания при высоком давлении, в которых нагружение образца проводится посредством штанг, находящихся в камере, а также устройств, в которых нагружение осуществляется поршнем, одновременно создающим в камере рабочее давление. Существуют различные аспекты методик проведения экспериментов при высоком и сверхвысоком давлении, требования к рабочим средам, используемым в аппаратах высокого давления, конструктивные решения отдельных узлов, уплотнений и др. [13, 29, 36].

11.7.4. ИСПЫТАНИЯ ОБРАЗЦОВ С ПЛОСКИМИ ГРАНЯМИ

Испытания образцов в виде кубов или толстых пластин осуществляют обычно в устройствах кинематического типа с механическим воздействием на рабочие плоскости образца (рис. 11.7.4, *a*), или в устройствах (установках) с гидравлическим нагружением (рис. 11.7.4, *б, в*).

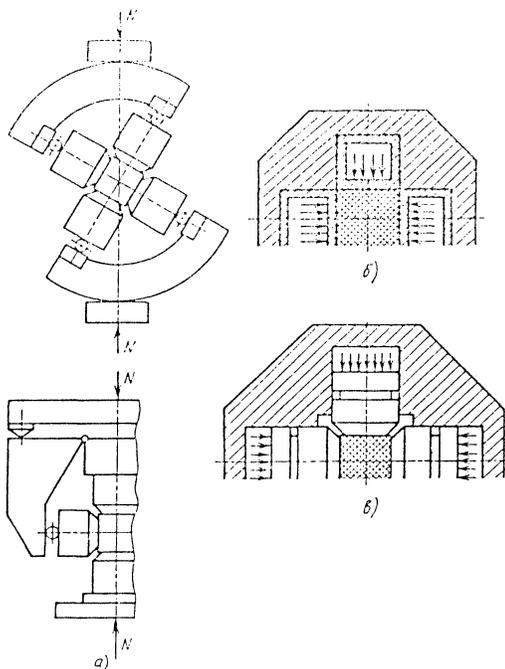


Рис. 11.7.4. Схемы испытания образцов с плоскими гранями:

a - в механических прессах;
б - гидравлическое через эластичную прокладку;
в - то же, с помощью пуансонов

С помощью механических реверсов можно реализовать напряженное состояние с различными соотношениями главных напряжений. Гидравлическое нагружение образцов может осуществляться непосредственно (гидростатически) или посредством промежуточных цилиндров-пуансонов. К недостаткам указанных методик относится: неравномерность приложения нагрузок к рабочим плоскостям образца; высокий уровень контактных напряжений; наличие сил трения в зонах контакта с образцом. Существенные конструкторские проблемы связаны с созданием надежных уплотнений, учетом потерь на трение, выбором (при методической возможности) смазочного материала и других технических средств для плоского стыка пуансон - образец и др. [29, 36].

11.7.5. АВТОМАТИЗАЦИЯ ИССЛЕДОВАНИЙ МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛОВ ПРИ СЛОЖНОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

Развитие электронной вычислительной техники, обладающей большим объемом памяти и быстродействием, позволяет осуществлять автоматизацию испытаний материалов при сложном напряженном состоянии на качественно новом уровне. Этому в большой мере способствует развитие аппаратного обеспечения средств электрогидроавтоматики и использование тиристорного электропривода, позволяющего программно изменять в очень широком диапазоне частоту вращения выходного вала.

Испытательный комплекс для исследования конструкционных материалов при сложном напряженном состоянии в широком диапазоне температур имеет систему автоматического управления установкой, которая позволяет проводить эксперимент в одном из двух режимов - полуавтоматическом или автоматическом. При первом режиме работы программа нагружения задается и контролируется с пульта установки, а обработка экспериментальных данных производится автоматически. Полуавтоматический режим осуществляет автоматическое снятие и обработку экспериментальных данных с выводом на печать большого массива результатов расчета в процессе нагружения. Качественно новые возможности в постановке научных экспериментов представляет автоматический режим. Программирование работы установки по вычисляемым в ходе эксперимента параметрам позволяет вести нагружение по произвольной (в том числе и лучевой) траектории в трехмерном пространстве (для плоского напряженного состояния) компонентов тензора истинных напряжений.

Система (рис. 11.7.5) включает: датчики D сил и деформаций, тензометрический усилитель TU , устройство коммутации $УК$, блок

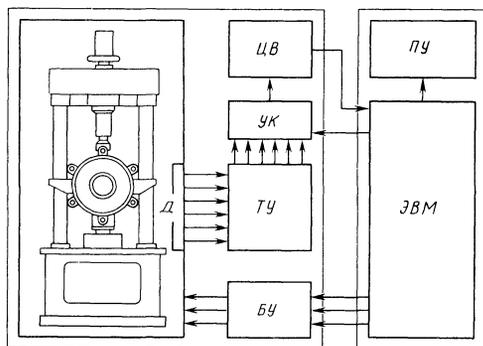


Рис. 11.7.5. Схема автоматизированной установки для испытания материалов при сложном напряженном состоянии

местного управления, цифровой вольтметр $ЦВ$, исполнительные электроприводы системы нагружения, блок управления электроприводами $БУ$ и управляющую $ЭВМ$ с печатающим устройством $ПУ$. Автоматическое нагружение по заданной траектории осуществляется $ЭВМ$ посредством $БУ$, который устанавливает один из трех режимов работы электродвигателей: "стоп", "левое вращение", "правое вращение". Траектория нагружения представляет собой в общем случае пространственную кривую в трехмерном пространстве истинных напряжений $\sigma_z - \sigma_\theta - \tau_{z\theta}$ (где σ_z и σ_θ - соответственно осевое и тангенциальное нормальные напряжения; $\tau_{z\theta}$ - касательное напряжение в плоскости $z\theta$). Траектории сложного нагружения задают в виде последовательности координат основных точек. Лучевая траектория (простое нагружение) определяется тремя проекциями $\Delta\sigma_z, \Delta\sigma_\theta, \Delta\tau_{z\theta}$ шага между основными точками на координатные оси. В этом случае координаты основных точек траектории рассчитываются $ЭВМ$ в процессе нагружения.

Для уменьшения числа основных точек, необходимых для воспроизведения с высокой точностью заданной траектории, нагружение между основными точками осуществляется посредством отработки последовательности промежуточных точек, автоматически формируемой в процессе нагружения. Для каждой точки (основной или промежуточной) траектории напряжений в процессе нагружения формируются соответствующие уставки нагрузок. Автоматически опрашивая датчики нагрузок, $ЭВМ$ сравнивает значения уставок с измеренными нагрузками и по результатам сравнения для электропривода каждой из нагрузок вырабатывает команды: "нагрузка",

“разгрузка”, “останов”. Блок управления обеспечивает исполнение этих команд до тех пор, пока регулируемые нагрузки не станут равны значениям уставок.

После обработки всех промежуточных точек напряжения доводятся до значений, соответствующих координатам очередной основной точки. Снятые в основной точке показания датчиков заносятся в массив результатов, и ЭВМ рассчитывает координаты промежуточных точек последующего участка траектории и т.д.

Для основных точек траектории вычисляются и выводятся на печать более 30 параметров напряженного и деформированного состояния образца, в том числе: осевые, тангенциальные и угловые деформации; осевые, тангенциальные и касательные напряжения (соответствующие зависимости см. п. 11.7.1). На печать выводятся интенсивности:

деформаций

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_z - \varepsilon_\theta)^2 + (\varepsilon_\theta - \varepsilon_r)^2 + \left[(\varepsilon_z - \varepsilon_r)^2 + \frac{3}{2} \gamma^2 \right]}$$

напряжений

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

характеристики пятимерного девиаторного пространства напряжений и деформаций
А. А. Ильющина

$$s_1 = \sqrt{\frac{2}{3}} (\sigma_z - 0,5\sigma_\theta); \quad s_2 = 0,5\sqrt{2}\sigma_\theta;$$

$$s_3 = \sqrt{2}\tau; \quad s = \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2};$$

$$\mathfrak{A}_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} (\varepsilon_z - \varepsilon) \quad \text{при} \quad \varepsilon = \frac{1}{3} (\varepsilon_z + \varepsilon_\theta + \varepsilon_r);$$

$$\mathfrak{A}_2 = \sqrt{\frac{2}{2}} (\varepsilon_z - 2\varepsilon_\theta - 3\varepsilon); \quad \mathfrak{A}_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} \gamma;$$

$$\mathfrak{A} = \sqrt{\mathfrak{A}_1^2 + \mathfrak{A}_2^2 + \mathfrak{A}_3^2} \quad \text{и др.}$$

Система позволяет также проводить при необходимости автоматизированную тарировку

датчиков. В этом случае необходимо несколько раз установить табличные значения нагрузок или деформаций. Показания датчиков усредняются ЭВМ, определяется дисперсия, а затем проводится кусочно-линейная аппроксимация тарировочных функций.

Глава 11.8

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДЕМПФИРОВАНИЯ КОЛЕБАНИЙ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

11.8.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ДЕМПФИРОВАНИЯ КОЛЕБАНИЙ

Средство механической системы гасить (демпфировать) ее колебания называют демпфирующей способностью, демпфирующими или диссипативными свойствами. Демпфирование колебаний осуществляется за счет различных внутренних и внешних механизмов сопротивления, вызывающих потери энергии колебаний конструкций. К внутренним механизмам относят неупругое сопротивление материала основы и покрытия деформируемых элементов конструкций, а также трение в сочленениях элементов (конструкционное демпфирование), а к внешним - сопротивление внешней среды.

Решение различных задач о колебаниях требует достоверных сведений о характеристиках демпфирования, которые, в основном, могут быть получены только экспериментальными методами.

Характеристики демпфирования колебаний. Независимо от природы энергетических потерь за основную характеристику демпфирующих свойств механических систем при данной амплитуде a установившихся колебаний принято считать относительное рассеяние энергии ψ [39, 53, 56], иногда называемое коэффициентом поглощения, под которым принимают отношение необратимо рассеянной энергии $\Delta W(a)$ за цикл колебаний к амплитудному значению энергии $W(a)$ упругой деформации:

$$\psi(a) = \Delta W(a)/W(a). \quad (11.8.1)$$

Рассеянная за цикл колебаний энергия ΔW характеризуется площадью петли гистерезиса, образуемой в координатах: некоторая обобщенная сила - соответствующее перемещение или напряжение - относительная деформация при циклическом деформировании системы либо образца.

Под относительным рассеянием энергии при затухающих колебаниях, огибающая которых является монотонно убывающей функцией

ей времени $a = a(t)$, строго соответствующим определению (11.8.1), понимают отношение приращения $\frac{dW}{dt}T$ энергии деформации W системы, определяемого за данный период T колебаний при постоянной интенсивности уменьшения энергии dW/dt для рассматриваемой амплитуды a колебаний, к амплитудному значению энергии деформирования системы $W \equiv W(a) \equiv W(t) = 0,5ca^2(t)$ (где c - жесткость системы);

$$\psi(a) = -\frac{dW}{dt} \frac{T}{W} = -\frac{2T}{a} \frac{da}{dt} = -2T \frac{d \ln a}{dt}. \quad (11.8.2)$$

Усредненное за период колебаний значение относительного рассеяния энергии, приписываемое средней амплитуде цикла [71],

$$a_{cp} = \frac{1}{2}(a_i + a_{i+1});$$

$$\bar{\psi}(a_{cp}) = -\int_{W(t)}^{W(t+T)} \frac{dW}{W} = -\int_{a_i}^{a_{i+1}} 2 \frac{da}{a} = 2 \ln \frac{a_i}{a_{i+1}}, \quad (11.8.3)$$

где a_i и a_{i+1} - две последующие амплитуды, соответственно в начале и конце i -го периода (цикла) колебаний.

Для значений $\psi < 0,5$ с достаточной степенью точности можно принять $\bar{\psi} = \psi$ при $a = a_{cp}$.

Степень затухания "почти гармонических" свободных колебаний

$$\delta = \ln \frac{a_i}{a_{i+1}} \quad (11.8.4)$$

является наиболее распространенной характеристикой демпфирования и называется логарифмическим декрементом колебаний.

Добротность системы Q представляет собой отношение максимального значения резонансной амплитуды колебаний системы к значению ее деформации от статического действия амплитуды вынуждающей силы. Величина, обратная ей, Q^{-1} называется коэффициентом затухания, а также коэффициентом внутреннего трения или просто внутренним трением [57].

В качестве характеристики демпфирующих свойств материала иногда используют тангенс угла сдвига фаз γ_0 между напряжени-

ем и деформацией в упругом элементе [57], называемый также тангенсом угла потерь. Встречаются и другие характеристики демпфирования колебаний механических систем [63, 90]. Указанные характеристики связаны следующими соотношениями:

$$\psi = 2\pi Q^{-1} = 2\pi \operatorname{tg} \gamma_0 \approx \bar{\psi} = 2\delta. \quad (11.8.5)$$

Для определения характеристик демпфирующих свойств механических систем существует ряд методов.

Метод свободных затухающих колебаний. Метод, наиболее часто используемый из-за простоты эксперимента, предусматривает получение осциллограмм свободных затухающих колебаний механической системы, по темпу убывания амплитуды которых определяют относительное рассеяние энергии (11.8.2), (11.8.3) или логарифмический декремент колебаний (11.8.4). При этом в случае малого затухания определяют усредненные за N циклов значения характеристик демпфирования, например, логарифмического декремента

$$\delta(a_{cp}) = \frac{1}{N} \ln \frac{a_i}{a_{i+N}} \approx \frac{2(a_i - a_{i+N})}{N(a_i + a_{i+N})} \quad (11.8.6)$$

или

$$\delta(a_{cp}) = \frac{1}{N} \ln k \approx \frac{2(k-1)}{N(k+1)}, \quad (11.8.7)$$

отнесенные к средней амплитуде рассматриваемого интервала

$$a_{cp} = 0,5(a_i + a_{i+N}), \quad (11.8.8)$$

где a_i и a_{i+N} - соответственно амплитуда колебаний в начале и конце интервала, включающего N циклов;

$$k = a_i/a_{i+N}. \quad (11.8.9)$$

В случае обычно наблюдаемой зависимости характеристики демпфирования от амплитуды колебаний для обеспечения ее соответствия значению относительного рассеяния энергии (11.8.1), (11.8.2) при $a = a_{cp}$ интервалы затухающих колебаний следует выбирать с условием $k < 1,35$.

При построении огибающей затухающих колебаний $a(N)$ (рис. 11.8.1) значение логарифмического декремента, строго соответствующее $0,5\psi(a)$ (11.8.2), при любом уровне затухания и любой амплитудной зависимости декремента колебаний определяется по формуле

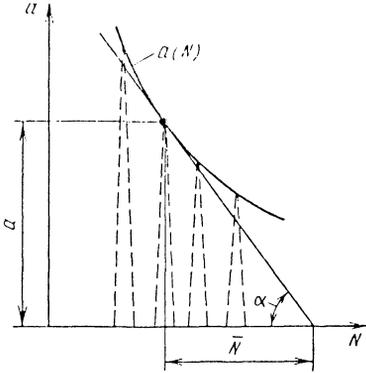


Рис. 11.8.1. Схема к определению декремента по огибающей затухающих колебаний

$$\delta(a) = -\frac{1}{a} \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{N\text{-bar}}, \quad (11.8.10)$$

где $N\text{-bar}$ - число циклов (как целое, так и любое дробное) на участке под касательной, проведенной к огибающей в точке с рассматриваемой амплитудой a .

Метод резонансной кривой. Использование метода связано с получением экспериментальной амплитудно-частотной характеристики - зависимостей амплитуды a перемещения (деформации) установившихся колебаний от частоты ω гармонического возбуждения при постоянной амплитуде вынуждающей силы q (рис. 11.8.2, а) или амплитуды q вынуждающей силы от частоты ω гармонического возбуждения при постоянной амплитуде перемещения - деформации (рис. 11.8.2, б). По ширине пика или впадины оценивают демпфирующие свойства системы [39, 56].

Характеристики демпфирования колебаний системы, соответствующие резонансной амплитуде $\bar{a}(\delta_0)$ или амплитуде $\alpha\bar{a}(\delta_\alpha)$ (см. рис. 11.8.2), определяются по формулам:

$$\begin{aligned} \delta_0 &= \delta(\bar{a}) = \pi\bar{k}_\alpha \Delta\omega_\alpha / \bar{p}; \\ \delta_\alpha &= \alpha(\alpha\bar{a}) = \pi k_\alpha \Delta\omega_\alpha / \bar{p}, \end{aligned} \quad (11.8.11)$$

где $\Delta\omega_\alpha$ - ширина резонансного пика на уровне α его высоты; \bar{p} - резонансная частота.

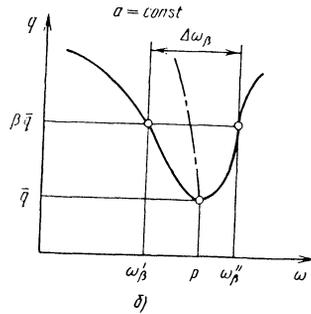
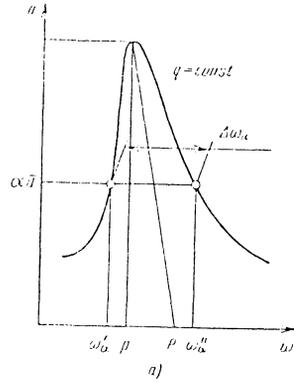


Рис. 11.8.2. Амплитудно-частотная характеристика колебательной системы:

а - резонансный пик; б - резонансная впадина (ω - частота вынуждающей силы, p - собственная частота системы)

Для линейных систем, т.е. систем с так называемым вязким сопротивлением $\bar{k}_\alpha = k_\alpha = \alpha / \sqrt{1 - \alpha^2}$, и для обычно используемых на практике уровней резонансного пика $\alpha = 0,5$ и $\alpha = 0,707$ ($\sqrt{2}/2$) имеем следующие выражения для логарифмического декремента колебаний, соответствующего резонансной частоте колебаний системы:

$$\delta_{0,5} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \frac{\Delta\omega_{0,5}}{\bar{p}}; \quad \delta_{0,707} = \pi \Delta\omega_{0,707} / \bar{p}. \quad (11.8.12)$$

При этом значение не зависящего в этом случае от амплитуды колебаний относительно рассеяния энергии при нерезонансной частоте определяется значением логарифмического декремента (11.8.12) и отношением частоты ω вынужденных колебаний к резонансной \bar{p} :

$$\psi(\omega) = 2\delta\omega/\bar{p}. \quad (11.8.13)$$

Для реальных систем в случае степенной зависимости декремента колебаний от амплитуды $\delta = C_0 a^n$ (где C_0 - некоторая постоянная для рассматриваемого диапазона амплитуды $\alpha\bar{a} \dots \bar{a}$)

$$\begin{aligned} \bar{k}_\alpha &= \alpha/\sqrt{1-\alpha^{2(n+1)}}; \\ k_\alpha &= \alpha^{n+1}/\sqrt{1-\alpha^{2(n+1)}}. \end{aligned} \quad (11.8.14)$$

Параметр n может быть определен из соотношения ширины резонансного пика, измеренного на разных уровнях его высоты $\alpha = 0,5$ и $\alpha = 0,707$:

$$n = -\ln\left[\left(\frac{\Delta\omega_{0,5}}{\Delta\omega_{0,707}}\right)^2 - 2\right]/\ln 2. \quad (11.8.15)$$

В случае зависимости декремента колебаний от амплитуды коэффициенты \bar{k}_α и k_α могут быть определены через угол γ_a сдвига фазы между внешним гармоническим возбуждением и вызываемым им перемещением (деформацией) при данной амплитуде a :

$$\bar{k}_\alpha = \alpha/\cos \gamma_a; \quad k_\alpha = \operatorname{tg} \gamma_a. \quad (11.8.16)$$

Кроме того, при отношении α_q амплитуды вынуждающей силы q , обуславливающей резонансную амплитуду колебаний \bar{a} , к амплитуде вынуждающей силы q^* , определяющей амплитуду \bar{a}^* , на уровне которой измеряется ширина исходного резонансного пика,

$$k_\alpha = 1/\sqrt{\alpha_q^2 - 1}. \quad (11.8.17)$$

Достоверное значение декремента колебаний, соответствующее заданной амплитуде a колебаний, безотносительно к характеру его амплитудной зависимости может быть также определено по ширине $\Delta\omega_p$ резонансной впадины на уровне

$$\beta\bar{q} \quad (\beta > 1), \quad (11.8.18)$$

где \bar{q} - амплитуда вынуждающей силы при резонансе [150] (см. рис. 11.8.2, б);

$$\delta = \pi k_\beta \frac{\Delta\omega_\beta}{\bar{p}}, \quad (11.8.19)$$

где

$$k_\beta = 1/\sqrt{\beta^2 - 1}. \quad (11.8.20)$$

Метод нарастающих резонансных колебаний. Метод предусматривает регистрацию процесса нарастания резонансных колебаний при постоянной амплитуде вынуждающей силы [39, 56]. По темпу возрастания амплитуды колебаний системы, характеризуемого инкрементом колебаний $\psi(a)$, определяют при известном декремента δ_0 , соответствующем максимальной резонансной амплитуде \bar{a} , амплитудную зависимость декремента колебаний для $a < \bar{a}$:

$$\delta(a) \approx \delta_0 \frac{\bar{a}}{a} - \psi(a). \quad (11.8.21)$$

Инкремент колебаний

$$\psi(a) = \frac{T}{a} \frac{da}{dt} = \frac{2\pi}{\bar{p}a} \frac{da}{dt}, \quad (11.8.22)$$

где T - период колебаний; \bar{p} - резонансная частота колебаний; t - время.

Фазовый метод. Для колебательных систем с частотно-независимым сопротивлением значение $\delta(a)$ декремента определяется через угол γ сдвига фаз между гармоническим возбуждением и вызываемым им перемещением (деформацией) механической системы при данной частоте ω возбуждения по формуле [150]

$$\delta(a) = \pi \left(1 - \frac{\omega^2}{\bar{p}a^2}\right) \operatorname{tg} \gamma, \quad (11.8.23)$$

где $\bar{p}a$ - резонансная частота, соответствующая амплитуде колебаний a .

Для линейной системы с вязким сопротивлением

$$\delta = \pi \left(1 - \frac{\omega^2}{p^2}\right) \frac{p}{\omega} \operatorname{tg} \gamma, \quad (11.8.24)$$

где p - резонансная частота, равная собственной частоте системы.

Относительное рассеяние энергии ψ при нерезонансной частоте определяется выражением (11.8.13).

Метод максимальной резонансной амплитуды. Логарифмический декремент колебаний, соответствующий амплитуде \bar{a} , определяется через отношение $a_{ст}/\bar{a}$, где $a_{ст}$ - амплитуда от статического действия силы:

$$\delta(\bar{a}) = \pi a_{ст}/\bar{a}. \quad (11.8.25)$$

Поскольку статическое деформирование системы по форме ее колебаний воспроизвести трудно, величину $a_{ст}$ находят приближенно как амплитуду вынужденных колебаний системы с частотой, достаточно малой по сравнению с резонансной \bar{p} , или с частотой, равной примерно $\sqrt{2}\bar{p}$. Как видно, $\delta(\bar{a}) = \pi Q^{-1}$.

При кинематическом возбуждении колебаний системы с заданной амплитудой a_0 логарифмический декремент колебаний

$$\delta(\bar{a}) = \pi \lambda a_0/\bar{a}, \quad (11.8.26)$$

где λ - коэффициент, зависящий от конфигурации упругой системы, формы колебаний и выбранной точки измерения амплитуды \bar{a} ; для системы с одной степенью свободы $\lambda = 1$.

Энергетический метод. Основу энергетического метода составляет непосредственное измерение затрат электрической или механической мощности N_0 возбудителя на поддержание установившихся колебаний механической системы. Относительное рассеяние энергии

$$\psi = N_0/(fW), \quad (11.8.27)$$

где f - частота установившихся колебаний системы; W - потенциальная энергия деформации механической системы, соответствующая амплитуде установившихся колебаний.

Термический метод. Наиболее известен калориметрический способ, основанный на измерении температуры воды, охлаждающей циклически деформируемый образец из исследуемого материала. Относительное рассеяние энергии в материале образца определяется для установившихся колебаний по формуле

$$\psi = m\Delta T/(fW), \quad (11.8.28)$$

где m - масса воды, находящейся в калориметре или протекающей через него за некоторое время t ; f - частота колебаний образца; ΔT - разность температур воды в начале и конце эксперимента, а в случае протекающей воды - на входе и выходе калориметра; W - потенциальная энергия деформации рабочей части образца.

Метод петли гистерезиса. Существует два основных метода петли гистерезиса: статической и динамической. Метод статической петли гистерезиса предусматривает непосредственное получение петли в координатах: внешняя сила P - перемещение s или напряжение σ - относительная деформация ϵ . В первом случае площадь петли ΔW гистерезиса характеризует в некотором масштабе необратимо рассеянную энергию в системе за цикл нагружения с амплитудой перемещения s_0 , а во втором - рассеянную энергию в единице объема деформируемого материала образца при амплитуде относительной деформации ϵ_0 . Относительное рассеяние ψ , характеризующие свойства исследуемой системы, определяется по формуле (11.8.1).

Чаще всего метод используется для исследования конструкционного демпфирования, а также материалов, обладающих высокими гистерезисными потерями, например, пластмассы, железобетона.

Метод динамической петли гистерезиса предусматривает одновременную регистрацию сигналов, пропорциональных напряжению (нагрузке P) и деформации ϵ (перемещение u), в процессе циклического нагружения механической системы (образца) и получение на этой основе экспериментальной петли гистерезиса в координатах $\sigma - \epsilon$ или $P - u$, площадь которой в определенном масштабе численно равна рассеянной в единице объема материала (в системе) за цикл нагружения энергии [79].

При обычно регистрируемых в процессе колебаний деформируемых тел гармонических сигналах, пропорциональных деформации и напряжению, петля гистерезиса имеет форму эллипса. В этом случае площадь петли, т.е. необратимо рассеянная энергия ΔW , может быть определена по измеряемой ширине $\Delta \epsilon$

петли гистерезиса, по деформации ϵ в момент времени, когда напряжение принимает нулевое значение, или по сдвигу фаз γ_0 между сигналами, соответствующими напряжению и деформации при данном их уровне, по формуле

$$\Delta W = 0,5\pi\sigma_0\Delta\epsilon = \pi\sigma_0\epsilon = \pi\sigma_0\epsilon_0 \sin \gamma_0. \quad (11.8.29)$$

Относительное рассеяние энергии как отношение площади петли гистерезиса ΔW к амплитуде упругой энергии W

$$\psi = \pi \Delta \varepsilon / \varepsilon_0 = 2\pi \varepsilon^* / \varepsilon_0 = 2\pi \sin \gamma_0. \quad (11.8.30)$$

В заключение приведем соотношения между рассмотренными основными формулами (11.8.2), (11.8.7), (11.8.10), (11.8.11), (11.8.19), (11.8.23), (11.8.25), (11.8.26), (11.8.30) определения характеристики демпфирования:

$$\begin{aligned} \psi &= -2T \frac{d \ln a}{dt} = \frac{2}{N} = 2\pi k_\alpha \frac{\Delta \omega_\alpha}{\bar{p}} = \\ &= 2\pi k_\beta \frac{\Delta \omega_\beta}{\bar{p}} = 2\pi \left(1 - \frac{\omega^2}{\bar{p}_a^2} \right) \operatorname{tg} \gamma = \\ &= 2\pi \frac{a_{ст}}{a} = 2\pi \lambda \frac{a_0}{a} = 2\pi \sin \gamma_0 \approx \\ &\approx \frac{2}{N} \ln k \approx \frac{2(k-1)}{N(k+1)}. \end{aligned} \quad (11.8.31)$$

11.8.2. СХЕМЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ УСТАНОВОК

Поскольку в любой экспериментальной установке возможны различные поглощения энергии колебаний, для получения достоверных данных о демпфирующей способности материала исследуемого образца необходимо исключить или свести к минимуму все другие потери энергии в системе.

Принципиальные схемы всех экспериментальных установок включают колебательную систему с образцом из исследуемого материала и системы возбуждения и регистрации колебаний, а при необходимости изучения

влияния температуры - нагревательную систему или систему охлаждения [39, 53, 56, 63, 78].

Колебательные системы установок. (рис. 11.8.3). Оптимальная колебательная система должна обеспечивать однородное, или близкое к нему, напряженное состояние материала рабочей части образца при циклической деформации. В наибольшей степени этому отвечает система (рис. 11.8.3, а), содержащая тонкостенный трубчатый образец 3, жестко закрепленный одним концом в подвешенной на струнах 1 или установленной на пружинах 5 массивной плите - станине 2; а другим концом - с массой 4. Система позволяет реализовать однородное напряженное состояние при продольных и крутильных колебаниях образца.

Для изучения влияния на демпфирующие свойства материала образца 2 (рис. 11.8.3, б) наложения другой частоты к диску 3 крепится упругий элемент - круглый стержень 4, изготовленный из материала с низким уровнем диссипативных свойств, и несущий диск 5 на свободном конце. Соотношение обеих частот определяется соотношением частот первой и второй форм собственных колебаний консоли закрепленной в станине 1 системы.

С целью устранения возможных поперечных колебаний исследуемого при циклическом кручении образца 4 (рис. 11.8.3, в) иногда используют опорный стержень 6 из низкодемпфирующего материала, который одним концом, как и исследуемый образец 4, прикреплен к траверсе 5, а другим - к массивной подвешенной на струнах 1 станине - раме 3, в которой находится и захват 2 (верхний) для крепления образца 4. Изменением углового положения захвата обеспечивается статическое закручивание образца. Продольное перемещение захвата позволяет испытывать образец при положений статического растяжения.

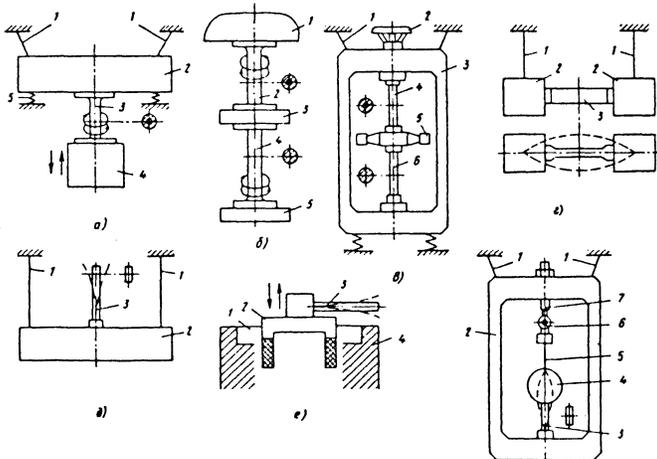


Рис. 11.8.3. Схемы колебательных систем экспериментальных установок

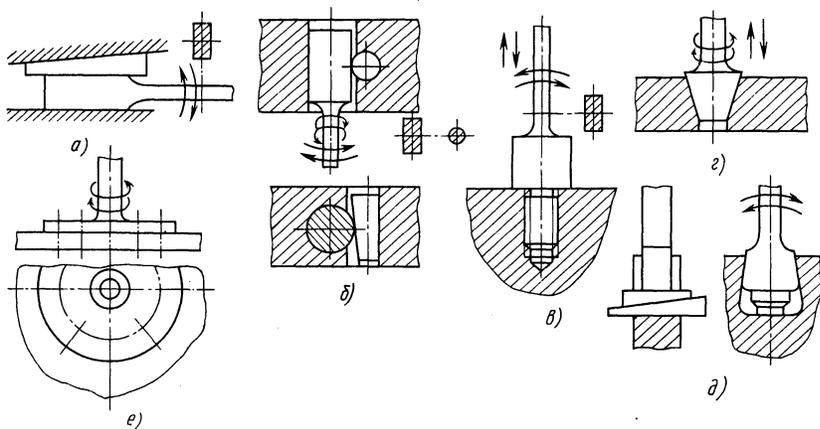


Рис. 11.8.4. Головки образцов и их крепление при различных видах колебаний рабочей части образца

Для сравнительной оценки демпфирующих свойств материалов при массовых испытаниях с успехом применяют колебательные системы, совершающие изгибные колебания. В наиболее оптимальной системе призматический образец 3 (рис. 11.8.3, *г*) с одинаковыми грузами 2 на концах подвешивается на тонких струнах 1 в узлах основной изгибной формы колебаний.

Сравнительная оценка демпфирующих свойств материалов может быть также произведена при изгибных колебаниях консольного образца 3 (рис. 11.8.3, *д*), жестко закрепленного в подвешенной на струнах 1 массивной плите 2 или в установленной на плоских пружинах 1 (рис. 11.8.3, *е*) в виде широких полос или диафрагм платформе 2 электродинамического возбудителя 4.

Для изучения влияния статического растяжения на демпфирующие свойства материалов при изгибных колебаниях весьма эффективно использование колебательной системы, состоящей из закрепленного в подвешенной на струнах 1 массивной станине-раме 2 (рис. 11.8.3, *ж*) консольного образца 3 с грузом 4 на конце. Растягивающая сила в образце создается перемещением винта-захвата 7 через динамометр 6 и тонкую ленту-тягу 5, которая крепится к системе в узле ее второй формы поперечных колебаний.

Перекачка энергии между колеблющимися образцом и станиной устраняется отстройкой рабочей частоты колебаний образца от собственных частот станины. Для сведения к минимуму энергетических потерь в нерабочих участках образцов и конструкционного гистерезиса в местах их крепления используют образцы с утолщенными головками, которые

крепят с помощью клиновых (рис. 11.8.4, *а*, *б*, *д*) или других (рис. 11.8.4, *в*, *г*, *е*) соединений при контролируемой силе затяжки.

Системы возбуждения колебаний. В установках используется резонансный принцип возбуждения колебаний, в основном, при помощи электромагнитных преобразователей без поляризующего магнитного поля.

Электромагнитная система возбуждения для диапазона частот от десятков до сотен герц (рис. 11.8.5) содержит образец 1 из ферромагнитного материала (или из немагнитного материала с укрепленной на нем ферромагнитной массой или пластинкой), электромагниты 2 [один (*а*) или несколько синфазно действующих (*б*) для возбуждения изгибных или крутильных колебаний], усилитель мощности 3, реле 4, автоматически управляемое контактами светолучевого осциллографа 5, задающий генератор электрических сигналов 6 и электронно-цифровой частотомер 7.

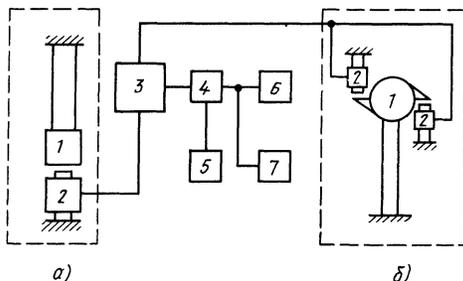
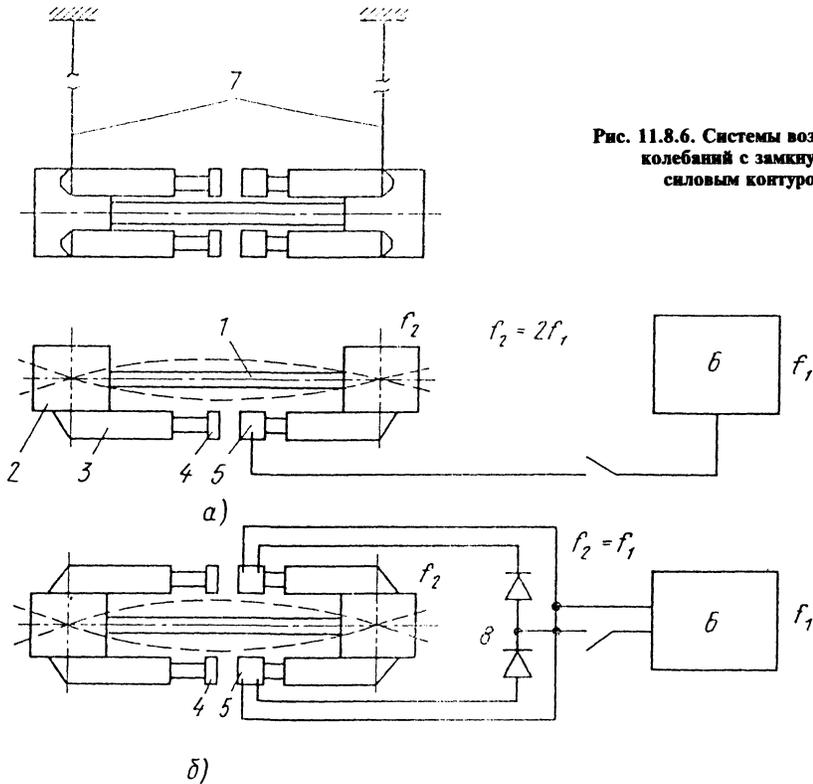


Рис. 11.8.5. Схема электромагнитной системы возбуждения колебаний

Для колебательных систем, показанных на рис. 11.8.3, *а, з*, электромагниты подводятся к нижним торцам соответственно массы 4 и грузов 2. Сердечники электромагнитов и нижние торцы грузов имеют выступы одинаковой формы, продольные оси которых направлены

по радиусам от центра масс. Благодаря этому обеспечивается возбуждением одним (см. рис. 11.8.3, *а*) электромагнитом раздельно или одновременно продольных и крутильных колебаний образца.



Наиболее эффективное использование мощности электромагнитов и практически полное исключение паразитных горизонтальных перемещений подвешенной колебательной системы (см. рис. 11.8.3, *з*) достигается созданием силовой цепи возбуждения, замкнутой внутри самой механической системы. Для этого на жестких кронштейнах 3 (рис. 11.8.6), укрепленных на грузах 2, размещаются малогабаритные электромагниты 5 и пластинки 4 из ферромагнитного материала. Электроснабжение осуществляется непосредственно от стандартного генератора 6 сигналов в случае расположения электромагнитов по одну сторону подвешенного на струнах 7 образца 1 (рис. 11.8.6, *а*) и через выпрямители 8 при расположении электромагнитов по обе стороны образца (рис. 11.8.6, *б*). В первом случае,

как и для схем, представленных на рис. 11.8.5, колебания образца возбуждаются с частотой вдвое большей частоты электрического тока электромагнита, во втором - с частотой, равной частоте тока.

Системы регистрации колебаний. Система регистрации не должна иметь механической связи с исследуемой системой или должна обеспечивать минимальный уровень дополнительных потерь энергии колебаний. Этим требованиям отвечает простейшая оптическая система регистрации колебаний, используемая для свободно подвешенного на струнах образца с грузами (см. рис. 11.8.3, *з*). На одном из грузов в точке подвеса крепится зеркальце, поворачивающееся при колебаниях системы. На зеркальце направляется сфокусированный луч света, который, отражаясь попадает на

цель записывающего устройства, где фиксируется на движущейся с заданной скоростью осциллографной бумаге. При отключении возбуждения с заданной амплитуды фиксируется виброграмма затухающих колебаний, по темпу убывания которых определяется декремент колебаний (11.8.10).

Выполнение колебательной системы, обеспечивающее совпадение узлов колебаний с центром тяжести грузов, и использование системы возбуждения с замкнутым силовым контуром позволяют применять высокоточную аппаратуру для измерения параметров колебаний исследуемой системы. Для этого в нижней части одного из грузов устанавливаются решетчатый модулятор фотооптического датчика механических колебаний, предназначенного для определения угла поворота груза. Вращательные колебания груза благодаря изменению интенсивности проходящего через модулятор светового луча преобразуются фотоприемниками датчика в электрические сигналы, которые усиливаются и, в своей очередь, преобразуются в числовые значения амплитуды колебаний. Индикация последних проводится в цифровом виде на табло регистратора и на электронном осциллографе, а регистрация - на цифроречатающем устройстве.

Для регистрации продольных и крутильных колебаний образца, укрепленного одним концом в массивной плите и с массой на свободном конце (см. рис. 11.8.3, а), наиболее рационально применение емкостного датчика, образуемого верхним торцом груза и фигурной пластинкой 2 (рис. 11.8.7), которая прикреплена либо непосредственно в плите, либо в переходнике, если в нем закреплена верхняя головка образца 1, на изоляторах (без электрического контакта с плитой). Измерительная система включает датчик, усилитель, ламповый

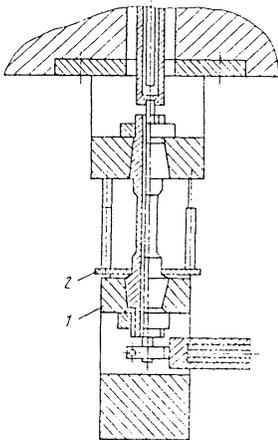


Рис. 11.8.7. Узел установки Д-8 с емкостным датчиком

вольтметр, электронный и светолучевой осциллографы и частотомер. Предварительно микроскопом фиксируют амплитуды вертикального и углового перемещений какой-либо подвешиваемой точки груза.

При отсутствии простых зависимостей между перемещениями колебательной системы и напряжениями (деформациями) в рабочей части образца, например, при изгибных колебаниях консольного образца с грузом на конце и приложенной растягивающей силой (рис. 11.8.3, ж) целесообразно применять тензометрические системы регистрации с использованием датчиков омического сопротивления различного типа (тензорезисторов). Результаты исследований показали, что при толщине образца, превышающей 2 мм, потерями энергии, обусловленными наклеивкой тензорезистора, практически можно пренебречь.

Системы нагрева и охлаждения. Для нагрева исследуемых образцов до температуры 673...973 К, как правило, используют съемные секционные электропечи сопротивления, обеспечивающие равномерный нагрев рабочей части образцов. Температуру образца измеряют с помощью термомпар, которые отводятся от него при возбуждении колебаний или крепятся к контрольному образцу-свидетелю, расположенному в печи рядом с исследуемым. В систему автоматического регулирования температуры образца входят термоэлектрические преобразователи (термопары) и высокоточные терморегуляторы, состоящие из измерительного блока, регулирующего блока тиристорного преобразователя. Температура фиксируется с помощью самобишущего потенциометра.

Возможность выполнения колебательных систем (см. рис. 11.8.3, а, з) достаточно компактными позволяет размещать их в водоохлаждаемой вакуумной камере и, тем самым, обеспечить проведение исследований при высокой температуре (1179...1973 К).

Для проведения исследований при низкой (до 123 К) температуре колебательную систему, например представленную на рис. 11.8.3, з, помещают в теплоизолированную камеру с парами азота, поступающими по трубопроводу из сосуда Дьюара с жидким азотом. Электромагнитные системы возбуждения с помощью стоек вынесены за пределы камеры.

Такой же уровень температур может быть получен и для вибрационной системы, представленной на рис. 11.8.3, ж, при размещении ее в вакуумной камере и подаче паров азота во внутрь охладителя, введенного с заданным зазором во внутреннюю полость образца, подобно нагревателю (см. рис. 11.8.7).

Автоматизация определения характеристик демпфирования. Автоматизированный счет циклов в заданном интервале амплитуд колебаний может быть обеспечен при использова-

нии простого амплитудного селектора импульсов АС-2, состоящего из двух триггеров Шмитта 1, 2 (рис. 11.8.8), один из которых настроен на срабатывание от импульсов одной полярности с требуемой максимальной амплитудой, а другой - на срабатывание от импульсов противоположной полярности с требуемой минимальной амплитудой, вместе со счетчиком импульсов 3, например Ф-588. Число N циклов преобразовано в электрический сигнал свободных колебаний исследуемой системы в заданном интервале изменения амплитуды $a_i \rightarrow a_{i+N}$ без записи виброграммы. Это позволяет непосредственно в ходе эксперимента вычислить соответствующее средней амплитуде a_{cp} (11.8.8) рассматриваемого интервала амплитуд значение декремента колебаний $\delta(a_{cp})$. При малом затухании исследуемых колебаний используют аппаратуру, осуществляющую измерение амплитуд свободных затухающих колебаний через заданное число периодов колебаний.

При оптическом способе регистрации колебаний применяют оптико-электрическую систему автоматического счета циклов в заданном интервале амплитуд колебаний. Луч света 2 (рис. 11.8.9), отраженный от зеркала 1, помещенного в узле колебаний, попадает на линейку 3, на которой расположены два светочувствительных элемента 4, например фото-

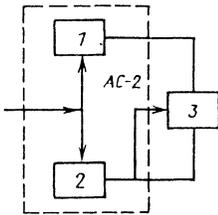


Рис. 11.8.8. Структурная схема амплитудного селектора импульса АС-2

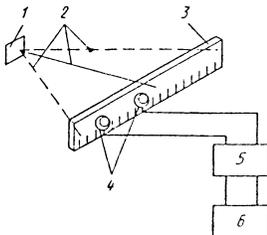


Рис. 11.8.9. Схема оптико-электрической системы автоматического счета циклов затухающих колебаний

диоды ФД-1. Расстояние между фотодиодами определяется в соответствии с заданным значением отношения амплитуд k . Генерируемые фотодиодами электрические сигналы подаются на счетчик импульсов 6, например типа Ф-588, через усилитель 5.

Автоматизация определения амплитудной зависимости декремента колебаний достигается дополнением автоматизированного процесса счета циклов, преобразованных в электрический сигнал свободных колебаний между несколькими дискретными уровнями амплитуды, вычислением соответствующих значений декремента колебаний на базе ЭВМ и автономного устройства, подключенного к выходу усилителя датчика колебаний исследуемой системы. В случае оптического способа регистрации колебаний электрический сигнал от фотоприемника, преобразуемый в значение амплитуды колебаний, регистрируется на перфораторе типа ПЛ-150М. Применение последнего позволяет дальнейшую обработку выходных данных проводить на ЭВМ с получением окончательных значений декремента колебаний в зависимости от средних амплитуд в заданных интервалах.

Автоматизация регистрации резонансных кривых, например резонансного пика амплитудно-частотной зависимости, заключается в следующем. Сигнал от датчика 2 колебаний исследуемой системы 1 (рис. 11.8.10) после усилителя 3 поступает на дополнительный усилитель 4 и электронный вольтметр-выпрямитель 5, где он дополнительно усиливается и преобразуется в постоянное напряжение, которое подается на вход электронного потенциометра 6 типа ЭПП-09, двигатель которого перемещает каретку с пером на величину, пропорциональную поступившему сигналу. Для синхронизации перемещения диаграммной ленты электронного потенциометра с изменением частоты возбуждения колебаний образца привод оси потенциометра расстойки генератора звуковых частот 9 типа ГЗ-34, используемого в электромагнитной системе возбуждения коле-

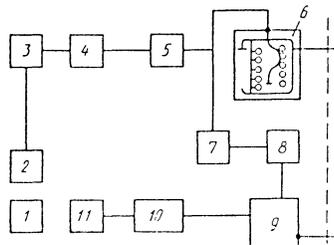


Рис. 11.8.10. Схема системы записи резонансного пика

баний, включающей также электромагнит 11 и усилитель мощности 10, осуществляется от вала ведущего барабана диаграммной ленты электронного потенциометра 6. Частота колебаний регистрируется с помощью электронно-счетного частотомера 8 типа Ф551 с цифрорпечатающим устройством. Запуск цифрорпечатающего устройства осуществляется от генератора импульсов 7, сигнал которого одновременно подается на вход электронного потенциометра 6.

Методика оценки действительной демпфирующей способности исследуемого образца и его материала. Для достаточно тонкостенных трубчатых образцов, материал рабочей части которых находится в условиях однородного напряженного состояния при продольных и крутильных колебаниях, определяемые значения δ_0 декремента колебаний образца являются истинной относительной характеристикой δ рассеяния энергии в единице объема материала при данной амплитуде соответственно продольной деформации ε и относительного сдвига γ , т.е. $\delta_0 \equiv \delta$. Определяемые в эксперименте значения декремента δ_0 изгибных колебаний образца, материал которого находится в условиях неоднородного напряженного состояния (см. рис. 11.8.3, z-e), и обычно приписываемые амплитуде максимальной деформации в образце ε_0 , являются вполне достаточной характеристикой не только для сравнительной оценки демпфирующих свойств материалов, но и при условии однородности материала образца для определения истинных характеристик δ рассеяния энергии в материале. Так, при самой общей амплитудной зависимости логарифмического декремента колебаний образца $\delta_0(\varepsilon_0) = \sum \bar{a}_m \varepsilon_0^m$, получаемой из эксперимента, амплитудная зависимость истинного логарифмического декремента материала

$$\delta(\varepsilon) = \sum a_m \varepsilon^m,$$

где

$$a_m = \frac{m+3}{3} \frac{\int_0^l \varphi^2(x) dx}{\int_0^l \varphi^{m+2}(x) dx},$$

где $\varphi(x)$ - функция распределения напряжений по длине l рабочей части образца, определяемая по данным тензометрирования.

Для случая чистого изгиба $\varphi(x) = 1$;

$a_m = (m+3)\bar{a}_m/3$. Более сложная картина при исследовании крутильных колебаний образца с дополнительным упругим элементом (см. рис. 11.8.3, б) и изгибных колебаний растянутого образца (см. рис. 11.8.4) [115, 166].

Особенности исследования демпфирующих свойств материала по методу динамической петли гистерезиса. Определение характеристик демпфирующих свойств материала по методу динамической петли гистерезиса с использованием зависимостей (11.8.29) и (11.8.30) может быть осуществлено на какой-либо установке (машине) для испытаний на усталость при циклическом растяжении-сжатии и при наличии в силовой цепи нагружения образца упругого динамометра.

Методики основаны на одновременной регистрации сигналов нагрузки, т.е. параметра, пропорционального и синфазного напряжениям в образце, и деформации образца. В качестве датчиков напряжений обычно используют тензорезисторы. При этом два тензорезистора 3 (рис. 11.8.11) наклеивают на упругий динамометр 4, а один тензорезистор 2 - на образец 1 или на упругий элемент, деформирующийся пропорционально деформации образца.

Сигнал от одного из тензорезисторов на динамометре через один из каналов тензометрического усилителя 6 и фазовращатель 7 поступает на вертикальную развертку электронного осциллографа 9 и вызывает отклонение луча на экране по вертикали, которое пропорционально усилию (напряжению), а сигнал от тензорезистора, наклеенного на образец, через другой канал тензометрического усилителя 6 с источником электроснабжения 10 и фазовращатель 8 поступает на горизонтальную развертку того же осциллографа 9 и вызывает отклонение луча на экране по горизонтали, которое пропорционально деформации образца.

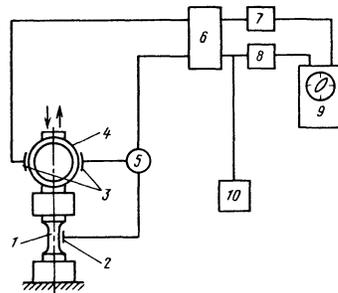


Рис. 11.8.11. Схема регистрации динамической петли гистерезиса

В процессе циклического нагружения образца в результате сдвига фаз между указанными сигналами на экране осциллографа образуется петля гистерезиса, площадь которой пропорциональна рассеянной энергии в образце за цикл деформирования. Для исключения аппаратного сдвига фаз между поступающими на каналы осциллографа электрическими сигналами перед регистрацией петли гистерезиса на оба канала осциллографа с помощью переключателя 5 подаются сигналы от двух тензорезисторов 3, наклеенных на динамометр. Возможное образование петли, обусловленное в этом случае сдвигом фаз в тензометрической аппаратуре, устраняется фазовращателями 7 и 8 до получения на экране одной линии. Затем с помощью того же переключателя 5 на вход горизонтального канала осциллографа подается сигнал от тензорезистора на образце.

11.8.3. ФАКТОРЫ, ВЛИЯЮЩИЕ НА ДЕМПФИРУЮЩИЕ СВОЙСТВА МАТЕРИАЛОВ

Демпфирующая способность известных конструкционных материалов различается весьма существенно - на три порядка. Ниже приведены ориентировочные максимальные значения логарифмического декремента δ колебаний для различных классов материалов в условиях комнатной температуры [1, 39, 49].

Металлические материалы:

магниево-алюминиевые сплавы (литые)	0,13...0,3
марганцево-медные сплавы	0,10...0,25
медно-алюминиевые сплавы ¹	0,04...0,1
никель-титановые сплавы	0,10...0,15
кобальто-никелевые сплавы	0,06...0,12
чугун с пластинчатым графитом	0,10...0,15
чугун с шаровидным графитом	0,02...0,05
хромистая сталь	0,01...0,04
углеродистая сталь	0,002...0,01
алюминиевые сплавы	0,001...0,01
латунь и бронза	0,001...0,003
титановые сплавы ²	0,005...0,0015

Неметаллические материалы:

углепластики	0,05...0,37
армированные базальтопластики	0,03...0,18
стеклопластики	0,005...0,13

текстолит	0,04...0,12
стеклотекстолит	0,02...0,10
эпоксидные смолы с наполнителями	0,06...0,18
пенопласт	0,06...0,24
винилпласт	0,03...0,13
фторопласт	0,17...0,45
полипропилен	0,36...0,40
полистирол	0,02...0,05
полиэтилен высокого и низкого давления	0,26...0,39
капрон	0,25...0,45
оргстекло	0,14...0,28

¹ Сплавы с обратимым мартенситом в структуре.
² Для сплавов с обратимым мартенситом в структуре возможно повышение демпфирующей способности при комнатной температуре на порядок выше.

Результаты большого числа исследований [39, 53, 56, 57, 63, 68, 90] свидетельствуют, что на демпфирующие свойства материалов оказывает влияние целый ряд факторов. Ниже рассмотрены наиболее существенные из них.

Амплитуда циклических напряжений (деформаций). Экспериментально получаемые зависимости характеристик демпфирования от амплитуды отличаются чрезвычайным разнообразием как по уровню, так и по форме. Причем они, как правило, не остаются посто-

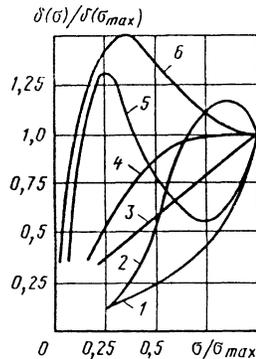


Рис. 11.8.12. Зависимость логарифмического декремента колебаний образцов из различных материалов от амплитуды напряжения:
 1 - 12Х13 (закалка с 1323 К); 2 - медно-алюминиевый сплав (10,64 % Al; 3, 72 % Zn, закалка с 973 К); 3 - ВТ18; 4 - 13Х11Н2В2МФ (закалка с 1323 К, отпуск при 953 К); 5 - 12Х13 (закалка с 1323 К, отпуск при 953 К); 6 - марганцево-медный сплав (55 % Mn, 5,5 % Zn, закалка с 1093 К при 673 К)

янными при изменении других факторов (температуры, режимов термообработки, внешнего магнитного поля, содержания легирующих элементов, статического напряжения и др.).

На рис. 11.8.12 в относительных координатах приведены зависимости логарифмического декремента $(\delta(\sigma)/\delta(\sigma_{\max}))$ изгибных колебаний от амплитуды максимального циклического напряжения σ/σ_{\max} для образцов из некоторых металлических материалов при нормальной температуре [39].

Температура. Общей закономерностью для большинства материалов, особенно для конструкционных металлических, является возрастание их демпфирующих свойств с повышением температуры. Причем интенсивность роста увеличивается по мере приближения к максимальной рабочей температуре материала (рис. 11.8.13, кривые 1-4) [39]. Исключение составляет область температур до 773 К для сталей мартенситного (кривые 5, 6) и мартенситно-ферритного (кривая 7) классов. Это обусловлено уменьшением уровня магнитомеханического демпфирования по мере приближения к температуре точки Кюри.

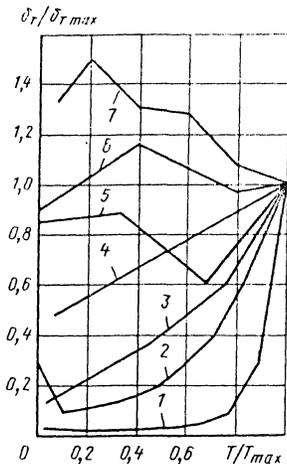


Рис. 11.8.13. Температурные зависимости декремента изгибных колебаний при нагреве образцов из ряда турболлопаточных материалов при амплитуде максимального напряжения $\sigma = 100$ МПа;

1 - ЖС6К ($T_{\max} = 1173$ К); 2 - ХН62ВМКЮА ($T_{\max} = 1123$ К); 3 - ВТ3-1 ($T_{\max} = 723$ К); 4 - АК4 ($T_{\max} = 523$ К); 5 - 13Х11Н2В2МФ (отпуск при 953 К, $T_{\max} = 873$ К); 6 - 13Х11Н2В2МФ (отпуск при 853 К, $T_{\max} = 773$ К); 7 - ДИ-5 ($T_{\max} = 523$ К)

Своеобразную форму имеют температурные зависимости декремента колебаний сплавов, для которых характерны мартенситные превращения [68].

Отмеченная выше закономерность возрастания демпфирующих свойств материалов при нагреве не наблюдается в том случае, когда под действием температуры в материале происходят структурные превращения. С понижением температуры обычно происходит снижение демпфирующих свойств, нарушение монотонности которого также обусловлено структурными изменениями в материале.

Неоднородность напряженного состояния. Неоднородность напряженного состояния материала оказывает существенное влияние на его демпфирующую способность, если характеристика демпфирующих свойств материала, например, его логарифмический декремент колебаний δ в условиях однородного напряженного состояния зависит от амплитуды циклических напряжений $\delta(\sigma)$. В этом случае значение логарифмического декремента δ_{Σ} колебаний при условии однородности свойств материала определяется интегрированием по его объему V элемента:

$$\delta_{\Sigma} = \int_V \delta(\sigma) \sigma^2 dV / \int_V \sigma^2 dV.$$

В случае монотонного возрастания значения δ с увеличением σ может быть выведено достаточно общее правило: декремент колебаний элемента конструкции тем выше, чем большая доля его материала подвергается циклическому напряжению высокого уровня.

Так, декремент продольных колебаний, определяемый рассеянием энергии при однородном напряженном состоянии, как правило, существенно выше декремента изгибных колебаний, обусловленного, в основном, рассеянием энергии в ограниченном объеме наиболее напряженных поверхностных слоев материала образца [56].

Исследования, проведенные на призматических образцах из сталей, алюминиевых сплавов и других материалов, показали, что с повышением номера формы колебаний декремент изгибных колебаний образцов заметно снижается [39, 56].

Вид напряженного состояния. Результаты экспериментов, проведенных с различными материалами при продольных и крутильных колебаниях трубчатых образцов, показали [56], что совпадение характеристик демпфирования при указанных видах циклического деформирования наблюдается при самом различном отношении касательных напряжений при кручении к нормальным при растяжении, которое

колеблется в весьма широких пределах 0,3...2,2, включая значение 0,577, характеризующее равенство амплитуд октаэдрических касательных напряжений.

Асимметрия цикла нагружения. Степень влияния асимметрии цикла, обусловленной статическим растяжением при изгибных колебаниях, существенно зависит от типа материала и его термической обработки (рис. 11.8.14, 11.8.15) [39, 68]. Так, для материалов с выраженным магнитомеханическим гистерезисом (рис. 11.8.14, кривые 1, 2) характерно уменьшение их демпфирующей способности с наложением статического растяжения. Для магнитного материала с подавленным магнитомеханическим гистерезисом (кривая 3), как и для немагнитного материала, при наложении статического растяжения возможно увеличение уровня рассеяния энергии.

На зависимость демпфирующей способности марганцево-медных сплавов [68] от статического растяжения существенное влияние оказывает как химический состав, так и режим их термической обработки (рис. 11.8.15, кривые 1, 2, 4, 6). Для медно-алюминиевых однофазных β -сплавов [39] наблюдается весьма существенное (в 1,3...2,9 раза) первоначальное увеличение их демпфирующей способности при статическом напряжении 10...30 МПа, а при дальнейшем повышении статического напряжения - уменьшение (рис. 11.8.15, кривые 5, 7).

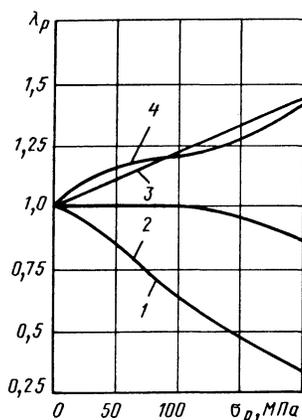


Рис. 11.8.14. Зависимости относительного изменения демпфирующей способности некоторых турболопаточных материалов при амплитуде максимального напряжения изгиба 150 МПа от статического напряжения растяжения: 1, 2, 3 - 13Х11Н2В2МФ (отпуск соответственно при 953, 853, 623 К); 4 - ВТ3-1

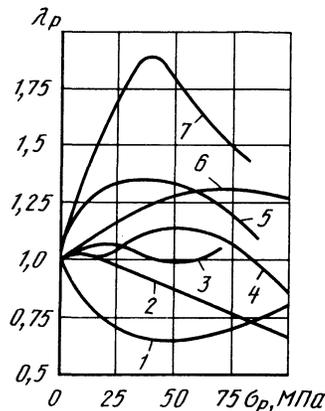


Рис. 11.8.15. Зависимости относительного изменения демпфирующей способности некоторых высокодемпфирующих сплавов при амплитуде максимального напряжения изгиба 100 (1, 4, 6), 90 (2), 80 (5, 7) и 30 (3) МПа от статического напряжения растяжения:

- 1 - марганцево-медный сплав (около 55 % Мп; 5,5 % Zn, закалка с 1093 К, отпуск при 673 К);
- 2 - марганцево-медный сплав (52,94 % Мп; 11,29 % Zn, закалка с 1073 К, отпуск при 673 К);
- 3 - МЦИ; 4 - марганцево-медный сплав (около 55 % Мп; 3 % Zn - закалка с 1093 К, отпуск при 673 К);
- 5 - медно-алюминиевый β -сплав (10,64 % Al; 3,72 % Zn, закалка с 973 К);
- 6 - марганцево-медный сплав (52,94 % Мп; 5,5 % Zn, отожженное состояние);
- 7 - медно-алюминиевый β -сплав (10,65 % Al; 7,64 Zn, закалка с 973 К)

Структура материала. Термическая обработка. В значительной степени демпфирующие свойства зависят от структуры материала, обусловленной, в частности, термообработкой [56]. Для металлических конструкционных материалов отжиг, как правило, повышает, а закалка понижает демпфирующую способность. При низкотемпературном отпуске после закалки наблюдается наименьший уровень рассеяния энергии. Повышение температуры отпуска обычно способствует увеличению демпфирующих свойств, однако для ферромагнитных сталей при весьма высокой температуре отпуска, обуславливающей структурные превращения, имеет место снижение их демпфирующей способности (рис. 11.8.16).

Исследования рассеяния энергии в углеродистых сталях показали, что мелкодисперсные структуры отличаются более низким уровнем демпфирующих свойств, чем крупнодисперсные. В общем случае гетерогенных структур демпфирующая способность материала, как правило, обусловлена, в основном, свойствами более мягкой фазы.

Легирование марганцево-медного и медно-алюминиевого сплавов цинком при соответствующем режиме их термообработки [39] позволяет получить anomalно высокие значения логарифмического декремента, достигающие 0,2...0,3 и более.

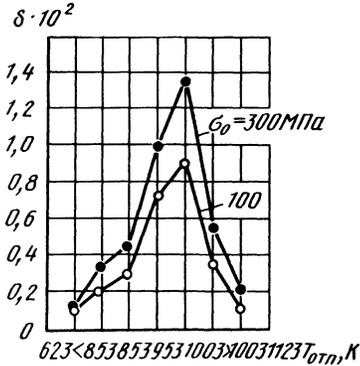


Рис. 11.8.16. Зависимости логарифмического декремента изгибных колебаний образцов из стали 13X11H2B2MF после закалки с 1293 К от температуры отпуска при двух значениях амплитуды максимального напряжения

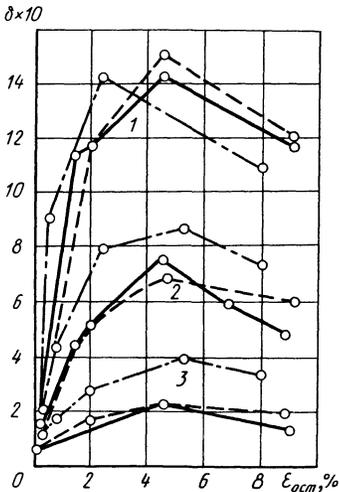


Рис. 11.8.17. Зависимости декремента колебаний чистого изгиба образцов от степени пластической деформации при различных уровнях напряжений:

1 - $\sigma = 200$ МПа; 2 - $\sigma = 100$ МПа; 3 - $\sigma = 50$ МПа;
 — — Ст3 после сжатия; - - - Ст3 после растяжения; - · - · У8 после растяжения

Предварительная пластическая деформация. Предварительная пластическая деформация, как правило, приводит к увеличению демпфирующей способности материала, что наблюдается, например, у сталей (рис. 11.8.17) и у цветных металлов [89]. Исключение составляют стали с явно выраженным магнито-механическим гистерезисом, для которых наклеп в большинстве случаев ведет к уменьшению уровня рассеяния энергии. При последующем старении обычно происходит процесс возврата первоначальных демпфирующих свойств.

Число циклов нагружения. Демпфирующие свойства материала, как правило, изменяются при длительном воздействии циклических напряжений. Характер изменения демпфирующей способности зависит от условий нагружения и структуры материала [56, 79]. Так, у сталей при амплитуде напряжений, превышающей предел выносливости, наблюдается быстрый и почти равномерный рост логарифмического декремента колебаний по мере увеличения числа циклов нагружения. Тренировка напряжениями, равными пределу выносливости, может привести к первоначальному повышению или снижению декремента колебаний при последующей его стабилизации, а напряжениями, меньшими предела выносливости, - вначале к повышению, а затем к снижению или стабилизации уровня декремента колебаний.

Некоторые другие факторы. При исследовании демпфирующих свойств материала, кроме рассмотренных факторов, обращают внимание на частоту (в том числе на двухчастотность) циклического деформирования, внешнее магнитное поле [39, 53, 56]. В области амплитуд циклических напряжений, соответствующих рабочим напряжениям машиностроительных деталей, демпфирующие свойства металлических материалов практически не зависят от частоты деформирования в достаточно широком диапазоне ее изменения в отличие от неметаллических материалов.

Не демпфирующую способность материала при циклическом деформировании оказывает влияние наложение деформирования другой частоты, причем это влияние существенно зависит от соотношения частот и амплитуд напряжений основных и сопутствующих колебаний и угла сдвига фаз. Наложение внешнего магнитного поля сказывается на уровне демпфирующей способности материалов, обладающих магнито-механическим гистерезисом. Это, в основном, ферромагнитные стали мартенситного и мартенситно-ферритного классов. Достаточно сильное внешнее магнитное поле вызывает уменьшение, причем довольно существенное, уровня демпфирующих свойств материалов.

11.8.4. ОСОБЕННОСТИ ИССЛЕДОВАНИЯ КОНСТРУКЦИОННОГО ДЕМПФИРОВАНИЯ КОЛЕБАНИЙ

Под конструкционным демпфированием обычно понимают поглощение энергии колебаний на трение в так называемых неподвижных соединениях (прессовых, резьбовых, шлицевых, заклепочных и др.) при их циклическом деформировании [32]. Расчетные методы [36, 95] позволяют выявить характерные особенности демпфирующей способности соединений от их конструктивных параметров, параметров их силового нагружения и отдельных технологических факторов. Однако надежные оценки могут быть получены только в результате экспериментального исследования натуральных конструкций.

При экспериментальном исследовании используют все основные характеристики демпфирования колебаний и методы их определения, изложенные выше. При этом колебательная система может представлять собой как натурную конструкцию или ее элемент, так и какой-либо упругий элемент - образец с исследуемым натурным соединением или его моделью.

Для многих механических систем конструкционное демпфирование обычно значительно превосходит демпфирование, обусловленное рассеянием энергии в материале деформируемых элементов, и последним можно пренебречь. Соотношение между указанными видами демпфирования существенно зависит не только от вида соединения и материала деформируемых элементов, но и от параметров нагружения.

Для упругих систем с неподвижными соединениями, обладающими сравнительно высоким уровнем поглощения энергии в случае несущественного влияния инерционных сил на условия работы фрикционных контактов и форму деформирования системы, с успехом используют метод статической петли гистерезиса. Хорошее согласование характеристик демпфирования при статическом или динамическом режиме нагружения позволяет предполагать независимость конструкционного демпфирования от частоты циклического деформирования.

Иногда специфические условия работы исследуемого соединения требуют создания специальных экспериментальных средств. К ним можно отнести, например, замковые соединения рабочих лопаток турбомашин, условия работы которых в значительной мере определяются действием центробежных сил, возникающих при вращении ротора турбины.

Исследование демпфирующей способности ряда замковых соединений (типа ласточкиного хвоста, шарнирного и елочного) рабочих лопаток может быть осуществлено на базе невращающейся колебательной системы

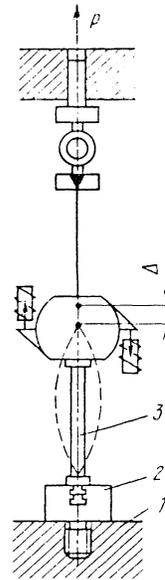


Рис. 11.8.18. Колебательная система установки КД-1 с елочным замковым соединением турбинной лопатки

установки КД-1 (см. рис. 11.8.3, ж) при имитации действия центробежных сил растягивающей силой [39, 45]. Для этого в заделку образца 3 включается исследуемое соединение (рис. 11.8.18). Конструктивно циклически деформируемый при колебаниях образец, имитирующий лопатку, выполнен с соответствующим изучаемому соединению хвостовиком и вставлен в предназначенный ему паз основания 2, фиксируемого в станине установки 1.

Следует отметить, что определяемое в эксперименте значение логарифмического декремента δ_0 изгибных колебаний образца с исследуемым соединением в заделке обусловлено суммарным рассеянием энергии в колебательной системе, включая потери энергии ΔW_3 в замковом соединении и материале ΔW_M деформируемой части образца и элементах нагружающего устройства, а также потенциальной энергией деформации W_0 изгиба образца и изменением потенциальной энергии его растяжения, определяемой работой силы P растяжения на продольном перемещении Δ точки ее приложения при изгибе образца: $\delta_0 = 0,5 (\Delta W_3 + \Delta W_M) / (W_0 + P\Delta)$.

Эти значения декремента δ_0 колебаний при данных значениях амплитуды максимального напряжения σ в корневом сечении образца, растягивающей силы P и идентичной конструкции деформируемой части образца могут служить достоверной сравнительной оценкой демпфирующих свойств различных замковых соединений.

Значение логарифмического декремента δ_3 колебаний образца, обусловленное только потерями энергии в замковом соединении, находится приблизительно как разность декрементов колебаний δ_0 образца с исследуемым замком δ_3 и эталонного образца, выполненного как одно целое с элементом, имитирующим диск, т.е. $\delta_3 \approx \delta_0 - \delta_3$.

Однако более достоверной оценкой демпфирующей способности замкового соединения являются абсолютные потери энергии $\Delta W_{3,1}$ в соединении единичной ширины, определяемые для данных значений σ , P по формуле

$$\Delta W_{3,1} \approx 2\delta_3(W_0 + Pd)/b_0,$$

где b_0 - ширина замкового соединения исследуемого образца.

По значению $\Delta W_{3,1}$ демпфирующую способность конкретной лопатки можно оценить по формуле

$$\delta_{л} = \frac{\Delta W_{3,1} b_{л}}{2(W_{н.л} + A_{ц.с})},$$

где $W_{н.л}$ - потенциальная энергия изгиба лопатки; $A_{ц.с}$ - работа центробежных сил пера лопатки на продольных перемещениях при его изгибе; $b_{л}$ - ширина замкового соединения лопатки.

Результаты исследования демпфирующей способности различных замковых соединений турбинных и компрессорных лопаток, их бандажных соединений при изгибных колебаниях, плоских и конусных стыков, резьбовых соединений при изгибных колебаниях, шпоночных и шлицевых соединений при крутильных колебаниях, тросов и канатов при продольных колебаниях, а также некоторых типов сварных и клепаных строительных конструкций: стальных мостов и дымовых труб, железобетонных балок и рам рассмотрены в литературных источниках [39, 45].

При исследовании колебательных систем типа перекрытий судового корпуса судна для возбуждения колебаний используют вибродвижители или центробежные вибровозбудители [14], устанавливаемые в предполагаемой пучности колебаний или на специальном фундаменте, обеспечивающем интенсивную передачу силы вибрационной машины на корпус.

Глава 11.9

СТЕНДЫ ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ ПРОЧНОСТИ И НАДЕЖНОСТИ ДЕТАЛЕЙ, РАБОТАЮЩИХ В ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ УСЛОВИЯХ

11.9.1. ИСПЫТАНИЯ В ГАЗОВЫХ ПОТОКАХ

Прочностные испытания в газовых потоках проводят для оценки работоспособности элементов проточной части газотурбинных установок, реактивных, ракетных и других типов двигателей, деталей летательных аппаратов, подверженных интенсивному аэродинамическому нагреву, и др. При этом газовый поток является источником воздействий, обуславливающих коррозионное и эрозионное повреждение поверхностных слоев материала, инициирование неоднородных полей температур и термических напряжений в процессе нагрева или охлаждения детали с различной скоростью.

При проведении испытаний такого типа могут быть решены следующие задачи: определение сопротивления материалов и конструкций термоудару и термической усталости; изучение закономерностей повреждения материала или истощение ресурса детали при комплексном термомеханическом нагружении с учетом коррозионно-эрозионного воздействия газового потока; определение допустимых уровней нагрузки и опасных режимов эксплуатации двигателя для обеспечения заданного ресурса; построение или проверка достоверности моделей повреждения, уравнений состояния и методов суммирования повреждений для случаев сложного нагружения и воздействия среды; технологические (по оптимизации процессов создания материалов или композитов с заданными свойствами и конструирования элементов из них по критериям прочности, долговечности и коррозионной стойкости; по оценке работоспособности материалов и элементов конструкций теплозащитных покрытий летательных аппаратов).

Экспериментальной базой комплексного решения таких задач служат газодинамические стенды [63, 77]. Методологическую основу стендовых испытательных средств составляют методы физического моделирования состояний материала и конструкционного элемента

во времени, подобных или идентичных по уровню и характеру распределения температур, деформаций и напряжений, кинетике химических и физических превращений на поверхности. Практически эти модели реализуются в виде специализированных систем, составляющих структуру газодинамических стендов (рис. 11.9.1) и позволяющих осуществлять программное управление процессами: термического нагружения по уровню тепловых потоков, температур и скорости их изменения; механического нагружения по уровню и характеру изменения во времени статических и циклических нагрузок при активном воздействии среды; коррозионно-эрозионного взаимодействия высокотемпературного газового потока и поверхностных слоев объекта исследования.

Отдельные модификации газодинамических стендов в зависимости от типа решаемой задачи оборудованы специальными системами или их комплексами. Общим практически для всех модификаций является наличие систем, обеспечивающих работу на различных режимах камер сгорания - основного генератора высокотемпературного газового потока. К ним относятся, как правило, автономные системы подготовки и распределения сжатого воздуха и жидкого (типа керосина, бензина, дизельного и т.п.) или газообразного топлива, система управления работой комплекса, ряд систем

защиты (включая экологическую) и обеспечения длительной безопасной эксплуатации. Эти системы являются наиболее энергоемкими. Их мощность определяет потенциальные возможности стенда воспроизводить или корректно моделировать реальные эксплуатационные нагрузки.

Основу системы воздухоподдачи составляют компрессорные установки (компрессорные станции). Их выбирают по расходу и степени сжатия воздуха исходя из условий равенства критериев подобия нагруженности исследуемой детали в натуральных и экспериментальных условиях [63]. Для стендов предпочтительнее компрессоры, допускающие длительную работу на переменных режимах. Основные агрегаты топливоподдачи (насосы низкого и высокого давления) выбирают по параметрам, которые определяют из газодинамических расчетов процесса горения. Исходными параметрами для такого расчета являются реализуемый в эксперименте уровень температур газа, параметры сжатого воздуха и характеристики форсунок камеры сгорания. Кроме того, нужна полная информация о физических свойствах применяемого топлива.

Общую функцию в комплексе выполняет система регулирования параметров топливоздушной смеси (составная часть предыдущих двух систем, необходимая для нормального функционирования основных силовых агрегатов) - важнейшая часть комплекса управления режимом термического нагружения. Она должна содержать исполнительные органы - регуляторы расхода и давления топлива и воздуха, запорную арматуру.

С помощью электро-, пневмо- или гидрорыводов достаточно малой инерционности и высокого быстродействия обеспечивается реализация программ стендовых испытаний при дистанционном управлении циклическим изменением параметров в блоке различной длительности с весьма высокими скоростями их изменения в цикле. Для практического получения в образцах, моделях или натуральных деталях; заданных программой испытаний тепловых и напряженных состояний материала, эквивалентным эксплуатационным по длительности, траектории и скорости изменения термической нагрузки, стенды оборудуются рядом специальных систем комплекса управления тепловым режимом. К основным из них относятся следующие системы: программного управления регуляторами параметров газового потока; формирования потока по отношению к испытываемым образцам; автономного регулирования начального теплового состояния; программного перемещения и фиксации образцов в потоке. В большинстве случаев в качестве программных устройств используют реле времени, хотя предпочтительнее вычислительные информационно-управляющие уст-

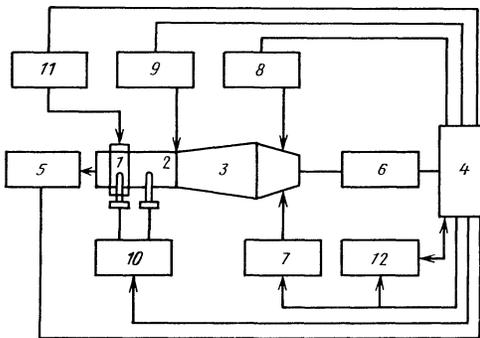


Рис. 11.9.1. Схема газодинамического стенда:

- 1 - образец; 2 - испытательная камера; 3 - камера сгорания; 4 - пульт управления; 5 - система вентиляции и удаления продуктов сгорания;
- 6 - система подачи и регулирования расхода воздуха;
- 7 - система подачи и регулирования расхода топлива;
- 8 - система впрыскивания водорастворимых агрессивных компонентов; 9 - система подачи и регулирования расхода газообразных агрессивных компонентов; 10 - система контроля и регистрации теплового состояния образцов и температуры газового потока; 11 - система механического нагружения;
- 12 - система автоматического управления режимом теплового нагружения

ройства с обратной связью. Это позволяет проводить стендовые испытания в автоматическом режиме, обеспечивая точное воспроизведение программ нагружения при больших длительностях (обычно порядка $10^2 - 10^5$ циклов).

Система формирования газового потока представляет собой серию испытательных камер и узлов (рис. 11.9.2), позволяющих обеспечить определенные условия обтекания объектов, активно влияя на интенсивность теплообмена между газовым потоком и поверхностью, и характер распределения локальных тепловых потоков по профилю. Для расширения возможности и повышения информативности одного эксперимента испытательные

камеры выполняют многорядными или используют несколько секций одновременно для испытания одинаковых или разных образцов. В связи с изменением параметров газа по длине тракта в каждой секции образцы испытывают в разных условиях теплового нагружения.

Системы комплекса управления режимом для решения ряда задач комплектуют устройствами автономного регулирования начального теплового состояния образцов, а также их перемещения и фиксирования в заданной области газового потока. К ним относятся камеры и боксы с жидкостными и газовым заполнением (в том числе криостаты) и манипуляторы [63, 77]. Манипуляторы являются многофункциональными механизмами, осуществляющими программное перемещение образцов в пространстве и времени и их механическое нагружение.

Для количественной оценки влияния коррозионных факторов на долговечность элементов конструкций газодинамические стенды оборудуют системами введения в газовый поток коррозионно-активных компонентов заданного программой состава и концентрации. Применительно к элементам транспортных газотурбинных двигателей принципиальное значение имеют системы для моделирования сред с солями морской воды и соединениями серы, попадающими в газоздушный тракт турбины вместе с воздухом и топливом при эксплуатации в морских условиях.

Для изучения процессов повреждения материалов при аэродинамическом нагреве необходимо использовать систему программного изменения в потоке содержания свободного кислорода. К системам такого типа предъявляют ряд требований, важнейшими из которых являются: стабильность программы изменения расхода агрессивного компонента в процессе длительных испытаний; однородность распределения добавок по сечению испытательной камеры для создания идентичных условий испытаний образцов; минимальное влияние на режим термического нагружения для обеспечения сопоставимости результатов испытаний при наличии и отсутствии вводимых в поток добавок. Последнее требование не относится к системе обогащения кислородом. В комплексе газодинамических стендов она, как правило, выполняет две функции.

В зависимости от соотношения расходов воздуха, топлива и кислорода возможно влияние на химическую активность потока, а также одновременное влияние на его температуру. В первом варианте подача кислорода производится в среду с начальным его избытком и практически не сказывается на условиях термического нагружения. Во втором случае осуществляется частичное замещение воздуха кислородом. Для испытания деталей при температуре газа выше 2273 К используют охлажда-

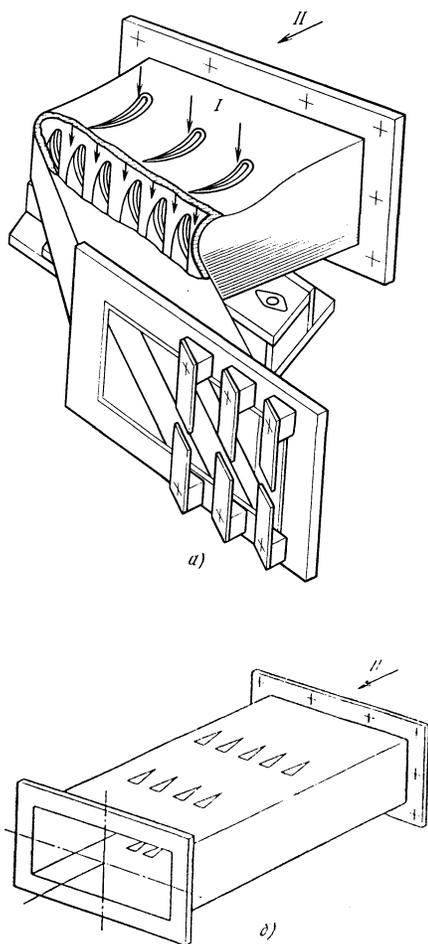


Рис. 11.9.2. Испытательная камера:

а - термоусталости сопловых рабочих лопаток ГТД;
б - термоусталостного повреждения материалов на клиновидных образцах; *I* - воздух; *II* - газовый поток

даемые либо теплоизолированные камеры сгорания и испытательные камеры, а также водоохлаждаемые манипуляторы. Система обогащения кислородом включает в себя кислородную рампу, дистанционно управляемую запорную и регулирующую арматуру.

Изучение коррозионного воздействия на исследуемый материал компонентов топлива, в частности соединений серы, проводят двумя методами. Один из них основан на использовании различных топлив, для чего отдельные модификации стендов содержат приспособленные для этой цели агрегаты. Однако при таких испытаниях получают информацию об интегральном влиянии различных компонентов топлива. Этого удастся избежать при использовании одного сорта топлива, обогащаемого растворимыми в нем присадками. Для изучения влияния серы используют растворимые в керосине меркаптаны.

Коррозионно-активные компоненты типа солей морской воды подают в поток в виде водных растворов. Предназначенная для этой цели система содержит агрегаты для подготовки раствора, поддержания заданной концентрации и устройства дозированного впрыскивания непосредственно в газоздушный тракт камеры сгорания. Дозировка солей осуществляется изменением их концентрации при постоянном расходе жидкости. Этим исключается влияние раствора на тепловое состояние образца, точнее, оно не зависит от концентрации соли или ее отсутствия в дистиллированной воде.

Для оценки несущей способности термонагруженных элементов конструкций во многих случаях является принципиальным учет совместности термического и механического воздействия. Для решения таких задач стенды оборудуют системами и установками для статического и циклического нагружения образцов, моделей и натуральных деталей [63, 77]. Это рычажные, гидравлические и электродинамические испытательные машины и вибростенды. Требования к ним и условия испытаний практически не отличаются от рассмотренных. Определенная специфика должна учитываться при разработке и эксплуатации узлов сопряжения элементов газового тракта и крепления образца (детали) на машине, в частности, обеспечение надлежащей герметизации камер и исключение влияния на состояние образца тепловых перемещений всех узлов стенда.

Необходимость обеспечения функционирования всех систем стенда как единого комплекса, соблюдение заданной программы испытаний в цикле и повторяемость ее от цикла к циклу обуславливают создание достаточно мощной и разветвленной системы непрерывного контроля всех параметров газового потока, режимов работы отдельных агрегатов и установок, теплового состояния объекта исследова-

ния и узлов стенда, уровня статических и вибрационных нагрузок и др. Получаемая информация является во многом единственной для оценки напряженного и деформированного состояния материала, так как прямое измерение деформаций в эксперименте при высоких температурах и больших градиентах температур и напряжений, имеющих место при испытаниях на газодинамических стендах, весьма затруднено.

Современные стенды основаны на использовании информационно-измерительных и управляющих комплексов на базе мини- или ПЭВМ, которые накапливают, обрабатывают поступающую информацию и в реальном масштабе времени вырабатывают управляющие сигналы в зависимости от программы изменения температуры или напряжения в определенных точках детали. При достаточной мощности ЭВМ и наличии необходимых пакетов программ может быть получена конечная информация о связи долговечности материала или конкретной детали с уровнем действующих температур, напряжений и деформаций. В противном случае комплекс дает необходимую информацию для проведения расчетов на соответствующей вычислительной технике.

Корректность получаемой информации и достоверность результатов расчета во многом определяется реальными возможностями датчиков. Особое значение при испытаниях в высокотемпературных газовых потоках придается измерению температур отдельных точек исследуемой детали. Наибольшее распространение для этой цели получили термопары [77]: проволочные, микрокабельные и высокотемпературные пленочные. Проволочные термопары хотя и являются наиболее надежными как в монтаже, так и в обработке получаемой информации с помощью общедоступных приборных средств, неизбежно нарушают либо сплошность образца, либо качество поверхности при внешней укладке. И то, и другое приводит к искажению процесса теплообмена, особенно при больших скоростях нагрева (охлаждения) и небольших размерах образца.

Монтаж микрокабельных термопар [77] с последующей заправкой канала является более предпочтительным. Для исследования поверхностных температур в тонких областях детали и при больших скоростях теплообмена целесообразно использование пленочных датчиков. Однако при этом необходимо учитывать целый ряд особенностей их нанесения, последующей термообработки и дешифровки получаемой информации. Наличие измерительных комплексов с ЭВМ обеспечивает работу с различными термодатчиками и получение данных о кинетике теплового состояния объекта исследования в виде, пригодном для дальнейшего анализа расчетными методами напряженно-деформированного состояния материала.

11.9.2. ГРУППЫ МЕТОДИК СТЕНДОВЫХ ИСПЫТАНИЙ

Методические результаты расчета и эксперимента представляют собой основу обработки результатов испытаний с представлением их в традиционной для прочностных задач форме [61]. Многообразие задач и специфика стендовых испытаний в газовых потоках предъявляет некоторые особые требования к методикам проведения экспериментов. Они касаются, в первую очередь, обоснования режима термического нагружения, определения способа его моделирования и реализации в виде программ изменения температуры газового потока во времени.

В связи с этим методы стендовых испытаний применительно к решению рассмотренных задач можно условно разделить на определенные группы. Наиболее общими классификационными признаками методики приняты типы режимов термомеханического нагружения, способы их моделирования и практической реализации в виде программ изменения термодинамических и химических параметров газового потока.

Первая группа методик предназначена для решения задач оптимального конструирования конкретных деталей с учетом реальных свойств материалов и условий эксплуатации по критерию максимальной термодинамической долговечности, а также определение степени опасности реальных эксплуатационных режимов и оценки ресурсов по переходным режимам. Программа испытаний должна моделировать наиболее тяжелые тепловые режимы с воспроизведением в цикле тождественных натуральных термонапряженных состояний материала. Испытания, как правило, проводят на конструктивных элементах или их моделях, в полной мере отражающих геометрические особенности натурной конструкции.

Вторая группа методик предназначена для оценки сопротивления различных материалов, в том числе покрытий, термической усталости. Основными для этой группы являются требования по сопоставимости условий нагружения и недопустимости существенного превышения термических нагрузок (для форсированного получения заметной поврежденности материала при термоциклировании) по сравнению с эксплуатационными. Нарушение этого условия, приводя к изменению механизмов повреждения, приводит к некорректным выводам о реальных возможностях материалов. Предпочтительнее при этом целесообразно отдать испытанию моделей, сопоставляя результаты по характеру и степени повреждения областей максимальной нагруженности материала в масштабе действующих (расчетных) температур, напряжений, деформаций или их амплитуд (размахов) в цикле.

Третья группа методик предназначена для изучения сопротивления хрупких материалов термоудару (разрушению за один цикл). В зависимости от свойств материала и типа мо-

делей (детали) рассматривается спектр тепловых режимов. В процессе стендовых испытаний определяют разрушающий режим. Сравнение материалов необходимо проводить по соответствующим этому режиму предельным напряжениям и температуре в опасных зонах. Использование в качестве критерия термостойкости (сопротивления термоудару) разрушающего перепада температур образца и среды (газа) допустимо при наличии информации об условиях термического нагружения. Ввиду специфики керамических материалов, которая проявляется в виде существенного влияния на их физико-механические характеристики технологических и геометрических факторов, методики испытания образцов, моделей и элементов конструкций обладают рядом особенностей [63].

Четвертую группу методик стендовых испытаний составляют методы испытаний элементов конструкций теплозащитных и теплоизоляционных конструкций летательных аппаратов. Главное требование в них - корректное моделирование локальных тепловых потоков и процессов коррозионно-эрозионного воздействия скоростных сред.

Практически все методики предусматривают проведение исследований кинетики повреждения материалов или конструкций в процессе циклического нагружения. Для этой цели применяют различные методы визуального и приборного обнаружения и фиксирования закономерностей роста поверхностных дефектов. В большинстве случаев предельное состояние материала оценивают по числу циклов до достижения дефектом (трещиной) установленных методикой размеров (например, 0,5...1 мм). При использовании физических методов, основанных на исследовании структурных изменений, план эксперимента предусматривает снятие образцов с различной стендовой наработкой и изготовление шлифов из зоны максимального повреждения.

Глава 11.10

ИССЛЕДОВАНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК МАТЕРИАЛОВ И НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ ПРИ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ

11.10.1. КРИОПРОДУКТЫ И СПОСОБЫ ЗАХОЛАЖИВАНИЯ ОБЪЕКТОВ ИССЛЕДОВАНИЯ

Исследования при низких температурах ориентированы, как правило, на проведение испытаний образцов и простейших элементов конструкций в криокамерах и криостатах. Испытания крупногабаритных элементов конструкций при низких климатических и осо-

бенно криогенных температурах весьма ограничены, что связано с возникновением непреодолимых методических трудностей создания в больших объемах равномерных температурных полей и необходимостью реализации больших расходов хладагентов.

В настоящее время в качестве криоагентов используется небольшой ряд веществ, характеризующихся различной температурой кипения при атмосферном давлении и кон-

трастно отличающимися теплофизическими свойствами. Некоторые из них характеризуются малым содержанием в атмосфере и высокой стоимостью (неон), а другие - токсичностью (фтор, окись углерода), третьи - взрывоопасностью (кислород, водород) [85]. В промышленных масштабах в настоящее время используют в основном метан, кислород, аргон, азот, водород и гелий (табл. 11.10.1).

11.10.1. Характеристика веществ, используемых в жидком состоянии в качестве криоагента

Вещество	Температура кипения при атмосферном давлении, К	Скрытая удельная теплота испарения		Плотность жидкости, кг/м ³	Отношение объема газа к объему жидкости
		кДж/кг	кДж/л		
Метан	111,7	574	244	426	580
Кислород	90,2	213,5	243	1136	800
Аргон	87,3	163	224	1390	790
Воздух жидкий	86,0	196,9	188	877	675
Фтор	85,1	172	257,5	1505	880
Азот	77,3	199,5	161	808	645
Неон	27,1	87	105	1206	1840
Водород	20,3	455	31,7	70,87	786
Гелий-3	4,2	23,9	2,97	124,8	700

Для охлаждения образцов и элементов конструкций применяют три способа: погружение в жидкий хладагент, конвективный отвод теплоты с помощью газовой среды и передача теплоты по металлическому холодопроводу. Способ охлаждения и тип хладагента зависят от рабочей температуры, вида и длительности испытаний [55]. При низких климатических температурах используют смесь льда с солью, твердую углекислоту в чистом виде или в смеси с четыреххлористым углеродом либо с этиловым спиртом. При длительных испытаниях наиболее приемлем раствор жидкого азота с бензином (этиловым спиртом), который позволяет получать температуру 273...140 (160) К. С увеличением концентрации спирта в жидком азоте температура раствора повышается.

Для охлаждения в интервале температур 160...130 К можно использовать раствор петroleйного спирта с азотом. Более низкие температуры получают в растворе азота с изопен-

таном или в парах азота (до 95 К). Основным хладагентом при температуре до 77 К является

азот. Для получения температуры ниже 77 К может служить неон и его пары. В интервале температур 77...4,2 К в основном используют жидкий гелий и его пары, а температурный интервал 4,2...1,5 К достигается при откачке паров над ванной жидкого гелия.

11.10.2. ХОЛОДИЛЬНЫЕ КАМЕРЫ

Камеры для получения низких температур делят на два класса: криокамеры для испытаний при температуре не ниже 77 К и криостаты для испытания в криогенных жидкостях и в парах гелия при температуре ниже 77 К. Камеры выполняют в двух вариантах: с односторонним и двусторонним вводом силовых тяг. Второй вариант обеспечивает меньшую, чем первый, защиту рабочего объема от теплопритока извне и поэтому преимущественно

используется при испытаниях в интервале азотных температур не ниже 77 К. Гелиевые криостаты требуют большей защиты от теплопритока, их выполняют с односторонним вводом силовых элементов. При такой конструкции криостата нагрузка к образцу передается через длинные, вставленные одна в другую с верхней стороны криостата тяги. Для создания работоспособных гелиевых криостатов требуется большой опыт и высокая культура производства. Если криостат недостаточно грамотно спроектирован или изготовлен, то испарение жидкого гелия произойдет прежде, чем он достигнет дна криостата.

Криокамеры для испытаний в парах азота изготавливают обычно из пенопласта или двух металлических обечаяк с теплоизоляционным слоем между ними. Криокамера (рис. 11.10.1) состоит из двух симметричных секций с разъемом в вертикальной плоскости и соединенных между собой упругими зажимами. Одна из секций корпуса 1 жестко закреплена на станине испытательной машины, а вторая фиксируется только после установки в рабочем положении образца 4, который жестко соединен с подвижной 2 и неподвижной 6 тягами захватов. Пары азота подаются в камеру по трубопроводу из сосуда Дьюара с жидким азотом через распылитель-змеевик 5, в стенках которого выполнены небольшие отверстия. В нижней части камеры предусмотрен накопитель 3, в который стекает избыточный жидкий азот с распылителя в области температур, близких к температуре кипения азота.

Для испарения азота и подогрева его паров требуется подвести в криостат значительно больше теплоты, чем для испарения гелия, и поэтому азотные криостаты требуют значительно меньшей теплоизоляции и более просты конструктивно, чем гелиевые. Азотный

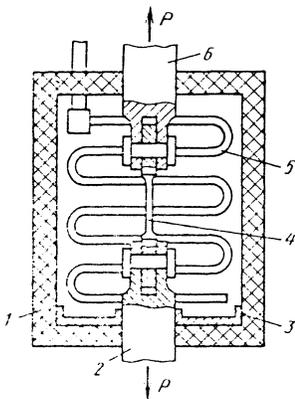


Рис. 11.10.1. Криокамера

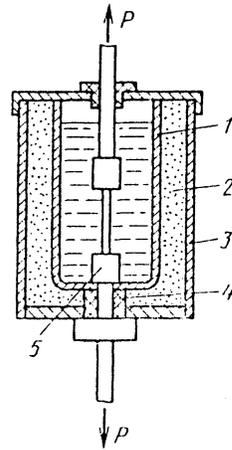


Рис. 11.10.2. Азотный криостат общего назначения

криостат для испытаний на кратковременную прочность (рис. 11.10.2) выполнен в виде внутренней 1 и внешней 3 обечаяк, между которыми находится тепловая изоляция 2 (мипора, пенопластовая крошка или минеральная вата). Возле нижнего захвата 5 в криостате устанавливается фторопластовое уплотнение 4, предотвращающее пролив азота. В криостатах, предназначенных для длительных испытаний на ползучесть или усталость, между двумя обечайками лучше создать вакуум, обеспечивающий хорошую теплоизоляцию и уменьшение расхода хладагента.

Для создания больших растягивающих или сжимающих сил в качестве силовых устройств используют стандартные испытательные машины. Они имеют ограниченное рабочее пространство, что обуславливает необходимость создания компактных криокамер и криостатов. Это особенно важно для гелиевых систем охлаждения.

В криостате 5 для испытаний стандартных образцов из металлических материалов на кратковременную прочность и малоцикловую усталость в жидком гелии (рис. 11.10.3) [79] рабочая полость 3 для уменьшения теплопритока в зону образца 2 изолирована от окружающей среды двумя вакуумными рубашками 18 и 19 и одним азотным экраном 20, а силовой стакан 7, к которому крепится образец, омывается жидким азотом, находящимся в емкости 8 охлаждающего устройства 9. Азотная емкость и горловина криостата экранированы от внешней среды с помощью теплоизоляционной набивки 16. Герметичность внутренней полости обеспечивается благодаря использованию в разъемных соединениях прокладок из фторопласта. Место вывода тяги 6

загерметизировано при помощи сильфона 12, который припаян к траверсе 14, жестко связанной с силовым стаканом 7.

Образец 2 крепится одной головкой к силовому стакану, внутри которого соосно проходит тяга 6, а второй - к этой тяге. Силовой стакан жестко связан с опорной плитой, через которую к образцу прикладывается от привода испытательной машины растягивающая нагрузка. Тяга, выведенная из криостата через сильфонное уплотнение, в процессе испытаний остается неподвижной.

Важным моментом в получении жидкой ванны гелия в криостате является заливка гелия. Перед заливкой в криостате с помощью форвакуумного насоса создается низкий вакуум. После этого в рабочий объем подается газообразный гелий из сосуда 22 Дьюара через съемную переливалку 23, резиновые муфты 15, 24, распределительный гелиевый клапан 25 и

рабочую переливалку 17. После охлаждения деталей системы нагружения парами гелия давление в сосуде Дьюара повышается с помощью резиновой камеры 28 и в криостат начинает подаваться жидкий гелий. Оработанные пары гелия при первой заливке удаляются из криостата в газгольдер 27 через патрубку 10, вентиль 11 и гелиевую магистраль 13, проходя по кольцевому зазору между стаканом и тягой и охлаждая эти детали.

При повторной заливке гелия в процессе длительных испытаний для уменьшения его расхода трубопроводы, по которым гелий подается из сосуда Дьюара в криостат, предварительно охлаждаются. Для этого предназначен распределительный гелиевый клапан 25, выполненный с возможностью подключения рабочей полости криостата и сосуда Дьюара к газгольдеру через трубопровод 26 или рабочей полости к сосуду Дьюара.

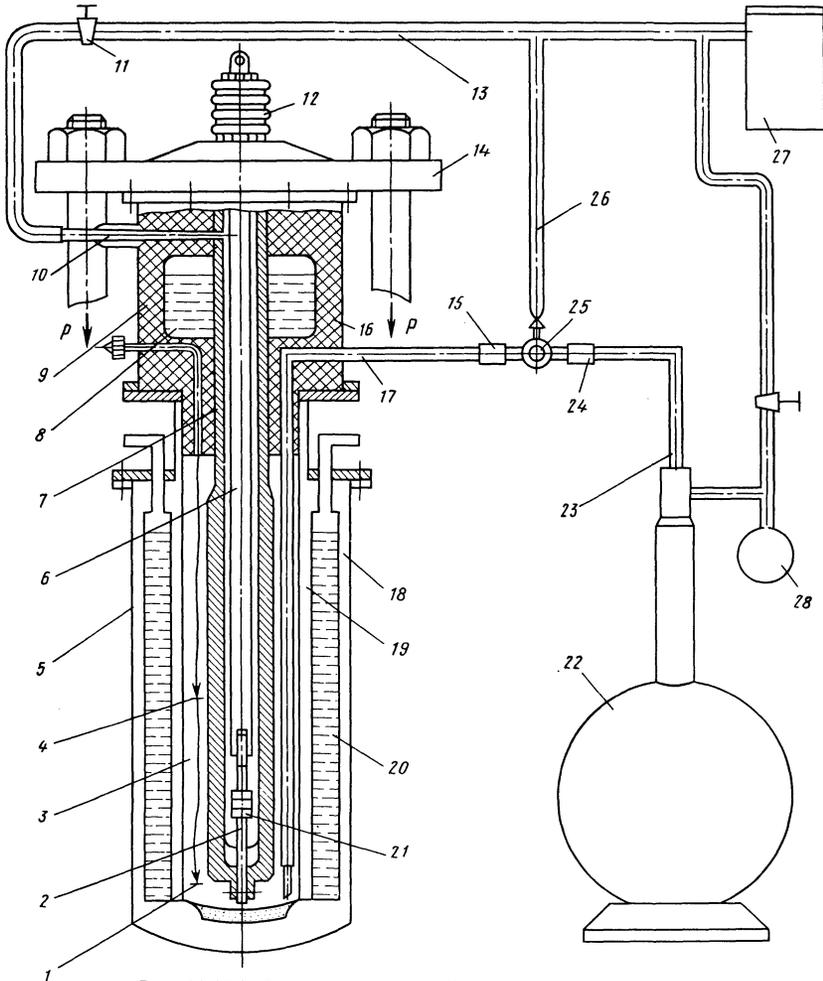


Рис. 11.10.3. Схема охлаждения образца до температуры 4,2 К

Ход заливки жидкого гелия контролируется двумя полупроводниковыми уровнемерами 1 и 4, а температура образца определяется с помощью германиевого термистора 21, помещенного во фторопластовую капсулу и плотно прилегающего к образцу. Такая система индикации и измерения жидкого хладагента является типичной при низкотемпературных испытаниях. Гелиевые уровнемеры сигнализируют о наличии жидкого гелия на дне рабочей полости криостата и над образцом. После того, как уровень жидкого гелия достигнет верхнего уровнемера, заливка прекращается.

Все доливы хладагента в таком криостате проводятся без остановки испытаний образца, температура которого в процессе доливы практически не меняется. Одной заливкой жидкого гелия в криостате рассматриваемой конструкции обеспечивается проведение мало-

цикловых испытаний в течение 1...1,5 ч, после чего проводится доливка. Использование распределительного клапана и выполненных с двойными стенками и вакуумированной полостью между ними трубопроводов 10, 26 и переливалок 17 (рабочей) и 23 (съёмной) также способствует экономному расходованию хладагента.

При испытаниях на кратковременную прочность для увеличения производительности испытаний и сокращения расхода гелия предусматривают использование специальных многопозиционных захватов. Система нагружения с многообразцовым устройством и гелиевым реверсивным криостатом, размещаемая на испытательной машине ЦД-10 с предельным усилием 100 кН, показана на рис. 11.10.4. В горизонтально расположенной касете установлено 16 образцов 1, которые по-

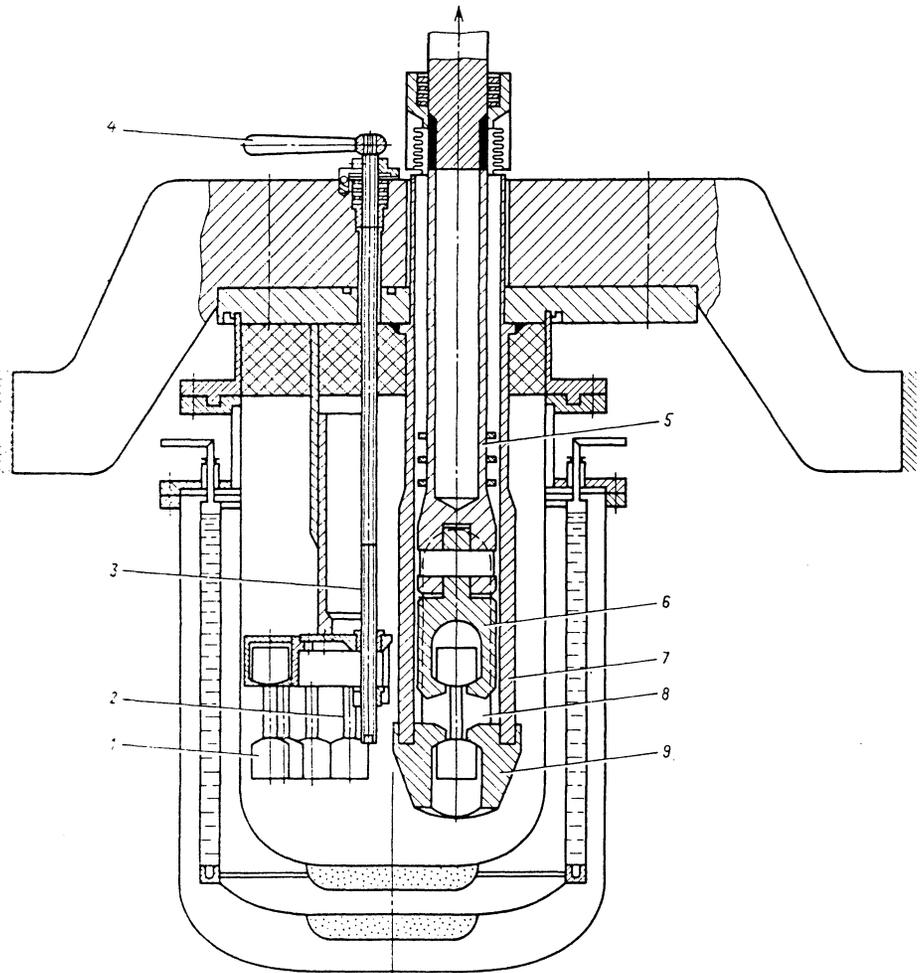


Рис. 11.10.4. Криостат с нагружающим устройством и касетой

следовательно при помощи рукоятки 4, штока 3 и толкателя 2 подаются в зону растяжения и фиксируются в неподвижном 9 и подвижном 6 захватах. Нагрузка к испытуемому образцу прикладывается от привода машины через тягу 5, при этом силовой стакан 7 остается неподвижным. Для подачи образцов в зону растяжения и удаления их обломков после разрушения в силовом стакане выполнен сквозной паз 8. Расход гелия в таком криостате на весь цикл испытаний до 12 л и на порядок меньше требуемого для испытания такого же количества образцов на однообразцовом устройстве.

В устройствах с вертикальным расположением кассет смена образцов проводится автоматически при повороте кассеты под действием момента сил тяжести после разрушения образца или благодаря использованию специальных храповых механизмов.

При постановке усталостных испытаний на кручение, на удар, по определению модулей упругости динамическим методом и других используют оригинальные системы нагружения, выполненные вместе с системой охлаждения и низкотемпературной камерой как единое целое.

При испытаниях на ударную вязкость до температуры жидкого азота используют обычные копры, снабженные дополнительными отдельно расположенными холодильными камерами, образец из которых подается на опоры копра непосредственно перед моментом удара. При более низкой температуре используют специальные копры, у которых все элементы системы нагружения находятся в криостате (рис. 11.10.5). Испытания на ударный изгиб образцов 3 в таких копрах проводят следующим образом. В исходном положении молот 5 поднят и зафиксирован при помощи шарикового замка 8, при этом тяги 11 тоже приподняты и удерживают в висячем положении наковальню 2 с образцом 3; наковальня отсоединена от динамометра 13. Криостат 12 с азотным и вакуумным экранами размещен внутри корпуса копра, который жестко, через герметизирующие прокладки соединен с основанием 1.

Перед испытаниями в кассетное устройство копра закладывается 12 образцов, которые разрушаются за одну заливку гелия. При подготовке криостата к работе из рабочего объема и теплоизоляционных полостей откачивают воздух. После образования форвакуума заливают азот и гелий до образования в зоне наковальни и образца жидкой ванны. Затем включают шариковый замок 8 и подают в верхнюю полость 7 пневмоцилиндра 6 сжатый воздух. Молот 5 перемещается вниз и освобождает тяги 11. Под действием разности давлений в рабочем объеме, и в вакуумном экране криостата сильфон 4 после освобождения тяг деформируется, и наковальня 2 с образцом 3

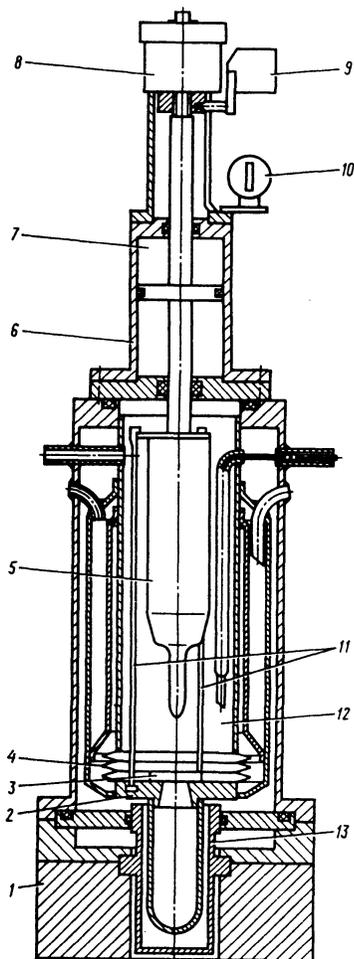


Рис. 11.10.5. Пневматический копер для испытаний на ударный изгиб в интервале температур 293...4,2 К

перемещается до соприкосновения с динамометром 13. В то же время молот 5 наносит удар по образцу.

Диаграмма деформирования при ударе записывается по сигналам от фотоэлектрического датчика 10 перемещения, перекрываемого штоком 9, и датчика нагрузки.

В связи с тем, что гелий имеет высокую стоимость, гелиевые криостаты подключают к магистрали сбора газообразного гелия, который подается к компрессору и закачивается в баллоны.

11.10.3. СТЕНДЫ ДЛЯ ИСПЫТАНИЯ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ ПРИ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ

На специализированном стенде можно исследовать деформирование и разрушение натуральных сосудов давления, трубопроводов и их моделей при воздействии статического (до 100 МПа) и циклического (до 30 МПа) внутреннего давления в интервале температур 293...77 К диаметром до 600 мм, длиной до 1000 мм и толщиной стенки до 10 мм. В качестве хладагента используется жидкий азот, а в качестве рабочих веществ - газообразные азот, гелий и жидкий азот. Стенд представляет собой сложное сооружение, размещенное в соответствии с требованиями техники безопасности в отдельном помещении с двумя железобетонными шахтами. Система охлаждения стенда включает сосуд емкостью 1000 л для жидкого азота, два сосуда для жидкого гелия емкостью по 100 л, устройства для подачи хладагентов в рабочую камеру, распылители, контрольно-измерительную аппаратуру.

Испытуемый сосуд 1 (рис. 11.10.6) устанавливается в размещенной в шахте рабочей камере 3, которая представляет собой толстостенную цилиндрическую емкость с теплоизоляционной вакуумной рубашкой. Рабочая камера сохраняет жидкую ванну хладагента при проведении испытаний и выполняет защитную функцию, предотвращая в нестандартных ситуациях разлетание осколков от разрушающегося сосуда.

В области температур, близких к 77 К, и высоком давлении азот переходит в жидкую (после 15 МПа) и твердую (после 90 МПа) фазу; в подобных случаях при более высоком давлении вплоть до температуры 4,2 К рабочей средой может быть только газообразный гелий, который не переходит в твердую фазу при 4,2 К при давлении ниже 100 МПа. При использовании газа необходимо предотвратить

возможность накопления большого запаса упругой энергии в сосуде 1 при его нагружении внутренним давлением. Это достигается заполнением сосуда балластом, в качестве которого весьма эффективно применяют крошку из полиуретана, газонасыщение которой при понижении температуры уменьшается.

Системы нагружения внутренним давлением при низкой температуре отличаются от систем, используемых при испытаниях в нормальных условиях, тем, что рабочую среду, подаваемую внутрь объекта исследования при низкой температуре, необходимо отделить от рабочей среды, подаваемой от насосной станции. Для этого предусмотрены распределительные камеры. Используемая в пневмогидравлическом стенде система нагружения сосуда 1 (рис. 11.10.6) состоит из компрессора 4, газгольдера 5, разделительной камеры 6, блока высокого давления 7, гидроусилителя 9, масляного насоса 10, баллонов со сжатым газом 12.

Эти агрегаты соединены магистралями высокого давления с сосудом 1. Заливку жидкого азота или подачу его паров в рабочую камеру 3 проводят из емкости 8 по трубопроводу с тепловой изоляцией; после достижения в рабочей камере заданной температуры проводят нагружение сосуда с помощью компрессора 2. В зависимости от режима испытаний нагружение внутренним давлением при температуре до 77 К можно осуществлять несколькими способами: подачей газообразного азота или гелия из баллона 12 с рабочим давлением до 40 МПа; подачей этих же сред из газгольдера 5 при более высоком давлении при помощи компрессора 4 типа ЛК 10/1000; подачей жидкого азота из блока 7 высокого давления; нагнетанием изопентана или другой рабочей среды из разделительной камеры 6 в сосуд с помощью насоса 10 и гидроусилителя 9. Давление в системе нагружения контролируется датчиком 11 типа МЭД с индикацией на самописце, датчиками давления 13 типа ДТ-1000 и манометрами 14. Для измерения температуры в интервале 293...77 К наибольшее применение находят медьконстантовые термопары и медные термопреобразователи сопротивления, а при более низкой температуре - германиевые термисторы.

Деформации в различных зонах исследуемых сосудов измеряют при помощи фольговых тензорезисторов (одноэлементных и розеток) на винифлексовой основе. Тензорезисторы наклеивают непосредственно на сосуд или тензорезисторные преобразователи перемещений, используемые для регистрации изменения линейных размеров сосуда.

На базе системы создания внутреннего давления пневмогидравлического стенда эксплуатируются установки УНС-10 и УНС-20, предназначенные для испытания при темпера-

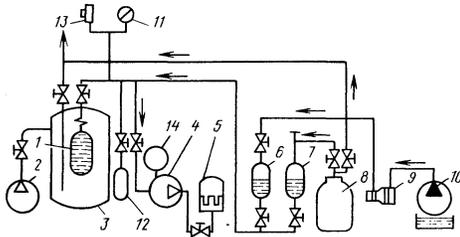


Рис. 11.10.6. Схема комплекса оборудования для испытания сосудов под давлением при низких температурах (до 77 К)

туре 77 и 4,2 К полусферических элементов сосудов диаметром до 320 мм и толщиной стенки 1...3 мм, а также цилиндрических обечаяек такого же диаметра с полусферическим днищем. В установке УНС-10 в качестве рабочей среды используется газообразный или жидкий азот, а максимальное рабочее давление может достигать 40 МПа. Теплоизоляция рабочей камеры установки выполнена из пенопласта, так как захлаживание объекта исследования осуществляется жидким азотом (рис. 11.10.7).

Сферический образец 1 с вкладышем 2, помещенный в корпус камеры 5, для обеспечения герметичности рабочего объема прижат к коническому кольцу 6. Рабочая среда подается по трубопроводу высокого давления 7 в пространство между вкладышем и полусферой; охлаждающая жидкость подается по трубопроводу с тепловой изоляцией через отверстие в пенопластовой крышке 3 в резервуар 4, расположенный над полусферой, охлаждение которой происходит, таким образом, с внешней стороны. Следует отметить, что на одно испытание в установке УНС-10 потребляется до 60 л азота.

Изменение кривизны поверхности исследуемой оболочки регистрируется при помощи тензорезисторных преобразователей (показаны на рисунке стрелками).

Установка УНС-20, предназначенная для испытаний таких же полусферических сегментов в среде жидкого гелия (рис. 11.10.8), состоит из криостата 1 с вакуумным 2 и азотным 7 экранами и рабочей камеры 4, внутри которой монтируется образец 3 с вкладышем 6.

Вкладыш с полусферой вначале охлаждается жидким азотом, а затем в полость 5, расположенную с внешней стороны полусферы, подается жидкий гелий. В качестве рабочей среды в установке также используется жидкий гелий, нагнетаемый под давлением в полость 11. Для удобства монтажа образца и подсоединения коммуникаций к криостату съемную крышку 10, к которой присоединена труба 9, связанная с рабочей камерой 4, устанавливают на специальную подставку. В верхней части трубы смонтирован охлаждающий резервуар 8 с жидким азотом, являющийся экраном для тепловых потоков, поступающих в зону криостата по трубопроводам системы охлаждения и нагружения, размещенных в трубе. Рабочая камера 4 изготовлена толстостенной для предотвращения стенок криостата от повреждений при разрушении полусферы. Установка укомплектована автоматизированной системой измерения деформаций, температуры и давления.

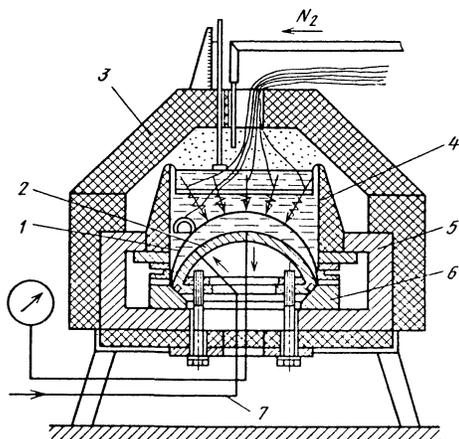


Рис. 11.10.7. Холодильная камера установки УНС-10 для испытания полусфер внутренним давлением при температуре 293...77 К

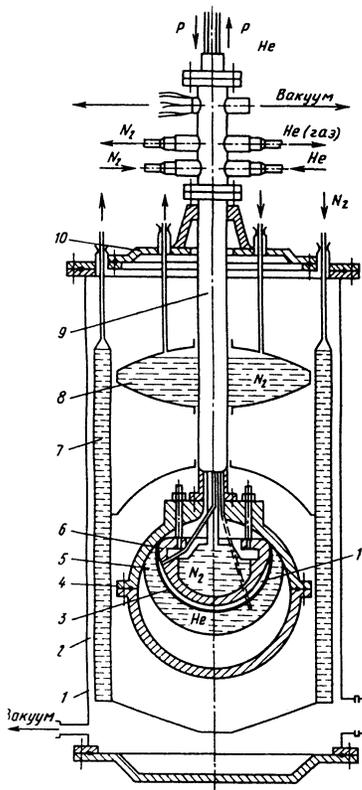


Рис. 11.10.8. Криостат установки УНС-20 для испытания полусфер внутренним давлением при температуре 4,2 К

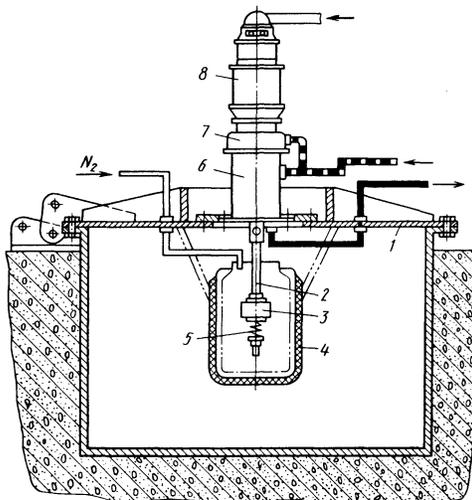


Рис. 11.10.9. Схема разгонной установки для испытания вращающихся деталей при низких температурах (до 77 К)

Для исследования влияния низких температур на несущую способность быстровращающихся элементов конструкций в поле центробежных сил разработана разгонная установка, позволяющая проводить испытания в интервале температур 293...77 К при частоте вращения до $60\,000\text{ мин}^{-1}$ (рис. 11.10.9). Испытуемую деталь 3 устанавливают на консоли гибкого несущего вала 2 и опускают в сосуд Дьюара 4 с жидким азотом. Сосуд Дьюара, корпус 6 несущего вала с мультипликатором 7 и приводным электродвигателем 8 крепят к крышке 1 камеры, которая может вращаться на шарнирах при ее установке в вертикальном положении. Для получения различных частот вращения в цепи привода использован электродвигатель постоянного тока типа СТГ-18Т. Использование пружины 5 в узле крепления детали 3 позволяет осуществлять ее регулированное поджатие и предотвращать возникновение больших термических напряжений при захлаживании узла нагружения. При разрушающих кратковременных испытаниях осколки вращаемой детали разрушают криостат, поэтому азотные криостаты в разгонных установках изготавливают из пенопласта. Средства измерения и регистрации деформации и температуры аналогичны рассмотренным выше.

Глава 11.11

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ИЗУЧЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ ТЕПЛОВОЙ ЗАЩИТЫ

Существует множество методов тепловой защиты элементов конструкции: водяная ру-

башка; разветвление поверхности теплообмена и обдув воздухом; теплоизоляционные материалы.

Аблирующие теплозащитные материалы предназначены для сравнительно кратковременной работы в экстремальных условиях. Переход аблирующего материала в новое фазовое состояние (деструкция) требует затраты тепловой энергии, происходит при сравнительно невысоком уровне и диапазоне температур и сопровождается выделением газов, создающих на поверхности тела и в его порах участки с весьма низкой теплопроводностью, что позволяет задержать начало интенсивного роста температуры материалов конструкций на несколько десятков минут. Этого бывает достаточно для выполнения конструкцией ее основной функции. Примером могут служить наружные конструкции ракет и спускаемых космических аппаратов разового использования.

Теплозащитный аблирующий материал должен обладать определенным запасом механической прочности для того, чтобы сохранить деструктирующие слои в заданном геометрическом пространстве. Кроме того, благодаря низкой теплопроводности материала слои, находящиеся на некоторой глубине, находятся при температуре, которая не приводит к большому разупрочнению, их можно использовать в качестве элементов несущей конструкции. В связи с этим необходимы данные об изменении прочностных характеристик материала в процессе деструкции поверхностного слоя. Деструкция происходит в тех слоях, к которым подводится тепловой поток. Следовательно, материал находится в неоднородном асимметричном тепловом и термонапряженном состоянии.

Процессы деструкции настолько сложны, что надежную оценку прочности материала можно получить только экспериментальным путем, моделируя реальные условия его работы. В зависимости от конкретных условий работы материалов (растяжения, изгиба, кручения) созданы специальные экспериментальные установки [25, 63].

В установке для испытания на изгиб (рис. 11.11.1, а) образец 1 из непроводящего ток материала вместе с металлической пластинкой 3, находящейся под ним, устанавливают на токопроводящие призмы. Пластинка электрическим током нагревается до температуры плавления. Поверхностный слой испытуемого материала обугливается и становится электропроводным. В заданный момент времени происходит нагружение образца силой P . К образцу нагрузка передается с помощью двух призм, закрепленных на шарнирной traverse 2. При испытаниях регистрируются: прогибы, соответствующие росту нагрузки при разрушении образца; сила электрического тока

и напряжения, позволяющие оценить тепловой поток, подводимый к образцу.

В установке для испытания односторонне нагреваемых образцов при растяжении (рис. 11.11.1, б) образец 1, растягиваемый силой P , находится в медной, охлаждаемой камере 4 эллиптической формы, внутренняя поверхность которой отполирована до зеркального блеска, благодаря чему имеет большую отражательную способность. Сверху и снизу находятся крышки 5. В один из фокусов эллипса помещен образец, а в другой - угольные электроды либо силитовые стержни, нагреваемые электрическим током. Зазор между угольными электродами, поддерживаемый автоматически, обеспечивает стабильное горение вольтовой дуги. После отражения от зеркальной поверхности лучи фокусируются на поверхности образца. Для защиты от нагрева других поверхностей образца установлены штorkи 6.

На рис. 11.11.1, в показана схема установки для испытаний материалов на сжатие. К

образцу 1 прикреплена пластинка 3, которая с помощью электрического тока нагревается и обугливает поверхность образца, установленного в захватах. Ток подводится к электродам 7. Деформация измеряется с помощью индикаторных головок 8, а усилие - с помощью индикатора 9. Передача нагрузки непосредственно на образец осуществляется с помощью пуансонов 10. Упругая балка 11 служит динамометром. При ее прогибе изменяет свое положение верхняя пластинка, своим правым концом перемещающая шток индикатора. Нагружение осуществляется с помощью многосвязных шарнирных сочленений тяг и траверс, приводимых в движение вручную либо редуктором с электродвигателем 12.

Испытание теплозащитного материала обычно проводится в вакууме, нейтральной или воздушной среде. Иногда с целью моделирования реальных условий работы материала осуществляют предварительное охлаждение до криогенных температур либо испытание на прочность при низких температурах.

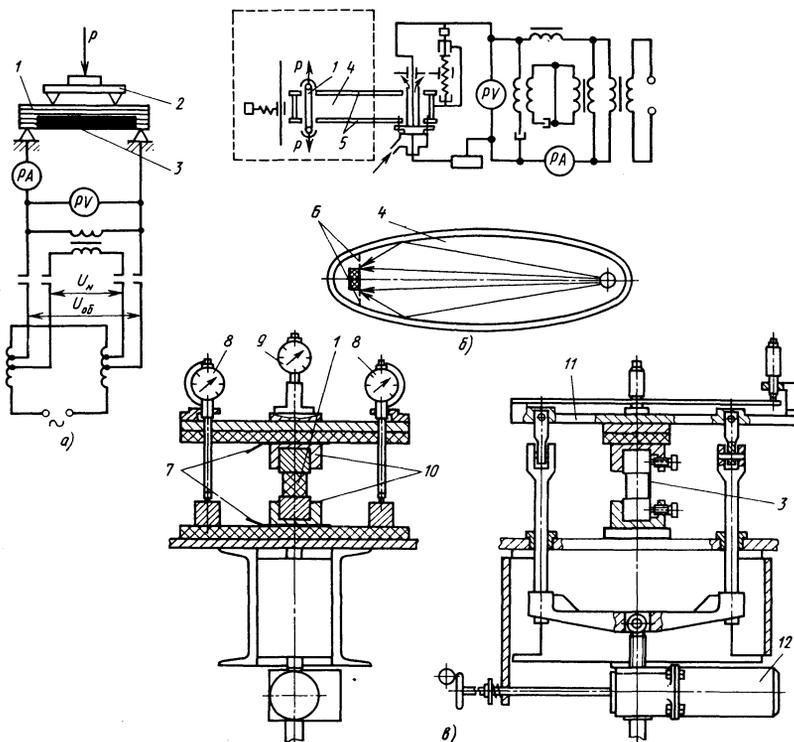


Рис. 11.11.1. Схема установки для испытаний абляющих теплозащитных материалов:

а - на изгиб; б - на растяжение; в - на сжатие

Моделирование условий теплоподвода связано с большими методическими трудностями воспроизводства и контроля реальных процессов в поверхностных слоях. При изучении прочности материалов моделируют только те процессы, которые происходят в части образца, обладающей реальной прочностью. Для реализации методов исследования необходимо знать, как изменяется температура в той точке теплозащитного слоя, которая считается границей между частью материала, потерявшей прочность, и той, которая в состоянии нести нагрузку. Причем в реальных условиях деградация этой части уже не должна происходить. Это условие дает возможность проводить испытания без возбуждения процессов деградации. Достаточно на поверхности образца воспроизвести реальное изменение температуры, соответствующей точке реальной конструкции, в любой заданный момент времени нагрузить образец и определить нагрузку, вызывающую его разрушение. Такие испытания сравнительно легко реализуются в лабораторных условиях.

Глава 11.12

ВИБРАЦИОННЫЕ ИСПЫТАНИЯ

11.12.1. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА

Повышение надежности при создании новых машин и оборудования невозможно без проведения вибрационных испытаний как отдельных элементов (в том числе используемых материалов), так и устройств в целом.

В результате вибрационных испытаний определяют динамические характеристики испытываемых объектов: вибропрочность и виброустойчивость. Последние две задачи объединены понятием оценки виброненадежности объекта.

Динамические характеристики (импеданс, податливость, добротность, жесткость и др.), используемые для расчета колебаний сложных систем, во многих случаях определяются экспериментально в виде частотных зависимостей вибрации узлов при заданных силовых или кинематических воздействиях. Кроме того, сравнение отдельных динамических характеристик, полученных после серии последовательных вибрационных испытаний одних и тех же объектов, используется для оценки их технического состояния при вибродиагностике [14, 81]. Основу этой части виброиспытаний составляет экспериментальное определение частот и форм собственных колебаний изделий.

Испытания на вибропрочность позволяют оценить способность объекта сохранять

прочность при воздействии заданной вибрации и после нее.

Вибрационная устойчивость - свойство объекта при заданной вибрации выполнять требуемые функции и сохранять в пределах норм значения параметра.

В зависимости от характера воздействия вибрационные испытания можно разделить на две группы: гармоническую вибрацию (с фиксированной и качающейся частотой); при случайных нагрузках. Для оценки надежности машин при воздействии механических нагрузок необходимо соблюдение эквивалентности условий испытанием и эксплуатации.

Системы виброиспытаний могут быть со стабилизацией режимов испытаний, с программным нагружением и следящим приводом, который обеспечивает воспроизведение неизвестного заранее закона изменения контролируемых параметров.

Кроме того, системы виброиспытаний можно разделить по степени их интенсивности (нормальные и ускоренные), по математическому описанию динамики процессов в системах стэнда и испытываемых объектов (линейные и нелинейные), по виду функциональной связи между входными и выходными величинами (непрерывные и дискретные). Решение задач проведения вибрационных испытаний изделия состоит в выборе методов и алгоритмов управления вибростэндами, отвечающих целям виброиспытаний, которые обеспечивают создание необходимых режимов испытания и контроля при удовлетворении всех ограничений, связанных с динамикой системы.

11.12.2. ВИБРОИСПЫТАТЕЛЬНОЕ ОБОРУДОВАНИЕ

Система вибрационных испытаний характеризуется следующими основными особенностями: многомерностью структуры испытательного оборудования и испытываемых объектов, разнородностью возмущающих воздействий, ограниченными энергетическими ресурсами, экономическим показателями.

Для проведения вибрационных испытаний необходимо, основываясь на требованиях по точности воспроизведения заданного закона возбуждения колебаний, ширине частотного диапазона, амплитуде колебаний, массе испытываемого изделия, максимальной выталкивающей силе и экономическим возможностям исполнителей, произвести выбор испытательного оборудования, основу которого составляют возбудители колебаний и приборы для контроля и измерения параметров вибрации. Кроме того, необходимо выбрать метод управления вибровозбудителями, обеспечивающий достаточное приближение воспроизводимого на столе возбудителя закона колебаний техническим условиям.

Выпускаемые промышленностью возбудители колебаний можно разделить по характеру воспроизводимой вибрации (линейной и угловой, вертикальной и горизонтальной, многокоординатной вибрации) и по способу возбуждения переменной силы (электро-механические, электромагнитные, электродинами-

ческие, пьезоэлектрические, гидравлические, пневматические и др.) [59].

Электро-механические виброустановки могут быть кривошипно-шатунными, кривошипно-кулисными, эксцентриковыми и инерционными (рис. 11.12.1, табл. 11.12.1).

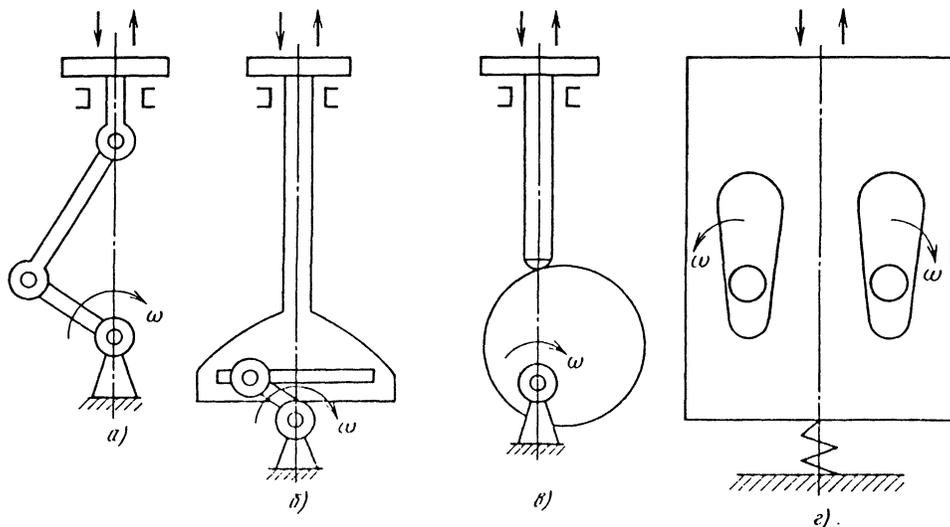


Рис. 11.12.1. Схема механического возбудителя колебаний виброустановки:

а - кривошипно-шатунного; б - кривошипно-кулисного; в - эксцентрикового; г - инерционного

11.12.1. Техническая характеристика механических установок

Установка	Ускорение, m/c^2	Частота, Гц	Амплитуда вибро-перемещений, мм	Полезная нагрузка, кг	Потребляемая мощность, кВт · А	Производитель
СВ-2М	3...150	5...100	0,1...2,3	20	0,27	Измаильский завод "Эталон" (СНГ)
12МВ-100/196-1	19,6...196	10...100	0,5...5	100	5	Майский завод электровакуумного оборудования (СНГ)
12МВ-20/98-007	150	15...100	2,2	20	0,27	
ST-80	150	20...80	± 2	30	0,1	Феб Тюрингер Индустриверк Рауэнштайн (Германия)
ST-III-200	150	20...200	3	30		
ST-300	350	80...300	30	30		
UBC-4A	68,6	8...60	3	40	0,55	Итон Сейки (Япония)
UBC-16A	68,6	10...60	3	500	11,0	То же
UB-200A	68,6	8...60	3	20	0,55	"-
UB-5000	39,2	420...2100	0...2,3	22000	39,2	"-

В электромагнитных возбудителях колебания создаются в результате воздействия переменного во времени магнитного поля на ферромагнитные тела. Они обладают большой надежностью, простотой регулирования амплитуды вибрации, однако имеют значительную массу, приходящуюся на единицу амплитуды создаваемой силы, отличаются зависимостью амплитуды вибрации от величины нагрузки, что ограничивает их применение при вибрационных испытаниях.

Наибольшее распространение в настоящее время получили электродинамические испытательные виброустановки [15]. Колебательное движение рабочего стола электродинамического возбудителя возникает в результате взаимодействия магнитного поля тока подвижной катушки, связанной со столом, с магнитным полем, создаваемым электромагнитом или постоянным магнитом. В основу работы такого вибровозбудителя положены два явления. Явление образования пондеромоторной силы

$$F_{\text{пнд}} = B_{\delta} l i_{\text{п.к}},$$

где B_{δ} - магнитная индукция в зазоре возбудителя; l - длина проводника подвижной катушки; $i_{\text{п.к}}$ - сила тока в цепи подвижной катушки.

Явление движения проводника l с током $i_{\text{п.к}}$ в результате наведения в проводнике ЭДС индукции $E_{\text{и}}$ при изменении магнитного потока Φ_e , охватываемого проводником l ,

$$E_{\text{и}} = - \frac{d\Phi_e}{dt} = B_{\delta} l \frac{dy}{dt},$$

где $\frac{dy}{dt}$ - скорость движения проводника l относительно поля B_{δ} .

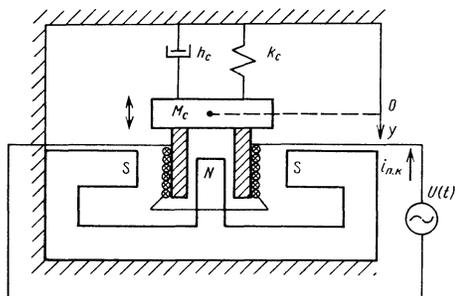


Рис. 11.12.2. Схема электродинамического вибростенда в области низких частот

Механическая схема стенда в области низких частот приведена на рис. 11.12.2. Уравнения движения платформы стенда

$$M_c \neq \frac{d^2 y}{dt^2} + h_c \frac{dy}{dt} + k_c y = B_{\delta} l i_{\text{п.к}};$$

$$L_{\text{п.к}} \neq \frac{di_{\text{п.к}}}{dt} + R_{\text{п.к}} i_{\text{п.к}} + B_{\delta} l \frac{dy}{dt} = U_{\text{п.к}}(t),$$

где M_c - масса подвижной системы стенда с испытуемым объектом (жесткое крепление); $L_{\text{п.к}}$ - индуктивность подвижной катушки; $R_{\text{п.к}}$ - активное сопротивление электрической цепи подвижной катушки; $U_{\text{п.к}}(t)$ - напряжение на входе подвижной катушки.

Динамика электродинамического вибростенда, работающего в области высоких частот, является более сложной, так как в этом случае необходимо учитывать гибкие связи между остовом подвижной катушки и платформой стенда [8]. Электродинамические вибростенды позволяют воспроизводить вибрацию в диапазоне от нескольких герц до 10 кГц и выше. В табл. 11.12.2 приведена техническая характеристика электродинамических вибростендов.

Для получения вибрации высоких частот необходимо использовать пьезоэлектрические вибровозбудители (свыше 20 кГц), которые представляют собой набор пьезокерамических колец или пластин, склеенных между собой. Под действием переменного напряжения возникает обратный пьезоэффект и в результате деформации кристаллов кольца начинают колебаться. Толкающая сила пьезоэлектрических вибровозбудителей мала, поэтому их применяют для испытания объектов малой массы.

Гидравлические вибровозбудители создают колебания рабочего органа под действием переменного давления, вызванного пульсирующим потоком рабочей жидкости. Для создания автоколебательных гидравлических вибровозбудителей необходима специальная система управления, обеспечивающая непрерывность возвратно-поступательного движения. Такие вибровозбудители предназначены для испытания объектов больших габаритных размеров, со значительной массой, при низкой частоте возбуждения (табл. 11.12.3).

Пневматические возбудители колебаний используют энергию сжатого воздуха. Регулирование амплитуды и частоты (0...500 Гц) колебаний осуществляется пневмоклапаном. Широкое применение такие возбудители нашли при исследовании колебаний лопаток рабочих колес вентиляторов и компрессоров (рис. 11.12.3) [81]. При работе установки сжатый воздух подается на лопатку 2, которая прикреплена к плите 1. Между соплом 7 и лопат-

11.12.2. Техническая характеристика электродинамических вибростендов

Вибростенд	Вибратор	Усилитель	Толкающее усилие, Н	Частота, Гц	Максимальное ускорение, м/с ²	Амплитуда, мм	Полезная нагрузка, кг	Потребляемая мощность, кВт · А	Производитель		
ВЭДС-002	ВЭД-002	БУП-0,25	200	5...5000	350	6	2	1,5	“Виброприбор” (СНГ)		
ВЭДС-010	ВЭДС-010	УМЭ-1,5	1300	5...5000	800	± 12,5	10	7			
ВЭДС-020	ВЭД-020	УМЭ-2,5	2300	5...5000	850	± 12,5	20	10			
ВЭДС-040	ВЭД-40	УМЭ-5	4500	5...3500	800	± 12,5	45	12,5			
ВЭДС-080	ВЭД-80	УМЭ-10	10000	5...3000	1000	± 12,5	80	40			
ВЭДС-160	ВЭД-160	УМЭ-20	16000	5...2500	800	± 12,5	160	42			
	Д 40А	С 40А	45000	15...2500	750	10	50				
УВЭ-100/5-300	УВЭ-100	УУС-16	20000	10...3000	9,8...98,8	10	50-100	50		СПО “Прогресс” (СНГ)	
12МВЭ2/50-010			140	10...5000	300	3,5	2	0,65			Майский завод электровакуумного машиностроения (СНГ)
12МВЭ2/980-007				10...5600	980	8	2	25			
УВЭ-1/5000			750	80...5000	300	1,17					
УВЭ-10/5000			8000	5...5000	450	10					
УВЭ-20/5000			13000	60...5000	200...300	1,1					
УВЭ-50/5000			20000	100...6000	600	10					
СУВУ-3			СУВУ-3	УУС-10		5...5000	25	8	20		
VIB2000 RV 5-400	MZV102W	RV30/40	19600	0...4000	981	25		40	Элин-Юнион (Австрия)		

Вибростенд	Вибратор	Усилитель	Толкающее усилие, Н	Частота, Гц	Максимальное ускорение, м/с ²	Амплитуда, мм	Полезная нагрузка, кг	Потребляемая мощность, кВт · А	Производитель
VIB6000 RV 5-3000	MZV106W	RV75/92	58860	0...3000	981	25	20	50	То же
	V 47МК11		8,6	0...10000	130	5			
	VG109MC1a		8170	5...2000	1000	19			Гудманс (Великобритания)
	V 999/2		1360	0...5000	650	17,8			
	V 1002		45400	0...5000	1250	25,4			В. Бриан-Саванс (Великобритания)
	VP2	25WI	11,1	1,5...10000	520	2,54			Дерритрон Электроник Вибратор (Великобритания)
	VP 2500	120KWLF	111000	5...2000	1000	12,7			
	1503	1532	2000	0...5500	400	25		1	Инвайнромонтал Иквипмент (Великобритания)
	1515	1538	30000	0...2000	230	40		16	
	101	TP025	8,9	20...2000	1400	1,25			Линг Динамик Системс ЛТД (Великобритания)
	980С	MPA192	160128	20...2000	1000	12,7			
	201		30	0...15000	1000	5			
	310		45300	5...2500	1000	25,4			ЛТВ Линг Алтек (Великобритания - США)
LPM25		113	0...10000	-	12,7				
L249		136000	0...2000	760	25,4			Пай-Линг ЛТД (Великобритания)	
4801Т	4811		380	5...8500	2060	12,7		0,22	
4802Т	4817		1780	5...5500	1450	19		1,2	Брюль и Кьер (Дания)

Вибростенд	Вибратор	Усилитель	Толкающее усилие, Н	Частота, Гц	Максимальное ускорение, м/с ²	Амплитуда, мм	Полезная нагрузка, кг	Потребляемая мощность, кВт·А	Производитель		
ТТРАВИБ 5140	-	-	4000	0...5000	570	20	100	3,5	Феб Тюрингер Индастрис-Верк Рауэнштайн (Германия)		
	C-7		5,5	20...10000	110	0,6			МБ Электроник (США)		
	EL10000		453900	5...1300	4300	25					
	EX304A		10	0...2000		10					
	420		1000	0...100		15		Продера (Франция)			
РЕТ-01-0А	РЕТ-01	РЕТ-0А	10	2...12000	500	2,5		0,03			
VS-3208	VF-3208	VA-VT-150	200000	5...1600	800	25	4000	150	ИМВ (Япония)		
	RF-0005		500	0...8000	1000	26					
	XL-1400		400000	0...2000	1000	40				ВДН (Япония)	
	G-0145	G-01-002	4500	5...3000	1200	25				16,5	
	G-7225	SHIDICS-0131	250000	5...2500	2000	25				110	Шинкен КО ЛТД (Япония)

11.12.3. Техническая характеристика гидравлических установок

Установка	Толкающее усилие, кН	Частота, Гц	Амплитуда виброперемещений, мм	Полезная нагрузка, кг	Ускорение, м/с ²	Потребляемая мощность, кВт · А	Производитель
ЭГВ-10-100	100	0,05...100	± 100	1000	30	135	ПО "Точмашприбор" (СНГ)
ЭГВ-10-200	100	1...200	± 50	1000	30	55	
G-5190 (G 23-190)	9	1...100	± 100			25	Шинкен (Япония)
G-5310 (G 23-310)	100	1...70	± 100			120	
G-5410 (G 23-410)	1000	1...20	± 100			250	

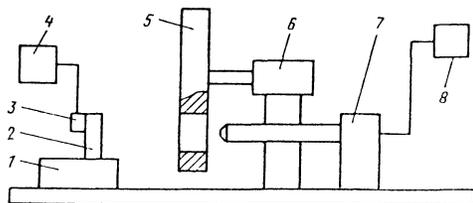


Рис. 11.12.3. Схема установки для испытаний элементов конструкций типа лопаток турбомашин:

- 1 - плита; 2 - исследуемая лопатка; 3 - тензорезистор; 4 - измерительный прибор; 5 - модулирующий диск; 6 - электродвигатель; 7 - сопло; 8 - источник сжатого воздуха

кой 2 установлен модулирующий диск 5 с прорезями - пневмоклапан. При вращении модулирующего диска воздушный поток от источника сжатого воздуха периодически прерывается, что создает пульсирующее воздействие на лопатку.

Работа пневматических возбудителей возможна от стандартных промышленных пневмосистем. При испытании работающих вентиляторов можно использовать воздушный поток от вентилятора. Создаваемое усилие в этом случае ограничено производительностью вентилятора, однако в большинстве случаев достаточно при испытаниях целого ряда тонкостенных стальных сварных и алюминиевых лопаток рабочих колес вентилятора. В качестве привода преобразователя давления (пневмоклапана) могут быть использованы электромагниты и электродинамики. Автоматизированные системы управления обеспечивают синхронную работу нескольких вибровозбудителей. Кроме непосредственного воздействия

пульсирующим потоком на испытуемый объект, применяют различные преобразователи: пневмокары, мембраны, поршневые системы.

Таким образом, вибрационная испытательная установка в общем случае представляет собой стационарную динамическую систему, основным принципом работы которой является обработка входного сигнала.

Для обеспечения требуемой точности воспроизведения вибраций необходимо реализовать комплекс следящей системы, включающий в себя стенд (объект возбуждения колебаний) и систему управления (можно использовать автоматизированную систему на базе управляющей вычислительной машины). В этом случае можно реализовать значительное число методик испытаний, изменение которых сводится к выбору соответствующих программ, заранее вводимых в машину.

Особые требования по точности воспроизведения вибраций предъявляют в случае применения многокоординатных вибростендов [14], поскольку их конструктивное выполнение, совмещающее, например, возбудители линейных и угловых колебаний, вертикальных и горизонтальных вибраций, обуславливает наличие взаимного влияния, для снижения которого используют специальные узлы соединения [10].

При проведении вибрационных испытаний исследуемые параметры вибрации определяют в контрольной точке, которую выбирают или на столе вибратора рядом с одной из точек крепления, на крепежном приспособлении или рядом с точкой крепления амортизатора, на котором будет установлен объект в условиях эксплуатации.

Поскольку крепежные приспособления не могут быть абсолютно жесткими, а согласно

программе испытаний избежать его резонанса невозможно, то контрольный вибропреобразователь должен быть размещен в точке, обеспечивающей минимальное влияние резонанса всех элементов крепежного приспособления.

11.12.3. ПРИБОРЫ ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ВИБРАЦИИ

К измеряемым параметрам вибрации относятся виброперемещение, виброскорость, виброускорение, а также частоты и фазы гармонических составляющих.



Рис. 11.12.4. Структурная схема виброметра:

1 - вибропреобразователь; 2 - предварительный усилитель; 3 - частотный фильтр; 4 - измеритель амплитуды

11.12.4. Техническая характеристика вибропреобразователей

Вибропреобразователь	Частота, Гц	Коэффициент преобразования, мВ/(м·с ⁻²)
D13	20...3000	8,5
D14	20...10000	2,5
D24	20...5000	1
KD12	5...7000	4
UC312	50...20000	0,05
KD22	2...3000	10
KB12	2,5...500	100...300
4374	1...26000	0,18
4375	0,1...16500	0,48
4391	0,1...12000	0,8
4370/81	0,1...4800	8
4378/79	0,1...3900	26
8604	0,2...6000	
8612	0,5...6	
8602	0,6...5000	
PSD-053	0...10000	8*
VS-068	10...2000	100**
VS-079	20...2000	72**

* мВ/мкм.
** мВ/(мм·с⁻¹).

Для простейших виброметров характерна структурная схема, приведенная на рис. 11.12.4. Вибропреобразователями могут быть индукционные, индуктивные, тензорезисторные, пьезоэлектрические измерительные преобразователи (табл. 11.12.4). Основные требования к вибропреобразователям: резонансная частота вибропреобразователя должна быть выше рабочего диапазона частот; условия окружающей среды должны соответствовать условиям эксплуатации вибропреобразователя.

Выпускают вибропреобразователи для подводных измерений (США) и измерений в условиях высоких температур, а также неблагоприятных условий окружающей среды (Брюль и Кьер, Дания).

Ряд вибропреобразователей содержат в одном корпусе чувствительный элемент и предварительный усилитель (АНС 014, 8319 и др.), что повышает чувствительность и помехоустойчивость. Предварительное усиление сигнала дает возможность его передачи по длинному кабелю к контролирующим приборам. Наиболее прочным и надежным является усилитель напряжения, однако на его выходной сигнал заметное влияние оказывает емкость нагрузки, в частности кабеля.

Для усилителей заряда характерными являются широкие динамический и частотный диапазон, низкий уровень шума и слабая зависимость от емкости нагрузки.

Вибропреобразователи соединяют с предварительными усилителями специальными антивибрационными кабелями. Частотные фильтры используют при необходимости выделения гармонических составляющих вибрации или ограничении диапазона измерений по частоте.

В измерительных приборах применяют октавные фильтры (измеритель шума и вибрации ВШВ-003), 1/3-октавные (СПВ-ЗПМ-М), 1/12 и 1/24-октавные (анализатор 2133, Брюль и Кьер, Дания), а также следящие фильтры (Вибропорт 30, Карл Шенк, Германия), ВВМ-001 (СНГ). Большинство приборов обеспечивают измерение нескольких параметров (табл. 11.12.5). Типичными для данного класса приборов являются ВМ-1 и ВВК 005 (СНГ), Вибропорт 30, Карл Шенк (Германия) и 2511, Брюль и Кьер (Дания). Виброметр ВМ-1 предназначен для измерения виброускорения, -скорости и -перемещения по общему уровню и с частотной фильтрацией.

11.12.5. Техническая характеристика приборов для измерения параметров вибрации

Виброметр	Частотный диапазон, Гц	Динамический диапазон	Погрешность, %
ВИП-2	12,5...200	2...10 ³ мкм	15...20
НВА-1 для измерения частотной вибрации	1,4...355	0,1...100 мм/с 80...130 дБ	10
ИШВ-1 - измеритель шума и вибрации	10...2800 10...12500	70...160 дБ (виброскорость) 30...130 дБ (виброускорение)	± 1...2 дБ
ВМ-1	1,4...8000 1,4...2800 1,4...500	10...130 дБ (виброускорение) 50...170 дБ (виброскорость) 0,25...10 ⁵ мкм	15 15 15
ВВВ-302 вихрековый	20...2500	1...10 ³ мкм	Нормированная
ВШВ-003 - измеритель шума и вибрации	10...10000	5 · 10 ⁻² ...10 ⁴ м/с ²	10
ВВК-005 - контрольно-сигнальная аппаратура	12,5...1000 0...10000	10...100 м/с ² 10...100 м/с	15 15
ВВО-332 - бесконтактный измеритель вибрации	5...10000	0,01...2 мм	15
V M6 (RFT)	5...10000	0,3...10 ³ м/с ²	± 10
VM2S (RFT)	5...10000	3...10 ³ м/с ²	± 10
SDM 132	3...10000	3 · 10 ⁻³ ...100 м/с ²	± 5
VM-1091 (ИВМ, Япония)	5...5000	300 м/с ²	-
VM 4803	1...100	3 м/с ²	5
2511 (Брюль и Кьер, Дания)	0,3...15000	0,01... 100 м/с ² 0,1...1000 мм/с 0,001...10 мм	- - -
2513 (Брюль и Кьер, Дания)	10...10000	1...1000 м/с ² 0,1...100 мм/с	-
2522	0,5...1500	0,316...1000 м/с ²	-
Вибропорт 30 - универсальный виброизмерительный прибор с микропроцессором (Карл Шенк, Германия)	1...10000	0,0001...1990 (м/с ² , мм/с, мкм)	3

Многоканальная измерительная аппаратура ВВК 005 предназначена для измерения, анализа и регистрации вибропроцессов. Обеспечивается цифровая и световая индикация, а также таблично-графическое представление данных.

Универсальный виброизмерительный прибор с микропроцессором Вибропорт 30 применяется для решения разнообразных задач и может быть использован как анализатор, следящий фильтр, прибор для измерения характеристик механических колебаний, балан-

сировочный прибор, вычислительный прибор, печатающее устройство.

Большинство задач по измерению вибрации связано с оценкой параметров колебаний сложных механических систем таких, как турбины, двигатели внутреннего сгорания. Измерение вибрации в таких системах проводится путем анализа отдельных гармонических составляющих или узкополосных процессов.

Для решения задач спектрального анализа наибольшее распространение получили анализаторы с цифровой фильтрацией, которая основана на использовании алгоритмов быстрого преобразования Фурье (табл. 11.12.6). Наличие вычислительного устройства обеспечивает работу анализатора в реальном масштабе времени.

11.12.6. Техническая характеристика анализаторов спектра

Анализатор	Частота, Гц	Метод анализа
2033	0...20000	Микропроцессор БПФ
440А	0...20	Микропроцессор БПФ
1022	4...1000	Полосовая фильтрация
3580А	5...50000	Сканирующий фильтр с полосой 1 Гц
DA-6203	0...25000	Микропроцессор БПФ (БПФ, ОБПФ, свертка, спектральная плотность мощности, функции корреляции)
FA-200	0...50000	Корреляционный

В зависимости от особенностей и специфики проводимых вибрационных испытаний могут быть использованы и другие методы измерения параметров вибрации (например, оптический), требующие соответствующих измерительных систем, однако они имеют узкую область применения.

11.12.4. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧАСТОТ И ФОРМ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ИЗДЕЛИЙ

Исследование частот и форм собственных колебаний упругих конструкций можно получить различными экспериментальными методами: на физически подобных моделях; натурные лабораторные статические и динамические испытания реальных конструкций или их частей (элементов); натурные транспортные испытания.

При экспериментальном исследовании необходимо решить вопросы выбора оптимального сигнала возбуждения на входе системы.

Моногармоническое входное воздействие является наиболее распространенным для определения частот и форм собственных колебаний. Предметом рассмотрения является идеализированная линейная система с *n* степенями свободы, дифференциальное уравнение движения которой можно представить в виде [14]

$$A\ddot{q} + B\dot{q} + Cq = F, \quad (11.12.1)$$

где **A**, **B** и **C** - матрицы соответственно инерции, вязкого демпфирования и жесткости; *q* - вектор обобщенных координат; *F* - вынуждающая сила.

При использовании метода комплексных амплитуд [71] уравнение (11.12.1) для комплексных обобщенных координат \tilde{q} и синусоидального возбуждения с одной частотой ω примет вид

$$A\tilde{q} + B\tilde{q} + C\tilde{q} = F_0 e^{i\omega t};$$

$$\tilde{q} = \tilde{q} e^{i\omega t} = (R_e \tilde{q}_0 + i J_m q_0) e^{i\omega t};$$

$$\tilde{q}_0 = q_0 e^{i\varphi}. \quad (11.12.2)$$

При этом

$$q = q_0 \cos(\omega t + \varphi) = R_e \tilde{q}_0 \cos \omega t - J_m \tilde{q}_0 \sin \omega t \quad (11.12.3)$$

или

$$q_j = q_{0j} \cos(\omega t + \varphi) = R_e \tilde{q}_{0j} \cos \omega t - J_m \tilde{q}_{0j} \sin \omega t, \quad (11.12.4)$$

где $j = \overline{1, n}$; n - число степеней свободы.

Исследуемая механическая система при изменении гармонического возбуждения отзывается как набор осцилляторов. Рассмотрим методы определения характеристик собственных колебаний для систем с одной степенью свободы. Практически одним из простых и точных способов определения собственной частоты является ее определение по нулевому фазовому сдвигу сигналов скорости колебаний и вынуждающей силы. Максимальная амплитуда измеряется датчиком скорости при резонансной частоте (частоте фазового резонанса). Фазовый сдвиг перемещения (и ускорения) для этой частоты составляет 90° .

С помощью электронного осциллографа по изображению фигуры Лиссажу на экране резонанс можно найти с погрешностью по фазе $\pm 1^\circ$, что ведет к относительной погрешности определения частоты (в %) $\Delta\omega/\omega \approx 0,3\theta$, т.е. примерно 0,05 % при логарифмическом декременте $\theta = 0,1 \dots 0,2$ [34]. Системы, основанные на фазовом принципе настройки на резонанс, созданы многими фирмами. Так, фирма Шинкен (Япония) выпускает устройства для испытаний, включающие автоматический контроллер гармонической вибрации мод. СО1-002 для испытаний конструкций воздействием синусоидальной вибрации. Погрешность управления составляет $1 \dots 3^\circ$. Фирма Брюль и Кьер (Дания) выпускает системы испытаний, включающие управляющие генераторы синусоидального сигнала мод. 1050 или 1053 и блок управления пребыванием в резонансе (мод. 5885), который обеспечивает автонастройку на изменяющуюся в ходе испытаний резонансную частоту.

Для упрощения задач и анализа колебаний с учетом нелинейного поведения конструкций можно провести измерения синфазной и квадратурной частей кинематических величин. Для квадратурной составляющей перемещения из соотношений (11.12.2) и (11.12.3) следует

$$J_m \tilde{q}_0 \sin \omega t = \frac{R_e \tilde{q}_0}{\omega} \sin \omega t; \quad (11.12.5)$$

$$R_e \tilde{q}_0 \cos \omega t = \frac{J_m \tilde{q}_0}{\omega} \cos \omega t. \quad (11.12.6)$$

Частота $\omega = \omega_0$ определяется по нулевому значению синфазной составляющей перемещения $R_e \tilde{q}_0$.

Амплитудно-фазовые характеристики величин q, \dot{q} , соответствующие компонентам (11.12.5), (11.12.6) при постоянной амплитуде силы возбуждения (частотные годографы системы), представляют собой для малых θ почти правильные окружности, при этом угловая скорость вектора годографа максимальна в окрестности собственной частоты.

При определении характеристик собственных колебаний сложных систем со многими степенями свободы путем резонансных испытаний необходимо провести детализацию систем [14]. При резонансных испытаниях с многоточечным возбуждением путем соответствующего выбора сил возбуждения выделяют поочередно собственные тона и регистрируют соответствующие формы, частоты и величины, по которым определяют обобщенные массы (или жесткости) и коэффициент демпфирования. Возбуждение осуществляется гармоническими силами с относительными фазовыми сдвигами 0 или 180° и различными амплитудами.

Особенностью испытаний с многоточечным возбуждением является необходимость управления многими силами для отыскания вектора F_0 с такими компонентами, чтобы вынужденные колебания представлялись одним вектором. При полной компенсации сил демпфирования силами возбуждения $F_0 \cos \omega t$ на собственной частоте консервативной системы $\omega_0 j$ справедливы соотношения

$$F_0^j \cos \omega t = B^0 \dot{q}^j; \quad A^0 \dot{q}^j = 0; \quad \omega = \omega_0 j. \quad (11.12.7)$$

Скорости всех точек конструкции и силы синусоидального возбуждения оказываются в фазе (или противофазе) и имеют отличную от нуля лишь синфазную составляющую. При возбуждении собственных колебаний одного тона (если B^0 - диагональная)

$$F_0^j = b_j^0 R_e \tilde{q}_0^j;$$

$$\omega_0^2 J_m \tilde{q}_0^j a_j^0 c_j^0 J_m \tilde{q}_0^j = 0; \quad (11.12.8)$$

$$F_0^l = 0; \quad l = 1, 2, \dots, n; \quad l \neq j,$$

где $R_e \tilde{q}_0^j$ и $J_m \tilde{q}_0^j$ - амплитуды синфазной и квадратурной составляющих; коэффициенты - скалярные величины.

Для уменьшения влияния нелинейности характеристик конструкции измерения проводят на фиксированном уровне, который определяется некоторой усредненной по конструк-

ции величиной - суммой скоростей характерных точек, знаки которых совпадают со знаками синфазной составляющей скорости:

$$U = \sum_k \dot{q}_k \text{sign} R_e \tilde{q}_{0k} = R_e \tilde{U}_0 \times \cos \omega t + J_m \tilde{U}_0 \sin \omega t.$$

На практике подбор сил может осуществляться с помощью итерационной процедуры при наблюдении колебаний характерных точек по экрану электронного индикатора, поскольку признаком выделения тона является отсутствие фазовых сдвигов в отдельных точках конструкции при нулевом сдвиге фазы скорости относительно возбуждения. Подбор сил должен обеспечить получение фигур Лиссажу в виде прямых. Для ускорения процесса выделения колебаний искомого тона целью подбора сил должна стать минимизация сум-

$$\text{мы} \sum_k (J_m \tilde{q}_{0k})^2.$$

Если условия фазового резонанса при постоянном уровне колебаний поддерживаются автоматически, т.е. выполняются соотношения $J_m \tilde{U}_0 = 0$; $R_e \tilde{U}_0 = \text{const}$, процесс выделения искомого тона осуществляется более эффективно.

Для оценки степени выделения тона используется критерий, характеризующий фазовые сдвиги φ_k колебаний отдельных точек, усредненный фазовый сдвиг, который получается суммированием $|\text{tg} \varphi_k|$ с весовыми коэффициентами.

Измерение форм собственных колебаний практически осуществляется измерением распределения $R_e \tilde{q}_0$ или $J_m \tilde{q}_0$ для первой гармоники колебаний на резонансной частоте. В случаях, не требующих большой точности, можно измерять и распределение значений модуля сигнала \dot{q} или q_0 . Анализ по первой гармонике позволяет устранить влияние искажений формы сигнала, вызванных нелинейностью или иными причинами. Многоканальное оборудование, определяющее значения синфазной и квадратурной составляющих сигналов, позволяет непосредственно получать коэффициенты распределения амплитуд исследуемой формы колебаний.

При моногармоническом воздействии заданный диапазон частот исследуемого объекта, как правило, проходят при непрерывном сканировании частоты входного сигнала во времени. При этом важным является рациональный выбор скорости и соответствующего зако-

на сканирования частоты сигнала. При изменении во времени частоты сигнала возбуждения по линейному закону $f(t) = f + \dot{f}(t)$ параметры, характеризующие резонансную кривую системы, изменяются в зависимости от скорости сканирования \dot{f} [15]. При этом максимум динамической АЧХ уменьшается в $(1 - \mu^2)$ раз и сдвигается в направлении изменения частоты на 2μ , а ширина динамической АЧХ возрастает в $2,5\mu^2$ раз (где $\mu = f / \delta^2 f_0^2$ - собственная частота колебаний, δ - декремент колебаний). Если ϵ - допустимое относительное изменение добротности, равное относительному изменению ширины динамической АЧХ, предельно допустимая скорость сканирования

$$|\dot{f}|_{\text{max}} = 1,25\delta^2 f_0 \sqrt{\epsilon}. \quad (11.12.9)$$

Закон сканирования частоты выбирается в зависимости от требований к определяемым характеристикам колебательной системы, причем скорость сканирования не превышает предельного значения (11.12.9).

Если определяется математическое ожидание амплитудных значений гармонического процесса со сканирующей частотой, то применяют нелинейную показательную функцию. При нахождении закона сканирования с целью получения спектральной плотности с постоянным разрешением и допустимой погрешностью используют линейную функцию сканирования. Если спектральный анализ выполняется с постоянным относительным разрешением, то необходим линейный закон непрерывного сканирования по гиперболе возрастающей или убывающей частоты. Тогда постоянное во всем исследуемом диапазоне разрешение по частоте $\Delta f(f) = \text{const}$, а постоянное относительное разрешение по частоте $\Delta f(f) = \gamma f$, $\gamma = \text{const}$.

И м п у л ь с н о е в о з д е й с т в и е в реальных условиях возбуждает в колебательной системе сложные затухающие колебания. Длительность действия ударного импульса является важнейшей характеристикой, которая определяет ширину спектра этого импульса. Обычно принимают, что импульс можно отнести к дельта-функции, т.е. спектр импульса в диапазоне исследуемых частот является практически равномерным [60].

Комплексная частотная характеристика системы

$$H(f) = Y(f, T) / X(f, T), \quad (11.12.10)$$

где $X(f, T)$ и $Y(f, T)$ - текущий спектр процесса соответственно на входе и выходе.

Ввиду равномерности спектра импульс $X(f, T)$ как константа не изменит форму АЧХ системы (11.12.10), поэтому возможно оценивание динамических характеристик системы только на основе измерения и анализа реакции на выходе. Построение корреляционной функции процесса свободных колебаний, выделенного фильтрацией в окрестности каждой собственной частоты, позволяет получить более точные оценки собственной частоты и характеристик демпфирования. При этом длительность импульса не должна превышать $(0,5 \dots 0,1) f_0^{-1}$ (где f_0 - высшая собственная частота системы).

Существенно повысить точность динамических характеристик можно в результате многократного повторения импульсного воздействия и последующего усреднения результатов вычислений. Ступенчатое внешнее воздействие возбуждает в системе, главным образом, низшие собственные частоты колебаний и спадающего с ростом частоты. Для исследования нелинейных колебательных систем при импульсном воздействии применяют метод, основанный на выделении мгновенной амплитуды и мгновенной частоты затухающего процесса, получаемых с помощью интегрального преобразования Гильберта [21].

Случайное узкополосное воздействие сканирующей частотой характеризуется постоянной $\Delta f_i^* = k_0 \Delta f$, $k_c = \text{const}$ либо переменной $\Delta f_i^* = k_0 \gamma f_i$, в пределах которой возможен одновременный спектральный анализ с постоянным разрешением Δf или постоянным относительным разрешением γ ($k_c > 1$). Соответствующая скорость сканирования центральной частоты определяется выражением

$$|\dot{f}_i(t)| \leq \Delta f_i^* / T_i. \quad (11.12.11)$$

Она не должна превышать предельного значения

$$|\dot{f}_i(t)|_{\max} = k_c |\dot{f}|_{\max}.$$

Таким образом, возбуждение случайных колебаний в определенной частотной полосе позволяет сократить длительность развертки частоты по сравнению с гармоническим воздействием в k_c раз и весьма точно оценить уровень наблюдаемых процессов на входе и

выходе. Для анализа таких вибрационных сигналов применяют соответствующие спектральные плотности.

Случайное широкополосное входное воздействие оценивается модулем частотной характеристики системы через спектральные плотности входного G_y и выходного сигнала G_x :

$$|\hat{H}(f)|^2 = G_y(f) / G_x(f). \quad (11.12.12)$$

Частотная характеристика

$$G_{xy}(f) = \hat{H}(f) G_x(f); \quad (11.12.13)$$

$$G_y(f) = \hat{H}(f) G_{yx}(f), \quad (11.12.14)$$

где G_{xy} , G_{yx} - взаимные спектральные плотности.

Выражения (11.12.13) и (11.12.14) определяют полную (комплексную) частотную характеристику системы $H(f) = |H(f)| e^{-j\theta f}$ и содержит как амплитудную, так и фазовую характеристику $\theta(f)$ системы. По формуле (11.12.12) можно найти только амплитудно-частотную характеристику. Каждое из этих выражений в зависимости от условий испытаний дает разную погрешность смещения оценки частотной характеристики [21].

Результаты спектральных расчетов в виде амплитудно-фазово-частотной характеристики системы $H(f)$ позволяет получить собственные частоты колебаний, оценить другие параметры системы.

Для нелинейных систем необходимо решить задачу получения линеаризованной частотной характеристики. Длительность испытаний при использовании широкополосного воздействия

$$T = \epsilon_r^{-2} \Delta f^{-1},$$

где ϵ_r - нормированная стандартная погрешность оценки спектральной плотности; Δf - разрешение спектральной плотности по частоте.

Для механической колебательной системы с n степенями свободы динамические характеристики определяют с помощью параметрического спектрального анализа.

Определение динамических характеристик при неизвестном входе в условиях нормального функционирования объекта (в условиях воздействия естественных возмущений) вы-

полняется только на основании анализа данных на выходе системы. Собственные частоты системы в этом случае находятся по спектральному анализу наблюдаемых колебаний [21].

Для распознавания собственных частот (в отличие от интенсивных возмущений) используют функцию когерентности, характеризующую степень подобия (близости формы) участков спектра двух процессов:

$$\gamma_{xy}^2(f) = \frac{|G_{xy}(f)|^2}{G_x(f)G_y(f)}, \quad (11.12.15)$$

где $|G_{xy}(f)|$ - модуль взаимного спектра.

Методика применения функции когерентности для разделения синусоидальных и случайных колебаний в окрестности собственной частоты предусматривает анализ плоских площадок на собственных частотах.

Вынужденные движения колебательной системы происходят одновременно на различных частотах действия мощных источников детерминированных возмущений и в окрестности собственных частот колебаний конструкции вследствие избирательных свойств резонансной системы при действии на входе плотного случайного спектра от большого числа источников возмущений примерно равной интенсивности [21]. При этом колебания, вызванные источниками девиации частоты, проявляются в спектре в виде острых пиков на основанных частотах и кратных гармоник, а колебания на собственных частотах характеризуются наличием широких и пологих максимумов спектральной плотности.

В соответствии с теоремой об узлах собственных форм колебаний достаточно всего двух точек измерения случайных колебаний конструкции, чтобы определить общее число проявившихся собственных частот колебаний, каждая из которых находится между двумя соседними частотами антрирезонансов, т.е. скачков фазы. Поэтому целесообразно воспользоваться графиком взаимного фазового спектра случайных колебаний двух разнесенных точек конструкции.

С целью построения форм колебаний необходимо разделить конструкции машин на два класса: 1) конструкции, при колебании которых происходит смещение отдельных частей машины как абсолютно твердых тел за счет контактных деформаций в стыках; 2) механические системы, при колебании которых проявляются собственные упругие (продольные, крутильные, изгибные) деформации элементов системы.

Для построения форм колебаний механической системы первого класса по экспери-

ментальным данным необходимо определить амплитудные и фазовые значения колебательных процессов в различных точках конструкции, причем в качестве измеряемой кинематической характеристики колебательного процесса в этих точках может быть либо виброперемещение x , либо виброскорость \dot{x} , либо виброускорение \ddot{x} .

Учитывая случайный характер процесса колебаний, целесообразно воспользоваться аппаратом теории случайных функций. При этом амплитуды и фазы наблюдаемых колебаний определяются как статистические оценки параметров случайного процесса с соответствующей степенью рассеяния.

Задача построения собственных форм колебаний упругих элементов конструкций и соответствующего размещения датчиков такого построения на основе экспериментального исследования вибраций представляется более сложной по сравнению с задачей определения формы колебаний системы твердых тел [21].

Задача размещения датчиков может быть сформулирована в виде задачи об аппроксимации с заданной точностью функции прогиба элемента конструкции на каждой собственной частоте [14]. Поскольку колебания упругих систем описываются волновыми уравнениями, для выявления в рассматриваемом диапазоне n волн необходимо не менее $2n$ датчиков.

11.12.5. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ИСПЫТАНИЯ, ИСПЫТАНИЯ КОНСТРУКТИВНО ПОДОБНЫХ ИЗДЕЛИЙ

Ускоренные и эквивалентные испытания являются весьма актуальными при определении долговечности изделий [37, 47, 51, 52]. Основным критерием ускоренных и эквивалентных испытаний является адекватность накопленных при эксплуатации поврежденных элементов конструкций.

Эквивалентные режимы испытаний проводят, когда время действия эксплуатационных нагрузок велико и воспроизведение аналогичных условий нецелесообразно. Тогда за меньший срок времени осуществляют эквивалентные испытания, подтверждающие работоспособность основных элементов конструкций за время их эксплуатации. Эквивалентные режимы испытаний необходимы, если в естественных условиях не всегда можно воспроизвести вид и характер изменения нагрузок во времени, например, создать случайные режимы нагружения с заданными законами распределения и спектральными плотностями случайных нагрузок. В этих и других случаях необходимо заменить эксплуатационный режим нагружения эквивалентными режимами.

Ускоренные эквивалентные испытания наиболее целесообразно проводить для изделий с большим ресурсом и проверенных спе-

циальными испытаниями на отсутствие критических состояний по узлам и деталям при крайних сочетаниях нагрузок [34]. Специальные испытания не входят в программу эквивалентных и служат для проверки надежности изделия независимо от ресурса.

В теории надежности в качестве критерия эквивалентности используют вероятность безотказной работы. Параметры эквивалентных режимов нагружения выбирают в соответствии с принципом равных вероятностей [51].

$$P(t_1, \xi_1) = P(t_2, \xi_2), \quad (11.12.16)$$

где $P(t_1, \xi_1)$ и $P(t_2, \xi_2)$ - вероятности безотказной работы устройств в течение времени t_1 в режиме ξ_1 и в течение времени t_2 в режиме ξ_2 . Режим работы ξ характеризуется некоторым набором параметров. Надежность устройства зависит от выработанного ресурса, а в качестве меры ресурса используют функцию

$$r(t, \xi) = \int_0^t \lambda(\tau, \xi) d\tau,$$

где $\lambda(\tau, \xi)$ - интенсивность в режиме ξ .

Метод равных вероятностей можно представить в следующей форме:

$$\int_0^{t_1} \lambda(\tau, \xi_1) d\tau = \int_0^{t_2} \lambda(\tau, \xi_2) d\tau. \quad (11.12.17)$$

Метод равных вероятностей (11.12.18), (11.12.17) применим для режимов с функциональной зависимостью времени отказов:

$$\tau_1(\xi_1) = \varphi[\tau_2(\xi_2)]. \quad (11.12.18)$$

В соответствии с ограничением (11.12.18) порядок организации эквивалентных испытаний следующий.

1. Проводятся предварительные испытания с целью установкой зависимости между временем отказов в эксплуатационном и форсированном режимах. Одна часть изделий испытывается до отказа в эксплуатационном режиме, другая - сначала также в эксплуатационном режиме, но при отказе каждого изделия любое наугад взятое неотказавшее изделие переводится в форсированный режим. Таким образом, половина второй выборки откажет в нормальном режиме, а половина - в форсированном.

2. Устанавливается зависимость между моментами отказов, из которой определяется время ускоренных испытаний. Затем в течение

этого времени проводятся испытания устройств в форсированном режиме.

Описанный метод исследований мало пригоден для изделий с высокой вероятностью безотказной работы, поскольку не позволяет определить функциональную зависимость (11.12.18) вследствие высокой вероятности безотказной работы в нормальном режиме. Необходим критерий эквивалентности, который связан с количественными параметрами, описывающими процесс накопления повреждения. Таким критерием может быть совпадение накопленных повреждений изделия при испытании в двух различных режимах, а в качестве количественной меры - необратимая часть энтропии. Для эквивалентных режимов совпадут накопленные энтропии, т.е.

$$\int_0^{t_1} \dot{S}(\xi_1, \tau) d\tau = \int_0^{t_2} \dot{S}(\xi_2, \tau) d\tau. \quad (11.12.19)$$

Поскольку у каждого элемента конструкции может быть своя скорость энтропии, условие эквивалентности (11.12.19) в общем виде

$$\int_0^{t_1} \langle \dot{S}(\xi_1, \tau) \rangle d\tau = \int_0^{t_2} \langle \dot{S}(\xi_2, \tau) \rangle d\tau. \quad (11.12.20)$$

Верхний $\langle \cdot \rangle$ индекс означает математическое ожидание скоростей роста энтропии.

Из выражения (11.12.20) можно определить время ускоренных испытаний t_2 (ξ_2 - форсированный режим, t_1 - время эксплуатации, ξ_1 - эксплуатационный режим). Для $\langle \dot{S}(t) \rangle$

$$t_1 \langle \dot{S}(\xi_1) \rangle = t_2 \langle \dot{S}(\xi_2) \rangle; \quad (11.12.21)$$

$$t_2 = t_1 \langle \dot{S}(\xi_1) \rangle / \langle \dot{S}(\xi_2) \rangle >^{-1} \quad (11.12.22)$$

либо

$$t_2 = k_y t_1,$$

где k_y - коэффициент ускорения.

В общем случае

$$t_2 = \varphi(t_1). \quad (11.12.23)$$

Использование предлагаемого критерия эквивалентности, называемого термодинамическим, позволяет расчетным путем назначать режимы эквивалентных испытаний даже для единичных изделий, при этом можно не проводить испытания до отказа изделия.

В области допустимых режимов времени безотказной работы величины τ_1 и τ_2 связаны той же функциональной зависимостью, что и t_1 и t_2 эквивалентных испытаний (11.12.23). Если время безотказной работы в различных режимах связано функциональной зависимостью, длительности нагружения t_1 и t_2 в режимах ξ_1 и ξ_2 могут быть найдены согласно методу равных вероятностей (11.12.16). В области допустимых режимов, в которой критическая энтропия является постоянной величиной, термодинамический (11.12.20) и статический (11.12.17) принципы эквивалентности тождественны, а интенсивность отказов можно определить по формуле

$$\lambda(t, \xi) = \dot{S}(t_1, \xi) > S_*^{-1}, \quad (11.12.24)$$

где S_* - критическое приращение энтропии, характеризующее момент наступления отказа.

Из выражения (11.12.24) следует, что если вид зависимости для скорости роста энтропии остается неизменным, то в допустимой области режимов нагружения сохраняется вид зависимости распределения времени безотказной работы, который подчиняется экспоненциальному закону, и в этом случае выполняется принцип линейного суммирования повреждений. Для n режимов нагружения

$$\sum \lambda_i t_i = 1. \quad (11.12.25)$$

где t_i - математическое ожидание длительности нагружения режимом ξ_i .

Сложные механические системы, как правило, содержат большое число разных конструктивных элементов или узлов, реакция которых на воздействие механических вибраций существенно различна. Многие конструктивные изделия с точки зрения их реакции на вибрационные и ударные воздействия можно представить в виде системы масс, пружин и демпферов. Эквивалентные механические системы можно представить как демпфированную линейную упругомассовую систему с определенной механической добротностью Q и резонансной частотой f_0 . Идеализированная модель изделия может быть получена путем объединения аналогичных, совершенно не зависящих одна от другой элементарных упругомассовых моделей с различными резонансными частотами f_0 , добротностью Q и ускорением при усталостной нагрузке a .

Условия эквивалентности испытания конструктивных изделий в общем виде можно сформулировать следующим образом: два ис-

пытательных или эксплуатационных воздействия считаются эквивалентными, если они у всех конструктивно подобных изделий вызывают одинаковые повреждения, т.е. справедливо следующее равенство [107]:

$$S_I(t_I, f_0, Q, a) = S_{II}(t_{II}, f_0, Q, a), \quad (11.12.26)$$

где S_I, S_{II} - степени повреждения двух режимов.

Параметры эквивалентности воздействий мало зависят от уровня воздействия и ускорения при усталостной нагрузке. В этом случае ускорения для всех конструктивных элементов соответствуют максимальному повреждающему воздействию, когда соблюдается следующее равенство (второе условие эквивалентности):

$$a_{\max I}(f_0, Q, a) = a_{\max II}(f_0, Q, a), \quad (11.12.27)$$

где a_{\max} - максимальное повреждающее воздействие.

Условие (11.12.26) может применяться для отдельных испытуемых как конструктивных деталей, так и машин и приборов. В последнем случае взаимосвязь степеней повреждения S_I и S_{II} можно представить конкретными соотношениями:

$$S_{11}(t_1, f_{01}, Q_1, a_{11}) = S_{1II}(t_{1II}, f_{01}, Q_1, a_{1II});$$

$$S_{21}(t_1, f_{02}, Q_2, a_{21}) = S_{2II}(t_{2II}, f_{02}, Q_2, a_{2II});$$

.....

$$S_{r1}(t_1, f_{0r}, Q_r, a_{r1}) = S_{rII}(t_{rII}, f_{0r}, Q_r, a_{rII}),$$

где r - число конструктивных деталей в машине или приборе.

Аналитические степени повреждения S_{II} и S_{III} определяются на основе использования теории усталостного разрушения материалов [19, 107]:

$$S_i = n_i / N_i, \quad (11.12.28)$$

где n_i - число циклов изменения нагрузки i -й конструктивной детали; N_i - общее число циклов изменения нагрузки, действующей на i -ю конструктивную деталь до ее разрушения.

В случае действия на конструктивную деталь l нагрузок, различных по величине, степень повреждения S_l определяется как сумма

частичных степеней повреждения S_{ik} , где $k = 1, 2, \dots, l$, от этих нагрузок:

$$S_i = \sum_{k=1}^l S_{ik} = \sum_{k=1}^l \frac{n_{ik}}{N_i}, \quad (11.12.29)$$

где $i = \overline{1, r}$.

Разрушение i -й конструктивной детали наступает при $S_i = 1$.

В выражениях (11.12.28) и (11.12.29) число циклов N_i определяется на основе учета усталостной характеристики металлов, описываемой кривой Велера, которая представляет собой функцию механических повреждений σ_i , возникающих в металле, и числа циклов N_i изменения нагрузки до момента разрушения конструктивной детали. В двойных логарифмических координатах $(\lg \sigma_i, \lg N_i)$ выражение усталостной характеристики металлов имеет вид

$$N_i(\sigma_i) \begin{cases} \infty & \text{при } \sigma_i < \sigma_{iD}; \\ N_{0i} \frac{1}{\left(\frac{\sigma_i}{\sigma_{iD}}\right)^m} & \text{при } \sigma_i \geq \sigma_{iD}, \end{cases} \quad (11.12.30)$$

где σ_{iD} - механическое напряжение, соответствующее пределу выносливости металла i -й конструктивной детали; N_{0i} - число циклов нагрузки, соответствующее точке перелома кривой усталости (при $\sigma_i = \sigma_{iD}$); m - показатель угла наклона левой ветки кривой Велера.

Согласно кривой Велера степень повреждения S_{ik} конструктивной детали зависит от числа циклов n_{ik} , которые соответствуют амплитудам механических напряжений σ_{aik} , возникающих в металле детали при действии вибронгрузок $\xi_k(t)$, и от числа предельных циклов N_i , соответствующих амплитудам предельных механических напряжений σ_{aDi} . Между механическими напряжениями σ_{ai} и вибрационными ускорениями (виброускорениями) a_{aik} существует взаимосвязь [107]

$$a_{aik} = \chi \sigma_{aik};$$

$$a_{aiD} = \chi \sigma_{aiD}; \quad (11.12.31)$$

$$\chi_i = \sigma_{icT} / (m_i g),$$

где a_{aiD} - предельно-допустимые для i -й конструктивной детали виброускорения; σ_{icT} - механическое напряжение, возникающее в i -й конструктивной детали от действия силы $m_i g$; g - ускорение свободного падения.

Используя соотношение (11.12.31), можно представить степень повреждения S_{ik} конструктивной детали относительно амплитуд a_{aik} , a_{aiD} виброускорений, частоты ω_k , времени воздействия вибронгрузок t_I и t_{II} и сроков службы T_{SII} и T_{SI} . При этом следует учитывать возможные случаи постоянства и изменения амплитуд виброускорений нагрузок.

Предельное число циклов вибронгрузки N_i с учетом частоты ω_k и срока службы T_{SI} конструктивной детали выражается соотношением

$$N_i = \frac{1}{2\pi} \omega_k T_{SI}. \quad (11.12.32)$$

С учетом выражений (11.12.30), (11.12.32) получено

$$T_{SI}(a_a) \begin{cases} \infty & \text{при } a_{aik} < a_{aiD}; \\ N_0 \frac{1}{f_k \left(\frac{a_{aik}}{a_{aiD}}\right)^m} & \text{при } a_{aik} \geq a_{aiD}. \end{cases} \quad (11.12.33)$$

При действии на изделие случайных вибронгрузок, характеризующихся изменением амплитуд a_{aik} и частот ω_k по случайным законам, степень повреждения конструктивных деталей и изделий определяется в вероятностной форме

$$P_{ik} = P \left[S_{ik} = \frac{n_{ik}}{N_i} \leq 1 \right];$$

$$P_i = P \left[\sum_{k=1}^{lk} S_{ik} = \sum_{k=1}^{lk} \frac{n_{ik}}{N_i} \leq 1 \right]; \quad (11.12.34)$$

$$P = P[S \leq 1],$$

где P_{ik} - вероятность степени повреждения i -й конструктивной детали при действии на нее

k -й гармонической вибранагрузки; P_i - вероятность повреждения конструктивной детали при действии на нее ряда гармонических вибранагрузок; $P[S]$ - вероятность повреждения изделия при действии на него вибранагрузок.

При формировании метода эквивалентного воспроизведения случайных вибранагрузок необходимо удовлетворить условиям (11.12.34), а более точно - условию (11.12.26), что практически невозможно. Для учета наиболее существенных условий следует воспользоваться некоторыми соображениями по определению плотности распределения вероятности того, что амплитуда вибранагрузок $a_a(t)$ находится в определенном интервале ($a_{aj} \div a_{aj+1}$, $f = 1, 2, \dots$), т.е. выполняется условие $a_{aj} \leq a_a \leq a_{aj+1}$, где $a_{aj+1} - a_{aj} = \Delta a_{aj} > 0$, с некоторой вероятностью

$$P[a_{aj} \leq a_a \leq a_{aj+1}] = \Delta P_j(a_a).$$

Вероятность $\Delta P_j(a_a)$ можно выразить через относительное время Δt пребывания огибающей $a_a(t)$ в интервале Δa_{aj} в таком виде [107]:

$$\Delta P_j(a_a) = \Delta t / T_\xi, \quad (11.12.35)$$

где T_ξ - временной интервал наблюдения.

Плотность распределения вероятности $\Delta P_j(a_a)$ в промежутке Δa_{aj} с учетом (11.12.35) выражается соотношением

$$P_j(a_a) = \frac{\Delta P_j(a_a)}{\Delta a_{aj}} = \frac{\Delta t}{\Delta a_{aj} T_\xi}. \quad (11.12.36)$$

Используя соотношение (11.12.36), представляем число циклов нагружения в интервале амплитуд Δa_{aj} в виде

$$\Delta n_j = f(t) T_\xi P_j(a_a) \Delta a_{aj}.$$

Функция изменения частоты вибранагрузки $f(t)$ может носить детерминированный и случайный характер. Произведение $f(t) T_\xi$ - число циклов $n(t)$ вибранагрузки за время T_ξ . При гармонической вибранагрузке число циклов $n(t) = n = f_k T_\xi$ является линейной зависимой величиной только от интервала наблюдения T_ξ .

Если вибранагрузка имеет переменную частоту, то при определении числа циклов Δn_j можно воспользоваться усреднением частоты в интервале T_ξ . Для случайной функции $f(t)$ среднее значение

$$m_f = \int_0^{T_\xi} f(t) P(f) df, \quad (11.12.37)$$

где $P(f)$ - плотность вероятности распределения частоты вибранагрузки.

С учетом (11.12.37)

$$\frac{\Delta n_j}{m_n} = P_j(a_a) \Delta a_{aj}, \quad m_n = m_f T_\xi. \quad (11.12.38)$$

Из рассмотрения конструктивной детали изделия следует, что при $m_n = N_i$ выражение (11.12.38) соответствует аналитическому описанию частичного повреждения $\Delta S_{ij} = \Delta n_j / N_i$ конструктивной детали для вибранагрузок в интервале изменения амплитуд $a_{ai} - a_{ai+1}$. Однако в реальных условиях эксплуатации или испытаний изделий условие $m_n = N_i$ выполняется не всегда.

Если рассматривать m интервалов изменения ускорений вибранагрузок, то степень повреждения i -й конструктивной детали с учетом гипотезы Майнера

$$S_i = \sum_{j=1}^m \Delta S_{ij} = \frac{T_\xi}{T_{Si}} \sum_{j=1}^m P_j(a_a) \Delta a_{aj} \approx \frac{T_\xi}{T_{Si}} P_i(a_a) \text{ при } i = \overline{1, r}, \quad (11.12.39)$$

где $P_i(a_a)$ - закон распределения вероятностей ускорений вибранагрузок, действующих на i -ю конструктивную деталь.

При непрерывном изменении огибающей амплитуд виброускорений выражение (11.12.39) принимает вид

$$S_i = T_\xi \int_0^{a_{a \max}} \frac{P(a_a)}{T_{Si}(a_a)} da_a,$$

где $a_{a \max}$ - максимальная амплитуда виброускорения, действующего на i -ю конструктивную деталь.

Поскольку разрушение конструктивной детали наступает при условии $S_i = 1$, время действия вибранагрузки на эту деталь до момента ее разрушения

$$T_{\xi S_i} = \left[\int_0^{a_{\max}} \frac{P(a_a)}{T_{S_i}(a_a)} da_a \right]^{-1} \quad (11.12.40)$$

При случайном характере вибранагрузок амплитуду a_{aif} можно определить, используя выражение спектральной плотности ускорений $G_{\xi i}^I(\omega)$:

$$\bar{a}_{aif} = \left(2 \int_{\omega_0}^{\omega_k} G_{ai}^I(\omega) d\omega \right)^{0.5};$$

$$\omega_0 = 2\pi f_0; \quad \omega_k = 2\pi f_k, \quad (11.12.41)$$

где $f_0 - f_k$ - диапазон частот вибранагрузок, действующих на конструктивную деталь.

С учетом (11.12.40), (11.12.33), (11.12.37) и (11.12.41)

$$T_{\xi S_i} = N_0 a_{aiD}^m \left\{ \int_0^{T_k} f(t) P(f) df \times \int_{a_{aiD}}^{a_{ai\max}} P(a_a) \left[\int_{\omega_0}^{\omega_k} G_{ai}^I(\omega) d\omega \right]^{m/2} da_a \right\}^{-1}, \quad (11.12.42)$$

где $T_{\xi S_i}$ - время действия на i -ю деталь случайной нагрузки до ее разрушения.

Из уравнения (11.12.42) следует, что для определения времени испытания конструктивной детали должны быть известны кривая усталости детали, вероятностные и спектральные характеристики частоты и амплитуды вибранагрузок, действующих на эту деталь. Выражение (11.12.42) можно представить в виде

$$T_{\xi S_i} = T_{S_i} / K_c,$$

где K_c - коэффициент влияния на повреждение детали условий вибранагружения.

Коэффициент пересчета срока службы T_{S_i} конструктивной детали при действии на нее гармонической вибранагрузки с постоянными f_k и a_{aik} к сроку службы $T_{\xi S_i}$

$$K_c = \frac{1}{a_{aik}^m f_k} \int_0^{T_k} f(k) P(f) df \int_{a_{aiD}}^{a_{a\max}} P(a_a) \times \left[\int_{\omega_0}^{\omega_k} G_{ai}^I(\omega) d\omega \right]^{m/2} da_a. \quad (11.12.43)$$

Если считать эквивалентными условия нагружения при случайной и гармонической вибрации, то $T_{\xi S_i} = T_{S_i}$, $K_c = 1$, а

$$a_{aik}^m = (x_i \sigma_{aik})^m = \int_{a_{aiD}}^{a_{ai\max}} P(a_a) \times \left[\int_{\omega_0}^{\omega_k} G_{ai}^I(\omega) d\omega \right]^{m/2} da_a. \quad (11.12.44)$$

На основании (11.12.44) можно сделать вывод, что воспроизведение при испытании необходимых виброускорений a_{aik} определяется пределами величин a_{aiD} , $a_{ai\max}$, ω_0 , ω_k , вероятностными характеристиками

$P(a_a)$ и $G_{ai}^I(\omega)$. При испытаниях конструктивно подобных изделий имеет место подобие относительных функций напряжений [24] $f(x, y, z) = \sigma(x, y, z) / \sigma_{\max}$.

Так как неравномерное распределение напряжений и масштабный фактор не влияют на вид кривой усталости в относительных единицах, для определения долговечности одной конструкции по результатам испытания другой, изготовленной из того же материала и по той же технологии, необходимо получить зависимость между характером распределения напряжений, абсолютными размерами и пределом выносливости $\sigma_{-1, \infty}$ конструкции на бесконечности. Эту зависимость можно найти, используя статистическую теорию подобия усталостного разрушения. Для оценки долговечности элементов и узлов машин необходима информация о несущей способности (сопротивлении усталости) наиболее нагруженных деталей, которая может быть получена путем проведения усталостных испытаний образцов или деталей и построения кривых усталости.

Для описания кривых усталости применяют различные аналитические зависимости числа циклов N до разрушения от напряжения σ цикла. На практике наибольшее распро-

странение получило степенное уравнение кривой усталости

$$\sigma^m N = \sigma_{-1}^m N_0 = \text{const},$$

где m, σ_{-1}, N_0 - параметры уравнения, которое используется в расчетах на сопротивление усталости деталей из черных металлов и сплавов.

Для описания кривых усталости деталей и конструкций из легких алюминиевых сплавов целесообразно использовать обобщенное уравнение в относительных напряжениях [70]

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_{-1} + A [\lg(N + N_1)]^{-\alpha}, \quad (11.12.45)$$

где $\bar{\sigma}_{-1} = \sigma_{-1} / \sigma_{-1,10}$ - отношение предела выносливости для неограниченной базы ($N = \infty$) к пределу выносливости на базе 10^7 циклов; N_1, A, α - параметры обобщенной кривой усталости.

В ряде случаев для описания кривых усталости удобно использовать уравнение, предложенное Вейбуллом [86]:

$$(\sigma - \sigma_{-1})(N + N_1)^\beta = B, \quad (11.12.46)$$

где N_1, β, B - параметры уравнения.

Для получения параметров кривых усталости проводят натурные испытания конструкции или специальных образцов на нескольких уровнях нагружения.

Неоднородность внутреннего строения конструкционных материалов, технология изготовления и условия испытания образцов вызывают разброс результатов измерений. Применение методов математической статистики для обработки результатов измерений позволяет оценить точность и надежность получаемых характеристик, а также установить необходимый объем и оптимальный порядок испытаний [14, 47, 70].

Основными задачами статистической обработки результатов механических испытаний являются определение среднего значения, рассматриваемого характера и оценки точности его вычисления. В качестве меры рассеяния используют дисперсию или среднее квадратическое отклонение и коэффициент вариации. Поскольку механические характеристики изучают при испытании ограниченного числа образцов, то соответствующие числовые характеристики отличаются от так называемых генеральных характеристик, которые получают по результатам испытаний бесконечно большого числа образцов.

Вероятность того, что \bar{x} - среднее арифметическое значение механической характеристики, полученной в результате испытания n образцов, отличается от истинного значения x на значение, меньшее, чем Δx :

$$\gamma = P(\bar{x} - \Delta x < x < \bar{x} + \Delta x). \quad (11.12.47)$$

Тогда ширина доверительного интервала (11.12.47) характеризует точность, а доверительная вероятность γ - надежность оценки неизвестного параметра x с помощью выборочного среднего значения \bar{x} . Чем выше требуемая надежность, тем больше при том же объеме выборки должен быть соответствующий доверительный интервал.

11.12.6. ВИБРАЦИОННЫЕ ИСПЫТАНИЯ ИЗДЕЛИЙ ПРИ СЛУЧАЙНЫХ НАГРУЗКАХ

В процессе эксплуатации транспортные средства, летательные аппараты, энергетическое оборудование подвергаются воздействию интенсивных случайных вибраций [8, 10, 15]. Условия работы элементов конструкций в эксплуатации не могут быть в полной мере отражены при испытаниях регулярным нагружением. В связи с этим в практике виброиспытаний широко применяют программное блочное нагружение [35], представляющее собой периодическое повторение заданного блока нагружения, состоящего из ступеней с различными амплитудами переменной нагрузки и фиксированным числом циклов нагружения на каждой ступени.

Формирование режима блочного нагружения осуществляется по заданным характеристикам эксплуатационной нагруженности. Анализ результатов испытаний при случайном и блочном нагружениях свидетельствует о том, что случайному нагружению соответствует меньшая циклическая долговечность, чем при "эквивалентном" блочном нагружении.

Вибрационные испытания на случайную нагрузку отличаются между собой, в первую очередь, величиной и характером внешних воздействий на испытуемый объект и разделяются на следующие виды [2, 14]:

- случайной широкополосной вибрацией;
- случайной узкополосной вибрацией с переменной средней частотой спектра;
- полигармонической вибрацией;
- натурной вибрацией.

Наиболее полно требованию максимального приближения испытаний к реально существующим условиям работы отвечают испытания случайной широкополосной вибрацией. Воспроизведение широкополосного нагружения осуществляется по подобию спектральных

плотностей, что при условии нормальности случайных эксплуатационных вибраций полностью задает случайное возбуждение. Под критерием подобия спектральных плотностей используют следующие выражения:

$$\varepsilon_1 = \min |G_z(\omega) - G_y(\omega)|; \quad (11.12.48)$$

$$\varepsilon_2 = \min \int_{-\infty}^{\infty} |G_z(\omega) - G_y(\omega)|^2 d\omega, \quad (11.12.49)$$

где $G_z(\omega)$ - спектральная плотность эксплуатационной вибрации, подлежащей имитации; $G_y(\omega)$ - спектральная плотность сформированного случайного процесса.

Критерий (11.12.48) оценивает равномерное приближение спектральной плотности формируемого процесса к заданной. Критерий (11.12.49) оценивает среднее распределение

мощности формируемого процесса по частотному диапазону. Традиционная схема построения аналоговых автоматических систем управления спектральной плотностью широкополосных случайных вибраций показана на рис. 11.12.5, а. Сигнал генератора белого шума $ГБШ$ поступает на набор узкополосных формирующих фильтров $\Phi\Phi 1 - \Phi\Phi N$. Фильтры разделяют широкополосный сигнал от $ГБШ$, имеющий равномерную спектральную плотность в рабочем диапазоне частот, на отдельные узкополосные случайные процессы с взаимоприлегающими полосами частот.

Уровень сигнала в каждой полосе частот управляется усилителем с переменным коэффициентом усиления $УПК$, который в свою очередь управляется цепью отрицательной обратной связи.

Поскольку система прямоугольных фильтров без перекрытия нереализуема, для уменьшения взаимного влияния каналов формирователя в виброиспытательной системе $ВИ$

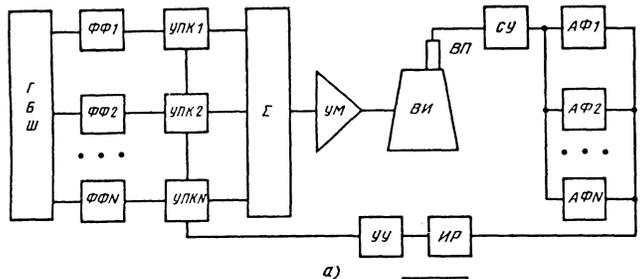
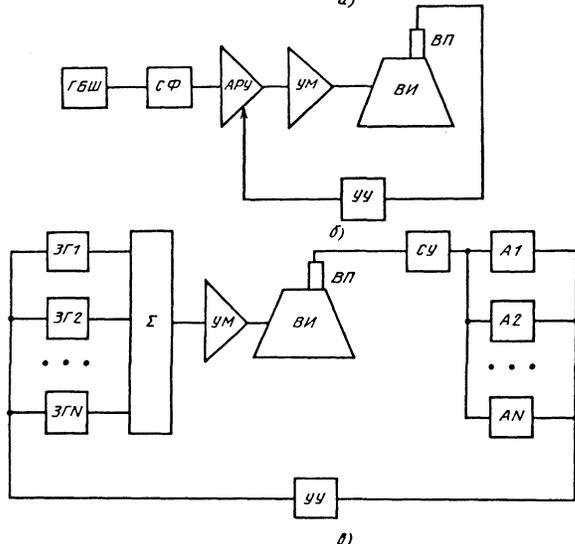


Рис. 11.12.5. Схема аналоговой автоматической системы испытаний:

а - широкополосной случайной вибрацией; б - узкополосной случайной вибрацией; в - полигармонической вибрацией; $ГБШ$ - генератор белого шума; $\Phi\Phi 1 - \Phi\Phi N$ - формирующие узкополосные фильтры; $УПК 1 - УПК N$ - усилители с переменным коэффициентом усиления; Σ - сумматор; $УМ$ - усилитель мощности; $ВИ$ - виброиспытательная система; $ВП$ - вибропреобразователь; $АФ 1 - АФ N$ - анализирующие фильтры; $УУ$ - управляющее устройство; $ИР$ - измеритель рассогласования; $СФ$ - сопровождающий фильтр; $ЗГ 1 - ЗГ N$ - генераторы синусоид; $СУ$ - согласующий усилитель; $А 1 - А N$ - анализатор гармоник



используют два независимых генератора белого шума. Один их них возбуждает формирующие фильтры с нечетными, а второй - с четными номерами. При этом формирующее звено строится из фильтров, частотные характеристики которых подобраны таким образом, чтобы существенное влияние на работу системы оказывали только соседние каналы [11]. Благодаря этому исчезает взаимная корреляция между соседними каналами, что повышает точность воспроизведения спектра.

В состав системы входит также измеритель рассогласования ИР и управляющее устройство УУ, которое воздействует на регулируемые параметры таким образом, чтобы привести значение спектральной плотности в контролируемой полосе частот к заданному. Функции управляющего устройства УУ (вместе с функциями измерителя рассогласования) могут быть возложены на ЦВМ, образуя таким образом гибридную цифроаналоговую систему формирования спектра широкополосных случайных вибраций (например, автоматизированная система имитации эксплуатационных вибраций АСИЭВ).

Подход к формированию широкополосной нагрузки, имитирующей эксплуатационную вибрацию, в виде суммы зависимых случайных процессов [9] основан на разложении корреляционной функции моделирующего процесса в ряд по ортонормированной или биортонормированной системам функций. Эти системы строятся на основе специально выбираемых базисов. При этом учитывается реальная форма спектральных плотностей суммируемых зависимых процессов. По сравнению с традиционными методами повышается точность формирования энергетического спектра и уменьшается (примерно в 10 раз) число выделяющих фильтров. Полученные результаты являются методологической основой для построения цифровых и гибридных звеньев в системах формирования широкополосных случайных вибраций.

Для решения задач формирования испытательного воздействия и обработки информации, получаемой в результате вибрационных испытаний, широко применяют ЭВМ. Цифровые системы обладают большой гибкостью при реализации алгоритмов идентификации, управления, спектрального анализа и генерирования случайных процессов. Генерирование случайного испытательного воздействия проводится на основе скалярной модели Райса-Пирсона [2, 7]:

$$Y(k\Delta t) = \sum_{l=0}^{\alpha} A(l\Delta\omega) \cos[l\Delta\omega k\Delta t + \varphi(l\Delta\omega)], \quad (11.12.50)$$

где $\Delta\omega$ - шаг квантования по частоте; Δt - шаг квантования по времени; l - число гармоник.

Амплитуда определяется требуемой спектральной плотностью

$$A(l\Delta\omega) = \sqrt{2G(l\Delta\omega)\Delta\omega},$$

$\varphi(l\Delta\omega)$ - случайная фаза, равномерно распределенная в диапазоне $[0, 2\pi]$.

Непосредственное вычисление ординат временного ряда по формуле (11.12.50) требует значительных затрат машинного времени. Для ускорения вычислений применяют алгоритм быстрого преобразования (БПФ) Фурье. Поскольку для вычисления $Y(k\Delta t)$ необходим

переход от частотной области $G_y(\omega)$ во временную, применяют обратное быстрое преобразование Фурье (ОБПФ) [7]. Использование разложения Райса-Пирсона для формирования сигнала возбуждения в цифровых автоматических системах управления (АСУ) виброиспытаниями, по существу, эквивалентно замене случайного широкополосного процесса полигармоническим. При этом модуль комплексных коэффициентов Фурье определяется по заданной спектральной плотности, а фаза представляет собой независимые равномерно распределенные случайные числа в интервале $[0, 2\pi]$.

Описанный метод цифрового моделирования широкополосных случайных вибраций не является единственным. В последнее время разработаны системы управления с применением для синтеза и анализа процессов методов цифровой фильтрации. Алгоритмы цифровой фильтрации, реализованные на специальных процессорах, обеспечивают возможность управления действительно в реальном масштабе времени.

Цифровые методы АСУ виброиспытаниями получают все более широкое распространение. Вместе с тем они являются достаточно сложными, предъявляют повышенные требования к алгоритмам моделирования по быстродействию. В настоящее время эти системы активно развиваются, но еще не являются широкодоступными.

Метод испытаний случайной узкополосной вибрацией с переменной во времени средней частоты широко применяют на практике. Он имеет следующие преимущества [59]: возможность получения нагрузки значительно уровня с помощью менее мощного оборудования; возможность применения более простой аппаратуры управления. В основе метода лежит замена широкополосного эксплуатационного вибропроцесса узкополосным более

интенсивным процессом с медленной перестройкой по частоте узкополосного формирующего фильтра. Этот метод испытаний применяют в основном при усталостных испытаниях, когда требуется идентичность распределения максимумов и минимумов нагрузки при узко- и широкополосном спектре вибраций [34]. Такая идентичность имеет место в том случае, когда средняя частота ω_0 изменяется по логарифмическому закону, а среднеквадратическое значение виброускорения пропорционально корню квадратному частоты $\sqrt{\omega_0}$.

Большинство промышленных виброиспытательных систем испытаний случайной узкополосной вибрацией построены по схеме, приведенной на рис. 11.12.5, б [34]. Задающий генератор состоит из генератора белого шума ГБШ и сопровождающего фильтра СФ, системы автоматического регулирования усиления АРУ с сигналом управления от управляющего устройства УУ и вибропреобразователя ВП на испытываемом изделии. Случайное напряжение с нормальным законом распределения проходит через полосовой фильтр с переменной во времени центральной частотой ω_0 . Скорость сканирования регулируется в широких пределах. Среднее квадратическое значение ускорения узкополосной вибрации в контрольной точке стабилизируется с помощью АРУ. К недостаткам метода следует отнести невозможность получения нагрузок с изменяющимся уровнем мощности в широкой полосе частот.

В ряде случаев при испытаниях применяют метод моделирования реального вибрационного процесса полигармоническим

$$Y(t) = \sum_{k=1}^N A_k \sin(\omega_k t + \varphi_k) \text{ со сравнительно}$$

небольшим числом N гармонических составляющих. Системы воспроизведения полигармонического сигнала при испытаниях на воздействие случайной нагрузки используются, как правило, для проведения вибропрочностных испытаний. Реакция объекта на узкополосную случайную вибрацию подчиняются таким же закономерностям, как и на действие соответствующей гармоники, а реакция на совокупность узкополосных воздействий соответствует реакции объекта на несколько гармоник. Спектр при этом приближается к дискретному. Используя в качестве параметра подобия спектральную плотность, можно формировать близкий к гауссову моделирующий полигармонический процесс.

В тех случаях, когда одномерное распределение случайных вибраций отлично от гауссова, может быть использована методика имитации, в основу которой положена близость

центральных моментов одномерных распределений заменяемого и заменяющего процессов. На ее основе возможно формирование полигармонического процесса с отличным от гауссова симметричным распределением вероятности мгновенных значений. В качестве параметра моделирования можно использовать число выбросов случайных процессов [56]. Амплитуды гармоник определяются на основе минимизации функции расхождения числа выбросов сравниваемых процессов на одинаковых уровнях. Периодический полигармонический процесс может быть применен для имитации случайных вибраций с произвольным несимметричным распределением мгновенных значений [22]. В качестве критериев имитации используется близость моментных характеристик и спектральных характеристик заменяемого и заменяющего процессов. Периодический процесс применяется также для имитации нестационарных по спектральным характеристикам случайных процессов.

Замкнутая аналоговая система управления при полигармоническом возбуждении (рис. 11.12.5, в) состоит из нескольких генераторов синусоид ЗГ1-ЗГ N , сумматора Σ , тракта УВИ (усилитель мощности, вибростенд, изделие), анализатора гармоник А1-АН и управляющего устройства, которое поддерживает уровень амплитуд гармоник ЗГ1-ЗГ N . Эта система позволяет формировать моделирующий процесс с несоизмеримыми частотами. Принципы построения аналоговых систем имитации основаны на полигармоническом возбуждении с кратными частотами [2].

Полигармоническая модель процесса возбуждения отличается от широкополосной. Устранить дискретность полигармонических колебаний можно, используя в качестве процесса возбуждения смешанные (комбинированные) колебания.

Испытание смешанной вибрацией занимает промежуточное положение между испытаниями полигармоническим и случайным воздействием. Реализация его не намного сложнее, чем испытаний на детерминированное воздействие, но вместе с тем значительно проще, чем испытаний на случайные вибрации. Поскольку специально разработанные системы для воспроизведения смешанной вибрации отсутствуют, то этот метод может быть реализован на основе серийно выпускаемых генераторов гармоник и генераторов белого шума. Так, для проведения испытаний методом качающейся частоты синусоидального сигнала при наложении на него широкополосного случайного процесса с заданной спектральной плотностью фирма Брюль и Кьер [59] рекомендует гармонический сигнал формировать управляющим генератором ЗГ типа 1047, а случайный - с помощью автоматического

выравнивателя - анализатора типа 3380. В этом случае в качестве испытательного воздействия используется аддитивная смесь детерминированных и случайных вибраций.

Возможна имитация стационарных случайных вибраций с отличным от гауссовского одномерным распределением мгновенных значений аддитивной смесию полигармонических и случайных колебаний [26]. Такая методика позволяет формировать комбинированное воздействие с близкими к эксплуатационным спектральной функции и центральными моментами одномерного распределения. Для имитации случайных вибровоздействий может быть использована и мультипликативная смесь детерминированных и случайных колебаний.

Определенный интерес представляет собой способ имитации вибрации воспроизведением записей реализации реальных вибропроцессоров [2, 4, 14]. При таком подходе возникают проблемы обеспечения достоверности испытаний и точного воспроизведения записей реализации реальных вибраций на вибростенде.

Метод испытаний с воспроизведением реальных записей вибрационных процессов позволяет получить наиболее точную оценку долговечности (усталостной) в условиях эксплуатации. Однако такие испытания проводят редко. При таких испытаниях объект нагружается всеми нагрузками спектра, в том числе и очень малого уровня с большой повторяемостью и, как следствие, база испытаний с учетом коэффициентов запаса получается очень большой [35].

Возможность применения самых разнообразных методов формирования случайных нагрузок при усталостных испытаниях привела к появлению большого числа экспериментальных данных, сопоставимость которых резко ухудшилась по сравнению с данными по усталости, полученными при регулярном нагружении. Это обусловило необходимость типизации программ нагружения [67]. Типизированные программы нагружения используют в авиа- и автомобилестроении в зависимости от условий работы элементов конструкции. Общим для них является типизация (объединение в группу) элементов, подвергающихся в эксплуатации нагрузкам, близким по условиям циклического нагружения, типизация спектров нагрузок, ограничение числа параметров программы, варьированием которых осуществляется ее приближение к условиям эксплуатации различных элементов; реализация квазислучайной последовательности нагружения, достаточно близкого к эксплуатационному. Применение типизированных программ нагружения делает возможным простое и объективное сравнение результатов,

полученных в различных лабораториях. Результаты испытаний могут быть распространены на спектры нагрузок, близкие к типизированным.

Глава 11.13

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК КОНСТРУКЦИЙ С ЖИДКОСТЬЮ

Определение динамических характеристик конструкций, содержащих жидкость, является достаточно сложной задачей, теоретическое решение которой далеко не всегда возможно. Поэтому широкое применение находят экспериментальные методы, в основе которых лежат динамические испытания натурных конструкций или их моделей.

11.13.1. УСЛОВИЯ ПОДОБИЯ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СВОЙСТВ КОНСТРУКЦИЙ С ЖИДКОСТЬЮ

Колебания жидкости в баках. В этом случае вводят следующие допущения: модели баков по форме полости и внутренним элементам геометрически подобны натурным бакам; как натурные, так и модельные баки являются жесткими; поле гравитационных (инерционных) сил и уровни жидкости в баках не меняются; доминирующее значение имеют силы гравитации и инерции.

Колебания жидкости в баке определяют: формой полости и внутренними элементами бака; физическими свойствами жидкости; ускорением поля массовых сил; начальными условиями; характером заданного движения бака. Искомыми величинами чаще всего являются отклонение свободной поверхности жидкости и гидродинамическая сила.

В случае свободных колебаний жидкости в баке определяющими параметрами являются: характерный линейный размер бака l , плотность ρ , кинематическая вязкость ν , поверхностное натяжение жидкости σ , угол смачивания α (безразмерный параметр), ускорение поля массовых сил j , глубина жидкости h , начальное отклонение свободной поверхности жидкости в характерной точке s_0 . Кроме того, необходимо учесть время t .

На основании теории размерностей из пяти разнородных параметров можно составить две безразмерные комбинации комплексного типа - критерии подобия:

$$G j l^3 / \nu; \quad B \rho j^2 / \sigma, \quad (11.13.1)$$

где G - число Галилея; B - число Бонда.

Число G представляет собой отношение гравитационных сил к диссипативным, действующим на смоченную поверхность стенок бака, возведенное в четвертую степень. Число B есть отношение гравитационных сил к силам поверхностного натяжения.

При учете однородных (геометрических) параметров могут быть получены два тривиальных критерия h/l и s_0/l . Учет времени дает относительную переменную комплексного типа $j^{0,5}t/l^{0,5}$. Условия подобия состоят в равенстве критериев подобия для природы и модели:

$$\frac{j_n l_n^3}{\nu_n^2} = \frac{j_m l_m^3}{\nu_m^2}; \quad \frac{\rho_n j_n l_n^2}{\sigma_n} = \frac{\rho_m j_m l_m^2}{\sigma_m}. \quad (11.13.2)$$

Их можно выразить через масштабы величин:

$$K_j K_l^3 / K_\nu = 1; \quad K_\rho K_j K_l^2 / K_\sigma = 1. \quad (11.13.3)$$

Если за основные масштабы принять K_l , K_ρ и K_j , то масштабы величин будут следующие:

$$K_\nu = K_l^{3/2} K_j^{0,5}; \quad K_\sigma = K_\rho K_j K_l^2; \quad K_\alpha = 1; \\ K_s = K_{s_0} = K_h = K_l; \quad K_\rho = K_\rho K_j K_l^3; \\ K_t = K_l^{0,5} / K_j^{0,5}. \quad (11.13.4)$$

Масштабы осевых ускорений обычно $K_j = 0,1+5$. Выбор масштаба плотности K_ρ сильно ограничен. Линейный масштаб $K_l = 0,1+1$. Для ускорений $(0,1+1)g$ при использовании натуральных баков или больших моделей условия подобия (11.13.3) можно выполнить полностью для ряда компонентов жидкого топлива. При ускорении, превышающем g , обеспечить выполнение этих условий подбором моделирующих жидкостей практически невозможно. Однако в этом нет особой необходимости.

В самом деле, при больших числах G и B выполнение условий подобия приводит лишь к некоторому увеличению демпфирования [122]. В баках, как правило, имеются различные демпфирующие устройства, например, в виде радиальных и кольцевых ребер, кото-

рые создают нелинейное демпфирование, обусловленное срывом вихрей с острых кромок, не зависящее от чисел G и B в широких диапазонах их изменения. При достаточно развитых амплитудах колебаний жидкости это демпфирование превышает демпфирование, обусловленное вязкостью и поверхностным натяжением, на один и несколько порядков. Следовательно, в наиболее важном для практики случае отсутствует необходимость полностью выдерживать при моделировании критерии подобия. Таким образом, имеются большие возможности для исследования на моделях свободных колебаний жидкости в баках.

По свободным колебаниям жидкости часто определяют собственные частоты ω_n и коэффициенты демпфирования β_n (где n - номер тона колебаний). Для баков с гладкими стенками при малых амплитудах колебаний и $\alpha = 0$ искомые зависимости

$$\frac{\omega_n \sqrt{l}}{\sqrt{j}} = f_n\left(\frac{h}{l}\right); \quad \frac{\beta_n}{\omega_n} = f_n'\left(\frac{h}{l}, G, B\right). \quad (11.13.5)$$

Для более общего случая

$$\frac{\omega_n \sqrt{l}}{\sqrt{j}} = f_n\left(\frac{h}{l}, B, \alpha, \frac{s_{n0}}{l}\right); \\ \frac{\beta_n}{\omega_n} = f_n'\left(\frac{h}{l}, G, B, \alpha, \frac{s_{n0}}{l}\right). \quad (11.13.6)$$

Присутствие в (11.13.6) амплитуд s_{n0} колебаний свободной поверхности жидкости свидетельствует о гармонической линеаризации нелинейностей. По величине эти амплитуды не выходят за пределы амплитуд, соответствующих линейной теории.

Важное значение имеет моделирование вынужденных колебаний жидкости в баке, в частности, при установившемся поступательном колебании бака $u = u_0 \cos \omega t$. В данном случае определяющими величинами являются следующие: l , ρ , ν , σ , α , j , h , u_0 , ω и t . На основании теории размерности из них можно получить следующие безразмерные величины:

$$\frac{j l^3}{\nu^2}; \quad \frac{\rho j l^2}{\sigma}; \quad \alpha; \quad \frac{h}{l}; \quad \frac{u_0}{l}; \quad \frac{\omega \sqrt{l}}{\sqrt{j}}; \quad \omega t. \quad (11.13.7)$$

Критерии подобия те же самые, что и для свободных колебаний. Закон моделирования мало отличается от закона (11.13.4).

$$\kappa_v = \kappa_l^{3/2} \kappa_j^{0.5}; \quad \kappa_\sigma = \kappa_p \kappa_j \kappa_l^2; \quad \kappa_\alpha = 1;$$

$$\kappa_s = \kappa_{u_0} = \kappa_h = \kappa_l; \quad \kappa_p = \kappa_p \kappa_j \kappa_l^3;$$

$$\kappa_\omega = \kappa_j^{0.5} / \kappa_l^{0.5}; \quad \kappa_t = \kappa_l^{0.5} / \kappa_j^{0.5}.$$

(11.13.8)

Искомые обобщенные зависимости для отклонения свободной поверхности жидкости в характерной точке s и гидродинамической силы P имеют следующий вид:

$$\frac{s}{l} = f_1 \left(\frac{h}{l}, \mathbf{G}, \mathbf{B}, \alpha, \frac{\omega \sqrt{l}}{\sqrt{j}}, \frac{u_0}{l}, \omega t \right);$$

$$\frac{P}{\rho j l^3} = f_2 \left(\frac{h}{l}, \mathbf{G}, \mathbf{B}, \alpha, \frac{\omega \sqrt{l}}{\sqrt{j}}, \frac{u_0}{l}, \omega t \right).$$

(11.13.9)

Колебания упругих конструкций с жидкостью. Для рассматриваемых конструкций одной из важных и сложных задач является определение собственных частот и форм колебаний, при решении которой широко используются методы моделирования.

Пусть исследуемый объект, например космический носитель, находится в однородном поле ускорений. Он изготовлен из изотропных материалов. Топливные баки объекта частично заполнены компонентами жидкого топлива и находятся под внутренним давлением. Предположим, что модель объекта является его геометрической копией и изготовлена из подобных материалов. Плотность моделирующей жидкости и внутреннее давление в баках модели распределены, как в реальном объекте. Модель помещена в гравитационное поле Земли и сориентирована в нем так же, как и объект.

С учетом принятых допущений определяющими параметрами в задаче являются: линейный размер l ; плотность ρ ; модуль Юнга E и коэффициент Пуассона μ материала; ускорение j поля массовых сил; внутреннее давление p ; глубина h жидкости.

Из заданных параметров можно составить четыре независимые безразмерные величины

$$\rho l / E, \mu, p / E, h / l. \quad (11.13.10)$$

Искомые собственные частоты и формы колебаний являются функциями этих величин.

Безразмерная величина комплексного типа в (11.13.10) является критерием подобия. Условие подобия, выраженное через масштабы моделирования,

$$\kappa_p \kappa_j \kappa_l / \kappa_E = 1. \quad (11.13.11)$$

Если при моделировании используются натурные материалы ($\kappa_p = \kappa_E = \kappa_\mu = 1$), то это условие упрощается:

$$\kappa_j \kappa_l = 1. \quad (11.13.12)$$

При испытаниях модели в гравитационном поле Земли условию (11.13.12) можно удовлетворить лишь в тех случаях, когда ускорение поля массовых сил, в котором находится объект, во столько раз меньше земного ускорения, во сколько объект больше его модели. Например, если объект находится на Луне, где ускорение гравитационного поля составляет 1/6 земного, то для выполнения рассматриваемого условия модель должна быть в 6 раз меньше. Во всех остальных случаях выполнить полностью данное условие невозможно. Это относится и к наземным испытаниям натуральных объектов, если только масштаб моделирования ускорений не равен единице.

Для ускорений, превышающих земное ускорение, условие подобия (11.13.11) можно выполнить, если использовать для изготовления моделей материалы с низким модулем Юнга (плексиглас, целлулоид). Однако такие модели имеют ряд серьезных недостатков. В настоящее время при определении динамических характеристик их не применяют.

Невыполнение условия подобия $\kappa_j \kappa_l = 1$ может существенно сказаться на результатах испытаний, главным образом, в двух случаях: во-первых, при близких собственных частотах упругих колебаний и колебаний жидкости в баках, т.е. когда нельзя рассматривать упругие колебания независимо от колебаний жидкости; во-вторых, при наличии нежестких стыковых соединений, упругие характеристики и диссипативные свойства которых зависят от осевых сил поджатия.

Основные частоты колебаний жидкости, как правило, значительно меньше частот упругих колебаний. Поэтому упругие колебания можно рассматривать независимо от колебаний жидкости и, следовательно, не выполнять условие $\kappa_j \kappa_l = 1$. При необходимости влияние колебаний жидкости нетрудно оценить и ввести соответствующие поправки.

При наличии нежестких стыковых соединений их можно поджать локальными осевыми силами, используя для этого простые приспособления, не оказывающие существенного влияния на результаты испытаний моде-

ли. Таким образом, модели, выполненные из натуральных материалов, позволяющие во многих практических случаях воспроизводить динамические свойства упругих конструкций с жидкостью, находящихся под действием поля массовых осевых сил.

Практика показывает, что диссипативные свойства моделей из натуральных материалов, изготовленных в крупном масштабе (1/4, 1/5) с высокой точностью воспроизведения силовых элементов, в частности стыковых соединений, оказываются близкими к диссипативным свойствам натуральных конструкций (по крайней мере для нескольких первых тонов колебаний).

Модели такого рода с детальным воспроизведением силовых элементов конструкции широко используются при исследовании динамических свойств рассматриваемых объектов и называются конструктивно подобными или моделями-копиями [43].

Их использование позволяет определять не только собственные частоты и формы колебаний, но и другие динамические характеристики для самых сложных конструкций, для которых теоретические методы ненадежны или отсутствуют. В отличие от натуральных динамических испытаний конструктивно подобные модели дают возможность получать обширную информацию о динамических характеристиках конструкции в процессе ее проектирования, т.е. до изготовления опытного образца, с небольшими затратами времени и средств.

11.13.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ

При определении гидродинамических параметров применяют как теоретические, так и экспериментальные методы [43]. Теоретические методы позволяют с достаточной точностью определять гидродинамические параметры, соответствующие идеальной жидкости, для сравнительно простых форм баков: осесимметричных или имеющих плоскости симметрии. С помощью экспериментальных методов могут быть определены все искомые параметры, включая коэффициенты демпфирования, практически для любой формы бака при наличии в нем различных устройств и элементов: демпферов колебаний жидкости, перфорированных диафрагм, расходных емкостей, газовых баллонов и др. В основе экспериментальных методов лежат испытания натуральных баков или их моделей.

Исходные математические модели и их параметры. При принятых выше допущениях и выборе точки приведения в метациентре основная математическая модель имеет вид

$$(m^0 + m)\ddot{u} + \lambda_1 \dot{s}_1 = F(t);$$

$$\begin{aligned} (J^0 + J)\ddot{\psi} + b_\psi \dot{\psi} + \lambda_{01} \dot{s}_1 + b_{01} \dot{s}_1 &= M(t); \\ \mu_1 (\dot{s}_1 + 2\beta_1 \dot{s}_1 + \omega_1^2 s_1) + \lambda_1 \ddot{u} + \lambda_{01} \ddot{\psi} + \\ + b_{01} \dot{\psi} &= 0, \end{aligned} \quad (11.13.13)$$

где m_0 и J_0 - соответственно масса и момент инерции "сухого" бака; m и J - соответственно масса жидкости и приведенный момент инерции; u и ψ - координаты соответственно поступательного и углового перемещений; s_1 - обобщенная координата, представляющая собой отклонение свободной поверхности жидкости в точке нормировки абсолютной системы координат; λ_1, λ_{01} - коэффициенты гидродинамической силы и гидродинамического момента; b_ψ, β_1, b_{01} - диссипативные коэффициенты; F и M - соответственно сила и момент, действующие на бак [43]; ω_1 - частота первого тона колебаний жидкости; μ_1 - обобщенная масса.

В общем случае искомыми гидродинамическими параметрами (или гидродинамическими коэффициентами) являются $\omega_1^2, \mu_1, \lambda_1, \lambda_{01}, J$ и b_ψ, β_1, b_{01} . Искомые коэффициенты не равноценны. Наиболее важное значение имеет собственная частота колебаний жидкости. К точности ее определения предъявляют повышенные требования. Вторым по значимости следует присоединенный момент инерции, который не связан с номером тона колебаний жидкости. Коэффициенты μ_1, λ_1 и λ_{01} используются сравнительно редко и определяются менее точно. Это обусловлено тем, что в отличие от ω_1 и J они не являются инвариантными параметрами. Однако эти коэффициенты образуют два независимых инвариантных параметра $m_1 = \lambda_1^2 / \mu_1$ и $L_1 = -\lambda_{01} / \lambda$, которые представляют собой массу эквивалентного маятника и плечо гидродинамической силы. Они непосредственно входят в уравнения, которые легко получить из (11.13.13) при помощи линейного преобразования $s_1 = \lambda_1 r_1 / \mu_1$;

$$(m^0 + m)\ddot{u} + m_1 \ddot{r}_1 = F(t);$$

$$(J^0 + J)\ddot{\psi} + b_\psi \dot{\psi} - m_1 L_1 (\ddot{r}_1 + 2\beta_{01} \dot{r}_1) = M(t);$$

$$m_1(\ddot{r}_1 + 2\beta_1\dot{r}_1 + \omega_1^2 r_1) + m_1\ddot{u} - m_1 L_1 \ddot{\psi} - 2m_1 L_1 \beta_{01} \dot{\psi} = 0, \quad (11.13.14)$$

где $\beta = 0,5b_{01}/\lambda_{01}$.

Обычно предполагается, что диссипацию энергии колебаний достаточно учесть лишь в подвесе эквивалентного маятника. В этом случае коэффициенты b_ψ и b_{01} выражаются через коэффициент β_1 :

$$b_{01} = 2m_1 l_1^2 \beta_1; \quad b_{01} = -2\lambda_1 l_1 \beta_1; \quad l_1 = j/\omega_1^2. \quad (11.13.15)$$

Таким образом, основными параметрами являются ω_1^2 , m_1 , L_1 , J и β_1 .

Сформулировать однозначно требования к необходимой точности определения гидродинамических параметров трудно. Однако можно указать вполне реальные значения максимальной погрешности исходя из задач проектирования и практических возможностей: 1...2 % для собственных частот, 8...12 % для остальных параметров консервативной системы, 15...20 % для коэффициентов демпфирования.

Основные схемы испытаний. При экспериментальном определении гидродинамических параметров наиболее часто используются три схемы испытаний.

1. В основу испытаний положена парциальная система уравнений, описывающая поступательные колебания бака с жидкостью:

$$(m^0 + m)(\ddot{u} + 2\beta_u \dot{u} + \omega_u^2 u) + \lambda_1 \ddot{s}_1 = F_0 \cos \omega t;$$

$$\mu_1 (\ddot{s}_1 + 2\beta_1 \dot{s}_1 + \omega_1^2 s_1) + \lambda_1 \ddot{u} = 0. \quad (11.13.16)$$

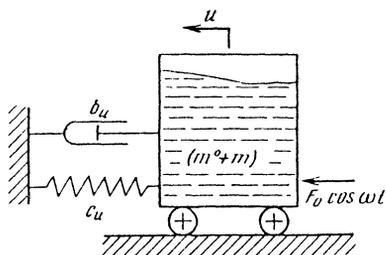


Рис. 11.13.1. Механический аналог системы уравнений (11.13.16)

Система уравнений (11.13.16) отличается от исходной парциальной системы двумя дополнительными членами, которые введены для учета влияния экспериментальной установки.

Кроме того, в массу m^0 входит масса подвижной части установки. Механический аналог системы уравнений (11.13.16) показан на рис. 11.13.1.

При такой схеме испытаний входом является гармоническая сила $F = F_0 \cos \omega t$, а выходом - координаты u и s .

2. Эта схема испытаний основана на парциальной системе уравнений, описывающих колебания бака с жидкостью относительно поперечной оси:

$$(J^0 + J)(\ddot{\psi} + 2\beta_\psi \dot{\psi} + \omega_\psi^2 \psi) + \lambda_{01} \ddot{s}_1 + b_{01} \dot{s}_1 = M_0 \cos \omega t;$$

$$\mu_1 (\ddot{s}_1 + 2\beta_1 \dot{s}_1 + \omega_1^2 s_1) + \lambda_{01} \ddot{\psi} + b_{01} \dot{\psi} = 0, \quad (11.13.17)$$

где $\omega_\psi^2 = c_\psi / (J^0 + J)$ - квадрат собственной частоты бака с жидкостью на подвесе; c_ψ - угловая жесткость подвеса.

Так как коэффициент демпфирования, обусловленный подвесом, включен в b_ψ , парциальная система (11.13.17) отличается от соответствующей парциальной системы в (11.13.13) только одним дополнительным членом.

При такой схеме испытаний входом является гармонический момент $M = M_0 \cos \omega t$, а выходом - координаты ψ и s_1 .

3. Эта схема испытаний так же, как и первая, требует реализации поступательных колебаний бака с жидкостью. Однако входом служит заданное гармоническое перемещение бака $u = u_0 \cos \omega t$, а выходом - координата s_1 . В основу рассматриваемой схемы положено уравнение вынужденных колебаний жидкости в баке

$$\ddot{s}_1 + 2\beta_1 \dot{s}_1 + \omega_1^2 s_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1} \omega^2 u_0 \cos \omega t. \quad (11.13.18)$$

Экспериментальные установки, реализованные по этой схеме, при введении в них соответствующих чувствительных элементов датчиков силы могут обеспечить также выход по гидродинамической силе и гидродинамическому моменту [43].

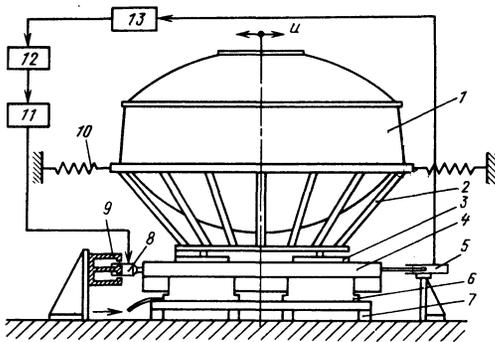


Рис. 11.13.2. Установка для определения гидродинамических коэффициентов при поступательных движениях бака

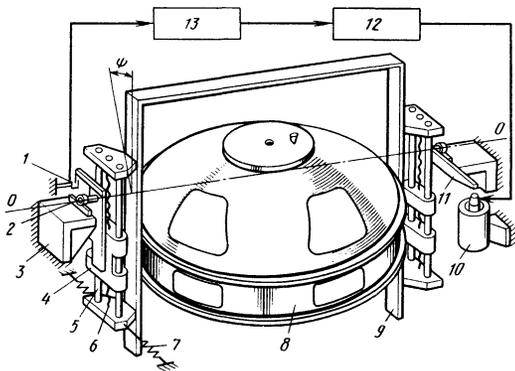


Рис. 11.13.3. Установка для определения гидродинамических коэффициентов при угловых движениях бака

Экспериментальные установки. В соответствии с тремя схемами испытаний, рассмотренными выше, для определения гидродинамических параметров используются три типа экспериментальных установок.

В экспериментальной установке первого типа (рис. 11.13.2) испытуемый бак 1 закреплен на подставке 2, установленной на платформе 4 через опоры 3, обеспечивающие равномерное распределение нагрузки на платформу. Платформа опирается на аэростатические направляющие 6, воспринимающие нагрузку от бака с жидкостью и обеспечивающие поступательное движение платформы с малым трением. Вся установка смонтирована на основании 7, закрепленном на силовом полу. Пружины 10 служат для удержания бака в положении, близком к равновесному. Жесткость пружин подбирается так, чтобы собственная частота колебаний платформы с баком была примерно в 5 раз ниже основной частоты колебаний жидкости. Максимально допустимое перемещение платформы ± 100 мм.

Колебания возбуждаются электродинамическим возбудителем 8, катушка которого закреплена на платформе и расположена в магнитном поле магнита 9, установленного на силовом полу. Сигнал возбуждения на катушку подается с генератора анализатора 12 низкочастотных сигналов через усилитель мощности 11.

Перемещение платформы с баком измеряется датчиком перемещения 5, сигнал от которого через усилитель 13 подается на анализатор 12. При возможности измеряется также отклонение свободной поверхности жидкости. В процессе испытаний снимаются амплитудные и фазовые (или действительные и мнимые) частотные характеристики системы при различных амплитудах силы возбуждения. Они служат в качестве исходных материалов для определения искомых гидродинамических параметров.

В экспериментальной установке второго типа (рис. 11.13.3) испытуемый бак 8 соединен с рамой 9, на противоположных сторонах которой установлены оси вращения 2. Оси закреплены на ползунках 4, перемещающихся по вертикальному направляющему 5 с помощью ходового винта 6. Направляющие жестко соединены с рамой. Шариковые подшипники осей вращения опираются на основания 3. Электродинамический возбудитель 10 воздействует на кронштейн 11, закрепленный на оси 2. Пружины 7 служат для удержания бака около нулевого положения. Сигнал возбуждения подается с генератора анализатора низкочастотных сигналов 13 через усилитель мощности 12 на катушку силовозбудителя 10. Угол отклонения бака относительно поперечной оси измеряется датчиком 1.

Перемещая оси вращения 2 с помощью ходовых винтов 6, добиваются совмещения оси 00 с метacentром системы бак - жидкость, после чего снимают частотные характеристики системы.

В установке третьего типа (рис. 11.13.4) бак 1 через подставки 2 закреплен на столе 3, который соединен через чувствительные элементы 4 (датчики силы) с платформой 5, перемещающейся по аэростатическим опорам 6. Перемещение платформы задается через упругий шарнир 7 от гидроцилиндра 8. Максимальное перемещение платформы ± 100 мм. В качестве задающего генератора, как и в установках, рассмотренных выше, используют генератор-анализатор низкочастотных сигналов 9, который регистрирует также сигналы, поступающие через усилитель 10 от датчиков силы 4 и датчиков 11 отклонения свободной поверхности жидкости.

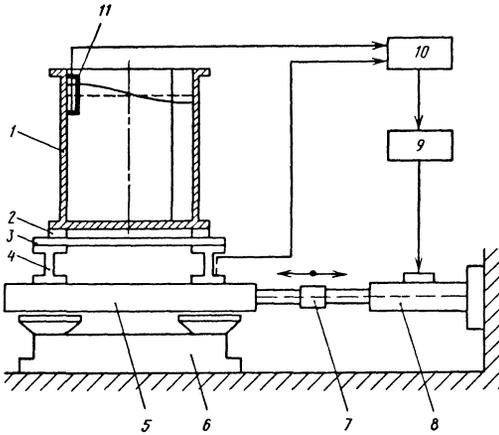


Рис. 11.13.4. Установка для определения гидродинамических коэффициентов при кинематическом задании перемещений баку

Рассмотренные установки могут работать в режиме не только вынужденных, но и свободных колебаний. В этом случае выходные величины регистрируются на шлейфовых осциллографах. В основном частотном диапазоне 0...5 Гц аппаратные средства установок обеспечивают точность измерения частот 0,01 % измеряемой величины, амплитуд 2 % и фаз 0,2°. Установки позволяют испытывать баки с жидкостью массой до 10 т.

Методы определения гидродинамических параметров. Гидродинамические параметры определяют разными методами [43]. Для определения собственных частот ω_1 колебаний жидкости используют резонансный метод или метод свободных колебаний. В резонансном методе за собственную частоту принимают частоту резонансного пика амплитудной характеристики, соответствующей перемещению свободной поверхности жидкости или гидродинамической силе. С помощью фазовой характеристики частоту ω_1 можно получить независимо по фазовому критерию резонанса $\varphi = \pi/2$. Испытания проводят на установках первого и третьего типов.

В методе свободных колебаний собственные частоты находят по осциллограммам процесса затухающих колебаний жидкости в баке либо гидродинамической силы. Свободные колебания жидкости или системы бак - жидкость создают на тех же установках: возбуждают резонансные колебания и снимают возбуждение.

Гидродинамические параметры $m_1 = \lambda_1^2/\mu_1$ и $L_1 = -\lambda_{01}/\lambda_1$ наиболее про-

сто определяются по результатам измерения собственных частот парциальных систем, описываемых уравнениями (11.13.16) и (11.13.17). При слабом демпфировании из характеристического уравнения системы (11.13.16) параметр m_1 можно определить по следующей зависимости:

$$m_1 = (m^0 + m) \left(1 - \omega_1^2/\sigma_1^2\right) \left(1 - \omega_u^2/\sigma_1^2\right), \quad (11.13.19)$$

где σ_1 - собственная частота системы.

Все величины, входящие в (11.13.19), за исключением частоты σ_1 , можно считать известными. Частоту σ_1 определить несложно.

Из характеристического уравнения системы (11.13.17) следует

$$L_1 = \pm \sqrt{(J^0 + J)\Delta_{01}/m_1}, \quad (11.13.20)$$

где

$$\Delta_{01} = \left(1 - \omega_1^2/\sigma_{01}^2\right) \left(1 - \omega_\psi^2/\sigma_{01}^2\right). \quad (11.13.21)$$

Знак перед корнем должен выбираться по определенным условиям [43].

Очевидно, для нахождения параметра L_1 необходимо определить собственную частоту системы σ_{01} , m_1 и суммарный момент инерции $J^0 + J$, который определяется независимо. При определении параметров m_1 и L_1 частоты ω_u и ω_ψ выбирают значительно ниже ω_1 . Испытания проводят на установках первого и второго типов. Параметры m_1 и L_1 могут быть получены по амплитудным характеристикам парциальных систем (11.13.16) и (11.13.17). Если собственная частота ω_u и коэффициент демпфирования β_u пренебрежимо малы, то m_1 можно найти из простого выражения

$$\frac{m_1}{m^0 + m} = \left(1 - \frac{\omega_1^2}{\omega^2}\right) \pm \frac{1}{\omega^2} \times \sqrt{F_0^0 (\omega^2 - \omega_1^2)^2 + 4\beta_1^2 \omega^2 - 4\beta_1^2 \omega^2} \times \sqrt{u_0^2 (m^0 + m)^2 \omega^4} \quad (11.13.22)$$

Знак минус перед корнем берется при $\omega < \omega_1$. Окончательно m_1 находится как среднее арифметическое из ряда значений, полученных при разной вынужденной частоте ω .

Параметр L_1 иногда определяют по гидродинамической силе P и гидродинамическому моменту M^* при свободных затухающих колебаниях жидкости в баке. Для этого находят их амплитудные значения P_0 и M_0^* , соответствующие одному и тому же моменту времени:

$$L_1 = M_0^*/P_0. \quad (11.13.23)$$

Для определения параметра m_1 используется также известная приближенная формула, представляющая собой оценку m_1 сверху:

$$m_1 = PJ_y \omega_1^2 / j, \quad (11.13.24)$$

где J_y - экваториальный момент инерции площади свободной поверхности жидкости.

Для J исходная зависимость

$$J = \frac{c_\psi (\omega_1^2 - \sigma_\psi^2)}{\sigma_\psi [\omega_1^2 - \sigma_\psi^2 (1 - \Delta_{01})]} - J^0, \quad (11.13.25)$$

где c_ψ - угловая жесткость подвеса или специальной пружины, выбранной так, что частота σ_ψ много меньше частоты ω_1 ; σ_ψ - собственная частота системы.

Зависимость (11.13.25) можно получить из характеристического уравнения, соответствующего парциальной системе (11.13.17).

Если ось вращения не совпадает с метacentром (индекс "мц"), то исходная зависимость принимает вид

$$J = \frac{(\omega_1^2 - \sigma_\psi^2) [c_\psi - g(m^0 + m)x_{мц}]}{\sigma_\psi^2 [\omega_1^2 - \sigma_\psi^2 (1 - \Delta_{01})]} - J^0. \quad (11.13.26)$$

При известных величинах ω_1 , c_ψ , Δ_{01} и $x_{мц}$ определение присоединенного момента инерции по формулам (11.13.25) и (11.13.26) сводится к определению собственной частоты σ_ψ . Присоединенные моменты инерции получают также другими способами, в частности, по экспериментальным частотным характеристикам.

Для получения коэффициентов μ_1 , λ_1 и λ_{01} при известных параметрах m_1 и L_1 достаточно найти отношение λ_1/μ_1 . Из выражения амплитудной характеристики (11.13.12)

$$\frac{\lambda_1}{\mu_1} = \frac{s_{10}}{u_0 \omega^2} \sqrt{(\omega_1^2 - \omega^2)^2 + 4\beta_1^2 \omega^2}, \quad (11.13.27)$$

где s_{10} - амплитуда колебаний жидкости в точке нормировки при заданной частоте колебаний бака.

Коэффициент демпфирования β_1 чаще всего находят по осциллограмме процесса затухающих колебаний жидкости или гидродинамической силы

$$\beta_1 = \frac{\omega_1}{2\pi k} \ln \frac{A_n}{A_{n+k}}, \quad (11.13.28)$$

где k - число периодов колебаний; A_n и A_{n+k} - амплитуды соответственно начала и конца выбранного участка осциллограммы.

Если измерение колебаний жидкости затруднено, то коэффициент β_1 можно определить по свободным затухающим колебаниям системы бак - жидкость [43]. Он связан с коэффициентами демпфирования β_1^* системы и β_u подвески следующей приближенной зависимостью:

$$\beta_1 = \beta_1^* \left[\frac{\omega_1^2}{\sigma_1^2} - \frac{(\sigma_1^2 - \omega_1^2)\omega_u^2}{(\sigma_1^2 - \omega_n^2)\sigma_1^2} \right] - \beta_u \frac{\sigma_1^2 - \omega_1^2}{\sigma_1^2 - \omega_u^2}. \quad (11.13.29)$$

Если пренебречь частотой ω_u и коэффициентом β_u , то

$$\beta_1 = \beta_1^* \frac{\omega_1^2}{\sigma_1^2}. \quad (11.13.30)$$

Коэффициенты демпфирования β_u и β_1^* могут быть определены по ширине резонансного пика (см. п. 11.13.3).

После определения всех необходимых гидродинамических параметров их уточняют следующим образом: подставляя в выражения для частотных характеристик, соответствующих парциальным системам (11.13.16)' и

(11.13.17), результаты расчета сравнивают с соответствующими экспериментальными характеристиками. Если расчетные характеристики существенно отличаются от экспериментальных, то варьируя гидродинамическими параметрами, процесс продолжают до тех пор, пока они не совпадут.

11.13.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК УПРУГИХ КОНСТРУКЦИЙ

Математические модели и динамические характеристики. В экспериментальных методах относительно физических свойств испытываемой конструкции делаются определенные допущения. Обычно предполагают, что конструкция является линейной, демпфирование слабым, параметры конструкции не изменяются с течением времени. При сделанных допущениях исходную математическую модель можно записать в виде следующего матричного уравнения:

$$A\ddot{q} + B\dot{q} + Cq = 0, \quad (11.13.31)$$

где **A**, **B** и **C** - квадратные симметричные матрицы коэффициентов соответственно инерции, демпфирования и жесткости; **q** - матрица-столбец обобщенных координат; **0** - нулевая матрица-столбец.

Следовательно, реальной системе с определенными параметрами ставится в соответствие линейная математическая модель, представляющая собой систему с конечным числом степеней свободы. При учете достаточно большого числа степеней свободы эта модель позволяет с необходимой точностью описать динамические свойства реальной системы в заданном частотном диапазоне.

В (11.13.31) диссипативные силы учтены по гипотезе вязкого трения, как наиболее простой в математическом отношении. Это допустимо только в случае слабого демпфирования, при котором законы изменения диссипативных сил не имеют существенного значения.

В большинстве экспериментальных методов относительно свойств конструкции вводится еще одно важное допущение: диссипативные силы не связывают нормальные координаты, соответствующие консервативной системе. При слабом демпфировании и отсутствии близких собственных частот оно выполняется. В этом случае математическая модель (11.13.31) существенно упрощается. С помощью подстановки

$$q = \Psi y, \quad (11.13.32)$$

где Ψ - матрица собственных векторов (форм колебаний) $\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \dots, \eta^{(k)}$.

Матрица-столбец нормальных координат **y** приводится к системам независимых дифференциальных уравнений

$$\ddot{y}_n + 2\beta_n \dot{y}_n + \omega_n^2 y_n = 0 \quad (n = 1, 2, \dots, k), \quad (11.13.33)$$

где $\omega_n = \sqrt{k_n/m_n}$ и $\beta_n = h/\omega_n$ - соответственно собственная частота и коэффициент демпфирования, соответствующие *n*-му тону колебаний.

Общее решение этой системы, выраженное в обобщенных координатах,

$$q_i = \sum_{n=1}^k A_n \eta_i^{(n)} e^{-\beta_n t} \cos(\omega_n' t + \varepsilon_n), \quad (i = 1, 2, \dots, k) \quad (11.13.34)$$

где $\omega_n' = \sqrt{\omega_n^2 - \beta_n^2}$, A_n, ε_n - постоянные, определяемые из начальных условий.

Как видно из решения, колебания по каждой обобщенной координате представляют собой сумму затухающих колебаний, происходящих с частотами, практически совпадающими с собственными частотами системы ($\omega_n' \approx \omega_n$). В рамках упрощенной математической модели искомыми динамическими характеристиками являются собственные частоты ω_n , формы колебаний $\eta^{(n)}$ и коэффициенты демпфирования β_n (или $g_r = \beta_n/\omega_n$). Их принято называть основными динамическими характеристиками. Иногда определяют обобщенные массы m_n или обобщенные жесткости K_n .

Для определения динамических характеристик используют различные методы. Многие из них основаны на вынужденных колебаниях конструкции под действием гармонических сил. Соответствующая математическая модель имеет вид

$$A\ddot{q} + B\dot{q} + Cq = F \cos \omega t. \quad (11.13.35)$$

Решение этого уравнения, полученное методом комплексных амплитуд для случая, когда диссипативные силы не связывают нормальные координаты,

$$q_i = \sum_{j=1}^k |\alpha_{ij}| F_j \cos(\omega t + \varepsilon_{ij}) \quad (i = 1, 2, \dots, k), \quad (11.13.36)$$

где α_{ij} - комплексные передаточные коэффициенты; ε_{ij} - фазовые сдвиги.

Величины ;

$$\alpha_{ij} = \sum_{n=1}^k \frac{\eta_i^{(n)} \eta_j^{(n)} e^{i\varepsilon_n}}{K_n \left[(1 - \gamma_n^2)^2 + 4q_n^2 \gamma_n^2 \right]^{1/2}} ; \quad (11.13.37)$$

$$\varepsilon_{ij} = -\arctg \frac{Y_{ij}}{X_{ij}} . \quad (11.13.38)$$

Здесь

$$\varepsilon_n = -\arctg \frac{2q_n \gamma_n}{1 - \gamma_n^2} ; \quad \gamma_n = \frac{\omega}{\omega_n} ; \quad (11.13.39)$$

$$X_{ij} = \sum_{n=1}^k \frac{\eta_i^{(n)} \eta_j^{(n)} (1 - \gamma_n^2)}{K_n \left[(1 - \gamma_n^2)^2 + 4q_n^2 \gamma_n^2 \right]} ; \quad (11.13.40)$$

$$Y_{ij} = -\sum_{n=1}^k \frac{\eta_i^{(n)} \eta_j^{(n)} 2q_n \gamma_n}{K_n \left[(1 - \gamma_n^2)^2 + 4q_n^2 \gamma_n^2 \right]} . \quad (11.13.41)$$

Последние два выражения являются действительной и мнимой составляющими комплексного передаточного коэффициента.

Методы определения основных динамических характеристик. На практике используются различные методы определения динамических характеристик [43]. Их можно разделить на две группы.

1. Возбуждение колебаний конструкций проводится простейшими способами - при помощи одной силы (или момента), приложением импульсов, заданием начального прогиба, а искомые характеристики находятся путем анализа экспериментальных частотных характеристик или переходных процессов. К таким методам анализа относятся: резонансный метод, метод Кеннеди-Пэнку, метод свободных колебаний и др.

2. Возбуждение колебаний является многоточечным. Конструкция возбуждается при помощи специальной многоканальной вибрационной установки так, что ее колебания происходят лишь по собственной форме одного тона колебаний, представляющего интерес. В этом случае не требуется больших усилий

для анализа результатов, так как все необходимые характеристики конструкции определяются как для системы с одной степенью свободы.

Резонансный метод основан на вынужденных колебаниях конструкции, возбуждаемых гармонической силой (или моментом), и измерении амплитуд колебаний в различных точках конструкции в зависимости от частоты. На основании полученных данных строятся амплитудные характеристики. Искомые собственные частоты, формы колебаний и коэффициенты демпфирования находятся по резонансным пикам.

За собственные частоты ω_n принимаются резонансные частоты системы ω_n^* . При слабом демпфировании различие между этими частотами пренебрежимо мало. Собственные формы колебаний $\bar{\eta}^{(n)}$ в данном методе определяются путем измерения амплитуд колебаний в различных точках конструкции при резонансных частотах. Чистая собственная форма колебаний может быть получена резонансным методом только в том случае, если нерезонансные тона колебаний отсутствуют. В действительности такой идеальный случай не реализуется. Нерезонансные тона колебаний всегда в той или иной степени будут влиять на точность определения форм колебаний.

Коэффициенты демпфирования определяются по ширине резонансных пиков. При этом используется следующая приближенная формула:

$$q_n = (\omega_n'' - \omega_n') / \sqrt{2} \omega_n^* , \quad (11.13.42)$$

где ω_n' и ω_n'' - характерные частоты колебаний, соответствующие пересечению n -го резонансного пика прямой, проведенной параллельно оси абсцисс на расстоянии, равном высоте пика, деленной на $\sqrt{2}$ (рис. 11.13.5).

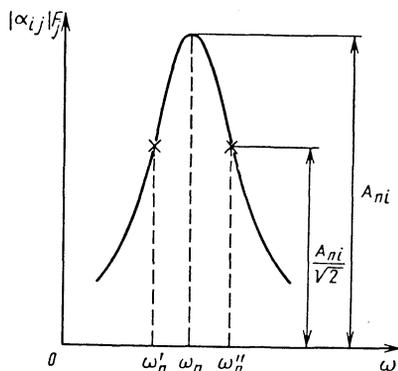


Рис. 11.13.5. К определению коэффициентов демпфирования по ширине резонансного пика

Если резонансный пик амплитудной характеристики хорошо выражен, то характерные частоты, а следовательно, и искомый коэффициент демпфирования легко определяются. При слабо выраженных резонансных пиках использование формулы (11.13.42) может привести к значительной погрешности.

Если известна обобщенная масса (или жесткость), коэффициент демпфирования можно найти по измеренной высоте резонансного пика по формуле

$$q_n = \frac{\eta_i^{(n)} \eta_j^{(n)} F_j}{2m_n \omega_n^2 A_{ni}^*}, \quad (11.13.43)$$

где A_{ni}^* - резонансная амплитуда n -го тона колебаний (высота пика).

В методе Кеннеди-Пэнку собственные частоты и формы колебаний определяются на основании анализа амплитудно-фазовых частотных характеристик, полученных для различных точек конструкции. Для принятой математической модели (11.13.35) амплитудно-фазовые характеристики есть не что иное, как комплексные передаточные коэффициенты α_{ij} (11.13.37).

В окрестности той или иной собственной частоты амплитудно-фазовая характеристика представляет собой дугу окружности, длина которой зависит от коэффициента демпфирования и близости собственных частот системы. Если демпфирование слабое и близкие собственные частоты отсутствуют, то в окрестности резонансной частоты эта характеристика представляет собой почти полную окружность, как для системы с одной степенью свободы.

На основе этого свойства предложено выделять резонансные тона колебаний путем построения по резонансным ветвям амплитудно-фазовых характеристик аппроксимирующих окружностей (рис. 11.13.6). Вектор OC

представляет вклад нерезонансных тонов в суммарный вектор на собственной частоте, который принят постоянным. Вектор CE соответствует резонансному тону. Точка C является смещенным началом координат для резонансного тона. Построение такого рода окружностей позволяет определить собственные частоты, формы колебаний и коэффициенты демпфирования.

За собственную частоту рассматриваемого тона колебаний принимают частоту колебаний ω_n^0 , соответствующую пресечению амплитудно-фазовой характеристики и диаметра окружности, проведенного параллельно мнимой оси (точка D). Форму колебаний находят как совокупность диаметров аппроксимирующих окружностей, полученных для различных точек конструкции при резонансе. Коэффициенты демпфирования

$$q_n = \frac{\omega_n'' - \omega_n'}{2\omega_n^0}, \quad (11.13.44)$$

где ω_n' и ω_n'' - частоты колебаний, соответствующие точкам пересечения окружности с ее диаметром, параллельным действительной оси (точки A и B).

Эта формула аналогична формуле (11.13.42).

Метод Кеннеди-Пэнку позволяет определять динамические характеристики даже в тех случаях, когда резонансный метод оказывается непригодным, однако он более трудоемкий и требует более сложной аппаратуры.

При использовании метода свободных колебаний необходимо из сумм тонов колебаний, которые могут возбуждаться в системе, выделить необходимый тон. Тогда искомые динамические характеристики легко определяются как для системы с одной степенью свободы.

Собственные частоты и коэффициенты демпфирования в данном методе обычно определяют по осциллограмме свободных колебаний. При этом используют известную формулу

$$q_n = \frac{1}{2\pi k} \ln \frac{A_{ij}^{(n)}}{A_{ij+k}^{(n)}}, \quad (11.13.45)$$

где k - число периодов; $A_{ij}^{(n)}$ и $A_{ij+k}^{(n)}$ - амплитуды соответственно начала и конца рассматриваемого участка осциллограммы.

Собственные формы колебаний этим методом определяются редко. Возможности метода свободных колебаний могут быть значительно расширены, если использовать анализаторы переходных процессов и специальные устройства для создания импульсов.

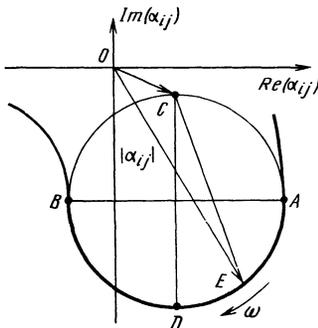


Рис. 11.13.6. Аппроксимирующая окружность, построенная для определения динамических характеристик методом Кеннеди-Пэнку

Более широкое распространение получают методы определения динамических характеристик, основанные на многократном возбуждении колебаний [43]. Подбором возбуждающих сил можно поочередно выделять "чистые" формы колебаний и определять динамические характеристики как для системы с одной степенью свободы. Для возбуждения колебаний используют простейшие силовые распределения, у которых все силы между собой находятся в фазе или сдвинуты на 180° . Такое распределение сил называют монофазным.

Если система должна колебаться по n -й собственной форме при некоторой частоте, не обязательно собственной, то

$$\bar{q} = A_n \bar{\eta}^{(n)} \cos(\omega t + \varepsilon_n), \quad (11.13.46)$$

где A_n - коэффициент, характеризующий амплитуду колебаний.

Из (11.13.46) и (11.13.35) следует, что с помощью монофазных силовых распределений можно возбудить собственные формы колебаний системы в двух случаях: когда диссипативные силы не связывают нормальные координаты и возбуждение колебаний проводится на собственной частоте. При этом во втором случае, представляющем наибольший интерес, фазовый сдвиг $\varepsilon_n = \pi/2$ и

$$\bar{F} = A_n \omega_n \bar{B} \bar{\eta}^{(n)}. \quad (11.13.47)$$

Таким образом, если перемещения всех точек линейной системы имеют фазовый сдвиг $\pi/2$ по отношению к монофазному гармоничному возбуждению, то система совершает вынужденные колебания по собственной форме консервативной системы независимо от того, связывают диссипативные силы нормальные координаты или нет. Монофазное силовое распределение в этом случае должно удовлетворять условию (11.13.47). Использование этого условия для выбора сил затруднено, поэтому на практике обычно прибегают к фазовому критерию резонанса. Соответствующее силовое распределение выбирают либо вручную, либо в полуавтоматическом режиме работы вибрационных установок. Если предположить, что диссипативные силы не связывают нормальные координаты, то можно получить более простое выражение для монофазного силового распределения

$$\bar{F} = c_n \bar{A} \bar{\eta}^{(n)}, \quad (11.13.48)$$

где c_n - коэффициент, зависящий от частоты возбуждения.

Поскольку из условия (11.13.48) следует, что возбуждающие силы пропорциональны инерционным силам, любая внешняя сила должна подбираться пропорционально произведению амплитуды на соответствующую массу в данной точке конструкции. В этом случае фазовый сдвиг не обязательно равен $\pi/2$. Условие (11.13.48) использовалось при разработке 24-канальной установки, явившейся прототипом современных многоканальных установок.

Подвесные системы и испытательное оборудование. При динамических (частотных) испытаниях рассматриваемых конструкций важно выдержать граничные условия, соответствующие свободному полету. Для воспроизведения этих условий используют подвесные системы [43]. Подвесные системы не должны оказывать существенного влияния на динамические характеристики испытываемой конструкции. Критерием выполнения этого требования служит следующее условие: если собственные частоты колебаний конструкции как твердого тела на подвеске в 5-10 раз ниже собственных частот упругих колебаний, то влиянием подвески можно пренебречь.

Наиболее распространена подвесная система, состоящая из тросов и пружин. Такие системы использовались при частотных испытаниях многих ракет-носителей и их конструктивно подобных моделей. В вертикально подвешиваемой конструкции (рис. 11.13.7) два

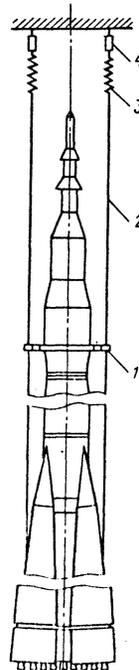


Рис. 11.13.7. Подвеска конструктивно подобной модели ракеты-носителя "Союз":

- 1 - хомут;
- 2 - трос; 3 - пружина;
- 4 - регулировочная муфта

троса прикреплены за силовые элементы в основании конструкции и пропущены в верхней части через отверстия в кронштейнах хомута, удерживающего конструкцию от опрокидывания. Такая система в поперечном направлении имеет степени свободы, как у двойного маятника. Две характерные собственные частоты подвески, соответствующие этим степеням свободы, могут быть достаточно низкими: одна - соответствующим расположением хомута, а другая - выбором длины тросов.

К числу недостатков пружинно-тросовых подвесных систем следует отнести возможность взаимодействия упругих колебаний тросов с колебаниями конструкции и громоздкость подвески для крупногабаритных носителей.

Для проведения частотных испытаний применяют также пневматические подвесные системы, в которых в качестве упругих элементов используют емкости со сжатым воздухом. Давление в емкостях регулируется в зависимости от массы испытуемой конструкции. При испытаниях сверхтяжелого американского носителя "Сатурн V" применена гидropневматическая подвесная система, состоящая из четырех независимых опор, на которые установлен носитель. Опоры допускают возможность перемещения носителя как твердого тела по всем шести степеням свободы. Подвесные системы крепятся к силовым конструкциям, например к силовому потолку.

Для проведения частотных испытаний ракетных конструкций применяют специальные стапелы, представляющие собой многоярусные конструкции, в состав которых входят площадки обслуживания, устройства для крепления силовозбудителей, системы обеспечения электроэнергией, водой и сжатым воздухом. Высота, поперечные размеры, число ярусов стапеля зависят от размеров испытуемых конструкций. При испытаниях используются системы заправки и наддува баков. Система заправки должна обеспечить хранение и подачу моделирующих жидкостей в соответствующие баки испытуемого объекта, а также контроль уровней. Система наддува обеспечивает необходимое давление в баках и его контроль в процессе испытаний.

Аппаратурные средства. К аппаратурным средствам относятся средства возбуждения и измерения колебаний, сбора и регистрации данных, а также многоканальные вибрационные установки (комплексы). Возбуждают колебания натуральных конструкций обычно в диапазоне частот 0...30 Гц. Для конструктивно по-

добных моделей верхняя граница этого диапазона возрастает во столько раз, во сколько модель меньше натуре.

Основное требование, предъявляемое к возбудителям колебаний, состоит в том, чтобы при передаче на конструкцию необходимых сил они не оказывали существенного влияния на ее инерционные, жесткостные и демпфирующие свойства. При использовании методов многоточечного возбуждения важны также следующие требования: возможность одновременной работы нескольких возбудителей; постоянство амплитуды возбуждающей силы в рабочем диапазоне частот; малые отклонения силы от гармонического закона; простота управления частотой и амплитудой возбуждающей силы. Известны возбудители колебаний различного типа [14]. Однако указанным выше требованиям удовлетворяют лишь электродинамические вибровозбудители. Они нашли широкое применение при частотных испытаниях.

Принцип действия электродинамических возбудителей переменного тока хорошо известен. Он основан на взаимодействии подвижной катушки с постоянным магнитным полем. Развиваемая сила пропорциональна ампер-виткам подвижной катушки и индукции магнитного поля в рабочем зазоре магнитопривода. Для создания магнитного поля используются постоянные магниты или электромагниты. Подвижная катушка вибровозбудителя центрируется с помощью пружинных шайб. Электродинамические вибровозбудители используются в сочетании с усилителями мощности, которые преобразуют управляющее напряжение от генератора в напряжении на обмотке подвижной катушки. Вибровозбудитель, усилитель мощности и генератор образуют систему возбуждения колебаний.

Состав измерительной и регистрирующей аппаратуры зависит от сложности конструкции, используемого метода, точности определения динамических характеристик. В простых случаях можно ограничиться набором датчиков с усилителями и шлейфовыми осциллографами. При частотных испытаниях наибольшее распространение получили датчики ускорений. Для повышения эффективности измерения амплитуд и фаз используют электронные вольтметры и фазометры, а также печатающие устройства. При испытаниях сложных конструкций применяют многоканальные вибрационные комплексы, включающие ЭВМ.

Наиболее типичным виброкомплексом для частотных испытаний конструкций ракетно-космической и авиационной техники явля-

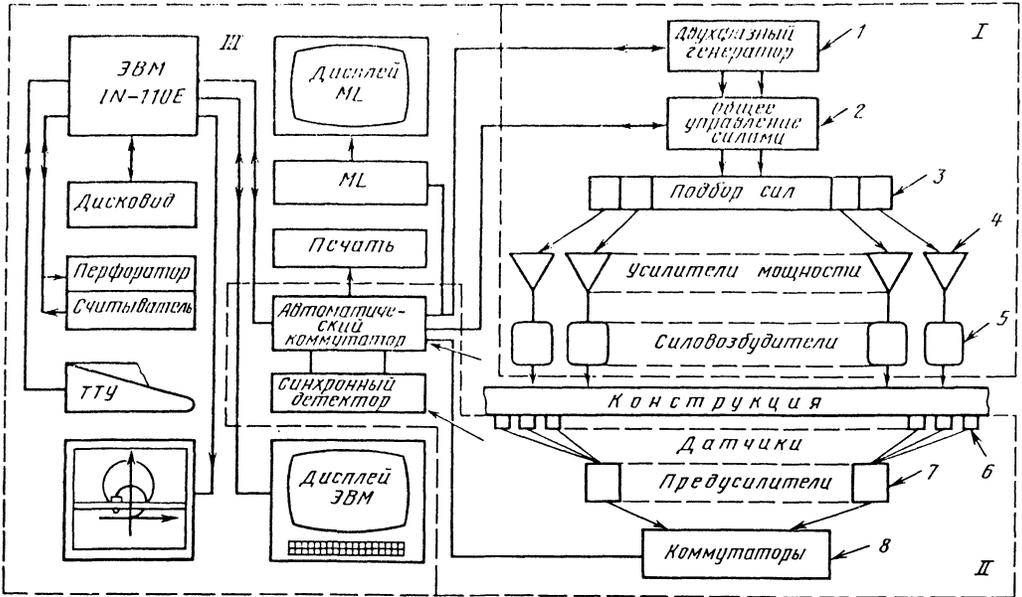


Рис. 11.13.8. Схема многоканального виброкомплекса "Прин-85"

ется виброкомплекс "Прин-85" (Франция). Виброкомплекс (рис. 11.13.8) содержит три основные системы: I) возбуждения; II) измерения; III) управления, сбора и регистрации данных. Система возбуждения виброкомплекса состоит из следующего: задающего генератора 1 синтезирующего типа с цифровым управлением и двухфазным выходом; блоков управления 2 и 3 всеми силами (и каждой в отдельности), представляющих собой прецизионные усилители постоянного тока с цифровым управлением коэффициентами усиления; усилителей 4 мощности; электродинамических силовозбудителей 5.

Система измерения включает датчики ускорения пьезоэлектрического типа, работающие в комплекте с предусилителями 6 и 7 заряда. Сигналы с предусилителей через стационарные кабели подаются на блоки 8 коммутации, а затем на блок автоматического коммутатора. Блок синхронного детектора раскладывает сигналы 20 датчиков пропорционально синфазному и квадратурному сигналам задающего генератора.

Система управления, сбора и регистрации данных представляет собой управляющую

ЭВМ с комплексом периферийных устройств, связанную через блок автоматического коммутатора с системами возбуждения и измерения. В нее входит еще система Мультилиссажу (ML), представляющая собой двадцатиканальный осциллограф, на экран которого выводятся сигналы 20 наиболее информативных датчиков. Горизонтальная развертка осуществляется от задающего генератора.

Программное обеспечение ЭВМ позволяет проводить испытания в автоматическом режиме, фиксируя на магнитном диске измерительную информацию с последующим расчетом динамических характеристик испытуемой конструкции (включая обобщенные массы) и построением собственных форм колебаний. Система Мультилиссажу используется для ручного выбора сил в соответствии с фазовым критерием резонанса.

Виброкомплекс комплектуется силовозбудителями (24 и более) с толкающими усилиями 10...1000 Н и ходами катушек ± 10 мм. В комплект виброкомплекса могут входить несколько сотен датчиков ускорений, имеющих частотный диапазон 2...50 Гц и диапазон ускорений (0,02...20)g. Нижняя граница частотного диапазона 2 Гц определяется характеристикой синхронного детектора.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Абрамов С. К.** Резонансные методы исследования динамических свойств пластмасс. Ростов-на-Дону: Ростовский университет, 1978. 135 с.
2. **Автоматическое** управление вибрационными испытаниями / А. Г. Гетманов, П. И. Дехтяренко, Б. Ю. Соколов-Мандровский и др. М.: Энергия, 1978. 110 с.
3. **Алексюк М. М., Борисенко В. А., Кращенко В. П.** Механические испытания материалов при высоких температурах. Киев: Наук. думка, 1980. 207 с.
4. **Баранов В. Н., Захаров Ю. Е.** Электродинамические и гидравлические вибрационные механизмы. М.: Машиностроение, 1977. 325 с.
5. **Баранов Д. С., Ренский А. Б., Макаров Р. А.** Тензометрирование строительных конструкций и материалов. М.: Машиностроение, 1977. 242 с.
6. **Белл Дж. Ф.** Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел. Ч. I, II / Под ред. А. П. Филина. М.: Наука, 1984. 600, 432 с.
7. **Бендат Дж., Пирсол А.** Измерение и анализ случайных процессов. М.: Мир, 1974. 463 с.
8. **Божко А. Е.** Воспроизведение вибраций. Киев: Наук. думка, 1975. 258 с.
9. **Божко А. Е.** Воспроизведение случайных вибраций. Киев: Наук. думка, 1984. 216 с.
10. **Божко А. Е., Гноевой А. В., Шпачук В. П.** Пространственное вибровозбуждение. Киев: Наук. думка, 1987. 192 с.
11. **Божко А. Е., Урецкий Я. С.** Системы формирования спектра случайных вибраций. Киев: Наук. думка, 1979. 176 с.
12. **Бриджмен П. В.** Анализ размерности. М.-Л.: Гостехиздат, 1934. 120 с.
13. **Бриджмен П.** Исследования больших пластических деформаций и разрыва. М.: Изд-во иностр. лит., 1955. 444 с.
14. **Вибрации в технике:** Справочник. Т. 4, 5, 6. М.: Машиностроение, 1981. 509, 496, 456 с.
15. **Генкин М. Д., Русаков А. М., Яблонский В. В.** Электродинамические вибраторы. М.: Машиностроение, 1975. 98 с.
16. **Голуб В. П.** Циклическая ползучесть жаропрочных никелевых сплавов. Киев: Наук. думка, 1983. 224 с.
17. **Горб М. Л., Островский А. А.** Приспособления и устройства для исследования механических свойств материалов. Киев: Наук. думка, 1973. 71 с.
18. **Грузлев С. В., Прошин Е. М.** Импульсная тензометрия. М.: Энергия, 1976. 88 с.
19. **Дегтярев В. П.** Деформации и разрушение в высоконапряженных конструкциях. М.: Машиностроение, 1987. 105 с.
20. **Динамика удара** / Дж. А. Зукас, Т. Николас, Х. Ф. Свифт и др. М.: Мир, 1985. 296 с.
21. **Добрынин С. А., Фельдман М. С., Фирсов Г. И.** Методы автоматизированного исследования вибрации машин. М.: Машиностроение, 1987. 224 с.
22. **Домрачев В. Г., Матвеевский В. Р., Смирнов Ю. С.** Схемотехника цифровых преобразователей: Справ. пос. М.: Энергоиздат, 1987. 392 с.
23. **Дюрелли А., Паркс В.** Анализ деформаций с использованием муара. М.: Мир, 1974. 360 с.
24. **Дюрелли А., Райме У.** Введение в фотомеханику: Поляризационный оптический метод. М.: Мир, 1970. 484 с.
25. **Исаханов Г. В.** Прочность неметаллических материалов при равномерном нагреве. Киев: Наук. думка, 1971. 178 с.
26. **Испытание металлов:** Справочник / Под ред. Х. Бломенауэра. М.: Металлургия, 1979. 488 с.
27. **Испытательная техника** для исследования механических свойств материалов / Под ред. Г. С. Писаренко. Киев: Наук. думка, 1984. 319 с.
28. **Испытательная техника.** В 2 т. / Г. С. Батуев, А. С. Больших, В. С. Голубков и др. М.: Машиностроение, 1982. 528, 559 с.
29. **Испытательная техника:** Справочник: В 2-х кн. / Под ред. В. В. Клюева. М.: Машиностроение, 1986. 331, 397 с.
30. **Каминский А. А., Бастун В. Н.** Деформационное упрочнение и разрушение металлов при переменных процессах нагружения. Киев: Наук. думка, 1985. 168 с.
31. **Клюева Н. П.** Тензорезисторы. М.: Машиностроение, 1990. 268 с.
32. **Конструктивное демпфирование** в неподвижных соединениях / Н. Г. Калинин, Ю. А. Лебедев, В. И. Лебедева и др. Рига: Изд-во АН, 1960. 172 с.
33. **Катюк А. Ф., Ольшанский В. В., Цветков Э. Л.** Методы и аппаратура для анализа характеристик случайных процессов. М.: Энергия, 1967. 167 с.
34. **Кузнецов Н. Д., Цейтлин В. И.** Эквивалентные испытания газотурбинных двигателей. М.: Машиностроение, 1976. 115 с.
35. **Кузьменко В. А., Васнюк И. М., Крук Б. З.** Многоцикловая усталость при переменных амплитудах нагружения. Киев: Наук. думка, 1986. 264 с.
36. **Лебедев А. А.** Методы механических испытаний материалов при сложном напряженном состоянии. Киев: Наук. думка, 1976. 148 с.
37. **Ленк А., Ренитц Ю.** Механические испытания приборов. М.: Мир, 1976. 270 с.
38. **Линевег Ф.** Измерение температур в технике: Справочник. М.: Металлургия, 1980. 544 с.

39. **Матвеев В. В.** Демпфирование колебаний деформируемых тел. Киев: Наук. думка, 1985. 264 с.
40. **Методы неразрушающих испытаний** / Под ред. Р. Шарпа. М.: Мир, 1972. 494 с.
41. **Механика разрушения и прочность материалов: Справ. пос. Т. 4.** / Под ред. В. В. Пансюка. Киев: Наук. думка, 1990. 615 с.
42. **Механика разрушения: Быстрое разрушение и остановка трещины.** М.: Мир, 1981. 253 с.
43. **Микишев Г. Н.** Экспериментальные методы в динамике космических аппаратов. М.: Машиностроение, 1978. 274 с.
44. **Микро-ЭВМ в информационно-измерительных системах** / С. М. Переверткин, Н. И. Гаранин, М. Н. Костин, И. И. Мионов. М.: Машиностроение, 1987. 248 с.
45. **Несущая способность рабочих лопаток ГТД при вибрационных нагрузениях** / В. Т. Трошенко, В. В. Матвеев, Б. А. Грязнов и др. Киев: Наук. думка, 1981. 316 с.
46. **Новиков Н. В., Лебедев А. А., Ковальчук Б. И.** Механические испытания конструкционных материалов при низких температурах. Киев: Наук. думка, 1974. 192 с.
47. **Олейник Н. В., Скляр С. П.** Ускоренные испытания на усталость. Киев: Наук. думка, 1985. 304 с.
48. **Орнатский П. П.** Автоматические измерения и приборы. Киев: Вища школа, 1980. 560 с.
49. **Пелех Б. Л., Салаяк Б. И.** Экспериментальные методы исследования динамических свойств композиционных структур. Киев: Наук. думка, 1990. 136 с.
50. **Передвижная виброизмерительная лаборатория.** М.: Изд-во стандартов, 1980. 66 с.
51. **Перротте А. И., Карташов Т. И., Цветаев К. Н.** Основы теории ускоренных испытаний радиоэлементов на надежность. М.: Радио и связь, 1968. 223 с.
52. **Пешес Л. Я., Степанова М. Д.** Основы теории ускоренных испытаний на надежность. Минск: Наука и техника, 1971. 168 с.
53. **Писаренко Г. С.** Рассеяние энергии при механических колебаниях. Киев: Изд-во АН, 1962. 436 с.
54. **Писаренко Г. С., Киселевский В. Н.** Прочность и пластичность материалов в радиационных потоках. Киев: Наук. думка, 1979. 284 с.
55. **Писаренко Г. С., Стрижало В. А.** Экспериментальные методы в механике деформируемого твердого тела. Киев: Наук. думка, 1986. 264 с.
56. **Писаренко Г. С., Яковлев А. П., Матвеев В. В.** Вибропоглощающие свойства конструкционных материалов: Справочник. Киев: Наук. думка, 1971. 375 с.
57. **Постников В. С.** Внутреннее трение в материалах. М.: Metallургия, 1974. 351 с.
58. **Приборы для неразрушающего контроля материалов и изделий: Справочник.** Т. 1, 2 / Под ред. В. В. Клюева. М.: Машиностроение, 1986. 331, 397 с.
59. **Приборы и системы для измерения вибрации, шума и удара.** Т. 1, 2 / Под ред. В. В. Клюева. М.: Машиностроение, 1986. 331, 397 с.
60. **Пригоровский Н. И.** Методы и средства определения полей деформаций и напряжений. М.: Машиностроение, 1983. 248 с.
61. **Прочность и долговечность элементов энергетического оборудования** / Б. Поспишил и др. Киев: Наук. думка, 1987. 216 с.
62. **Прочность конструкций при малоцикловом нагружении** / Н. А. Махутов, А. З. Воробьев, М. М. Гаденин и др. М.: Наука, 1983. 272 с.
63. **Прочность материалов и элементов конструкций в экстремальных условиях.** Т. 1, 2 / Под ред. Г. С. Писаренко. Киев: Наук. думка, 1980. 535, 772 с.
64. **Прочность материалов при высоких температурах** / Г. С. Писаренко, В. Т. Трошенко, Г. Н. Третьяченко и др. Киев: Наук. думка, 1966. 560 с.
65. **Седов Л. И.** Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1972. 440 с.
66. **Серенсен С. В., Гарф М. Э., Кузьменко В. А.** Динамика машин для испытания на усталость. М.: Машиностроение, 1967. 460 с.
67. **Сопротивление усталости элементов конструкций** / А. З. Воробьев, Б. И. Олькин, В. И. Стебнев и др. М.: Машиностроение, 1990. 240 с.
68. **Сплавы высокого демпфирования на медной основе** / В. В. Матвеев, Г. Я. Ярославский, Б. С. Чайковский, С. Ю. Кондратьев. Киев: Наук. думка, 1986. 208 с.
69. **Статические испытания на прочность сверхзвуковых самолетов** / А. Н. Баранов, Л. Г. Белозеров, Ю. С. Ильин, В. Ф. Кутыинов. М.: Машиностроение, 1974. 327 с.
70. **Степов М. Н.** Статистические методы обработки результатов механических испытаний: Справочник. М.: Машиностроение, 1985. 232 с.
71. **Стрелков С. П.** Введение в теорию колебаний. М.: Наука, 1964. 448 с.
72. **Стрижало В. А.** Циклическая прочность и ползучесть металлов при малоцикловом нагружении в условиях низких и высоких температур. Киев: Наук. думка, 1978. 238 с.
73. **Сухарев И. П., Ушаков Б. Н.** Исследование деформаций и напряжений методом муаровых полос. М.: Машиностроение, 1969. 208 с.

74. **Тензометрия** в машиностроении / Под ред. Р. А. Макарова. М.: Машиностроение, 1975. 288 с.
75. **Теокарис П. С.** Муаровые полосы при исследовании деформаций. М.: Мир, 1972. 336 с.
76. **Третьяченко Г. Н.** Моделирование при изучении прочности конструкций. Киев: Наук. думка, 1979. 232 с.
77. **Третьяченко Г. Н., Кравчук Л. В., Курчат Р. И.** Термическая усталость металлов в условиях неоднородного напряженного состояния. Киев: Наук. думка, 1985. 286 с.
78. **Трошенко В. Т.** Деформирование и разрушение металлов при многоцикловом нагружении. Киев: Наук. думка, 1981. 343 с.
79. **Трошенко В. Т.** Усталость и неупругость металлов. Киев: Наук. думка, 1971. 268 с.
80. **Ударные волны и явления высокоскоростной деформации металлов** / Под ред. М. А. Мейерса и др. М.: Металлургия, 1984. 512 с.
81. **Усталостные испытания на высоких частотах нагружения** / Под ред. В. А. Кузьменко. Киев: Наук. думка, 1979. 336 с.
82. **Филин Н. В., Буланов А. Б.** Жидкостные криогенные системы. Л.: Машиностроение, 1985. 247 с.
83. **Фрактография** и атлас фрактограмм: Справочник / Под ред. М. Л. Берштейна. М.: Металлургия, 1982. 489 с.
84. **Цапенко М. П.** Измерительные информационные системы. М.: Энергоатомиздат, 1985. 320 с.
85. **Шаповалов Л. А.** Моделирование в задачах механики элементов конструкций. М.: Машиностроение, 1990. 288 с.
86. **Школьник Л. М.** Методика усталостных испытаний: Справочник. М.: Металлургия, 1978. 304 с.
87. **Шумкевич А. А.** Основы электротензометрии. Минск: Вышшая школа, 1975. 352 с.
88. **Экспериментальные методы исследования деформаций и напряжений:** Справ. пос. / Б. С. Касаткин, А. Б. Кудрин, Л. М. Лобанов и др. Киев: Наук. думка, 1981. 584 с.
89. **Эрлер В., Вальтер Л.** Электрические измерения неэлектрических величин полупроводниковыми тензорезисторами. М.: 1974. 285 с.
90. **Яковлев А. П.** Диссипативные свойства неоднородных материалов и систем. Киев: Наук. думка, 1985. 248 с.

ЧАСТЬ II

ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН

Глава 1

ОСНОВЫ ТЕОРИИ САМОУСТАНОВЛИВАЮЩИХСЯ МЕХАНИЗМОВ И ВЫБОР КИНЕМАТИЧЕСКИХ ПАР

Назначение пар - осуществлять необходимые подвижности и связи между звеньями.

В каждой паре сумма подвижностей и связей, взаимно дополняющих друг друга, равна шести. Число связей, накладываемых кинематической парой, является ее классом и обозначается цифрой. Подвижности кинематической пары зависят от направления ее осей, исключение составляет лишь сферическая пара III'. Подвижности типичных кинематических пар для всех направлений приведены в табл. 1.1.

1.1. Кинематические пары с подвижностями, распределенными по осям

Кинематическая пара	$f'_x + f'_y + f'_z$	$f''_x + f''_y + f''_z$	Кинематическая пара	$f'_x + f'_y + f'_z$	$f''_x + f''_y + f''_z$
I			II		
	1 + 0 + 1	1 + 1 + 1		1 + 0 + 1	1 + 1 + 0
	0 + 1 + 1	1 + 1 + 1		0 + 1 + 1	1 + 1 + 0
	1 + 1 + 1	1 + 1 + 0		0 + 0 + 1	1 + 1 + 1
II			III'		
	1 + 0 + 1	0 + 1 + 1		0 + 0 + 1	1 + 1 + 0
	0 + 1 + 1	1 + 0 + 1			
	1 + 0 + 0	1 + 1 + 1			
	0 + 1 + 0	1 + 1 + 1			
	1 + 1 + 1	1 + 0 + 0			
	1 + 1 + 1	0 + 1 + 0			

Кинематическая пара	$f'_x + f'_y + f'_z$	$f''_x + f''_y + f''_z$	Кинематическая пара	$f'_x + f'_y + f'_z$	$f''_x + f''_y + f''_z$
III''			IV		
	1 + 0 + 1	0 + 1 + 0		0 + 0 + 1	0 + 1 + 0 ⁵
	0 + 1 + 1	1 + 0 + 0		0 + 0 + 1	1 + 0 + 0
	0 + 0 + 0	1 + 1 + 1		0 + 0 + 0	1 + 1 + 0
III'			V		
	1 + 0 + 0	0 + 1 + 1		0 + 0 + 0	1 + 0 + 0
	0 + 1 + 0	1 + 0 + 0		0 + 0 + 0	0 + 1 + 0
	1 + 1 + 1	0 + 0 + 0		0 + 0 + 1	0 + 0 + 0
IV			V		
	1 + 0 + 0	1 + 0 + 0		1 + 0 + 0	0 + 0 + 0
	0 + 1 + 0	0 + 1 + 0		0 + 1 + 0	0 + 0 + 0
	0 + 0 + 1	0 + 0 + 1		0 + 0 + 0	0 + 0 + 1

В общих подвижностях участвуют все звенья, а в местных (пассивных) - только часть звеньев. Местные подвижности могут быть вредными, нарушающими закономерность движения механизма. На их наличие следует проверять механизм при проектировании.

Для этого механизм делится на контуры - замкнутые цепи кинематических пар и звеньев, которые различаются между собой по крайней мере на одно новое звено или кинематическую пару. На замыкание контура (сборку) во входящих в него кинематических

парах должно быть шесть подвижностей - по три линейных и три угловых, а также подвижности, идущие на общие и местные подвижности механизма. Линейная подвижность может быть заменена угловой, если она имеется в избытке и есть заменяющее (поворачиваемое) звено, причем все они должны быть близки к перпендикулярным.

Пары могут иметь дополнительную подвижность для обеспечения общей и местной подвижности механизма. Число подвижности пары 1-6.

Кинематические пары накладывают и связи между звеньями. Они необходимы для передачи сил и моментов. Соответственно могут быть три линейные связи и три угловые. Сумма условий связи кинематической пары определяет ее класс. Условие, аналогичное шести подвижностям на замыкание контура, в методе звеньев и связей неизвестно. Поэтому этот метод менее пригоден для сложных механизмов.

Избыточные связи (недостаток подвижностей) в механизмах обращают его в статически неопределимую систему и нарушают самоустанавливаемость. Уравнений равновесия недостаточно для определения нагрузок в кинематических парах. Приходится использовать уравнения деформаций, которые значительно меньше размеров звеньев. Поэтому на них сильно влияют допуски, и получаемые нагрузки возрастают в несколько раз, что значительно снижает нагрузочную способность и долговечность механизма. Предложение автора делать все механизмы статически определимыми [6, 7, 9] открыло широкие возможности повышения качества машин - увеличения долговечности, нагрузочной способности, КПД, снижения трудоемкости и потерь на трение. В зубчатых колесах удалось повысить жесткость зубьев, так как они стали работать равномерно по всей длине, а не одним углом.

Строительные конструкции с внешней статической определимостью не боятся неодинаковой осадки опор (статически определимые мосты в отличие от статически неопределимых не разрушились при землетрясении в Армении).

Без рассмотрения избыточных связей для определения степени свободы W механизмов было предложено больше двадцати структурных формул. Однако применение нашла только формула А.П. Малышева [2]. Из нее можно найти избыточные связи q .

При числе пар p_i класса i , общем числе связей $\sum ip_i$, числе n подвижных звеньев, которые имеют $6n$ степеней свободы, формула А.П. Малышева

$$q - W = -6n + \sum_{i=1}^5 ip_i.$$

Эту формулу следует отличать от формулы П.О. Сомова

$$q - W = n + p + 5k - f,$$

где p - число кинематических пар;

$k = p - n$ - число контуров;

f - общее число подвижностей;

$$f = p_V + 2p_{IV} + 3p_{III} + 4p_{II} + 5p_I.$$

Формула А.П. Малышева решает задачу через число связей, что затрудняет уточнение решения. Удобнее формула О.Г. Озола [3], которая решает задачу через число контуров k и общее число подвижностей f .

Согласно методу, предложенной Е.Ю. Будькой (Е.Ю. Качаловой), необходимое число подвижностей $6k$ идет на замыкание контуров и W - на подвижность механизма, а имеется f подвижностей. Недостаточное число подвижностей

$$q = W + 6k - f,$$

откуда $q - W = 6k - f$.

Основной недостаток структурных формул заключается в том, что они дают только разность $q - W$, а не отдельно эти параметры.

Например, для механизма, показанного на рис. 1.1, по формуле О.Г. Озола $q - W = 1$, но не определено число избыточных связей q и подвижностей W .

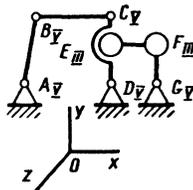


Рис. 1.1. Плоский механизм ($q - w = 6 \cdot 2 - 1 \cdot 5 - 3 \cdot 2 = 1$; $k = 7 - 5 = 2$)

Контур	$f'_x + f'_y + f'_z$	$f''_x + f''_y + f''_z$
$\begin{matrix} B \dot{C} \\ A \dot{D} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \downarrow \\ \downarrow \end{matrix} \left[\begin{matrix} \downarrow \\ \downarrow \end{matrix} \right] \begin{matrix} \uparrow \\ \uparrow \end{matrix}$	$\begin{matrix} \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow \end{matrix}$
$\begin{matrix} E \dot{F} \\ D \dot{G} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \downarrow \\ \downarrow \end{matrix} \left[\begin{matrix} \downarrow \\ \downarrow \end{matrix} \right] \begin{matrix} \uparrow \\ \uparrow \end{matrix}$	$\begin{matrix} \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \end{matrix}$

Исчерпывающий ответ дает использование поконтурного метода, предложенного автором [8]. Для механизма отдельно рассматриваются контуры $ABCD$ и $DEFG$, каждому контуру отводится отдельная строка, каждому виду подвижностей - отдельный столбец: плоским f'_x, f'_y, f'_z и не плоским f''_x, f''_y, f''_z . Кинематические пары обозначены большими буквами, пары, входящие в один контур (одноконтурные), - точками над буквами, что облегчает их распределение. На структурной схеме каждой букве соответствует одна подвижность. Поэтому пары $ABCDG$ (одноподвижные) записываются в один столбец f''_z , пары E и F (трехподвижные) - в три столбца f''_z, f''_x и f''_y . Отсутствие подвижности отражено нулем. Одноконтурные пары - в строке своего контура, многоконтурные записаны в тот контур, где они устраняют избыточную связь, а не в тот, в котором создается местная подвижность. Поэтому подвижность D записана в контур $ABCD$, а не в контур $DEFG$. Буквы, обозначающие в контуре кинематические пары, расположены так, как показано на рис. 1.1, что облегчает замену подвижностей.

При замене линейной подвижности, например f'_x контура $ABCD$, заменяющая угловая подвижность f''_z одна, но ее создают две пары по концам заменяющего звена, например AB , которое направлено по оси Oy . Замена показана зигзагообразной стрелкой. Аналогичным образом звено BC , направленное по оси

x , заменяет f'_y , а звено CD идет на внешнюю подвижность, которая обозначена стрелкой, направленной вверх. Звено с вращательными парами дает одну замену, а со сферическими - три. Например, в звене EF , одна из пар идет на внешнюю подвижность f''_x - вращение вокруг своей оси. Подвижности f''_x, f''_y и f''_z в контуре $ABCD$ заменить нечем, и они остаются как избыточные связи, которые обозначены стрелками, направленными вниз. В результате имеются три избыточные связи и две подвижности - общая в звене CD и местная f''_x в звене EF .

Переходим к отдельным случаям устранения избыточных связей. Опоры для вращательного движения механизма (рис. 1.2) выполнены на двух подшипниках: один - пара A_{III} третьего класса, другой - пара B_{II} второго класса. Число контуров $k = p - n = 2 - 1 = 1$. По формуле О.Г. Озола $q - W = 6k - f = 6 \cdot 1 - 1 \cdot 3 - 1 \cdot 4 = -1$. Здесь пара третьего класса трехподвижная, а второго - четырехподвижная. Разность $q - W = -1$ означает одну подвижность. Согласно поконтурному методу пара A записана в трех столбцах, а пара B - в четырех. Линейные подвижности $f'_x = 0$ и $f'_y = 0$. Они заменяются вращением звена AB , вокруг осей Ox и Oy . Вращение звена вокруг оси Oz идет на внешнюю подвижность (степень свободы). Избыточных связей нет.

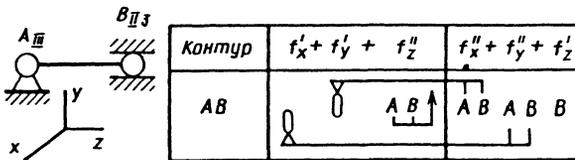


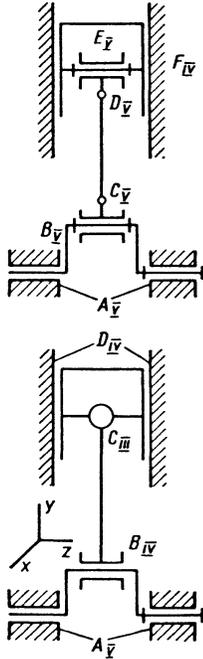
Рис. 1.2. Двухопорный вал ($q - w = 6 \cdot 1 - 1 \cdot 3 - 1 \cdot 4 = -1$; $k = 2 - 1 = 1$)

Применять больше двух подшипников на одном валу нецелесообразно, так как это приводит к избыточным связям, а следовательно, к необходимости центровки. Следует отметить, что центровка проводится по зазорам в соединительной муфте с точностью до одной сотой миллиметра. Однако центровка может нарушиться, например, ввиду просадки фундамента, что и приводит к аварии.

Подшипники одного вала надо рассматривать как одну кинематическую пару, если их изготавливают с одной установки на станке, как и несколько кинематических пар, если их изготавливают отдельно. Например, подшипники коленчатого вала автомобильного двигателя,

расположенные в одной раме, надо считать одной кинематической парой пятого класса, а подшипники двенадцатицилиндрового судового дизеля, расположенные в двух свинченных рамах, - двумя парами, что дает избыточные связи и плохую работу подшипников, расположенных ближе к соединению рам. В заднеприводном автомобиле отсутствуют избыточные связи: их нет в коленчатом валу, а остальные валы двухопорные. Первичный вал коробки передач опирается на подшипники в маховике и в стенке коробки; промежуточный вал - на подшипники в стенке коробки, вторичный вал - на подшипники в первичном валу, и в стенке коробки.

Рис. 1.3. Кривошипно-ползунный механизм:
 а - для больших смещений звеньев ($q - w = 6 \cdot 1 - 1 \cdot 5 - 2 \cdot 1 = -1$; $k = 6 - 5 = 1$); б - для малых смещений звеньев ($q - w = 6 \cdot 1 - 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = -2$; $k = 4 - 3 = 1$)



Контур	$f'_x + f'_y + f'_z$	$f''_x + f''_y + f''_z$
F E D C B A		

Контур	$f'_x + f'_y + f'_z$	$f''_x + f''_y + f''_z$
D C B A		

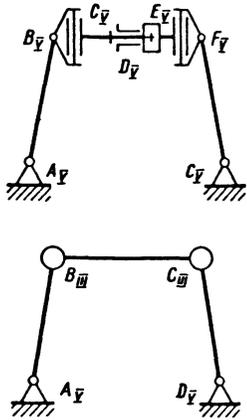
В старинном автомобиле Руссо-Балт первичный вал коробки передач опирался на три подшипника, расположенных в разных корпусах. В зерновых комбайнах “Нива”, “Колос”, “Енисей” валы только двухопорные. К сожалению, в комбайнах “Дон” есть трех- и даже четырехопорные валы.

Кривошипно-ползунный механизм, если выполнен на парах пятого класса (кроме поршня четвертого класса), имеет две избыточные связи. Чтобы их устранить, надо добавить два шарнира C_V и D_V , обычно в шатун (рис. 1.3, а). Тогда заменяющими звеньями будут CD , BE и AB , последнее из которых идет на внешнюю подвижность. Такой механизм приме-

няют в системе регулирования паровых турбин.

Кривошипно-ползунный механизм (рис. 1.3, б) проще; вместо дополнительных шарниров у него увеличена подвижность кинематических пар: у пары B введена осевая подвижность (B_{IV}), а у пары C - две угловые (C_{III}). Заменяющие звенья следующие: BC , идущие на замену, и идущие на внешнюю подвижность AB и на местную CD . В последнем случае вращения поршня вокруг своей оси безвредно. Такой механизм применяется в двигателях внутреннего сгорания и особенно широко используется в двигателях с запальным шаром (нефтянках).

Рис. 1.4. Кривошипно-коромысловый механизм:
 а - $q - w = 6 \cdot 1 - 1 \cdot 7 = -1$; $k = 7 - 6 = 1$;
 б - $q - w = 6 \cdot 1 - 1 \cdot 2 - 3 \cdot 2 = -2$; $k = 4 - 3 = 1$



Контур	$f'_x + f'_y + f'_z$	$f''_x + f''_y + f''_z$
BCDEF A C		

Контур	$f'_x + f'_y + f'_z$	$f''_x + f''_y + f''_z$
BC AD		

б)

Кривошипно-коромысловый механизм на парах пятого класса (рис. 1.4, а) имеет три избыточные связи. Для их устранения добавлено три шарнира C_V, D_V и E_V . Замещающие звенья AB, BF и CE , а на внешнюю подвижность идет FG . Такой механизм применяется при регулировании паровых турбин, правда, иногда без шарнира D_V .

Кривошипно-коромысловый механизм может быть проще (рис. 1.4, б). Вместо дополнительных шарниров увеличена подвижность кинематических пар. Для этого в пары B и C добавлены по две угловые подвижности (B_{III} и C_{III}). Замещающие звенья будут AB (одна замена), BC (три замены), из которых одна пойдет на местную подвижность (безвредное вращение шатуна вокруг своей оси) и CD - на общую подвижность. Такой механизм применяется практически во всех рулевых механизмах автомобилей (трапеция Жанто). Использование сферических шарниров связано с необходимостью иметь большие перекосы для развала колес.

Зубчатая передача на подшипниках пятого класса с прямым или косым зубом имеет одну угловую избыточную связь. Она вызывает неравномерное распределение нагрузки по длине зуба, возрастание удельной нагрузки в несколько раз и преждевременное разрушение. Так, электровозная передача модуля 10 с трудом передает 800 кВт и требует значительных затрат на ее восстановление. Передача турбинного парохода "Физик Лебедев" модуля 7, и примерно такой же окружной скорости, передает 10 МВт и работает без разрушения и износа благодаря параллельности осей, т.е. равномерности нагрузки, чего у электровоза достигнуть невозможно.

Недостающая угловая подвижность введена в зацеплении механизма (рис. 1.5), в котором вместо прямого применен арочный зуб. Угловая подвижность f_y^n заменяет осевую, которую легко получить на одном из валов, применяя пару A_{IV} четвертого класса. Оси координат в этом случае взяты по нормали и касательной к профилям зубьев, замещающее звено AB , а звено BC идет на общую подвижность (степень свободы). Арочный зуб применяется в конических передачах всех автомобилей, и несмотря на то, что ввиду осевого усилия конического колеса у него имеется одна линейная избыточная связь, требующая выверки пятна контакта зубьев, он себя блестяще оправдал.

Зубчатая передача с промежуточным колесом (рис. 1.6) на подшипниках пятого класса имеет две угловые избыточные связи, кото-

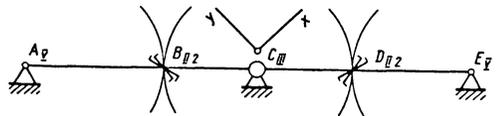
рые устраняются очень просто. Промежуточное колесо получает две угловые подвижности установкой на сферическую опору C_{III} . Пары A, B, D, E одноконтурные, и их легко расставить. Подвижности пары C расставлены на свободные места обоих контуров. Самоустанавливаемость возможна только потому, что нормали к профилям зубьев в парах B и D не совпадают, что может быть нарушено, если линия центров имеет излом в точке C под углом 40° . Тогда только при одном направлении передаваемого момента самоустановки не происходит, а при другом она состоится. Если момент передается только в одном направлении (например, в грузоподъемных машинах), то можно подобрать расположение звеньев такое, чтобы самоустановка обеспечивалась, несмотря на излом линии центров.



Рис. 1.5. Зубчатая передача с арочным зубом (правильная самоустанавливающаяся конструкция;

$$q - w = 6 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 - 1 \cdot 4 = -1;$$

$$k = 3 - 2 = 1)$$



Контур	$f_x' + f_y' + f_z''$	$f_x'' + f_y'' + f_z''$
A B C		B C B
C D E		
D E		

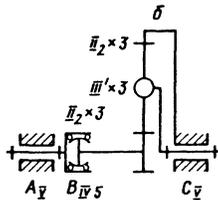
Рис. 1.6. Зубчатая передача с промежуточным колесом ($q - w = 6 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 2 = -1;$

$$k = 5 - 3 = 2)$$

Однорядный планетарный механизм (рис. 1.7) без учета современных требований конструкции, без плавающих звеньев и с подшипниками пятого класса имел восемь избыточных связей: две линейные, дающие неодинаковую нагрузку трех сателлитов; шесть угловых с неравномерной нагрузкой зуба в шести зацеплениях. Для устранения линейных избыточных связей одному центральному звену следует придать две линейные подвижности, выполнив его плавающим на зубчатом кардане V_{IV5} . Для уменьшения трения карданный вал

следует выполнить подлиннее, а плавающее звено выбрать наименьшего радиуса, т.е. использовать солнечное колесо. Радиус зубчатого кардана на трение не влияет. Угловые избыточные связи устраняются, если сателлиты будут иметь шесть угловых подвижностей. Для этого их нужно поставить на сферические пары III аналогично паразитным колесам. Устранение избыточных связей в зерноуборочных комбайнах дало увеличение долговечности в 4 раза (комбайны "Нива", "Колос", "Сибиряк" конструкции Д.И. Шаткуса).

Рис. 1.7. Одноплоскостной планетарный механизм
($q - w = 6 \cdot 2 - 1 \cdot 2 - 2 \cdot 1 - 9 = -1$; $k = 13 - 8 = 5$);



Контур	$t'_x + t'_y + t'_z$	$t''_x + t''_y + t'_z$
$\dot{A} \dot{B} \delta$	$0 \quad \nabla \quad 0 \quad A \quad \delta \quad \uparrow$ Δ	$\delta \quad B \quad \delta \quad B \quad \delta$
$\delta \dot{C}$	$\delta \quad \delta \quad c$	$\delta \quad \delta \quad \delta$

Структурное исследование этого механизма значительно сложнее рассмотренных. Число контуров равно $6 = (12 - 6)$, а главные пары P_2 расположены под разными углами. В сложных планетарных механизмах число контуров 13, 18 и больше. Поэтому для упрощения важно уменьшать их расчетное число. Автором вместе с Г.А. Черновой предложены структурные блоки [9] - часть механизма, для которой предварительно определяются структурные параметры, подставляемые в окончательную структурную таблицу так же, как подвижности кинематической пары.

Для планетарных механизмов такой блок целесообразно выбрать из одного ряда зубчатых колес с подшипниками сателлитов (рис. 1.8). Подшипники центральных звеньев (солнечного колеса, венца и водила) в этот блок не включены. Если они есть (при плавающих звеньях они могут отсутствовать), то учитываются в структурной табл. 1.2. При расчете удобно пользоваться параметрами десяти структурных блоков [9]. Два из них приведены на рис. 1.8. В нашем случае воспользуемся блоком, показанным на рис. 1.8, б. Четыре контура входят в структурный блок, остаются два (6-4) контура.

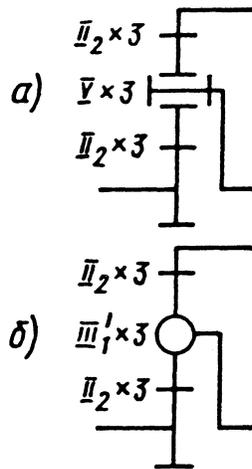


Рис. 1.8. Одноплоскостной планетарный механизм:
а - с избыточными связями; б - без избыточных связей

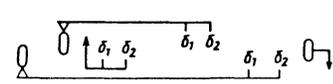
1.2. Структурная таблица одноплоскостного планетарного механизма

Планетарный механизм (рис. 1.8)	n_6	k_6	f_6	$f'_x + f'_y + f''_z$	$f'_x + f'_y + f''_z$
<i>a</i>	5	4	5	a a a	0 0 2a
<i>б</i>	5	4	9	б б б	2б 2б 2б

По формуле О.Г. Озола $q - W = 6k - f = 6 \cdot 2 - 1 \cdot 2 - 2 \cdot 1 - 9 = -1$. Учтены только те кинематические пары, которые не вошли в блок, т.е. A_V, B_{IV5} и C_V , но вошла подвижность блока f_6 . Очень важно, чтобы в расчете учли все подвижности кинематических пар, но только один раз, т.е. в блоке или в таблице. Подвижности блока *б* внесены в структурную таблицу так же как и подвижности кинематической пары, - в соответствующие строку и столбец. В результате избыточных связей нет, подвижность f''_z - одна угловая.

$= 22 - 9 = 13$ заберут восемь контуров. Остается пять контуров, что значительно упрощает задачу.

1.3. Структурная таблица к рис. 1.9

Контур	$f'_x + f'_y + f''_z$	$f'_x + f'_y + f''_z$
Аб ₁	б ₁ б ₁ А	б ₁ б ₁ б ₁
б ₁ В	В В В	В В б ₁
б ₁ ВСб ₂		
б ₂ С	С С С	С С б ₂
б ₂ D	б ₂ б ₂ D	б ₂ б ₂ б ₂

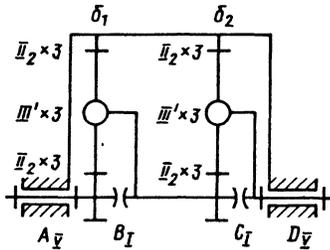


Рис. 1.9. Двухступенчатый механизм

Зубчатый кардан усложняет механизм, а трение в нем искажает распределение нагрузки между сателлитами. Избежать этого можно в двухступенчатом механизме (рис. 1.9), в котором соединительное звено выполнено плавающим. Один конец размещен на трех "паразитках" второй, а другой - на трех "паразитках" первой ступени, что вызывает избыточную связь, но она не страшна, так как можно сделать большой зазор. Два структурных блока *б*₁ и *б*₂ из контуров $k = p - n =$

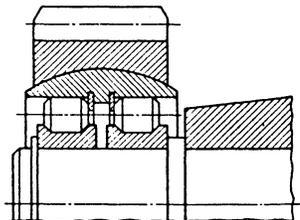


Рис. 1.10. Самоустанавливающийся сателлит конструкции Д.И. Шаткуса

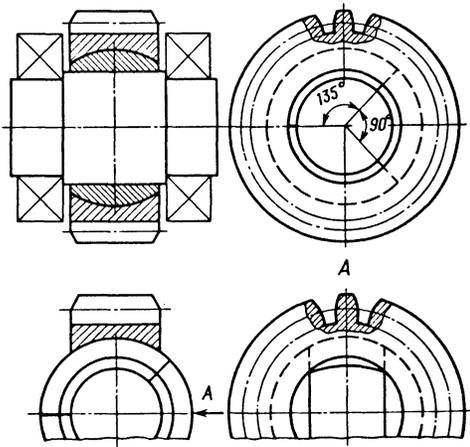


Рис. 1.11. Самоустанавливающийся спутник конструкции В.Н. Ермака

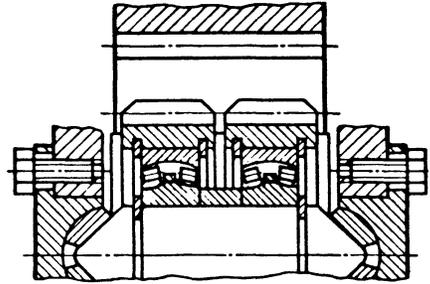


Рис. 1.12. Сдвоенный спутник с клиновым уравнительным механизмом

По формуле О.Г. Озола $q - W = 6 \cdot 5 - 1 \cdot 2 - 5 \cdot 2 - 9 \cdot 2 = 0$, потерялись подвижность и избыточная связь. Согласно контурному методу получена структурная табл. 1.3. Замещающим звеном является соединительное. Оно дает две замены: f'_x через f''_y и f'_y через f''_x . Получены одна угловая подвижность и одна избыточная связь q'_x в контуре $b_1BC b_2$. При малых передаточных числах (электромотор колеса) во второй ступени трудно разместить сферический подшипник достаточной нагрузочной способности. Известна конструкция Д.И. Шаткуса с двумя подшипниками с цилиндрическими роликами (тип 2000) при общем наружном кольце со сферической поверхностью (рис. 1.10). Для сборки в спутнике прорезаны два паза. Разместить подшипник в спутнике удалось Г.А. Снесареву применением спутника-подшипника. Радикальное решение предложено В.Н. Ермаком (рис. 1.11): вал спутника опирается на два подшипника, расположенных в водиле. Необходимые угловые подвижности достигаются сферическим соединением венца с валом. Для сборки сфера составлена из трех сегментов с углами 90, 135 и 135°. Сегменты вложены в вывернутом на 90° положении. После чего сфера развернута в нормальное положение.

Если один подшипник необходимой работоспособности не размещается в спутнике, то можно применить сдвоенный спутник с клиновым уравнительным механизмом (рис. 1.12). Избыточные связи можно обнаружить при сборке. Статически определимый механизм должен собираться без натягов. Наличие натягов свидетельствует об избыточных связях. Метод графов, предложенный Л.А. Павловой [4], в котором рассматривается граф механизма, может дать дальнейшее развитие современным математическим методам.

Кроме поконтурного метода можно применять метод уточненных структурных формул, приведенных в табл. 1.4, на примере трехклавишного соломотряса (рис. 1.13). Структура этого тройного механизма параллельного кривошипа одинакова с кривошипно-коромысловым механизмом. Избыточные связи устранены постановкой подшипников D и K на поводки $D_{III}E_V$ и $K_{III}L_{III}$. Подвижности рассматриваются не все вместе, как у О.Г. Озола и А.П. Мальшева, а расписываются в отдельные столбцы и строки по видам (как и в поконтурном методе). По предложению Е.Ю. Качаловой объединены вместе плоские подвижности $f'_x + f'_y + f''_z$ и неплоские $f''_x + f''_y + f'_z$. В отдельном столбце записаны все подвижности по формуле Озола. Потребовались замены подвижностей, которые показаны линиями со стрелкой.

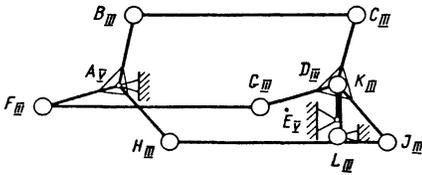


Рис. 1.13. Трехзвальный соломотряс без избыточных связей

1.4. Метод уточненных формул и поконтурный метод для соломотряса (рис. 1.13)

$n=7$	f	$f'_x + f'_y + f'_z$	$f''_x + f''_y + f''_z$
$P_V=2$	-2	0 -0 -2	0 -0 -0
$P_{III}=9$	-27	0 -0 -9	-9 -9 -0
$k=4$	24	4 +4 +4	4 +4 +4
	-5	4 +4 -7	-5 -5 +4
BC, FG, HJ (AB) (DE) KL (DK)			
$q-W=-5$	0 +0 -1	-3 -1 +0	
BC AD E			
AFGD E			
K AHJ			
DK EL			

Заменяющие звенья обозначены следующим образом: в первой строке BC, FG, HJ - направленные по оси x, во второй (AB), (DE), KL - по оси y, в третьей DK - по оси z. Замены могут быть плоские, когда обе кинематические пары (заменяемая и заменяющая) плоские, и оформляются в средней колонке. Неплоские замены, когда обе кинематические пары неплоские, оформляются в правой колонке. Если одна кинематическая пара имеет неплоскую подвижность, а другая плоскую, то замена будет неплоско-плоской и оформляется в двух этих колонках. Звенья, дающие две замены - без скобок, дающие плоские замены - в круглых скобках, неплоские в квадратных (отсутствуют) и неплоско-плоские - в одной круглой и одной квадратной. При проектировании механизма наличие заменяющего звена соответствующего направления надо проверять.

Замена подвижностей в сложных механизмах облегчается тем, что она происходит в пределах одной структурной группы. Таких групп Ассура три: двухповодковая, трехповодковая, и четырехповодковая. Они могут вырождаться, т.е. обращаться в подвижную с избыточной связью [5, 9].

Изменением классов кинематических пар автору удалось получить двадцать схем групп нулевой подвижности [9], а использованием метода присоединения - применить группы и ненулевой подвижности, причем каждая последующая группа не должна влиять на подвижность предыдущих групп [9]. Такие группы можно использовать как структурные блоки для сокращения числа контуров при поконтурном методе.

Метод уточненных структурных формул (табл. 1.5) применим для вращающейся печи (рис. 1.14). Такая печь имеет длину 180...200м, диаметр 7 м и массу до 6000 т. Она опирается на 15 роликов (14 с горизонтальной осью и 1 с вертикальной) с нагрузкой на каждый до 5 МН. Подвижности рассмотрены только линейные и угловые. В табл. 1.5. приведены две неплоско-плоские замены, заменяющие звено - барабан.

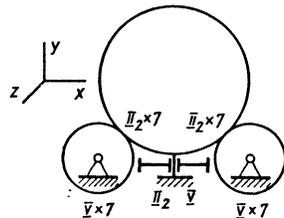


Рис. 1.14. Опорные ролики вращающейся печи

1.5. Метод уточненных структур для роликов вращающейся печи (рис 1.14)

$n=16$	f	$f' + f''$
$P_V = 15$	-15	0 -15
$P_{II} = 15$	-60	-30 -30
$k=14$	84	42 + 42
	$25-16=9$	$\frac{12}{0} - \frac{3}{16}$
W	16	$2 - \frac{3}{16}$
q	25	10 + 15

В связи с проскальзыванием отдельную подвижность могут иметь барабан и все 15 роликов (всего 16) Результат избыточных связей - 10 линейных и 15 угловых (из-за них печи очень плохо работали; возникли положения с роликом "на весу"). Устранение избыточных связей достигается или балансиром, или установкой под каждым роликом гидравлического цилиндра [9]. Они соединены трубопроводами в четыре отдельные системы. При проектировании трубопроводов следует учитывать, что потери напора в них обратно пропорциональны диаметру в пятой степени, что открывает большие возможности для их уменьшения. Применение пневматической системы вместо гидравлической, предложенной Г.В. Раевским (вместо цилиндров - резиновые подушки, а затем мембраны), устраняет избыточные связи и обеспечивает одинаковую нагрузку на ролики. Поэтому от двух электродвигателей можно сделать привод на четыре ролика и избежать привода на барабан. Для последнего требуется зубчатое колесо диаметром до 8 м, требующее специальных станков для изготовления. Для плоского механизма (точнее для одноплоскостного), так как могут быть и многоплоскостные (см. рис. 1.9), $z = b_1 b_2 = 0$ и неплоско-плоских замен нет. Тогда можно отдельно рассматривать плоские (индекс П) и неплоские (индекс Н) подвижности и избыточные связи. Получены структурные формулы:

$$q_{\text{П}} - W_{\text{П}} = 3k - (f'_x + f'_y + f'_z) \quad (1.1)$$

и

$$q_{\text{Н}} - W_{\text{Н}} = 3k - (f''_x + f''_y + f''_z)$$

или

$$q_{\text{П}} - W_{\text{П}} = 3k - p_{\text{Н}} - 2p_{\text{В}}$$

и

$$q_{\text{Н}} - W_{\text{Н}} = 3k - f_{\text{Н}}$$

Формула (1.1) представляет формулу О.Г. Озола, но пригодна только для одноплоскостного механизма (имеется еще и "неплоская" формула).

Аналогично плоской формуле О.Г. Озола плоская формула А.П. Малышева

$$q_{\text{П}} - W_{\text{П}} = -3n + 2p_{\text{Н}} + p_{\text{В}} \quad (1.2)$$

Она отличается от формулы Чебышева

$$3m - 2(n + v) = 1,$$

где m - число подвижных звеньев; $n+v$ - число шарниров.

Плоская формула А.П. Малышева (1.2) применима только с теми же оговорками, что и плоская формула О.Г. Озола. Таким образом, определена сущность плоских, неплоских и полных структурных формул, а также причина различия коэффициентов для них.

Следует отметить ошибочность применения общих связей, согласно которым одинаковые связи, наложенные на все звенья механизма,

$$W = n(6 - v) - p_V(5 - v) - p_{IV}(4 - v) - \dots$$

Число общих связей v считали номером семейства. Приравняв W по этой формуле значению W по формуле А.П. Малышева, получаем

$$W = 6n - 5p_V - 4p_{IV} - \dots + q$$

или

$$v(-n + p_V + p_{IV} + \dots) = q.$$

В скобках $p-n=k$. Откуда $v = q/k$, т.е. число общих связей - это среднее число избыточных на контур, а не приложенных связей, которые означают дополнительные силы или моменты, передаваемые парами, что невозможно. Число v может быть дробным, а число связей обязательно целое.

Предложенная "переменная структура" также не решает вопрос о связях, наложенных на кинематическую пару, входящую в два контура. Деление связей на родовые и индивидуальные еще больше осложнило проблему. Неизвестно полное исследование структуры механизма с помощью общих связей, с определением всех связей и подвижностей. Ошибочно, например, рассматривать ферму как механизм, считая, что в нем могут быть или подвижности, или избыточные связи, но не вместе то и другое. Так, в вале на трех опорах много избыточных связей и одна подвижность.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кожевников С.Н. Основание структурного синтеза механизмов. Киев: Наукова думка, 1979. 230 с.
2. Малышев А.П. Кинематика механизмов. М.: Гизлепром, 1933. 467 с.
3. Озол О.Г. О новой структурной формуле // Изв. вузов. Машиностроение. 1964. N 4. С. 42-50.

4. Павлова Л.А. Метод графов в структурном анализе пространственных механизмов // Технология авиационного: Межвуз. сб. 1976. Вып. 1. С. 182-190.

5. Решетов Л.Н. Вырождение группы Ассур // Метод. сборник МВО по ТММ. 1979. № 8. С. 101-105.

6. Решетов Л.Н. Конструирование рациональных механизмов // Тр. инст. машин. Т. XVIII. Вып. 70. С. 36-48.

7. Решетов Л.Н. Конструирование рациональных механизмов. М.: Машиностроение, 1972. 256 с.

8. Решетов Л.Н. Определение подвижностей и избыточных "связей" (поконтурный метод) // Изв. вузов. Машиностроение. 1971. № 8. С. 54-58.

9. Решетов Л.Н. Самоустанавливающиеся механизмы: Справочник. М.: Машиностроение, 1991. 288 с.

Глава 2

КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ

2.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Кинематический анализ механизма заключается в определении движения его звеньев по заданным относительным движениям тех звеньев, которые образуют между собой входные кинематические пары (входные пары). В большинстве механизмов имеется одна входная пара - кинематическая пара, образуемая двумя звеньями, закон относительного движения которых считается заданным.

Будем различать два типа рычажных механизмов: 1) одно из двух звеньев, образующих входную пару, является стойкой; 2) оба указанных звена подвижные. Большинство механизмов, применяемых в технике, относится к механизмам первого типа (см. п. 1-4, табл. 2.1.1). В этих механизмах входным звеном называют подвижное звено, образующее входную пару со стойкой. Цель кинематического анализа механизма первого типа - определение движения всех подвижных звеньев при заданном движении входного звена. Для механизмов второго типа (см. п. 5, табл. 2.1.1) не представляется возможным указать входное звено среди двух звеньев, образующих входную пару. Цель кинематического анализа механизма второго типа - определение абсолютного движения (относительно стойки) всех подвижных звеньев механизма при заданном относительном движении двух указанных звеньев.

Кинематическая схема механизма есть его структурная схема с указанием размеров

звеньев, необходимых для кинематического анализа механизма. Такие размеры (линейные или угловые) являются постоянными параметрами кинематической схемы механизма. Переменные параметры кинематической схемы механизма - это линейные или угловые величины, определяющие положение подвижных звеньев относительно стойки или других подвижных звеньев. Среди переменных параметров имеются независимые и зависимые. В качестве независимых переменных параметров, называемых обобщенными координатами механизма, обычно принимают относительные перемещения звеньев, образующих между собой входные пары. Как уже отмечалось, число обобщенных координат называется числом степеней свободы W , или подвижностью, механизма. В технике наиболее распространены одноподвижные рычажные механизмы ($W=1$).

Функцией положения механизма называется зависимость координаты выходного звена от обобщенных координат механизма. Под координатой выходного звена здесь понимается переменный параметр, определяющий положение выходного звена относительно стойки. Если положение выходного звена относительно стойки определяется d координатами, то вводится d функций положения механизма.

Наряду с функцией положения механизма (относящейся к выходному звену) вводятся еще функции положения других подвижных звеньев, входящих в ведомую кинематическую цепь.

В табл. 2.1.1 приведены примеры функций положения механизмов.

Обобщенной скоростью механизма называют первую производную от обобщенной координаты механизма по времени. В шарнирном четырехзвеннике (см.

п. 1, табл. 2.1.1) $\omega_1 = \frac{d\varphi_1}{dt} = \dot{\varphi}_1$ - обобщенная

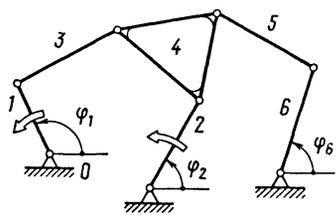
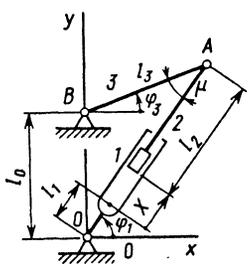
скорость механизма. Аналогом скорости точки какого либо звена механизма является первая производная радиуса-вектора этой точки по обобщенной координате механизма. Аналогом угловой скорости звена механизма называется первая производная угловой координаты этого звена по обобщенной координате механизма. Аналогом ускорения точки какого-либо звена механизма - вторая производная радиуса-вектора этой точки по обобщенной координате механизма. Аналогом углового ускорения звена механизма является вторая производная угловой координаты этого звена по обобщенной координате механизма.

В шарнирном четырехзвеннике (см. п. 1,

табл. 2.1.1): $\varphi_3' = \frac{d\varphi_3}{d\varphi_1}$ и $\varphi_3'' = \frac{d^2\varphi_3}{d\varphi_1^2}$ - анало-

2.1.1. Примеры механизмов и их функций положения

Механизмы	Схема механизма	Величины W, d	Параметры		Обобщенные координаты	Выходное звено	Функция положения
			постоянные	переменные			
1. Шарнирный четырехзвенник		$W=1, d=1$	l_1, l_2, l_3, l_0	$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \mu$ (μ - угол передачи)	φ_1	3	$\varphi_3(\varphi_1)$
2. То же		$W=1, d=3$					2
3. Кривошипно-ползунный		$W=1, d=1$	l_1, l_2, y_B	$\varphi_1, x_B, \vartheta$ (ϑ - угол давления)	φ_1	3	$x_B(\varphi_1)$

Механизмы	Схема механизма	Величины W, d	Параметры		Обобщенные координаты	Выходное звено	Функция положения
			постоянные	переменные			
4. Семизвенный плоский шарнирный		$W=2,$ $d=1$	—	—	φ_1, φ_2	6	$\varphi_6(\varphi_1, \varphi_2)$
5. С качающимся цилиндром		$W=1,$ $d=1$	l_1, l_2, l_3, l_0	$X, \varphi_1, \varphi_3, \mu$ (μ - угол передачи)	X	3	$\varphi_3(X)$

ги угловой скорости и углового ускорения звена 3; $\frac{dr_C}{d\varphi_1}$ и $\frac{d^2r_C}{d\varphi_1^2}$ - аналоги скорости и ускорения точки C, где $r_C = AC$.

2.2. СБОРКИ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ

При любом положении входного звена 1 другие подвижные звенья механизма можно собрать, как правило, несколькими способами, т.е. существует несколько вариантов сборки механизма заданной структуры и при заданных значениях его постоянных параметров. Сборки рычажных механизмов рассмотрим на примере плоских механизмов с $W=1$.

Наличие нескольких вариантов сборки механизма при некотором положении входного звена 1 обусловлено тем, что звенья каждой из групп Ассур, входящих в его состав, при фиксированных положениях внешних шарниров группы могут быть собраны двумя или более способами, т.е. существуют два или более варианта сборки группы.

Так, двухзвенная группа Ассур имеет два варианта сборки (рис. 2.2.1, а), а четырехзвенные группы Ассур - до шести вариантов сборки. На рис. 2.2.1, б показаны две возможные сборки шарнирного четырехзвенника: ABC_1D - первая сборка; ABC_2D - вторая сборка.

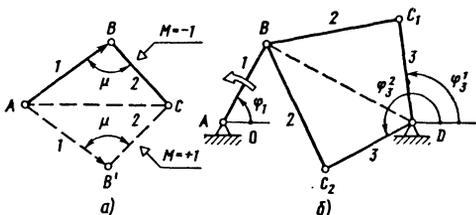


Рис. 2.2.1. Варианты сборки:

а - двухзвенной группы Ассур; б - шарнирного четырехзвенника

Если при одностороннем повороте входного звена 1, т.е. при непрерывном и монотонном изменении угла φ_1 , положения звеньев 2, 3, ..., $n-1$ механизма будут также непрерывно изменяться, то это означает, что механизм продолжает находиться в одной и той же сборке. На практике рычажные механизмы работают обычно в какой-либо одной из возможныхборок на всем заданном диапазоне движения входного звена, не переходя в другую сборку.

Различают кривошипные и некривошипные сборки. Если, оставаясь в одной и той же сборке, все звенья механизма при непрерывном и одностороннем повороте входного звена 1 периодически, с периодом по углу φ_1 , равным 2π , возвращаются в свое исходное положение, то такую сборку называют кривошипной. Если сборка существует на ограниченном (т.е. меньше 2π) отрезке изменения угла φ_1 , то такую сборку называют некривошипной.

Отрезок $[A_r, B_r]$ изменения угла φ_1 , в пределах которого существует r -я сборка механизма, является областью существования r -й сборки ($r=1, 2, \dots, G$, где G - общее числоборок механизма, обычно четное). Для кривошипной сборки $B_r - A_r = 2\pi$, а для некривошипной сборки $0 < B_r - A_r < 2\pi$.

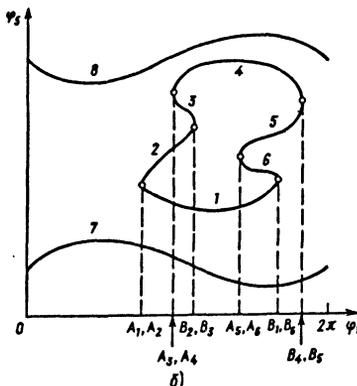
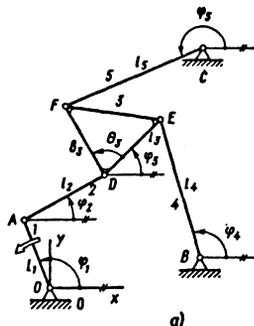


Рис. 2.2.2. Шестизвенный плоский шарнирный механизм с трехзвеновой группой:

а - кинематическая схема; б - функции положения выходного звена для всех возможныхборок

Угловая координата $\varphi_i = \varphi_i^r(\varphi_1)$ есть функция положения звена i механизма для r -й его сборки ($i=2, 3, \dots, n-1$). Функцию

$\Phi_{n-1}^r(\Phi_1)$, относящуюся к выходному звену $n-1$, называют функцией положения r -й сборки. На рис. 2.2.2 в качестве примера показаны графики функций положения выходного звена 5 шестизвенного плоского шарнирного механизма с трехпроводковой группой при определенных значениях его постоянных параметров для всех возможных его сборок. В данном случае две сборки - кривошипные, а шесть сборок - некривошипные.

Левая A_r (или правая B_r) граница r -й некривошипной сборки одновременно является левой (или правой) границей другой некривошипной сборки. Положение механизма, отвечающее общей границе двух некривошипных сборок, называют мертвым положением, а соответствующее значение угла Φ_1 - критической точкой. Число критических точек равно числу некривошипных сборок (обычно четное). В мертвом положении механизм имеет конфигурацию застопоривания (предполагается, что движущая сила приложена только к входному звену 1).

При приближении значения Φ_1 к A_r справа или B_r слева производные $d\Phi_i^r/d\Phi_1$ неограниченно возрастают; на самой границе касательная к графику функции положения $\Phi_i^r(\Phi_1)$ становится вертикальной. Участки

области существования некривошипной сборки, достаточно близко примыкающие к ее границам, т.е. к критическим точкам, характеризуются неблагоприятными значениями критериев качества передачи движения и сил.

2.3. ПРИЗНАКИ ВАРИАНТОВ СБОРКИ ГРУПП АССУРА

Существуют пять модификаций двухзвенной плоской структурной группы: ВВВ, ВВП, ВПВ, ВПП и ПВП (В - вращательная, П - поступательная пара). Группы ВВВ, ВВП и ВПВ (см. рис. 2.2.1; а, 2.3.1 а, б) имеют по два варианта сборки в общем случае и только при особых положениях звеньев - один вариант сборки, группа ВПВ - один вариант сборки также в том случае (не особом), когда $AB=CD=0$, группы ВПП и ПВП (рис. 2.3.1, в, г) - один вариант сборки.

Особые положения звеньев групп ВВВ, ВВП и ВПВ следующие: для группы ВВВ точки А, В и С лежат на одной прямой; для группы ВВП $AB \perp \xi$; для группы ВПВ $BD=0$. Звенья группы ВВВ, ВВП или ВПВ, входящей в состав механизма, не должны оказываться в особом положении, так как особому положению группы соответствует мертвое положение механизма.

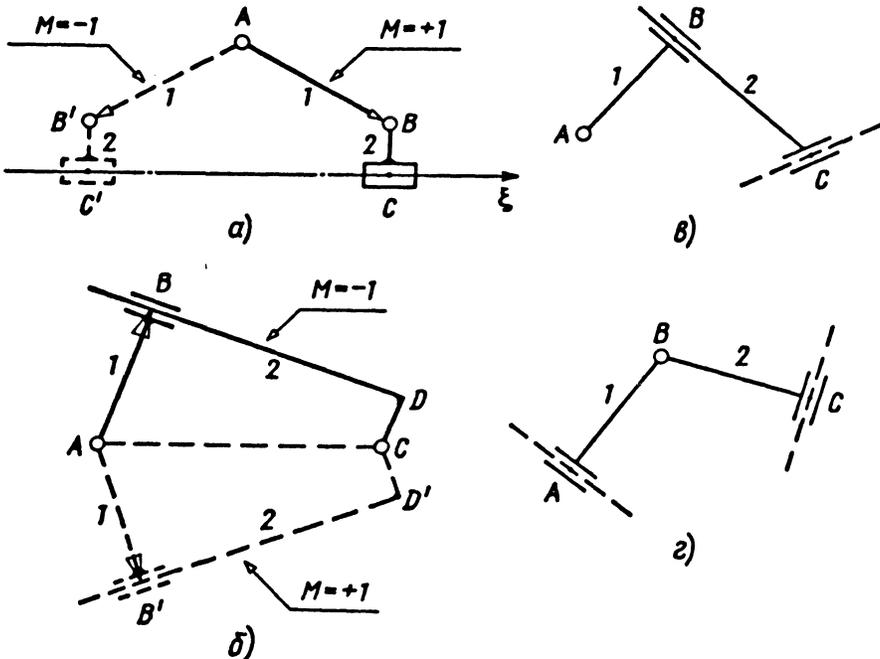


Рис. 2.3.1. Варианты сборки двухзвенных плоских структурных групп:

а - ВВП; б - ВПВ; в - ВПП; г - ПВП; В - вращательная пара; П - поступательная пара

Признаки, или числовые показатели, M варианта сборки (при отсутствии особых положений) следующие [8]:

для групп ВВВ (рис. 2.2.1, а) и ВПВ (рис. 2.3.1, б)

$$M = \operatorname{sgn} \left[M_C(\overline{AB}) \right] = \operatorname{sgn} \left[(\overline{CA} \times \overline{AB}) \cdot \mathbf{k} \right]; \quad (2.3.1)$$

для группы ВВП (рис. 2.3.1, а)

$$M = \operatorname{sgn} \left[(\overline{AB})_{\xi} \right] = \operatorname{sgn} \left(\overline{AB} \cdot \xi^0 \right), \quad (2.3.2)$$

где $M_C(\overline{AB})$ - момент вектора \overline{AB} относительно точки C (алгебраическое значение); $(\overline{AB})_{\xi}$ - проекция вектора \overline{AB} на ось ξ ; \mathbf{k} и ξ^0 - орты осей z и ξ (ось z перпендикулярна к плоскости чертежа и направлена вверх; ось z и орт \mathbf{k} на рис. 2.3.1 не показаны).

Правило выбора знака момента $M_C(\overline{AB})$ такое: если поворот вектора \overline{AB} вокруг точки C виден против часовой стрелки, то $M_C(\overline{AB}) > 0$, в противном случае $M_C(\overline{AB}) < 0$. Из формул (2.3.1) и (2.3.2) следует, что при отсутствии особых положений звеньев группы признак $M = +1$ или -1 . При особых положениях звеньев группы ВВВ, ВВП или ВПВ признак $M = 0$. Числовой показатель M является структурным, а не геометрическим признаком группы, так как он инвариантен по отношению к геометрическим параметрам звеньев группы.

Для большинства плоских групп Ассур с четырьмя звеньями и более пока не найден структурный признак, аналогичный признаку M для двухзвенных групп. Для пространственных структурных групп признак варианта сборки может быть введен при $n_{гр} = 2$ и не найден при $n_{гр} > 2$, где $n_{гр}$ - число звеньев группы.

2.4. ПРИЗНАКИ СБОРКИ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ

Для плоских рычажных механизмов второго класса вариант их сборки при данном Φ_1 устанавливается при помощи набора признаков M_1, M_2, \dots, M_m вариантов сборки отдельных диад, входящих в состав механизма (m - число диад). В пределах области существования $A_r < \phi_1 < B_r$ какой-либо r -й сбор-

ки механизма показатели M_1, M_2, \dots, M_m не изменяют своих значений (лишь только на границе A_r или B_r области по крайней мере один из них станет равным нулю). Поэтому они могут служить признаками, определяющими сборку механизма второго класса во всей области существования. Например, в шестизвенном механизме (рис. 2.4.1) $m = 2$. В соответствии с формулами (2.3.1) и (2.3.2) $M_1 = -1, M_2 = +1$ где M_1 и M_2 - признаки вариантов сборки первой диады ВВВ (звенья 2 и 3) и второй диады ВВП (звенья 4 и 5).

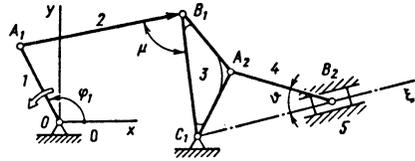


Рис. 2.4.1. Шестизвенный механизм с диадами ВВВ и ВВП

Если в структуре механизма имеется группа, для которой не найден структурный признак сборки (типа признака M), то для такого механизма не представляет возможным ввести какой либо числовой критерий или набор критериев, с помощью которых можно было бы однозначно выделить конкретную сборку механизма.

2.5. КРИТЕРИИ КАЧЕСТВА ПЕРЕДАЧИ ДВИЖЕНИЯ

Критериями качества передачи движения (или сокращенно - критериями передачи) называются критерии работоспособности рычажного механизма, сферой действия которых является этап кинематического анализа или синтеза механизма. Объектом исследования на этих этапах является кинематическая схема механизма.

В теории механизмов в качестве критерия передачи широко используют угол давления - острый угол ϑ между направлением силы давления (нормальной реакцией) R_{ki} на звено k со стороны смежного звена i и скоростью \mathbf{v} точки приложения этой силы. В кривошипно-ползунном механизме (см. табл. 2.1.1) угол давления ϑ определяется в шарнире B , как угол между реакцией R_{32} и скоростью \mathbf{v}_B (считается, что реакция R_{32} направлена по отрезку AB).

Угол давления ϑ используется в тех случаях, когда можно достаточно просто найти направления векторов R_{ki} и \mathbf{v} (рис. 2.5.1).

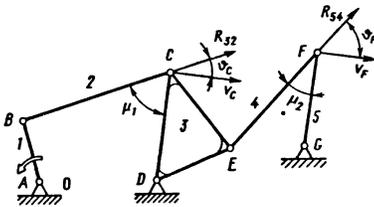


Рис. 2.5.1. Шестизвенный механизм с двумя диадами ВВВ

Наряду с углом давления в плоских механизмах, содержащих диаду вида ВВВ, в качестве критерия передачи используют угол передачи μ - угол между двумя звеньями диады вида ВВВ (см. рис. 2.2.1, а). Для шести-звенного механизма, показанного на рис. 2.5.1, вводятся два угла передачи (μ_1 и μ_2). Угол μ может изменяться от 0 до 180° , причем $\mu=0$ или 180° только при особых положениях звеньев диады ВВВ, которые рассмотрены выше. Между углами ϑ и μ (для диады ВВВ) существует соотношение $\vartheta = \left| \mu - 90^\circ \right|$.

Угол давления ϑ и угол передачи μ должны удовлетворять условиям:

$$\vartheta(\varphi_1) \leq \vartheta_d \text{ при всех } \varphi_1 \in [A, B]; \quad (2.5.1)$$

$$\mu_d \leq \mu(\varphi_1) \leq 180^\circ - \mu_d \text{ при всех } \varphi_1 \in [A, B], \quad (2.5.2)$$

где ϑ_d и μ_d - допускаемые значения углов соответственно давления и передачи; $[A, B]$ - заданный отрезок изменения угла φ_1 , лежащий в пределах области существования рассматриваемой сборки механизма.

Углы ϑ_d и μ_d назначаются исходя из конкретных условий работы механизма. Например, часто берут угол $\vartheta_d = 30 \dots 45^\circ$, а угол $\mu_d = 45 \dots 60^\circ$.

Ранее отмечалось, что углы ϑ и μ могут быть найдены для ограниченного набора структурных схем рычажных механизмов, но и в этом случае они не всегда достоверно информируют о качестве передачи движения. Между тем, можно получить такие критерии передачи, которые, во-первых, являются более объективными показателями качества механизма (на уровне его кинематической схемы) и, во-вторых, применимы для любых рычаж-

ных механизмов [6]. Так, для одноподвижных плоских рычажных механизмов, у которых выходное звено образует пару вида В со стойкой, а двухпарное выходное звено образует пару вида В или П со стойкой и пару вида В с предыдущим звеном, рекомендуется использовать критерий

$$\varpi = F_c / R, \quad (2.5.3)$$

где F_c - модуль условной силы сопротивления F_c ; R - максимальный из модулей реакций в кинематических парах механизма.

Условная сила сопротивления F_c прикладывается к выходному звену. В случае, когда выходное звено образует пару вида П со стойкой, т.е. является ползуном, сила F_c направлена вдоль оси движения ползуна. В случае, когда выходное звено образует пару вида В со стойкой,

$$F_c = M_c / l_{n-1},$$

где M_c - момент силы сопротивления; l_{n-1} - длина выходного звена. Величины F_c в первом случае и M_c во втором случае назначаются произвольно.

При определении реакций R_j в кинематических парах механизма ($j=1, 2, \dots, p$; $p=(3/2)n-2$ - число пар) принимаются следующие допущения:

в качестве механизма рассматривается его кинематическая схема;

к звеньям механизма прикладывается унифицированная система активных сил и моментов: к входному звену 1 уравновешивающий момент M_{yp} , к выходному звену $n-1$ сила сопротивления F_c (в первом из двух указанных выше случаев) или момент сопротивления M_c (во втором случае);

считается, что все подвижные звенья механизма находятся в равновесии при любом значении угла φ_1 из заданного отрезка его изменения, а силы трения отсутствуют.

При статическом анализе сил, действующих на подвижные звенья механизма, вектор F_c или момент M_c считается заданным, а неизвестными являются момент M_{yp} и реакции

R_1, R_2, \dots, R_p . При этом число неизвестных, равное $2p+1$ (в пересчете на скалярные величины), совпадает с числом уравнений равновесия $n-1$ подвижных звеньев, равным $3(n-1)$.

После расчета модулей R_j реакций R_j ($j = 1, 2, \dots, p$) определяется $R = \max(R_1, R_2, \dots, R_p)$. Величины M_{yp}, R_j

и R всегда прямо пропорциональны F_c или M_c , поэтому критерий передачи ε , найденный по формуле (2.5.3), получается безразмерным.

Критерий ε имеет чисто геометрическую природу, зависит только от параметров кинематической схемы механизма и является функцией входного угла φ_1 , т.е. $\varepsilon = \varepsilon(\varphi_1)$. Можно показать, что всегда $R \geq F_c$. Поэтому критерий $\varepsilon = 0..1$ (так же как и косинус угла давления ϑ). В наиболее благоприятном случае $\varepsilon = 1$, в самом неблагоприятном (в мертвом положении механизма) $\varepsilon = 0$. Вблизи мертвого положения значения ε близки к нулю.

При анализе или синтезе механизма нужно проверять условие

$$\varepsilon(\varphi_1) \geq \varepsilon_d \text{ при всех } \varphi_1 \in [A, B], \quad (2.5.4)$$

где ε_d - минимально допустимое значение критерия ε ; можно принять

$$\varepsilon_d = \cos 45^\circ = 0,707.$$

Учет критериев передачи на стадии кинематического синтеза не гарантирует получения работоспособного механизма после его конструктивной реализации, но создает необходимые предпосылки для этого. Критерии передачи позволяют оценить не только качество передачи движения и сил в механизме, но и степень удаленности от опасной зоны, прилегающей к границам области существования сборки, в которой все качественные характеристики механизма (аналоги скоростей и ускорений, чувствительность функций положения звеньев к погрешностям значений параметров механизма и др.) становятся неблагоприятными.

Пример. Для шестизвенного плоского шарнирного механизма, содержащего трехповодковую группу (см. рис. 2.2.2, а), критерий передачи, рассчитанный в соответствии с изложенной выше методикой,

$$\varepsilon = \frac{|D|}{\max(|F_1|, |F_2|, |F_3|)}. \quad (2.5.5)$$

Здесь

$$\begin{aligned} D &= l_3 \sin(\varphi_4 - \varphi_3) \sin(\varphi_5 - \varphi_2) + \\ &+ b_3 \sin(\varphi_4 - \varphi_2) \sin(\varphi_3 + \theta_3 - \varphi_5); \quad (2.5.6) \\ F_1 &= l_3 \sin(\varphi_4 - \varphi_3) + b_3 \sin(\varphi_3 + \theta_3 - \varphi_4); \\ F_2 &= b_3 \sin(\varphi_3 + \theta_3 - \varphi_2); \end{aligned}$$

$$F_3 = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2 \cos(\varphi_4 - \varphi_2)}.$$

2.6. ЗАДАЧИ КИНЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Сформулируем характерные задачи кинематического анализа рычажных механизмов, рассматривая одноподвижные механизмы, входное звено 1 которых образует вращательную пару со стойкой 0, а звенья 2, 3, ..., $n-1$ входят в состав ведомой кинематической цепи механизма.

1. При заданном положении входного звена 1, т.е. при данном φ_1 , и для одной определенной сборки механизма установить, существует ли эта сборка. При положительном результате найти следующие величины (список I): положения звеньев ведомой цепи по отношению к стойке; координаты отдельных точек этих звеньев; значения критериев передачи движения; аналоги угловых скоростей и угловых ускорений звеньев ведомой цепи; аналоги скоростей и ускорений отдельных точек этих звеньев.

2. При заданном положении входного звена 1 найти число H всех возможных вариантов сборки механизма. Если $H > 0$, то в каждом из вариантов сборки определить величины, перечисленные в списке I.

3. На заданном отрезке $[A, B]$ изменения угловой координаты φ_1 входного звена 1 механизма для одной определенной его сборки установить, принадлежит ли отрезок $[A, B]$ области существования данной сборки. При положительном результате получить следующие функции (список II): функции положения звеньев ведомой цепи механизма; траектории отдельных точек этих звеньев; зависимости критериев передачи от φ_1 ; зависимости аналогов угловых скоростей и ускорений звеньев от φ_1 ; зависимости аналогов скоростей и ускорений отдельных точек этих звеньев от φ_1 .

Обычно функции (зависимости) и траектории точек, перечисленные в списке II, представляют в табличном виде, т.е. для ряда последовательных значений угла φ_1 из области $[A, B]$. Возможен другой вариант постановки задачи 3: требуется найти область существования (по углу φ_1) рассматриваемой сборки и в этой области получить те же функции (список II).

4. Найти общее число G сборок механизма, выявить среди них кривошипные и некривошипные сборки, установить их число, определить области существования (по углу φ_1) некривошипных сборок, получить для всех

найденных сборок функции, приведенные в списке II.

На практике при решении сформулированных выше задач обычно не требуется весь набор величин или функций, приведенных в списках I и II. При помощи аналогов угловых и линейных скоростей и ускорений можно определить угловые скорости и ускорения звеньев механизма, а также скорости и ускорения отдельных точек этих звеньев при условии, что задан закон изменения $\varphi_1 = \varphi_1(t)$ обобщенной координаты механизма в функции времени t . Например, угловая скорость $\dot{\varphi}_i$ и угловое ускорение $\ddot{\varphi}_i$ звена i вычисляются по формулам (здесь предполагается, что угловая координата φ_i звена отсчитывается от неподвижной оси):

$$\dot{\varphi}_i = \varphi'_i \dot{\varphi}_1; \quad \ddot{\varphi}_i = \varphi''_i \dot{\varphi}_1^2 + \varphi'_i \ddot{\varphi}_1. \quad (2.6.1)$$

2.7. ПОГРУППНЫЙ СПОСОБ АНАЛИЗА РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ

Наиболее рациональный принцип кинематического исследования механизма - это последовательный анализ структурных групп (групп Ассур), входящих в его состав, в порядке их присоединения при образовании структурной схемы механизма. Такой принцип называется погруппным способом анализа механизма. При применении погруппного способа задача анализа механизма сводится к серии задач анализа отдельных структурных групп, входящих в его состав. Алгоритм анализа любого рычажного механизма можно составить, формируя его из отдельных унифицированных блоков (модулей), каждый из которых содержит алгоритм анализа какой-либо структурной группы. Предварительно необходимо разработать алгоритмы анализа различных структурных групп. Погруппный способ кинематического анализа рычажных механизмов хорошо согласуется с аналогичным принципом в их структурном анализе, а также в кинематическом анализе.

Погруппный способ анализа имеет некоторые особенности в зависимости от типа рычажного механизма (см. п. 2.1). В механизмах первого типа анализу структурных групп предшествует анализ входного звена при данном значении обобщенной координаты φ_1 механизма. Применение погруппного способа анализа для механизмов второго типа становится возможным в том случае, если использовать не традиционный, а модифицированный принцип Ассур структурного строения рычажных механизмов. В соответствии с традиционным принципом Ассур (пригодным только для механизмов первого типа), отделив от рычажного механизма стойку и входное звено, получают ведомую кинематическую

цепь, которая может быть разделена на группы Ассур. В соответствии с модифицированным принципом Ассур, используемым для механизмов второго типа, ведомую кинематическую цепь, разделяющуюся на группы Ассур, получают в два этапа: 1) ликвидируют относительную подвижность двух звеньев, образующих входную пару, и эти два звена рассматривают как одно условное звено; 2) отбрасывают стойку.

Применение модифицированного принципа Ассур иллюстрируется на примере четырехзвенного механизма с качающимся цилиндром (см табл. 2.1.1). Объединяют звенья 1 и 2, образующие входную пару, в одно условное звено и отбрасывают стойку 0. Длина OA условного звена зависит от значения обобщенной координаты X , при котором решается задача о положениях. Условное звено и звено 3 составляют двухзвенную группу с тремя вращательными парами, т.е. диаду вида ВВВ. Определив положения звеньев этой диады (по алгоритму, изложенному в п. 2.9), можно тем самым найти угловые координаты φ_1 и φ_3 звеньев 1 и 3 механизма.

Две характерные задачи кинематического анализа структурных групп непосредственно следуют из рассмотренных выше задач 1 и 2 кинематического анализа рычажных механизмов.

1. При заданных положениях, скоростях и ускорениях (или их аналогов) внешних пар группы Ассур и для одного определенного варианта сборки установить, существует ли этот вариант сборки. При положительном решении найти положения звеньев группы, координаты отдельных точек этих звеньев, значения критериев передачи, угловые скорости и угловые ускорения звеньев, скорости и ускорения отдельных точек этих звеньев (или их аналогов).

2. При заданных положениях, скоростях и ускорениях (или их аналогов) внешних пар группы Ассур найти число N всех возможных вариантов сборки. При $N > 0$ в каждом из вариантов сборки определить величины, перечисленные в задаче 1.

При решении этих двух задач не обязательно определять весь набор приведенных величин. Алгоритмы анализа двухзвенных и четырехзвенных плоских групп Ассур рассмотрены ниже.

2.8. АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ МЕТОДОМ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ЗАМКНУТЫХ ВЕКТОРНЫХ КОНТУРОВ НА ОСИ КООРДИНАТ

Задача о положениях звеньев - это наиболее важная часть задачи анализа рычажного механизма или структурной группы.

Первым этапом ее решения является составление исходной системы уравнений анализа. Применительно к плоским рычажным механизмам или структурным группам эта система может быть составлена по методу проектирования замкнутых векторных контуров на оси координат. Число уравнений в исходной системе совпадает с числом неизвестных параметров и для n -звенного механизма равно обычно $n-2$, а для структурной группы равно $n_{гр}$ ($n_{гр}$ - число звеньев группы).

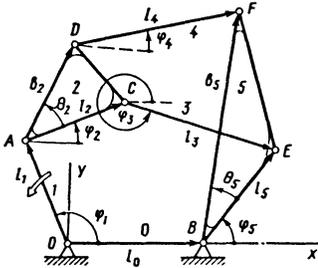


Рис. 2.8.1. Шестизвенный плоский шарнирный механизм с четырехзвенной группой Ассур второго порядка

Пример. Рассматривается шестизвенный плоский шарнирный механизм с четырехзвенной группой Ассур второго порядка (рис. 2.8.1). Двум выделенным замкнутым векторным контурам $OACEBO$ и $OADFBFO$ соответственно два векторных уравнения:

$$\begin{cases} \overline{OA} + \overline{AC} + \overline{CE} = \overline{OB} + \overline{BE}; \\ \overline{OA} + \overline{AD} + \overline{DF} = \overline{OB} + \overline{BF}. \end{cases} \quad (2.8.1)$$

При проектировании векторных уравнений (2.8.1) на оси x и y получаются четыре скалярных уравнения с четырьмя неизвестными φ_2 , φ_3 , φ_4 и φ_5 :

$$\begin{aligned} l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2 + l_3 \cos \varphi_3 &= l_0 + l_5 \cos \varphi_5; \\ l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2 + l_3 \sin \varphi_3 &= l_5 \sin \varphi_5; \\ l_1 \cos \varphi_1 + b_2 \cos(\varphi_2 + \theta_2) + l_4 \cos \varphi_4 &= l_0 + b_5 \cos(\varphi_5 + \theta_5); \\ l_1 \sin \varphi_1 + b_2 \sin(\varphi_2 + \theta_2) + l_4 \sin \varphi_4 &= b_5 \sin(\varphi_5 + \theta_5). \end{aligned} \quad (2.8.2)$$

Второй этап решения задачи о положениях звеньев состоит в определении неизвестных параметров из исходной системы

уравнений анализа. Число вещественных решений исходной системы составляет H . Случай $H=0$ означает, что при данном φ_1 механизм не существует. В случае $H > 0$ существует H возможных вариантов сборки механизма при данном φ_1 . Применительно к структурной группе при заданных положениях ее внешних пар случай $H=0$ означает, что группа не существует, а в случае $H > 0$ существует H вариантов сборки группы.

Для плоских механизмов второго класса исходная система всегда разрешима в явном виде относительно искомого параметра, так как она распадается на несколько простых взаимно независимых подсистем, каждая из которых сводится к алгебраическому уравнению не выше второй степени и число которых равно числу групп Ассур в механизме.

Для более сложных по структуре механизмов из исходной системы уравнений удастся в явном виде выразить лишь часть неизвестных параметров. Для других искомого параметров получается система меньшего числа уравнений (часто одно уравнение с одним неизвестным), которую приходится решать численными методами с помощью ЭВМ. Например, для механизма, показанного на рис. 2.8.1, из системы (2.8.2) удастся исключить неизвестные φ_2 , φ_3 , φ_4 и получить одно уравнение с одним неизвестным φ_5 ; причем это уравнение может быть преобразовано к виду алгебраического уравнения шестой степени (относительно $\sin \varphi_5$), так что число H решений системы (2.8.2) при данном φ_1 может достигать шести.

Для плоских структурных групп с числом звеньев $n_{гр} = 2$ и $n_{гр} = 4$ исходная система уравнений приводится к одному алгебраическому уравнению с одним неизвестным. При этом в случае $n_{гр} = 2$ данное уравнение имеет степень не выше второй, а в случае $n_{гр} = 4$ - не выше шестой.

После того, как решена задача о положениях звеньев механизма при некотором φ_1 , могут быть найдены скорости и ускорения. Так, для получения аналогов угловых или линейных скоростей и ускорений звеньев при том же φ_1 нужно продифференцировать по φ_1 уравнения исходной системы один или два раза. При первом дифференцировании получаем линейную систему уравнений, неизвестными которой являются аналоги скоростей. При втором дифференцировании получаем также линейную систему уравнений, в которой неизвестными являются аналоги ускорений. Обе системы имеют один и тот же определитель - якобиан D исходной системы уравнений

анализа. Таким образом, аналоги скоростей и ускорений звеньев механизма всегда могут быть найдены в явном виде и однозначно, если только якобиан $D \neq 0$.

Скорости и ускорения звеньев структурной группы могут быть найдены после решения задачи о положениях ее звеньев при условии, что известны скорости и ускорения внешних пар группы. В данном случае при определении как скоростей, так и ускорений, тоже получается линейная система уравнений, определителем которой является якобиан D исходной системы уравнений анализа группы.

2.9. АНАЛИЗ ДВУХЗВЕННЫХ ПЛОСКИХ ГРУПП АССУРА

Анализ диады включает две задачи: задачу о положениях; задачу о скоростях и ускорениях. Параметрами диады являются: геометрические параметры - линейные и угловые размеры; кинематические параметры - линейные и угловые скорости и ускорения (табл. 2.9.1). Геометрические и кинематические параметры диады подразделены на задаваемые и вычисляемые. В свою очередь, задаваемые геометрические параметры диады подразделены на внутренние (размеры звеньев диады) и внешние (характеризуют положения двух внешних кинематических пар диады). К задаваемым геометрическим параметрам отнесен также признак M варианта сборки.

Ниже приведены формулы для расчета положений и скоростей (формулы для ускорений не даются).

А л г о р и т м а н а л и з а д и а д ы В В В :

- 1) $q = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2}$;
- 2) проверка условия $|a_1 - a_2| < q < a_1 + a_2$. Если условие не выполняется, то диада не существует;
- 3) $\mu = \arccos \left[\frac{(a_1^2 + a_2^2 - q^2)}{(2a_1 a_2)} \right]$;
- 4) $\cos \gamma_1 = [(x_C - x_A)(a_1 - a_2 \cos \mu) + M(y_C - y_A)a_2 \sin \mu]q^{-2}$;
 $\sin \gamma_1 = [(y_C - y_A)(a_1 - a_2 \cos \mu) - M(y_C - y_A)a_2 \sin \mu]q^{-2}$;
- 5) $\gamma_2 = \gamma_1 - M\mu$;
- 6) $\dot{\gamma}_1 = -M[(\dot{x}_C - \dot{x}_A) \cos \gamma_2 + (\dot{y}_C - \dot{y}_A) \sin \gamma_2](a_1 \sin \mu)^{-1}$;

$$7) \dot{\gamma}_2 = -M[(\dot{x}_C - \dot{x}_A) \cos \gamma_1 + (\dot{y}_C - \dot{y}_A) \sin \gamma_1](a_2 \sin \mu)^{-1}.$$

А л г о р и т м а н а л и з а д и а д ы В В П :

- 1) $q = -Y_{2B} + (x_F - x_A) \sin \lambda - (y_F - y_A) \cos \lambda$;
- 2) проверка условия $|q| < a_1$. Если условие не выполняется, то диада не существует;
- 3) $\vartheta = \arcsin(|q|/a_1)$;
- 4) $\gamma_1 = \lambda + (1 - M)\pi / 2 - M\vartheta \operatorname{sgn}(q)$,
где $\operatorname{sgn}(q)$ - знак (+1 или -1) числа q ;
- 5) $\gamma_2 = \lambda$;
- 6) $\xi_C = -(x_F - x_A) \cos \lambda - (y_F - y_A) \sin \lambda + M\sqrt{a_1^2 - q^2}$;
- 7) $x_C = x_F + \xi_C \cos \lambda$; $y_C = y_F + \xi_C \sin \lambda$;
- 8) $\dot{\gamma}_1 = M[-(\dot{x}_F - \dot{x}_A) \sin \lambda + (\dot{y}_F - \dot{y}_A) \times \cos \lambda + \dot{\lambda}\xi_C](a_1 \cos \vartheta)^{-1}$;
- 9) $\dot{\xi}_C = q\dot{\gamma}_1 + Y_{2B}\dot{\lambda} - (\dot{x}_F - \dot{x}_A) \cos \lambda - (\dot{y}_F - \dot{y}_A) \sin \lambda$;
- 10) $\dot{\gamma}_2 = \dot{\lambda}$;
- 11) $\dot{x}_C = \dot{x}_F + \dot{\xi}_C \cos \lambda - \dot{\lambda}\xi_C \sin \lambda$;
 $\dot{y}_C = \dot{y}_F + \dot{\xi}_C \sin \lambda + \dot{\lambda}\xi_C \cos \lambda$.

А л г о р и т м а н а л и з а д и а д ы В П В :

- 1) $q = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2}$;
- 2) проверка условия $q > |c_1|$, где $c_1 = Y_{1B} - Y_{2B}$. Если условие не выполняется, то диада не существует;
- 3) $X_{2B} = M\sqrt{q^2 - c_1^2}$;
- 4) $\cos \gamma_1 = [c_1(y_C - y_A) - X_{2B}(x_C - x_A)]q^{-2}$;
 $\sin \gamma_1 = [-c_1(x_C - x_A) -$

2.9.1. Геометрические и кинематические параметры двухзвенных групп Ассура

Группа Ассура	Геометрические параметры			Кинематические пары		
	задаваемые			вычисляемые	задаваемые	вычисляемые
	внутренние	внешние	признак сборки			
<p>ВВВ</p>	a_1, a_2	x_A, y_A, x_C, y_C	M	γ_1, γ_2, μ	$\dot{x}_A, \dot{y}_A, \dot{x}_C, \dot{y}_C,$ $\ddot{x}_A, \ddot{y}_A, \ddot{x}_C, \ddot{y}_C$	$\dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2, \ddot{\gamma}_1, \ddot{\gamma}_2$
<p>ВВП</p>	a_1, Y_{2B}	$x_A, y_A, x_F, y_F, \lambda$	M	$\xi_C, \gamma_1, \vartheta$ x_C, y_C	$\dot{x}_A, \dot{y}_A, \dot{x}_F, \dot{y}_F, \dot{\lambda},$ $\ddot{x}_A, \ddot{y}_A, \ddot{x}_F, \ddot{y}_F, \ddot{\lambda}$	$\xi_C, \dot{\gamma}_1, \dot{x}_C, \dot{y}_C,$ $\ddot{\xi}_C, \ddot{\gamma}_1, \ddot{x}_C, \ddot{y}_C$
<p>ВПВ</p>	Y_{1B}, Y_{2B}	x_A, y_A, x_C, y_C	M	X_{2B}, γ_1	$\dot{x}_A, \dot{y}_A, \dot{x}_C, \dot{y}_C,$ $\ddot{x}_A, \ddot{y}_A, \ddot{x}_C, \ddot{y}_C$	$\dot{\gamma}_1, \dot{X}_{2B},$ $\ddot{\gamma}_1, \ddot{X}_{2B}$

<p style="text-align: center;">ВПП</p>	Y_{1B}, θ_2	$x_A, y_A, x_F, y_F, \lambda$	-	$X_{1C}, \xi_C, \gamma_1,$ x_C, y_C	$\dot{x}_A, \dot{y}_A, \dot{x}_F, \dot{y}_F, \dot{\lambda},$ $\ddot{x}_A, \ddot{y}_A, \ddot{x}_F, \ddot{y}_F, \ddot{\lambda}$	$x_{1C}, \dot{\xi}_C, \dot{x}_C, \dot{y}_C,$ $x_{1C}, \ddot{\xi}_C, \ddot{x}_C, \ddot{y}_C$
<p style="text-align: center;">ПВП</p>	Y_{1B}, Y_{2B}	$x_{F_1}, y_{F_1}, \lambda_1,$ $x_{F_2}, y_{F_2}, \lambda_2$	-	$\xi_{1A}, \xi_{2C}, x_A,$ y_A, x_C, y_C	$\dot{x}_{F_1}, \dot{y}_{F_1}, \dot{\lambda}_1, \dot{x}_{F_2}, \dot{y}_{F_2}, \dot{\lambda}_2,$ $\ddot{x}_{F_1}, \ddot{y}_{F_1}, \ddot{\lambda}_1, \ddot{x}_{F_2}, \ddot{y}_{F_2}, \ddot{\lambda}_2$	$\xi_{1A}, \xi_{2C}, \dot{x}_A, \dot{y}_A,$ $\dot{x}_C, \dot{y}_C, \xi_{1A}, \xi_{2C},$ $\ddot{x}_A, \ddot{y}_A, \ddot{x}_C, \ddot{y}_C$

Примечание; μ - угол передачи; ϑ угол давления;

x, y - координаты соответствующих точек (A, C, F, F_1, F_2) в неподвижной системе Oxy ;

X_{2B}, Y_{2B} - координаты точки B в подвижной системе CX_2Y_2 ;

ξ_C - координата ξ точки C ;

$\dot{x}_A, \dot{y}_A, \ddot{x}_A, \ddot{y}_A$ - проекции скорости и ускорения точки A на оси Ox и Oy ;

$\dot{\lambda}$ и $\ddot{\lambda}$ - угловая скорость и угловое ускорение оси $F\xi$;

$\dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2, \ddot{\gamma}_1, \ddot{\gamma}_2$ - угловые скорости и угловые ускорения звеньев 1 и 2 диады; $\dot{\xi}_C, \ddot{\xi}_C$ - относительные скорость и ускорение точки C звена 2 по отношению к оси $F\xi$;

$\dot{X}_{2B}, \ddot{X}_{2B}$ - относительные скорость и ускорение точки B звена 1 по отношению к звену 2 и т.д.

$$-X_{2B}(y_C - y_A)]q^{-2};$$

$$5) \gamma_2 = \gamma_1;$$

$$6) \dot{\gamma}_1 = \dot{\gamma}_2 = [(\dot{x}_C - \dot{x}_A) \sin \gamma_1 - (\dot{y}_C - \dot{y}_A) \cos \gamma_1] / X_{2B};$$

$$7) \ddot{X}_{2B} = [(x_C - x_A)(\dot{x}_C - \dot{x}_A) + (y_C - y_A)(\dot{y}_C - \dot{y}_A)] / X_{2B}.$$

Алгоритм анализа диады
В П П:

$$1) \gamma_1 = \lambda + \theta_2; \quad 2) \gamma_2 = \lambda;$$

$$3) \xi_C = [(y_F - y_A) \cos \gamma_1 - (x_F - x_A) \times \sin \gamma_1 - Y_{1B}] / \sin \theta_2;$$

$$4) X_{1C} = [(y_F - y_A) \cos \lambda - (x_F - x_A) \times \sin \lambda - Y_{1B} \cos \theta_2] / \sin \theta_2;$$

$$5) x_C = x_F + \xi_C \cos \lambda; \quad y_C = y_F + \xi_C \sin \lambda;$$

$$6) \dot{\gamma}_1 = \dot{\gamma}_2 = \dot{\lambda}; \quad 7) \dot{X}_{1C} = [-(\dot{x}_F - \dot{x}_A) \sin \lambda + (\dot{y}_F - \dot{y}_A) \cos \lambda - (x_F - x_A) \dot{\lambda} \cos \lambda - (y_F - y_A) \dot{\lambda} \sin \lambda] / \sin \theta_2;$$

$$8) \dot{\xi}_C = \dot{X}_{1C} \cos \theta_2 - (\dot{x}_F - \dot{x}_A) \cos \lambda - (\dot{y}_F - \dot{y}_A) \sin \lambda + (x_F - x_A) \dot{\lambda} \sin \lambda - (y_F - y_A) \dot{\lambda} \cos \lambda;$$

$$9) \dot{x}_C = \dot{x}_F + \dot{\xi}_C \cos \lambda - \xi_C \dot{\lambda} \sin \lambda; \\ \dot{y}_C = \dot{y}_F + \dot{\xi}_C \sin \lambda + \xi_C \dot{\lambda} \cos \lambda.$$

Алгоритм анализа диады
П В П:

$$1) \gamma_i = \lambda_i \quad (i = 1, 2);$$

$$2) \xi_{1A} = [(y_{F_2} - y_{F_1}) \cos \lambda_2 - (x_{F_2} - x_{F_1}) \times \sin \lambda_2 - Y_{1B} \cos(\lambda_1 - \lambda_2) + Y_{2B}] / \sin(\lambda_1 - \lambda_2);$$

$$3) \xi_{2C} = [(y_{F_2} - y_{F_1}) \cos \lambda_1 - (x_{F_2} - x_{F_1}) \sin \lambda_1 - Y_{1B} + Y_{2B} \cos(\lambda_1 - \lambda_2)] / \sin(\lambda_1 - \lambda_2);$$

$$4) x_A = x_{F_1} + \xi_{1A} \cos \lambda_1;$$

$$y_A = y_{F_1} + \xi_{1A} \sin \lambda_1;$$

$$5) x_C = x_{F_2} + \xi_{2C} \cos \lambda_2;$$

$$y_C = y_{F_2} + \xi_{2C} \sin \lambda_2;$$

$$6) \dot{\gamma}_i = \dot{\lambda}_i \quad (i = 1, 2);$$

$$7) \dot{\xi}_{1A} = Y_{1B} \dot{\lambda}_1 + [-(\dot{x}_{F_2} - \dot{x}_{F_1}) \sin \lambda_2 + (\dot{y}_{F_2} - \dot{y}_{F_1}) \cos \lambda_2 - \xi_{1A} \dot{\lambda}_1 \cos(\lambda_1 - \lambda_2) + \xi_{2C} \dot{\lambda}_2] / \sin(\lambda_1 - \lambda_2);$$

$$8) \dot{\xi}_{2C} = Y_{2B} \dot{\lambda}_2 + [-(\dot{x}_{F_2} - \dot{x}_{F_1}) \sin \lambda_1 + (\dot{y}_{F_2} - \dot{y}_{F_1}) \cos \lambda_1 - \xi_{1A} \dot{\lambda}_1 + \xi_{2C} \dot{\lambda}_2 \cos(\lambda_1 - \lambda_2)] / \sin(\lambda_1 - \lambda_2);$$

$$9) \dot{x}_A = \dot{x}_{F_1} + \dot{\xi}_{1A} \cos \lambda_1 - \xi_{1A} \dot{\lambda}_1 \sin \lambda_1; \\ \dot{y}_A = \dot{y}_{F_1} + \dot{\xi}_{1A} \sin \lambda_1 + \xi_{1A} \dot{\lambda}_1 \cos \lambda_1;$$

$$10) \dot{x}_C = \dot{x}_{F_2} + \dot{\xi}_{2C} \cos \lambda_2 - \xi_{2C} \dot{\lambda}_2 \sin \lambda_2; \\ \dot{y}_C = \dot{y}_{F_2} + \dot{\xi}_{2C} \sin \lambda_2 + \xi_{2C} \dot{\lambda}_2 \cos \lambda_2.$$

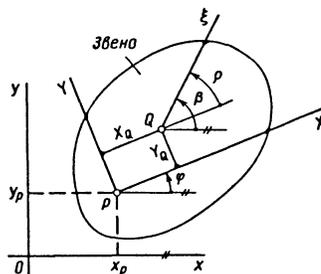


Рис. 2.9.1. Звено механизма

После анализа диады можно решить следующую задачу: найти движение некоторой точки любого из двух звеньев диады или некоторой оси, жестко связанной с этим звеном. Такая задача возникает, например, в том случае, когда звено диады является трехпарным. Итак, известны величины: 1) обобщенные координаты x_P, y_P, φ , определяющие положение звена в неподвижной системе координат Oxy (рис. 2.9.1); 2) первые $\dot{x}_P, \dot{y}_P, \dot{\varphi}$ и вторые $\ddot{x}_P, \ddot{y}_P, \ddot{\varphi}$ производные по времени t от обобщенных координат звена; 3) координаты X_Q, Y_Q некоторой точки Q звена в под-

вжной системе координат PXY , неизменно связанной со звеном; 4) угол ρ , определяющий положение оси $Q\xi$, неизменно связанной со звеном. Требуется определить: 1) x_Q, y_Q, β ;

2) $\dot{x}_Q, \dot{y}_Q, \ddot{x}_Q, \ddot{y}_Q$.

Расчет искомых параметров проводится по формулам:

$$x_Q = x_P + X_Q \cos \varphi - Y_Q \sin \varphi;$$

$$y_Q = y_P + X_Q \sin \varphi + Y_Q \cos \varphi; \quad \beta = \varphi + \rho;$$

$$\dot{x}_Q = \dot{x}_P - (y_Q - y_P)\dot{\varphi};$$

$$\dot{y}_Q = \dot{y}_P + (x_Q - x_P)\dot{\varphi};$$

$$\ddot{x}_Q = \ddot{x}_P - (\dot{y}_Q - \dot{y}_P)\dot{\varphi} - (y_Q - y_P)\ddot{\varphi};$$

$$\ddot{y}_Q = \ddot{y}_P + (\dot{x}_Q - \dot{x}_P)\dot{\varphi} + (x_Q - x_P)\ddot{\varphi}.$$

(2.9.1)

2.10. АНАЛИЗ ЧЕТЫРЕХЗВЕННЫХ ПЛОСКИХ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ

В технике применяются четырехзвенные механизмы: 1) механизмы, у которых входную кинематическую пару образуют стойка и подвижное звено (последнее является входным звеном); 2) механизмы, у которых входную кинематическую пару образуют два подвижных звена.

Четырехзвенники первого типа кроме стойки и входного звена содержат двухзвенную группу Ассур (диаду) и относятся к плоским рычажным механизмам второго класса. Всего существует 11 четырехзвенников первого типа: **ВВВВ, ВВВП, ВВПВ, ВПВВ, ВВПП, ВПВП, ВППВ, ПВВВ, ПВВП, ПВПВ, ППВВ** (структурный шифр механизма содержит перечисление буквенных обозначений кинематических пар в порядке их расположения в механизме, начиная с пары, которую образует стойка 0 и подвижное звено 1. Выделена буква, соответствующая входной кинематической паре).

Для решения задачи анализа любого из указанных механизмов при заданном значении обобщенной координаты и двух первых ее производных по времени можно воспользоваться рассмотренными выше унифицированными алгоритмами анализа звена и анализа диады соответствующей модификации. Первый из этих алгоритмов необходим для анализа входного звена четырехзвенника.

Четырехзвенники второго

типа есть механизмы с заданным относительным движением двух подвижных звеньев. В соответствии с модифицированным принципом Ассур они относятся к механизмам второго класса. Поэтому, при анализе положений звеньев таких механизмов могут быть использованы рассмотренные выше унифицированные алгоритмы анализа диад. Что касается скоростей и ускорений, то алгоритмы их определения составляются с учетом переменности длины условного звена диады.

Всего существует 11 четырехзвенников второго типа: **ВВВВ, ВВВП, ВВПВ, ПВВВ, ВВПП, ПВВП, ПВПВ, ВПВВ, ВППВ, ВППВ, ППВВ**. У четырех последних механизмов входная пара является ступенчатой. Такие механизмы применяются в различных гидро- и пневмоприводах. Два подвижных звена, образующих входную пару, конструктивно выполняют в виде цилиндра и поршня. За обобщенную координату принимают относительное перемещение X поршня по отношению к цилиндру.

Алгоритм анализа шарнирного четырехзвенника (см. табл. 2.1.1):

$$1) q = \sqrt{l_0^2 + l_1^2 - 2l_0l_1 \cos \varphi_1};$$

$$2) \text{ проверка условия } |l_2 - l_3| < q < l_2 + l_3;$$

$$3) \mu = \arccos \left[\frac{(l_2^2 + l_3^2 - q^2)}{(2l_2l_3)} \right];$$

$$4) \cos \varphi_2 = [(l_0 - l_1 \cos \varphi_1)(l_2 - l_3 \cos \mu) - Ml_1l_3 \sin \varphi_1 \sin \mu]q^{-2};$$

$$\sin \varphi_2 = [-l_1(l_2 - l_3 \cos \mu) \sin \varphi_1 - M(l_0 - l_1 \cos \varphi_1)l_3 \sin \mu]q^{-2};$$

$$5) \varphi_3 = \varphi_2 - M\mu;$$

$$6) \dot{\varphi}_2 = Ml_1 \sin(\varphi_3 - \varphi_1)(l_2 \sin \mu)^{-1} \dot{\varphi}_1;$$

$$7) \dot{\varphi}_3 = Ml_1 \sin(\varphi_2 - \varphi_1)(l_3 \sin \mu)^{-1} \dot{\varphi}_1;$$

$$8) \ddot{\varphi}_2 = M[l_1 \ddot{\varphi}_1 \sin(\varphi_3 - \varphi_1) - l_1 \dot{\varphi}_1^2 \cos(\varphi_3 - \varphi_1) - l_2 \dot{\varphi}_2^2 \cos \mu + l_3 \dot{\varphi}_3^2] \left[l_2 \sin \mu \right]^{-1};$$

$$9) \ddot{\varphi}_3 = M[l_1 \ddot{\varphi}_1 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) - l_1 \dot{\varphi}_1^2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) - l_2 \dot{\varphi}_2^2 + l_3 \dot{\varphi}_3^2 \cos \mu] \left[l_3 \sin \mu \right]^{-1}.$$

Признак сборки четырехзвенника, определяемый в соответствии с формулой (2.3.1), $M = +1$, если поворот вектора \overline{BC} вокруг точки D виден против часовой стрелки; $M = -1$ - в противном случае.

Алгоритм анализа кривошипно-ползунного механизма (см. табл. 2.1.1):

- 1) $q = l_1 \sin \varphi_1 - y_B$;
 - 2) проверка условия $|q| < l_2$;
 - 3) $\vartheta = \arcsin(|q|/l_2)$;
 - 4) $\varphi_2 = 0,5(1 - M)\pi - M\vartheta \operatorname{sgn}(q)$;
 - 5) $x_B = l_1 \cos \varphi_1 + M\sqrt{l_2^2 - q^2}$;
 - 6) $\dot{\varphi}_2 = -M l_1 \cos \varphi_1 (l_2 \cos \vartheta)^{-1} \dot{\varphi}_1$;
 - 7) $\dot{x}_B = M l_1 (y_B \cos \varphi_1 - x_B \sin \varphi_1) \times$
 $\times (l_2 \cos \vartheta)^{-1} \dot{\varphi}_1$;
 - 8) $\ddot{\varphi}_2 = M \left(-l_1 \ddot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 + l_1 \dot{\varphi}_1^2 \sin \varphi_1 + \right.$
 $\left. + l_2 \dot{\varphi}_2^2 \sin \varphi_2 \right) (l_2 \cos \vartheta)^{-1}$;
 - 9) $\ddot{x}_B = M \left[l_1 \ddot{\varphi}_1 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) - \right.$
 $\left. - l_1 \dot{\varphi}_1^2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) - l_2 \dot{\varphi}_2^2 \right] / \cos \vartheta$,
- где $M = \operatorname{sgn} \left[\left(\frac{AB}{\xi} \right) \right]$.

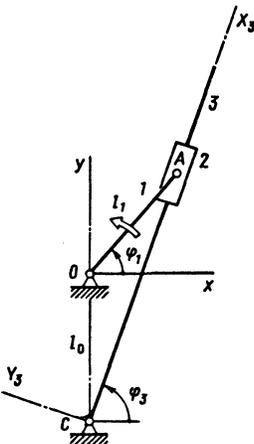


Рис. 2.10.1. Кулисный механизм

Алгоритм анализа кулисного механизма (рис. 2.10.1):

- 1) $X_{3A} = \sqrt{l_0^2 + l_1^2 + 2l_0 l_1 \sin \varphi_1}$;
- 2) проверка условия $X_{3A} > 0$;
- 3) $\cos \varphi_3 = l_1 \cos \varphi_1 / X_{3A}$,
 $\sin \varphi_3 = (l_0 + l_1 \sin \varphi_1) / X_{3A}$;
- 4) $\dot{X}_{3A} = l_0 \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_3$;
- 5) $\dot{\varphi}_3 = l_1 \dot{\varphi}_1 \cos(\varphi_3 - \varphi_1) / X_{3A}$;
- 6) $\ddot{X}_{3A} = l_0 (\ddot{\varphi}_1 \cos \varphi_3 - \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_3 \sin \varphi_3)$;
- 7) $\ddot{\varphi}_3 = l_1 \left[(l_1 + l_0 \sin \varphi_1) \ddot{\varphi}_1 - \right.$
 $\left. - l_0 \cos(2\varphi_3 - \varphi_1) \dot{\varphi}_1^2 \right] / X_{3A}^2$.

Алгоритм анализа механизма с качающимся цилиндром (см. табл. 2.1.1):

- 1) проверка условия:
 $-L + |l_0 - l_3| < X < l_0 + l_3 - L$,
- где $L = l_1 + l_2$;

- 2) $\sin \varphi_3 = \frac{(L + X)^2 - l_0^2 - l_3^2}{2l_0 l_3}$;
- $\cos \varphi_3 = M \sqrt{1 - \sin^2 \varphi_3}$;
- 3) $\sin \varphi_1 = (l_0 + l_3 \sin \varphi_3) / (L + X)$;
- $\cos \varphi_1 = l_3 \cos \varphi_3 / (L + X)$;
- 4) $\mu = |\varphi_1 - \varphi_3|$;
- 5) $\dot{\varphi}_3 = \frac{M \dot{X}}{l_3 \sin \mu}$;
- 6) $\dot{\varphi}_1 = \frac{l_3 \cos \mu}{L + X} \dot{\varphi}_3$;
- 7) $\ddot{\varphi}_3 = \left[\ddot{X} + l_3 \cos \mu \dot{\varphi}_3^2 - \right.$
 $\left. - (L + X) \dot{\varphi}_1^2 \right] / (M l_3 \sin \mu)$;
- 8) $\ddot{\varphi}_1 = \left[\ddot{X} \cos \mu - 2M \dot{X} \dot{\varphi}_1 \sin \mu - \right.$
 $\left. - (L + X) \cos \mu \dot{\varphi}_1^2 + \right.$
 $\left. + l_3 \dot{\varphi}_3^2 \right] / [M(L + X) \sin \mu]$.

2.11. АНАЛИЗ ПЛОСКИХ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ ВТОРОГО КЛАССА (ЕДИНЬИЙ АЛГОРИТМ)

$$(\nu = 0, 1, \dots, N), \tag{2.11.1}$$

Среди рычажных механизмов, применяемых в конструкциях машин и приборов, подавляющее большинство составляют плоские рычажные механизмы второго класса, содержащие двухзвенные структурные группы - диады. Ниже приведен единый алгоритм анализа механизма такой структуры, базирующийся на погруппном способе анализа механизмов и на рассмотренных выше алгоритмах анализа диад пяти модификаций.

Пусть заданы структурная схема механизма и значения его постоянных параметров. Кроме того, известен вариант сборки механизма, задаваемый при помощи набора значений признаков M_k вариантов сборки диад (где $k = 1, 2, \dots, m$; m - число диад). Требуется выполнить анализ механизма в заданной его сборке, т.е. решить задачу 3 (см. п.2.6).

Анализ механизма проводится для ряда дискретных значений угла φ_1 :

$$(\varphi_1)_\nu = (\varphi_1)_0 + N_{вр} \nu \Delta\varphi_1$$

где $(\varphi_1)_0$ и $\Delta\varphi_1$ - соответственно начальное значение и шаг изменения угла φ_1 ; $N_{вр}$ - признак, указывающий направление вращения звена 1; $N_{вр} = +1$ или -1 - при повороте соответственно против или по часовой стрелке.

Общая структура алгоритма анализа рассматриваемых механизмов и соответствующей программы для ЭВМ приведена на рис. 2.11.1. Информация, вводимая в блок 1, приведена ниже. Блоки 2 - 12 охватывают цикл по параметру ν от 0 до N с шагом 1 (внешний цикл). При каждом ν проводится анализ механизма в положении, соответствующем значению $\varphi_1 = (\varphi_1)_\nu$, которое рассчитывается в блоке 4 по формуле (2.11.1). Анализ входного звена 1 механизма (блок 5) проводится на основании алгоритма, приведенного в п. 2.9. При этом звено 1 может быть двухпарным или трехпарным, а пары могут быть вида В или П.

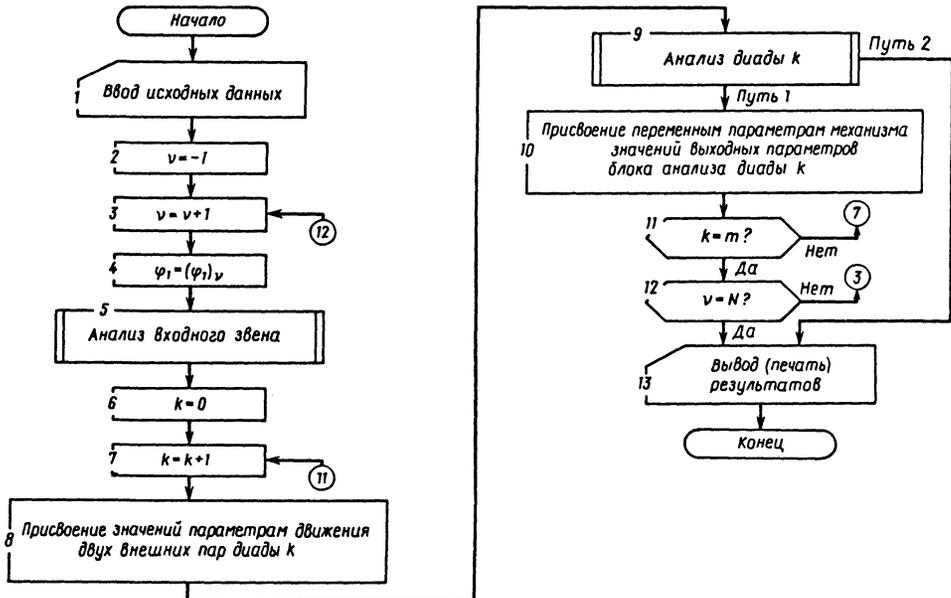


Рис. 2.11.1. Общая структура алгоритма анализа плоских рычажных механизмов второго класса

Блоки 6 - 11 охватывают цикл по параметру $k = 1$ до m с шагом 1 (внутренний цикл). При каждом k производится анализ диады k механизма. В блоке 8 устанавливаются

положения, а также скорости и ускорения двух внешних пар диады k . Если внешняя пара есть пара вида В (шарнир), то ее положение определяется координатами x и y центра шарнира.

Если внешняя пара относится к виду П, то ее положение определяется тремя параметрами - координатами x и y некоторой точки, лежащей на продольной оси поступательной пары, и углом между этой осью и осью Ox (Oxy - неподвижная система координат). В том случае, когда диада k присоединяется одной из внешних пар к стойке, положение этой пары известно заранее. Если диада k присоединяется внешней парой к подвижному звену механизма, то ее положение уже найдено к моменту начала анализа диады k , так как указанное подвижное звено является либо входным звеном, либо принадлежащим диаде с меньшим номером.

Задача анализа диады, решаемая в блоке 9, была сформулирована в п. 2.7 в общем виде, а алгоритм ее решения - в п. 2.9 для диад пяти модификаций. При выполнении расчетов в блоке 9 возможны два случая: 1) при $\varphi_1 = (\varphi_1)_v$ диада k существует; 2) при $\varphi_1 = (\varphi_1)_v$ диада k не существует, т.е. имеет место разрыв кинематической цепи механизма. В первом случае происходит выход из блока 9 на блок 10 (путь 1), во втором - на блок 13 (путь 2). В последнем случае в таблице результатов расчета (блок 13) в строке, соответствующей значению $\varphi_1 = (\varphi_1)_v$, печатается сообщение "Механизм не существует" с указанием номера k диады, в которой имеет место разрыв цепи.

Единый алгоритм анализа рычажных механизмов второго класса строится на основе блочного принципа, в соответствии с которым составляется сравнительно короткая и простая главная программа и несколько подпрограмм - независимых блоков (или модулей), обращение к которым предусмотрено в главной программе. Последняя определяет фактически лишь последовательность расчетов, а расчеты проводятся главным образом в подпрограммах.

Основными модулями являются следующие шесть подпрограмм: ВВВ, ВВП, ВПВ, ВПП, ПВП, ЗВЕНО. Пять первых подпрограмм предназначены для анализа диад соответствующих модификаций. Подпрограмма ЗВЕНО предназначена для анализа отдельного звена механизма: это может быть или входное звено 1, или какое-либо звено любой из диад. Блочный принцип может быть применен как при разработке главной программы, предназначенной для анализа механизма второго класса конкретной структурной схемы, так и при создании единой (универсальной) главной программы, пригодной для анализа любого рычажного механизма второго класса [8]. Рассмотрим некоторые аспекты создания такой единой программы.

Универсальность единой программы достигается тем, что вводятся определенные пра-

вила, касающиеся следующего: нумерации диад и звеньев механизма; системы обозначений характерных точек, в частности шарниров, на кинематической схеме механизма; способа кодирования всех структурных особенностей рассматриваемых механизмов; системы обозначений их постоянных и переменных параметров. Эти правила используются как при разработке единой программы, так и при подготовке исходных данных, вводимых в ЭВМ с целью анализа конкретного механизма по данной программе.

Порядок нумерации диад механизма: диада 1 присоединяется одной внешней парой к стойке, а другой - к входному звену; диада k ($k = 2, 3, \dots, m$) присоединяется внешними параметрами к двум разным звеньям, каждое из которых может быть либо стойкой, либо входным звеном, либо звеном диады s , где $s < k$ (m - число диад). Порядок нумерации звеньев механизма: 0 - стойка; 1 - входное звено; $2k$ и $2k + 1$ - звенья диады k ($k = 2, 3, \dots, m$). Число звеньев $n = 2m + 2$.

2.11.1. Обозначения характерных точек на кинематической схеме плоского рычажного механизма второго класса

Точка	Расположение точки на кинематической схеме плоского рычажного механизма второго класса
V_{ij}	Центр вращательной пары, образуемой звеньями i и j
P_{ij}	Точка, лежащая на оси внутренней поступательной пары, образуемой звеньями i и j диады k вида ВВП или ВПП, где $i = 2k, j = 2k + 1$
F_{ij} , P_{ij}	Две точки, лежащие на оси поступательной пары, образуемой звеньями i и j ($0 \leq i < j$) и являющейся внешней парой диады вида ВВП, ВПП или ПВП; точка P_{ij} принадлежит звену j указанной диады; точка F_{ij} принадлежит звену i , не являющемуся звеном указанной диады, и служит началом отсчета относительного перемещения точки P_{ij} звена j по отношению к звену i
F_i	Исполнительная точка механизма, принадлежащая звену i (в соответствии с условием задачи нужно найти движение точки F_i по отношению к стойке)

Выбор характерных точек на кинематической схеме механизма, а также рекомендуемая система их обозначений, приведены в табл. 2.11.1. Список обозначений характерных точек на схеме механизма - его структурный код *SK*.

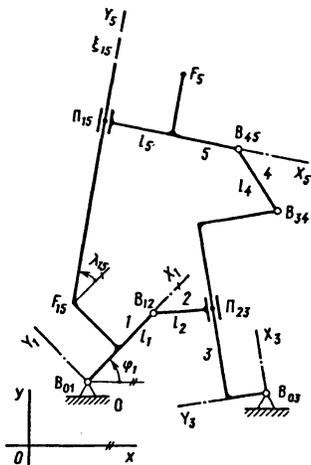


Рис. 2.11.2. Механизм второго класса

В качестве примера на рис. 2.11.2 показана схема одного из механизмов второго класса. Для данного механизма $m = 2, n = 6$; диады 1 и 2 относятся к виду ВПВ (звенья 2 и 3) и ВВП (звенья 4 и 5). На схеме проставлены номера звеньев и обозначения характерных точек. Структурный код механизма

$$SK = \{B_{01}, B_{12}, \Pi_{23}, B_{03}, B_{34}, F_{15}, \Pi_{15}, B_{45}, F_5\}.$$

Структурная схема механизма его структурный код *SK* взаимно однозначно соответствуют друг другу. Поэтому структурный код может использоваться в качестве символической информации, вводимой в ЭВМ в составе исходных данных и служащей для описания структуры исследуемого механизма. На базе этой информации внутри программы формируется так называемая структурная матрица *S*, элементы которой выступают в роли признаков, автоматически управляющих последовательностью обращения к унифицированным подпрограммам анализа звена и диад, которые рассмотрены выше.

Все постоянные параметры механизма, обозначенные по определенной системе, могут быть представлены в форме матрицы *L* параметров механизма. Кроме *SK* и *L* необходимо ввести еще матрицу сборки *M*, элементами которой являются значения признаков вариан-

та сборки M_k диад механизма ($k = 1, 2, \dots, m$). Для механизма, показанного на рис. 2.11.2, матрицы *L* и *M* содержат следующие элементы:

$$L = \{x_{B01}, y_{B01}, x_{B03}, y_{B03}, l_1, X_{1,F15}, Y_{1,F15}, \lambda_{15}, l_2, Y_{3,\Pi23}, X_{3,B34}, Y_{3,B34}, l_4, l_5, X_{5,F5}, Y_{5,F5}\};$$

$$M = \{M_1, M_2\} = \{-1, +1\},$$

где

$$M_1 = \text{sgn} \left[M_{B03} \left(\overline{B_{12} \Pi_{23}} \right) \right],$$

$$M_2 = \text{sgn} \left[\overline{B_{34} B_{45}} \cdot \xi_{15}^0 \right].$$

В состав исходных данных, вводимых в ЭВМ, входят: *m*, *SK*, *L*, *M*, а также $(\varphi_1)_0, \Delta\varphi_1, N, N_{вр}$ и некоторые другие величины (например, признаки, с помощью которых проводится отбор параметров, выводимых на печать в форме таблиц или графиков).

2.12. АНАЛИЗ ЧЕТЫРЕХЗВЕННЫХ ПЛОСКИХ ГРУПП АССУРА

Трехповодковая группа (рис.2.12.1) имеет постоянные параметры $a_1 - a_4, \theta_4, b_4$. Заданы также координаты $x_A, y_A, x_B, y_B, x_C, y_C$ трех ее внешних шарниров *A, B, C*. Требуется найти: 1) число *H* возможных вариантов сборки группы; 2) значения углов $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ для каждого из *H* вариантов сборки (если $H > 0$).

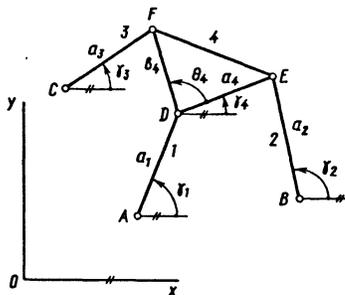


Рис. 2.12.1. Трехповодковая группа

Задача решается в такой последовательности [7]:

1) составляется функция

$$F(\gamma_4) = \Delta_1^2 + \Delta_2^2 - \Delta^2, \quad (2.12.1)$$

где $\Delta_1 = u_2 u_6 - u_4 u_5$; $\Delta_2 = u_3 u_5 - u_1 u_6$;

$$\begin{aligned} \Delta &= 2a_1(u_1 u_4 - u_2 u_3); \\ u_1 &= a_4 \cos \gamma_4 + x_A - x_B; \\ u_2 &= a_4 \sin \gamma_4 + y_A - y_B; \\ u_3 &= b_4 \cos(\gamma_4 + \theta_4) + x_A - x_C; \\ u_4 &= b_4 \sin(\gamma_4 + \theta_4) + y_A - y_C; \\ u_5 &= u_1^2 + u_2^2 + a_1^2 - a_2^2; \\ u_6 &= u_3^2 + u_4^2 + a_1^2 - a_3^2; \end{aligned} \quad (2.12.2)$$

2) находится число H корней γ_4 уравнения

$$F(\gamma_4) = 0 \quad (0 \leq \gamma_4 < 2\pi); \quad (2.12.3)$$

3) если $H > 0$, то определяются корни γ_4 уравнения (2.12.3);

4) для каждого из найденных значений γ_4 вычисляются величины u_1, u_2, \dots, u_6 , Δ , Δ_1, Δ_2 по формулам (2.12.2), а затем углы $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ по формулам

$$\cos \gamma_1 = \Delta_1 / \Delta; \quad \sin \gamma_1 = \Delta_2 / \Delta; \quad (2.12.4)$$

$$\cos \gamma_2 = (a_1 \cos \gamma_1 + u_1) / a_2;$$

$$\sin \gamma_2 = (a_1 \sin \gamma_1 + u_2) / a_2; \quad (2.12.5)$$

$$\cos \gamma_3 = (a_1 \cos \gamma_1 + u_3) / a_3;$$

$$\sin \gamma_3 = (a_1 \sin \gamma_1 + u_4) / a_3, \quad (2.12.6)$$

Можно показать, что функция $F(\gamma_4)$ имеет вид тригонометрического многочлена:

$$\begin{aligned} F(\gamma_4) &= A_1 z^3 + A_2 z^2 v + A_3 z^2 + A_4 z v + \\ &+ A_5 z + A_6 v + A_7, \end{aligned} \quad (2.12.7)$$

где $z = \sin \gamma_4$, $v = \cos \gamma_4$; A_1, A_2, \dots, A_7 - коэффициенты, зависящие только от 12 задаваемых параметров группы.

Выражения для определения коэффициентов A_1, A_2, \dots, A_7 весьма громоздки. Однако их значения могут быть найдены без привлечения аналитических выражений для них, при помощи метода, основанного на интерполировании [7].

Уравнение (2.12.3) на основании (2.12.7) и тождества $z^2 + v^2 = 1$ можно преобразовать к виду алгебраического уравнения шестой степени относительно параметра z . Отсюда следует, что $H \leq 6$. Обычно $H=0, 2, 4$ или 6 , а в особых случаях $H=1, 3$ или 5 . Случай $H=0$ означает, что группа не существует. Если $H > 0$, то группа имеет H вариантов сборки. Таким образом, трехпроводковая группа с одними вращательными парами может иметь до шести вариантов сборки при фиксированных положениях трех внешних шарниров. Число H можно найти до определения корней уравнения (2.12.3), если воспользоваться методом Штурма, для реализации которого нужно знать лишь значения коэффициентов упомянутого уравнения шестой степени.

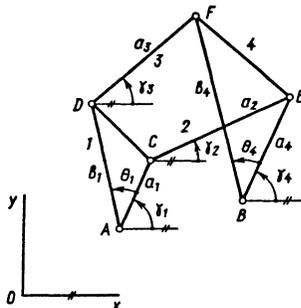


Рис.2.12.2. Четырехзвенная группа второго порядка

Четырехзвенная группа второго порядка (рис. 2.12.2.) имеет постоянные параметры $\theta_1, b_1, a_1 - a_4, \theta_4, b_4$. Заданы также координаты x_A, y_A, x_B, y_B двух внешних шарниров A и B . Постановка задачи анализа такая же, как и для трехпроводковой группы. Задача решается в такой последовательности [7]:

1) составляется функция $F(\gamma_4)$, определяемая уравнением (2.12.1), в котором

$$\Delta_1 = b_1 u_8 u_5 - a_1 u_2 u_6;$$

$$\Delta_2 = a_1 u_1 u_6 - b_1 u_7 u_5;$$

$$\Delta = 2a_1 b_1 (u_1 u_8 - u_2 u_7);$$

$$u_1 = a_4 \cos \gamma_4 + x_B - x_A;$$

$$u_2 = a_4 \sin \gamma_4 + y_B - y_A;$$

$$u_5 = u_1^2 + u_2^2 + a_1^2 - a_2^2;$$

$$u_6 = u_3^2 + u_4^2 + b_1^2 - a_3^2;$$

$$\begin{aligned}
 u_7 &= u_3 \cos \theta_1 + u_4 \sin \theta_1; \\
 u_8 &= -u_3 \sin \theta_1 + u_4 \cos \theta_1; \\
 u_3 &= b_4 \cos(\gamma_4 + \theta_4) + x_B - x_A; \\
 u_4 &= b_4 \sin(\gamma_4 + \theta_4) + y_B - y_A;
 \end{aligned}
 \tag{2.12.8}$$

2 и 3) то же самое, что и для трехпроводковой группы;

4) для каждого из найденных значений γ_4 вычисляются величины u_1, u_2, \dots, u_8 , Δ , Δ_1, Δ_2 по формулам (2.12.8), угол γ_1 по формуле (2.12.4), а также углы γ_2 и γ_3 по формулам

$$\begin{aligned}
 \cos \gamma_2 &= (u_1 - a_1 \cos \gamma_1) / a_2; \\
 \sin \gamma_2 &= (u_2 - a_1 \sin \gamma_1) / a_2;
 \end{aligned}
 \tag{2.12.9}$$

$$\begin{aligned}
 \cos \gamma_3 &= [u_3 - b_1 \cos(\gamma_1 + \theta_1)] / a_3; \\
 \sin \gamma_3 &= [u_4 - b_1 \sin(\gamma_1 + \theta_1)] / a_3.
 \end{aligned}
 \tag{2.12.10}$$

Можно показать, что функция $F(\gamma_4)$ и в данном случае имеет вид тригонометрического многочлена (2.12.7). Отсюда следует, что выводы, сделанные в отношении трехпроводковой группы, справедливы и для рассматриваемой группы Ассура. При решении задачи о положениях звеньев для четырехзвенных групп Ассура различных модификаций, содержащих как вращательные, так и поступательные пары, установлено, что она сводится к одному алгебраическому уравнению шестой, четвертой, второй или первой степени в зависимости от числа и расположения поступательных пар.

Угловые скорости $\dot{\gamma}_i$ и угловые ускорения $\ddot{\gamma}_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) звеньев четырехзвенной группы определяются после решения задачи о положениях ее звеньев при условии, что известны проекции на оси x и y скоростей и ускорений внешних пар группы. Общий подход к расчету указанных величин был описан выше.

Особым положением четырехзвенной группы называется такое ее положение, в котором при конечных значениях скоростей внешних шарниров угловые скорости звеньев группы становятся бесконечно большими. Особое положение имеет место при выполнении условия: $D = 0$, где D

- якобиан исходной системы уравнений анализа группы. Для трехпроводковой группы уравнение $D = 0$ принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}
 b_4 \sin(\gamma_2 - \gamma_1) \sin(\gamma_4 + \theta_4 - \gamma_3) - \\
 - a_4 \sin(\gamma_3 - \gamma_1) \sin(\gamma_4 - \gamma_2) = 0.
 \end{aligned}
 \tag{2.12.11}$$

При выполнении условия (2.12.11) прямые, проходящие вдоль трех поводков AD , BE и CF , пересекаются в одной точке (рис. 2.12.3, а).

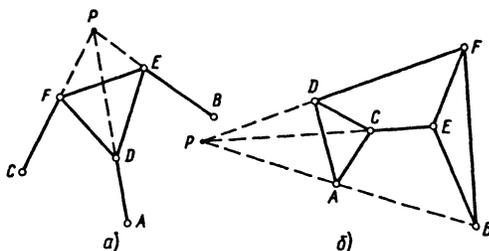


Рис. 2.12.3. Четырехзвенные группы в особом положении

Для четырехзвенной группы второго порядка уравнение $D = 0$ принимает такой вид:

$$\begin{aligned}
 b_1 a_4 \sin(\gamma_4 - \gamma_2) \sin(\gamma_3 - \gamma_1 - \theta_1) - \\
 - a_1 b_4 \sin(\gamma_2 - \gamma_1) \sin(\gamma_4 + \theta_4 - \gamma_3) = 0.
 \end{aligned}
 \tag{2.12.12}$$

Если выполняется условие (2.12.12), то три прямые, проходящие вдоль звеньев DF и CE , а также через шарниры A и B , пересекаются в одной точке (рис. 2.12.3, б). Если в механизме, содержащем четырехзвенную группу Ассура, последняя оказывается в особом положении, то соответствующее положение механизма будет, как правило, мертвым, при котором достигается граница области существования некривошипной сборки.

2.13. АНАЛИЗ ШЕСТИЗВЕННЫХ ПЛОСКИХ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ, СОДЕРЖАЩИХ ЧЕТЫРЕХЗВЕННУЮ ГРУППУ АССУРА

Три возможных схемы шестизвенных плоских шарнирных механизмов, содержащих четырехзвенную группу Ассура, приведены на рис. 2.2.2, а, 2.8.1 и 2.13.1. Анализ любого из этих механизмов при заданном положении входного звена I сводится к анализу четырехзвенной группы Ассура при фиксированных положениях ее внешних пар.

Для механизма, показанного на рис. 2.2.2, а, рассмотрим такую задачу: найти число

H возможных вариантов сборки при заданном значении входного угла; если $H > 0$, то найти угловые координаты звеньев 2, 3, 4, 5 для каждого варианта сборки (задача анализа 2, см. п.2.6).

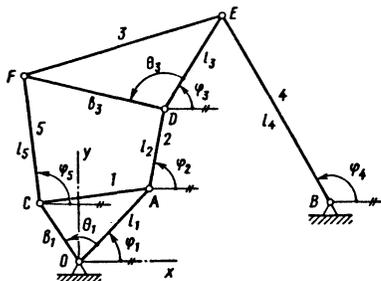


Рис.2.13.1. Шестизвенный плоский шарнирный механизм, содержащий четырехзвенную группу Ассура

Эта задача решается в два этапа. На первом этапе определяются координаты точки A по формулам $x_A = l_1 \cos \varphi_1$, $y_A = l_1 \sin \varphi_1$. На втором этапе решается рассмотренная выше задача о положениях звеньев трехпроводковой группы при известных положениях ее внешних шарниров A , B и C . Число возможных вариантов сборки шестизвенного механизма при данном φ_1 совпадает с числом H вариантов сборки трехпроводковой группы и может быть равно 0, 2, 4 или 6 (в особых положениях механизма 1, 3 или 5). При использовании алгоритма, приведенного в п. 2.12, нужно заменить принятые там обозначения $a_1 - a_4$, $b_4, \theta_4, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ соответственно обозначениями $l_2, l_4, l_5, l_3, b_3, \theta_3, \varphi_2, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_3$ для рассматриваемого шестизвенного механизма (обозначения шарниров A, B, C, D, E, F сохранены).

При решении задачи анализа 4 (см. п. 2.6) определяются функции положения $\varphi_i = \varphi_i(\varphi_1)$ $i = 2, 3, 4, 5$, для всех возможных сборок шестизвенного механизма вместе с областями их существования. Эта задача решается в три этапа.

На первом этапе многократно решается задача 2 для ряда дискретных значений $(\varphi_1)_\nu$ угла φ_1 , равных $(\varphi_1)_\nu = \nu \Delta\varphi$ (где $\nu = 0, 1, \dots, N$); $\Delta\varphi = 2\pi/N$ (число N можно взять, например, равным 90 или 120). При этом будут получены следующие значения: $\varphi_i^k((\varphi_1)_\nu)$, где $i = 2, 3, 4, 5$; $k = 1, 2, \dots, H_\nu$; $\nu = 0, 1, \dots, N$; H_ν - число вариантов сборки механизма

при $\varphi_1 = (\varphi_1)_\nu$; k - порядковый номер варианта сборки.

На втором этапе производится распределение полученного на первом этапе массива числовых результатов по отдельным сборкам механизма. Такое распределение может производиться вручную, в режиме диалога "человек - ЭВМ" или в автоматическом режиме на ЭВМ. В последнем случае применяется процедура идентификации сборок.

Цель идентификации сборок: преобразовать числовую информацию, упорядоченную по одному принципу, в информацию, упорядоченную по другому принципу. Так, в массиве значений угла φ_5 , найденных на первом

этапе, имеется $R = \sum_{\nu=0}^N H_\nu$ значений

$\varphi_5^k((\varphi_1)_\nu)$ угла

φ_5 ($k = 1, 2, \dots, H_\nu$; $\nu = 0, 1, \dots, N$). Они упорядочены в порядке возрастания значений $(\varphi_1)_\nu$ угла φ_1 (внешний цикл по параметру ν от 0 до N), а в пределах каждого значения $(\varphi_1)_\nu$ - в порядке возрастания номера k варианта сборки (внутренний цикл по параметру k от 1 до H_ν при условии, что $H_\nu > 0$). После распределения по сборкам тот же массив значений угла φ_5 будет упорядочен по другому принципу: по признаку принадлежности к 1, 2, ..., G сборке механизма (где G - общее число сборок на отрезке $[0, 2\pi]$), а внутри каждой сборки - в порядке возрастания значений $(\varphi_1)_\nu$ угла φ_1 , лежащих в пределах области существования данной сборки. При этом общее число значений угла φ_5 остается прежним, но теперь оно определяется по формуле

$$R = \sum_{r=1}^G N_r,$$

где r - порядковый номер сборки; N_r - число дискретных значений $(\varphi_1)_\nu$, принадлежащих области существования r -й сборки.

На третьем этапе решения задачи 4 проводится систематизация найденных сборок шестизвенного механизма. В частности, устанавливается число G_1 некривошипных и число G_2 кривошипных сборок ($G_1 + G_2 = G$), определяются границы области существова-

ния $[A_r, B_r]$ каждой некривошипной сборки ($r = 1, 2, \dots, G_1$).

Итак, в результате решения задачи 4 определяются: 1) значения G_1, G_2 и G ; 2) углы $\varphi_1 - \varphi_5$, отвечающие левой и правой границам каждой из некривошипныхборок; 3) таблицы значений углов $\varphi_2 - \varphi_5$ для последовательных значений угла φ_1 - отдельно для каждой сборки механизма.

В том случае, когда требуется выполнить анализ положений шестизвенного механизма только в одной определенной его сборке, т.е. решить задачу 3 (см. п. 2.6), необходимо знать хотя бы приближенно положения механизма в указанной его сборке при каком-либо одном положении входного звена. При наличии такой априорной информации, играющей роль своеобразного признака искомой сборки, ее функция положения строится по известному методу [8].

Угловые скорости $\dot{\varphi}_i$ и угловые ускорения $\ddot{\varphi}_i$ ($i = 2, 3, 4, 5$) звеньев шестизвенного механизма при данном значении φ_1 определяются после того, как найдены $\varphi_2 - \varphi_5$, при условии, что известны значения $\dot{\varphi}_1$ и $\ddot{\varphi}_1$.

Задача решается в два этапа. На первом этапе определяются проекции на оси x и y скорости и ускорения точки A (для всех трех рассматриваемых механизмов), а также точки C (только для механизма, показанного на рис. 2.13.1) входного звена 1. На втором этапе производится расчет угловых скоростей и угловых ускорений звеньев четырехзвенной группы, входящей в состав механизма, по известным значениям скоростей и ускорений ее внешних шарниров (см. п. 2.12). Следует отметить, что для всех трех ее рассматриваемых механизмов $\dot{x}_B = \dot{y}_B = \ddot{x}_B = \ddot{y}_B = 0$, а для механизмов на рис. 2.2.2, a и 2.8.1 $\dot{x}_C = \dot{y}_C = \ddot{x}_C = \ddot{y}_C = 0$.

2.14. СИСТЕМА ПАРАМЕТРИЗАЦИИ ОДНОКОНТУРНЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ

Рассматриваются одноконтурные пространственные рычажные механизмы с парами вида В (вращательная), П (поступательная), Ц (цилиндрическая) и С (сферическая) и подвижностью $W = 1$ (при наличии в структуре механизма "плавающего" звена вида СС его локальная подвижность при подсчете W не

учитывается). Пусть входное звено связано со стойкой парой вида В, П или Ц. Исключаются из рассмотрения механизмы с избыточными связями и с избыточной подвижностью (например, механизм ВППЦЦ).

Введены обозначения: n - число звеньев механизма, а также число его кинематических пар; 1 - номер входного звена; 2, 3, ..., $n-1$ - номера других подвижных звеньев; n (или 0) - номер стойки; $P_{i-1,i}$ - кинематическая пара, образуемая звеньями $i-1$ и i ($i = 1, 2, \dots, n$); q - обобщенная координата механизма (линейное или угловое перемещение звена 1 по отношению к стойке 0, т.е. во входной паре P_{01}); p_1, p_2, p_3 - число одно-, двух- и трехподвижных пар; $p_B, p_{\Pi}, p_{\Psi}, p_C$ - число пар вида В, П, Ц и С. Отметим, что $p_1 = p_B + p_{\Pi}$, $p_2 = p_{\Psi}, p_3 = p_C$. Должно выполняться условие $p_{\Pi} + p_{\Psi} \leq 3$.

Все рассматриваемые механизмы разделены на три семейства: 1) без сферических пар ($p_3 = 0$); 2) с одной сферической парой ($p_3 = 1$); 3) с двумя сферическими парами, т.е. с подвижным звеном вида СС ($p_3 = 2$).

На рис. 2.14.1 показаны механизмы ВЦЦ, ВВСВВ и ВССВ, относящиеся к механизмам соответственно первого, второго и третьего семейства.

Общие сведения о структуре механизмов этих трех семейств приведены в табл. 2.14.1. Следует отметить, что структурные схемы механизмов отличаются одна от другой или числом звеньев, или составом пар, или последовательностью расположения пар, или (только том случае, когда входная пара P_{01} есть пара вида Ц) выбором в качестве обобщенной координаты линейного или углового перемещения в этой паре.

На структурных схемах рассматриваемых механизмов отмечены точки $A_1, O_1, \dots, A_n, O_n$, причем точки A_i и O_i принадлежат звену i ($i = 1, 2, \dots, n$). Эти точки выбраны таким образом, что отрезок $A_i O_i$ есть либо общий перпендикуляр к осям двух смежных пар вида В, П или Ц, либо перпендикуляр, опущенный из центра пары вида С на ось смежной пары вида В, П или Ц, либо расстояние между центрами двух смежных пар вида С.

2.14.1. Общие сведения о структуре одноконтурных пространственных рычажных механизмов

Семейство механизмов	P_1	P_2	P_3	n	Число структурных схем механизмов			
					Вид входной пары			Всего
					В	П	Ц	
Первое	$2n-7$	$7-n$	0	4, 5, 6, 7	116	53	70	239
Второе	$2n-6$	$5-n$	1	3, 4, 5	44	40	28	112
Третье	$2n-6$	$4-n$	2	3, 4	4	4	2	10

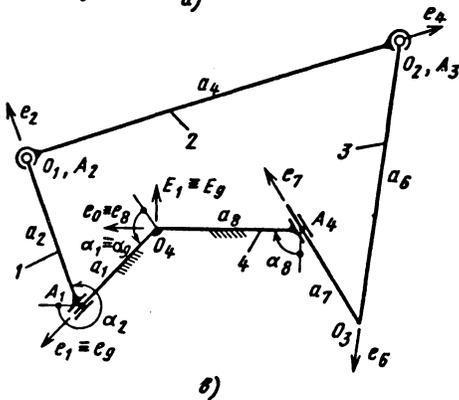
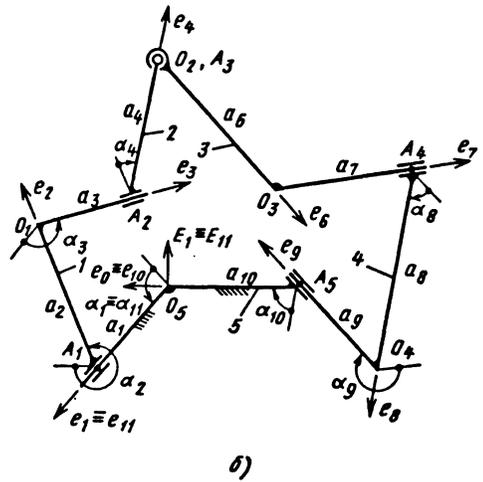
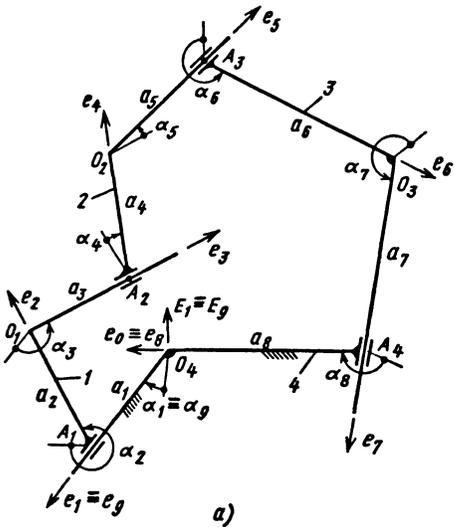


Рис. 2.14.1. Одноконтурные пространственные механизмы семейств:
 а - первого ВЦЦЦ;
 б - второго ВВСВВ;
 в - третьего ВССВ

Если $P_{i-1,i}$ - пара вида В, П или Ц, то точки O_{i-1} и A_{i-1} лежат на оси этой пары; если $P_{i-1,i}$ - пара вида С, то точки O_{i-1} и A_{i-1} совпадают (они находятся в центре этой пары).

После введения этих точек структурная схема механизма будет представлена в виде замкнутой ломаной $O_0 A_1 O_1 \dots O_{n-1} A_n O_n$, где O_0 - второе обозначение точки O_n . Число отрезков и вершин ломаной $2n - p_3$, причем угол при всех вершинах прямой, кроме тех вершин, которые совпадают с центрами пар вида С.

Введена система ортов $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_{2n}$ так, что орт e_{2i-1} направлен по отрезку $O_{i-1} A_i$, а орт e_{2i} - по отрезку $A_i O_i$ ломанной ($i = 1, 2, \dots, n$). Дополнительно введем орты $E_k = e_{k-1} \times e_k$ ($k = 1, 2, \dots, 2n$). Ортам e_1, e_{2n} и E_1 даны вторые обозначения соответственно e_{2n+1}, e_0 и E_{2n+1} . Орты e_{2i}, e_{2i+1} и E_{2i+1} связанных со звеном i механизма, где $i = 0$ (или n), $1, 2, \dots, n-1$. Тройка взаимно ортогональных ортов $\{e_0, e_1, E_1\}$, или в других обозначениях $\{e_{2n}, e_{2n+1}, E_{2n+1}\}$, неизменно связанных со стойкой 0 (или n), называется базисом.

Для механизмов первого семейства вводятся все указанные выше орты. Для механизмов второго семейства не вводятся орты e_{2m-1}, E_{2m-1} и E_{2m} , где m - номер того звена, которое образует пару вида С с предыдущим звеном. Для механизмов третьего семейства не вводятся орты $e_{2m-1}, e_{2m+1}, E_{2m-1}, E_{2m}$ и E_{2m+1} , где m - номер звена вида СС.

Унифицированная система обозначений постоянных и переменных параметров рассматриваемых механизмов следующая:

$a_{2i-1} = |O_{i-1} A_i|$, $a_{2i} = |A_i O_i|$, $i = 1, 2, \dots, n$ - линейных параметры; $\alpha_k = \angle(e_{k-2}, e_k)$, $k = 2, 3, \dots, 2n+1$ - угловые параметры. Принято, что $\alpha_1 = \alpha_{2n+1}$. Угол α_k откладывается от орта e_{k-2} к орту e_k против часовой стрелки, если смотреть с конца орта e_{k-1} . Для механизмов первого семейства вводят все указанные параметры a_k и α_k ($k = 1, 2, \dots, 2n$). У механизмов второго семейства отсутствуют

параметры $a_{2m-1}, \alpha_{2m-1}, \alpha_{2m}, \alpha_{2m+1}$, а у механизмов третьего семейства - параметры $a_{2m-1}, a_{2m+1}, \alpha_{2m-1}, \alpha_{2m}, \alpha_{2m+1}, \alpha_{2m+2}, \alpha_{2m+3}$.

Переменными параметрами механизма являются: a_{2i-1} - в случае, когда $P_{i-1,i}$ есть пара вида П или Ц; α_{2i} - в случае, когда $P_{i-1,i}$ есть пара вида В или Ц. Все другие параметры механизма постоянные.

Среди переменных параметров один параметр, а именно α_2 или a_1 , является независимым (обобщенная координата q механизма), а остальные - зависимыми. Независимый параметр считается известным, а зависимые параметры неизвестны и подлежат определению при анализе механизма.

Число N неизвестных параметров равно 6, 3 и 1 для механизмов соответственно первого, второго и третьего семейств. При этом число N_l линейных и число N_y угловых неизвестных параметров определяются по формулам:

$$N_l = p_{\Pi} + p_{\text{Ц}} - Q; \quad N_y = p_{\text{В}} + p_{\text{Ц}} + Q - 1, \quad (2.14.1)$$

где

$$Q = \begin{cases} 0, & \text{если } q = \alpha_2; \\ 1, & \text{если } q = a_1. \end{cases}$$

Для механизмов ВЦЦЦ, ВВСВВ и ВССВ (см. рис. 2.14.1) $q = \alpha_2$, а неизвестными параметрами являются: $a_3, a_5, a_7, \alpha_4, \alpha_6, \alpha_8$ - для механизма ВЦЦЦ; $\alpha_4, \alpha_8, \alpha_{10}$ - для механизма ВВСВВ; α_8 - для механизма ВССВ.

2.15. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛОЖЕНИЙ ЗВЕНЬЕВ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ

Задача о положениях звеньев пространственного механизма состоит в определении неизвестных переменных параметров при заданном значении обобщенной координаты q механизма. Как рассмотрено выше, первым этапом при решении задачи о положениях является составление исходной системы уравнений анализа, связывающих постоянные и переменные параметры механизма. Второй этап заключается в решении данной системы относительно неизвестных параметров.

При составлении исходной системы уравнений для пространственных рычажных механизмов применяют матричные, векторные, тензорные, винтовые и другие методы. Ниже представлены векторный метод, основанный на применении векторной рекуррентной формулы [5], и матричный метод, базирующийся на использовании матриц 4×4 . Векторный метод позволяет не только рациональным образом составить исходную систему уравнений анализа, но и найти ее решение в аналитической форме для большинства рассматриваемых механизмов.

Векторный метод. Основой векторного метода являются две векторные рекуррентные формулы (ВРФ):

прямая ВРФ

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_k &= \mathbf{e}_{k-2}c_k - \mathbf{E}_{k-1}s_k, \\ \mathbf{E}_k &= \frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial \alpha_k} = -\mathbf{e}_{k-2}s_k - \mathbf{E}_{k-1}c_k; \\ (k &= 2, 3, \dots, j) \end{aligned} \quad (2.15.1)$$

обратная ВРФ

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_k &= \mathbf{e}_{k+2}c_{k+2} - \mathbf{E}_{k+2}s_{k+2}, \\ \mathbf{E}_{k+1} &= \frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial \alpha_{k+2}} = -\mathbf{e}_{k+2}s_{k+2} - \mathbf{E}_{k+2}c_{k+2}; \\ (k &= 2n-1, 2n-2, \dots, l) \end{aligned} \quad (2.15.2)$$

где $s_k = \sin \alpha_k$; $c_k = \cos \alpha_k$ ($k = 1, 2, \dots, 2n+1$).

Номера j и l удовлетворяют следующим условиям:

для механизмов первого семейства

$$2 \leq j \leq l \leq 2n-1;$$

для механизмов второго семейства

$$j = 2m-2, l = 2m;$$

для механизмов третьего семейства

$$j = 2m-2, l = 2m+2.$$

Прямая ВРФ позволяет получить последовательно орты $\mathbf{e}_2, \mathbf{E}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{E}_3, \dots, \mathbf{e}_j, \mathbf{E}_j$ в виде их разложений по ортам базиса $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{E}_1\}$. Аналогичные разложения по ортам того же базиса получаются для ортов $\mathbf{e}_{2n-1}, \mathbf{E}_{2n}, \mathbf{e}_{2n-2}, \mathbf{E}_{2n-1}, \dots, \mathbf{e}_l, \mathbf{E}_{l+1}$ при помощи обратной ВРФ.

Кроме формул (2.15.1) и (2.15.2) при анализе механизма используется уравнение замкнутости контура

$$\mathbf{R} = \sum_{k=1}^{2n} a_k \mathbf{e}_k = 0. \quad (2.15.3)$$

В формуле (2.15.3) под знаком суммы отсутствуют: член с номером $k = 2m-1$ для механизмов второго семейства; члены с номерами $k = 2m-1$ и $k = 2m+1$ для механизмов третьего семейства.

Алгоритмы решения задачи о положении звеньев пространственных механизмов, составленные при помощи прямой и обратной ВРФ, а также уравнения замкнутости (2.15.3) характеризуются следующими особенностями: большая часть алгоритма реализуется на векторном уровне и лишь на заключительной стадии решения происходит переход к разрешенным скалярным уравнениям и формулам; удается достаточно просто исключить ряд неизвестных и для большинства одноконтурных механизмов получить одно уравнение с одним неизвестным (остальные неизвестные определяются при этом в явном виде по формулам); имеется возможность быстрого просмотра альтернативных стратегий решения задачи (с целью отбора наиболее рациональной), так как алгоритм строится на базе нескольких "стандартных" векторных соотношений, которые комбинируются в той или иной последовательности.

Наиболее часто используемые "стандартные" векторные соотношения, полученные из формул (2.15.1) - (2.15.3), приведены в табл. 2.15.1.

2.15.1. "Стандартные" векторные соотношения, используемые при анализе положений пространственных механизмов

$\mathbf{e}_{k-2}\mathbf{e}_k = \cos \alpha_k$	$\mathbf{e}_{k-1} = \mathbf{e}_{k-2} \times \mathbf{e}_k / \sin \alpha_k$
$\mathbf{E}_{k-1}\mathbf{e}_k = -\sin \alpha_k$	$\mathbf{R}\mathbf{e}_k = 0$
$\mathbf{E}_k = \mathbf{e}_{k-1} \times \mathbf{e}_k$	$\mathbf{R}(\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j) = 0$

При определении положений звеньев механизма первого семейства $N = 6, N_y \geq 3, N_l = 6 - N_y$ ($N = N_y + N_l$ - общее число неизвестных параметров; N_y и N_l - число соответственно угловых и линейных неизвестных параметров).

В соответствии с описываемым векторным методом на начальной стадии решения задачи исключаются два неизвестных угловых параметра и получается система уравнений с четырьмя неизвестными. Пусть α_{2u} и α_{2v} - два неизвестных угловых параметра. При отборе углов α_{2u} и α_{2v} (где $u < v$) среди N_y неизвестных угловых параметров рекомендуется придерживаться правила: разность $u - v$ должна быть минимально возможной. Можно показать, что для 232 из 239 схем механизмов первого семейства $(u - v)_{\min} = 1$, а для других семи схем $(u - v)_{\min} = 2$. Задача о положениях звеньев решается по обобщенному алгоритму в пять этапов (рассматривается случай, когда $u - v = 1$):

1. Составить выражения для ортов $e_2, E_2, e_3, E_3, \dots, e_{2u-1}, E_{2u-1}$ на основании прямой ВРФ (2.15.1), а также выражения для ортов $e_{2n-1}, E_{2n}, e_{2n-2}, E_{2n-1}, \dots, e_{2u+1}, E_{2u+2}$ на основании обратной ВРФ (2.15.2).

2. Составить выражения для ортов e_{2u}, E_{2u} и E_{2u+1} , используя формулы

$$e_{2u} = e_{2u-1} \times e_{2u+1} / s_{2u+1};$$

$$E_{2u} = e_{2u-1} \times e_{2u}; \quad E_{2u+1} = e_{2u} \times e_{2u+1}. \quad (2.15.4)$$

3. Решить систему уравнений

$$e_{2u-1} e_{2u+1} = c_{2u+1}; \quad (2.15.5)$$

$$\bar{R} = 0, \quad (2.15.6)$$

где $R = \sum_{k=1}^{2n} a_k e_k$, относительно четырех неизвестных.

Следует отметить, что неизвестные углы α_{2u} и α_{2u+2} не входят в уравнения (2.15.5) и (2.15.6), поскольку полученные на этапах 1 и 2 выражения для ортов не содержат этих углов.

4. Определить орты $e_2, E_2, e_3, E_3, \dots, e_{2n-1}, E_{2n-1}$ и E_{2n} путем подстановки найденных на этапе 3 значений неизвестных параметров в выражения, полученные для этих ортов на этапах 1 и 2.

5. Найти углы α_{2u} и α_{2u+2} , определив их синусы и косинусы по формулам

$$s_{2u} = -E_{2u-1} e_{2u}; \quad c_{2u} = e_{2u-2} e_{2u}; \quad (2.15.7)$$

$$s_{2u+2} = -E_{2u+1} e_{2u+2}; \quad c_{2u+2} = e_{2u} e_{2u+2}. \quad (2.15.8)$$

Трудность поиска решения системы уравнений (2.15.5) и (2.15.6) на этапе 3 алгоритма зависит от числа N_y неизвестных угловых параметров. Все механизмы первого семейства (всего 239 схем) по значению N_y распределяются следующим образом:

N_y	3	4	5	6
Число схем	88	116	32	3
Механизм (пример)	ВЦЦ	ВЦВЦ	ВВВЦВВ	7В

В случае $N_y = 3$ и $N_l = 3$ уравнение (2.15.5) содержит один неизвестный параметр (угловой). После его получения на этапе 3 оставшихся неизвестных линейных параметра определяются в явном виде из векторного уравнения (2.15.6), в которое эти параметры входят линейно.

При $N_y = 4$ и $N_l = 2$ этап 3 алгоритма реализуется в такой последовательности: составляется уравнение

$$R(e_{2i-1} \times e_{2j-1}) = 0, \quad (2.15.9)$$

не содержащие неизвестных линейных параметров a_{2i-1} и a_{2j-1} ;

решается система уравнений (2.15.5) и (2.15.9) относительно двух неизвестных угловых параметров;

после выполнения этапа 4 определяются параметры a_{2i-1} и a_{2j-1} из уравнений

$$R e_{2j} = 0; \quad R e_{2i-2} = 0, \quad (2.15.10)$$

первое из которых содержит только один неизвестный параметр a_{2i-1} , а второе - только параметр a_{2j-1} ; в уравнения (2.15.10) неизвестные входят линейно.

В случае $N_y = 5$ и $N_l = 1$ этап 3 выполняется в таком порядке: составляются уравнения

$$R e_{2i-2} = 0; \quad R e_{2i} = 0, \quad (2.15.11)$$

не содержащие неизвестного линейного параметра a_{2i-1} ;

решается система трех уравнений (2.15.5) и (2.15.11) относительно трех неизвестных угловых параметров;

после выполнения этапа 4 алгоритма определяется параметр a_{2i-1} из линейного уравнения

$$R e_{2i-1} = 0. \quad (2.15.12)$$

При $N_y = 6$ и $N_{л} = 0$ четыре неизвестных на этапе 3 угловых параметра определяются из системы уравнений (2.15.5) и (2.15.6). На разных этапах описанного выше алгоритма использованы "стандартные" векторные соотношения, приведенные в табл. 2.15.1.

Следует отметить, что в случае $N_y = 4, 5$ и 6 при решении системы $N_y - 2$ нелинейных уравнений относительно такого же числа неизвестных угловых параметров удается путем последовательного исключения неизвестных получить для всех механизмов первого семейства одно тригонометрическое уравнение с одним неизвестным. Это уравнение может быть преобразовано к соответствующему алгебраическому уравнению, степень которого зависит от структуры исследуемого механизма, но прежде всего от значения N_y (для наиболее сложного механизма 7В, у которого $N_y = 6$, степень уравнения равна 16).

Для механизма ВЦЦЦ (см. рис. 2.14.1, а) $N_y = 3$, $N_{л} = 3$. В соответствии с этапом 1 обобщенного алгоритма при $u = 2$ и $v = 3$:

$$e_2 = e_0 c_2 - E_1 s_2; E_2 = -e_0 s_2 - E_1 c_2;$$

$$e_3 = e_0 s_2 s_3 + e_1 c_3 + E_1 c_2 s_3; \quad (2.15.13)$$

$$E_3 = e_0 s_2 c_3 - e_1 s_3 + E_1 c_2 c_3$$

$$e_7 = e_0 c_1 - E_1 s_1; E_8 = -e_1 s_1 - E_1 c_1;$$

$$e_6 = e_0 c_8 + e_1 s_1 s_8 + E_1 c_1 s_8;$$

$$E_7 = -e_0 s_8 + e_1 s_1 c_8 + E_1 c_1 c_8; \quad (2.15.14)$$

$$e_5 = e_0 s_8 s_7 + e_1 (c_1 c_7 - s_1 c_8 s_7) -$$

$$- E_1 (s_1 c_7 + c_1 c_8 s_7);$$

$$E_6 = e_0 s_8 c_7 - e_1 (c_1 s_7 + s_1 c_8 c_7) +$$

$$+ E_1 (s_1 s_7 - c_1 c_8 c_7).$$

Уравнение (2.15.5) в данном случае имеет вид

$$B_1 s_8 + B_2 c_8 + B_3 = 0, \quad (2.15.15)$$

где $B_1 = s_2 s_3 s_7$; $B_2 = -s_1 c_3 s_7 - c_1 c_2 s_3 s_7$;
 $B_3 = c_1 c_3 c_7 - s_1 c_2 s_3 c_7 - c_5$.

Из уравнения (2.15.15) находится неизвестный угол α_8 :

$$s_8 = \frac{-B_1 B_3 \pm B_2 \sqrt{D}}{B_1^2 + B_2^2}; \quad c_8 = \frac{-B_2 B_3 \mp B_1 \sqrt{D}}{B_1^2 + B_2^2},$$

$$(2.15.16)$$

где $D = B_1^2 + B_2^2 - B_3^2$.

Если $D < 0$, то механизм ВЦЦЦ не существует. Если $D > 0$, то в соответствии с формулами (2.15.16) угол α_8 имеет два значения, которые соответствуют двум возможным вариантам сборки механизма ВЦЦЦ при данном α_2 .

Для каждого из вариантов сборки механизма находятся: орты e_6, E_7, e_5, E_6 по формулам (2.15.14); орты e_4, E_4 и E_5 по формулам (2.15.4) при $u = 2$; вектор R_1 по формуле

$$R_1 = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_4 e_4 + a_6 e_6 + a_8 e_8; \quad (2.15.17)$$

неизвестные параметры a_3, a_5 и a_7 из уравнения (2.15.6), в котором $R = R_1 + a_3 e_3 + a_5 e_5 + a_7 e_7$; неизвестные угловые параметры α_4 и α_6 по формулам (2.15.7) и (2.15.8) при $u = 2$.

При решении векторного уравнения (2.15.6) его целесообразно заменить тремя скалярными уравнениями

$$R e_6 = 0; \quad R e_4 = 0; \quad R(e_3 \times e_7) = 0,$$

из которых

$$a_3 = -(R_1 e_6) / (e_3 e_6); \quad a_7 = -(R_1 e_4) / (e_7 e_4);$$

$$a_5 = R_1 (e_3 \times e_7) s_7 / (e_3 e_6). \quad (2.15.18)$$

При определении положений звеньев механизмов второго семейства $N = 3$, $N_y = 0, 1, 2$ или 3, $N_{л} = 3 - N_y$. Обобщенный алгоритм решения задачи о положениях включает два этапа.

1. Составить выражения для ортов $e_2, E_2, e_3, E_3, \dots, e_{2m-2}, E_{2m-2}$ на основании прямой ВРФ (2.15.1), а также выражения для ортов $e_{2n-1}, E_{2n}, e_{2n-2}, E_{2n-1}, \dots, e_{2m}, E_{2m+1}$ на основании обратной ВРФ (2.15.2).

2. Найти три неизвестных параметра механизма из векторного уравнения $R = 0$, в котором

$$R = \sum_{k=1}^{2m-2} a_k e_k + \sum_{k=2n}^{2n} a_k e_k. \quad (2.15.19)$$

Все механизмы второго семейства (всего 112 схем) по значению N_y распределяются следующим образом:

N_y	0	1	2	3
Число схем	7	47	47	11
Механизм (пример) . . .	ВППСП	ВПСВП	ВЦСВ	ВВСВВ

В случае $N_y = 0$ и $N_l = 3$ три неизвестных линейных параметра a_{2i-1} , a_{2j-1} , a_{2k-1} определяются соответственно из трех скалярных уравнений:

$$\begin{aligned} R(e_{2j-1} \times e_{2k-1}) &= 0; \quad R(e_{2i-1} \times e_{2k-1}) = 0; \\ R(e_{2i-1} \times e_{2j-1}) &= 0, \end{aligned} \quad (2.15.20)$$

которые получаются из векторного уравнения $R = 0$. В каждое из уравнений (2.15.20) входит по одному неизвестному, причем линейно.

При $N_y = 1$ и $N_l = 2$ три неизвестных параметра α_{2i} , a_{2j-1} , a_{2k-1} определяются из уравнения $R = 0$ следующим образом: находится α_{2i} из первого уравнения (2.15.20), в котором не фигурируют параметры a_{2j-1} и a_{2k-1} ; находятся орты, зависящие от α_{2i} , путем подстановки найденного параметра α_{2i} в выражения для этих ортов, полученные на этапе 1 алгоритма; определяются a_{2j-1} и a_{2k-1} из второго и третьего уравнений (2.15.20).

В случае $N_y = 2$ и $N_l = 1$ три неизвестных параметра α_{2i} , α_{2j} и a_{2k-1} определяются из уравнения $R = 0$ в такой последовательности: угловые параметры α_{2i} и α_{2j} находятся из системы двух уравнений

$$R e_{2k-2} = 0; \quad R e_{2k} = 0, \quad (2.15.21)$$

не содержащих параметра a_{2k-1} ; определяют орты, зависящие от α_{2i} и α_{2j} , по формулам, составленным на этапе 1 алгоритма; находится параметр a_{2k-1} из уравнения

$$R e_{2k-1} = 0, \quad (2.15.22)$$

в которое a_{2k-1} входит линейно.

При $N_y = 3$ и $N_l = 0$ три неизвестных угловых параметра определяются из векторно-

го уравнения $R = 0$. При этом всегда удается исключить два неизвестных и получить одно скалярное уравнение с одним неизвестным. Последнее может быть представлено в виде алгебраического уравнения четвертой степени для всех 11 структурных схем. Таким образом, для всех 112 схем механизмов второго семейства задача о положениях может быть решена аналитически в явном виде.

Для механизма ВВСВВ (см. рис. 2.14.1, б) $m = 3$, $N_y = 3$, $N_l = 0$. В соответствии с этапом 1 обобщенного алгоритма сначала записываются выражения для ортов $e_2, E_2, e_3, E_3, e_4, E_4, e_9, E_{10}, e_8, E_9, e_7, E_8, e_6, E_7$ на основе прямой и обратной ВРФ. Орты e_4 и E_4 зависят от неизвестного угла α_4 , орты e_8, E_9, e_7 и E_8 - от неизвестного угла α_{10} , а орты e_6 и E_7 - от неизвестных углов α_{10} и α_8 .

При решении уравнения $R = 0$ относительно неизвестных $\alpha_4, \alpha_8, \alpha_{10}$ путем простых его преобразований, выполняемых на векторном уровне, удается исключить неизвестные α_8 и α_{10} и получить одно уравнение вида $f(\alpha_2, \alpha_4) = 0$ с одним неизвестным α_4 :

$$\begin{aligned} & \left(R_1 R_1 + a_8^2 - a_6^2 - a_7^2 \right)^2 s_9^2 + \\ & + 4 \left[(R_1 e_9) c_9 + a_7 \right]^2 a_8^2 - \\ & - 4 \left[(R_1 R_1) - (R_1 e_9)^2 \right] a_8^2 s_9^2 = 0. \end{aligned} \quad (2.15.23)$$

Здесь

$$\begin{aligned} R_1 &= a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 + \\ & + a_4 e_4 + a_9 e_9 + a_{10} e_{10}. \end{aligned} \quad (2.15.24)$$

Уравнение (2.15.23) может быть представлено в виде

$$B_1 s_4^2 + B_2 s_4 c_4 + B_3 s_4 + B_4 c_4 + B_5 = 0, \quad (2.15.25)$$

где B_1, \dots, B_5 - коэффициенты, зависящие от постоянных параметров механизма и независимой переменной α_2 . Тригонометрическое уравнение (2.15.25) преобразуется к алгебраическому уравнению четвертой степени

$$C_0 x^4 + C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4 = 0, \quad (2.15.26)$$

где $x = s_4$; C_0, \dots, C_4 - коэффициенты, зависящие от тех же параметров, что и величины B_1, \dots, B_5 .

Пусть H есть число вещественных корней уравнения (2.15.26). Обычно $H = 0, 2$ или 4 , в особых случаях (при наличии кратных корней) $H = 1$ или 3 . Случай $H = 0$ означает, что при данном α_2 механизм ВВСВВ не существует. Случай $H > 0$ означает, что при данном α_2 механизм имеет H вариантов сборки. Следует отметить, что $H = H(\alpha_2)$.

Пусть $x = x_*$ есть один из корней уравнения (2.15.26) (нетрудно показать, что всегда $|x_*| \leq 1$). Алгоритм расчета искоемых параметров $\alpha_4, \alpha_{10}, \alpha_8$ следующий:

1) $s_4 = x_*$;

$$c_4 = -\left(B_1 x_*^2 + B_3 x_* + B_5 \right) / \left(B_2 x_* + B_4 \right);$$

2) e_4, E_4, R_1 ;

3) $s_{10} = \Delta_1 / \Delta$; $c_{10} = \Delta_2 / \Delta$;

$$\Delta = 2 \left(F_1^2 + F_2^2 \right) a_8 s_9;$$

$$\Delta_1 = F_2 F_4 s_9 - 2 F_1 F_3 a_8;$$

$$\Delta_2 = -F_1 F_4 s_9 - 2 F_2 F_3 a_8;$$

$$F_1 = R_1 e_0; \quad F_2 = R_1 E_{10};$$

$$F_3 = (R_1 e_9) c_9 + a_7;$$

$$F_4 = R_1 R_1 + a_8^2 - a_6^2 - a_7^2;$$

4) e_8, E_9, e_7, E_8 ;

5) $s_8 = (R_1 E_8) / a_6$; $c_8 = -[(R_1 e_8) + a_8] / a_6$.

При определении положений звеньев механизмов третьего семейства $N = 1, N_y = 0$ или $1, N_l = 1 - N_y$. Механизмы третьего семейства (всего 10 схем) по значению N_y распределяются следующим образом.

N_y	0	1
Число схем	5	5
Механизм (пример)	ВССП	ВССВ

Обобщенный алгоритм решения задачи о положениях включает два этапа.

1. Составить выражения для ортов $e_2, E_2, e_3, E_3, \dots, e_{2m-2}, E_{2m-2}$ на основании прямой ВРФ (2.15.1), а также выражения для ортов $e_{2n-1}, E_{2n}, e_{2n-2}, E_{2n-1}, \dots, e_{2m+2}, E_{2m+3}$ на основании обратной ВРФ (2.15.2).

2. Решить относительно неизвестного параметра уравнение

$$R_1 R_1 = a_{2m}^2, \tag{2.15.27}$$

где $R_1 = \sum_{k=1}^{2m-2} a_k e_k + \sum_{k=2m+2}^{2n} a_k e_k$.

Для всех рассматриваемых механизмов уравнение (2.15.27) может быть представлено в виде квадратного уравнения.

Для механизма ВССВ (см. рис. 2.14.1, в) $m = 2, N_y = 1, N_l = 0$. По формулам (2.15.1) и (2.15.2) находятся

$$e_2 = e_0 c_2 - E_1 s_2; \quad e_7 = e_1 c_1 - E_1 s_1;$$

$$E_8 = -e_1 s_1 - E_1 c_1;$$

$$e_6 = e_0 c_8 + e_1 s_1 s_8 + E_1 c_1 s_8.$$

$$\tag{2.15.28}$$

Уравнение (2.15.27) имеет вид:

$$\left(a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_6 e_6 + a_7 e_7 + a_8 e_8 \right)^2 = a_4^2. \tag{2.15.29}$$

После подстановки в (2.15.29) выражений для ортов e_2, e_6 и e_7 из (2.15.28) получается

$$B_1 c_8 + B_2 s_8 + B_3 = 0, \tag{2.15.30}$$

где $B_1 = 2a_6(a_2 c_2 + a_8)$; $B_2 = 2a_6(a_1 s_1 - a_2 c_1 s_2)$; $B_3 = a_1^2 + a_2^2 - a_4^2 + a_6^2 + a_7^2 + a_8^2 + 2a_1 a_7 c_1 + 2a_2 a_8 c_2 + 2a_2 a_7 s_1 s_2$.

Неизвестный угол α_8 находится из уравнения (2.15.30), которое может быть преобразовано в квадратное относительно $x = s_8$ уравнение. Если дискриминант $D = B_1^2 + B_2^2 - B_3^2 < 0$, то механизм ВССВ не существует. Если $D > 0$, то механизм имеет два варианта сборки при данном α_2 .

Метод матриц. Рассматриваемый метод анализа пространственных механизмов основан на использовании матриц перехода от одной системы координат к другой. Эти матрицы имеют размерность 4×4 . Четвертая строка всех матриц перехода имеет один и тот же вид $(0, 0, 0, 1)$. Метод матриц рассмотрим

применительно к одноконтурным механизмам первого семейства, т.е. к механизмам без сферических пар, например к механизму ВЦЦЦ (рис. 2.15.1).

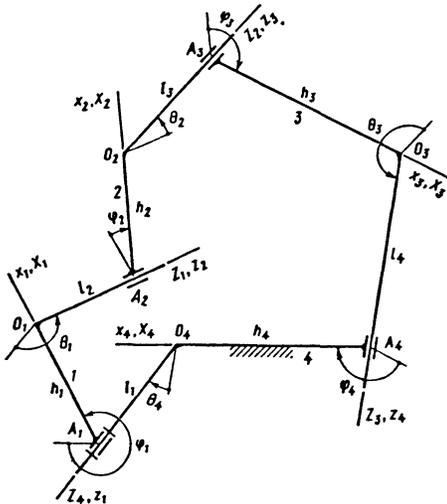


Рис. 2.15.1. Механизм ВЦЦЦ

Для параметров рассматриваемых механизмов приняты обозначения $l_i, h_i, \varphi_i, \theta_i$ вместо прежних соответственно $a_{2i-1}, a_{2i}, \alpha_{2i}, \alpha_{2i+1}$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Переменными параметрами механизма являются: l_i в случае, когда $P_{i-1,i}$ есть пара вида П или Ц; φ_i в случае, когда $P_{i-1,i}$ есть пара вида В или Ц ($i = 1, 2, \dots, n$). С каждым i -м звеном механизма связаны две системы координат: $A_i x_i y_i z_i$ (или кратко s_i) и $O_i X_i Y_i Z_i$ (или S_i), где $i = 1, 2, \dots, n$. Оси x_i и X_i направлены по отрезку $A_i O_i$ от A_i к O_i , ось z_i - по отрезку $O_{i-1} A_i$ от O_{i-1} к A_i , ось Z_i - по отрезку $O_i A_{i+1}$ от O_i к A_{i+1} . Следует отметить, что оси z_{i+1} и Z_i совпадают. Во всех приведенных обозначениях индекс 0 может быть заменен на n , и наоборот (например, $O_0 \equiv O_n, S_0 \equiv S_n$ и т.д.).

Введем следующие матрицы: матрицу G_{ii} перехода от системы S_i к системе s_i ; матрицу G_{ii}^{-1} перехода от системы s_i к системе S_i ; матрицу $M_{i-1,i}$ перехода от системы s_i к системе S_{i-1} ; матрицу $M_{i,i-1} = M_{i-1,i}^{-1}$ пере-

хода от системы S_{i-1} к системе s_i ($i = 1, 2, \dots, n$).

Матрицы $G_{ii}, G_{ii}^{-1}, M_{i-1,i}$ и $M_{i,i-1}$ имеют вид:

$$G_{ii} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & h_i \\ 0 & c\theta_i & -s\theta_i & 0 \\ 0 & s\theta_i & c\theta_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$G_{ii}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -h_i \\ 0 & c\theta_i & s\theta_i & 0 \\ 0 & -s\theta_i & c\theta_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$M_{i-1,i} = \begin{pmatrix} c\varphi_i & -s\varphi_i & 0 & 0 \\ s\varphi_i & c\varphi_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$M_{i,i-1} = \begin{pmatrix} c\varphi_i & s\varphi_i & 0 & 0 \\ -s\varphi_i & c\varphi_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -l_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.15.31}$$

Здесь

$$s\theta_i = \sin \theta_i; \quad c\theta_i = \cos \theta_i; \quad s\varphi_i = \sin \varphi_i; \\ c\varphi_i = \cos \varphi_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

$$\tag{2.15.32}$$

Из формул (2.15.31) видно, что в матрицах G_{ii} и G_{ii}^{-1} фигурируют постоянные параметры h_i и θ_i звена i механизма, а в матрицах $M_{i-1,i}$ и $M_{i,i-1}$ - параметры l_i и φ_i , из которых по крайней мере один является переменным и которые характеризуют относительное перемещение звеньев $i-1$ и i в паре $P_{i-1,i}$. Матрицу G_{ii} называют матрицей звена i (или матрицей геометрии), а матрицу $M_{i-1,i}$ - матрицей кинематической пары $P_{i-1,i}$ (или

матрицей движения). Такие же названия имеют и обратные матрицы G_{ii}^{-1} и $M_{i,i-1}^{-1}$.

Исходная система уравнений анализа может быть получена из матричного уравнения замкнутости контура пространственного механизма (которое является пространственным аналогом векторного уравнения замкнутости контура плоского механизма). Матричное уравнение замкнутости контура

$$H = I. \quad (2.15.33)$$

Здесь

$$H = M_{01}G_{11}M_{12}G_{22} \cdots M_{n-1,n}G_{nn}; \quad (2.15.34)$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \text{единичная матрица.}$$

Элементы матрицы H , полученной как произведение матриц $M_{01} G_{11} \dots G_{nn}$, обозначим через a_{jk} ($j, k = 1, 2, 3, 4$) так, что $H = [a_{jk}]$. Элементы a_{jk} ($j = 1, 2, 3; k = 1, 2, 3, 4$) есть функции семи переменных параметров механизма первого семейства, которые обозначим через $q, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6$ (q - обобщенная координата механизма; u_1, \dots, u_6 - неизвестные параметры).

Приравнивая элементы a_{jk} матрицы H , расположенные в трех первых ее строках, соответствующим элементам единичной матрицы I , можно составить 12 уравнений. Но только шесть из них являются взаимно независимыми, поскольку между элементами a_{jk} матрицы H существуют шесть условий связи в виде равенств. В качестве независимых элементов a_{jk} следует взять a_{14}, a_{24}, a_{34} и еще три элемента из девяти оставшихся, например a_{12}, a_{13}, a_{23} . В результате можно получить шесть уравнений

$$a_{jk}(q; u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6) = 0, \quad (2.15.35)$$

где $jk = 12, 13, 14, 23, 24, 34$.

Уравнения (2.15.35) должны быть решены относительно шести неизвестных. Исходная система уравнений анализа в форме (2.15.35) является весьма сложной, так как

элементы u_1, \dots, u_6 матрицы H получаются в виде громоздких выражений. Заметного упрощения исходной системы можно добиться при записи матричного уравнения замкнутости контура механизма в таком виде:

$$H_1 = H_2, \quad (2.15.36)$$

где

$$H_1 = M_{01}G_{11}M_{12}G_{22} \cdots M_{i-1,i}G_{ii}; \\ H_2 = G_{nn}^{-1}M_{n,n-1}G_{n-1,n-1}^{-1}M_{n-1,n-2} \cdots \\ \cdot G_{i+1,i+1}^{-1}M_{i+1,i}^{-1}. \quad (2.15.37)$$

Число i может иметь любое значение от 1 до $n-1$. Матрицы H_1 и H_2 есть матрицы перехода от системы S_i к системе $S_0 \equiv S_n$, но в противоположных направлениях: первая - по одной (прямой) ветви замкнутого контура, вторая - по другой (обратной) его ветви. Элементы матриц H_1 и H_2 обозначим через b_{jk} и c_{jk} , так что $H_1 = [b_{jk}]$, $H_2 = [c_{jk}]$. Можно так выбрать номер i , что элементы b_{jk} будут функциями переменных q, u_1, \dots, u_t , а элементы c_{jk} - функциями переменных u_{t+1}, \dots, u_6 , где $t = 2$ или 3.

Приравнивая друг другу соответствующие элементы матриц H_1 и H_2 , можно получить шесть уравнений

$$b_{jk}(q, u_1, \dots, u_t) = c_{jk}(u_{t+1}, \dots, u_6), \quad (2.15.38)$$

где $jk = 12, 13, 23, 14, 24, 34$.

Система шести уравнений (2.15.38) с шестью неизвестными u_1, u_2, \dots, u_6 значительно проще ранее полученной системы (2.15.35) в смысле ее аналитического решения.

При применении метода матриц 4×4 к механизму ВЦЦЦ (см. рис. 2.15.1) примем $i = 2$. Тогда матричное уравнение (2.15.36) с учетом формул (2.15.37) имеет вид:

$$M_{01}G_{11}M_{12}G_{22} = G_{44}^{-1}M_{43}G_{33}^{-1}M_{32}. \quad (2.15.39)$$

На основании формул (2.15.31) составляют матрицы M_{01}, G_{11}, \dots , а затем находят произведения соответствующих матриц, т.е. получают матрицы H_1 и H_2 . Элементы b_{jk} и c_{jk} матриц H_1 и H_2 имеют вид

$b_{jk} = b_{jk}(\varphi_1, \varphi_2, l_2)$; $c_{jk} = c_{jk}(\varphi_3, l_3, \varphi_4, l_4)$, где $j = 1, 2, 3$; $k = 1, 2, 3, 4$. Приравнивая друг другу соответствующие элементы, получают 12 уравнений, шесть из которых являются независимыми:

$$\begin{aligned} c\varphi_1 c\varphi_2 - s\varphi_1 c\vartheta_1 s\varphi_2 &= c\varphi_4 c\varphi_3 - s\varphi_4 c\vartheta_3 s\varphi_3; \\ s\vartheta_1 s\varphi_2 &= s\vartheta_4 s\varphi_4 c\varphi_3 + \\ &+ (s\vartheta_4 c\varphi_4 c\vartheta_3 - c\vartheta_4 s\vartheta_3) s\varphi_3; \\ c\vartheta_1 c\vartheta_2 - s\vartheta_1 c\varphi_2 s\vartheta_2 &= c\vartheta_4 c\vartheta_3 - s\vartheta_4 c\varphi_4 s\vartheta_3; \\ h_2(c\varphi_1 c\varphi_2 - s\varphi_1 c\vartheta_1 s\varphi_2) + l_2 s\varphi_1 s\vartheta_1 + h_1 c\varphi_1 &= \\ &= -l_3 s\varphi_4 s\vartheta_3 - h_3 c\varphi_4 - h_4; \\ h_2(s\varphi_1 c\varphi_2 + c\varphi_1 c\vartheta_1 s\varphi_2) - l_2 c\varphi_1 s\vartheta_1 + h_1 s\varphi_1 &= \\ &= -l_3(c\vartheta_4 c\varphi_4 s\vartheta_3 + s\vartheta_4 c\vartheta_3) + \\ &+ h_3 c\vartheta_4 s\varphi_4 - l_4 s\vartheta_4; \\ h_2 s\vartheta_1 s\varphi_2 + l_2 c\vartheta_1 + l_1 &= l_3(s\vartheta_4 c\varphi_4 s\vartheta_3 - \\ &- c\vartheta_4 c\vartheta_3) - h_3 s\vartheta_4 s\varphi_4 - l_4 c\vartheta_4. \end{aligned} \quad (2.15.40)$$

Неизвестные углы φ_2, φ_3 и φ_4 могут быть найдены из трех первых уравнений системы (2.15.40), а неизвестные линейные параметры l_2, l_3 и l_4 - из трех последних уравнений этой системы. При анализе механизма ВЦЦЦ векторным методом для всех шести неизвестных получены формулы (2.15.16), (2.15.7), (2.15.8), (2.15.18), позволяющие их вычислить непосредственно.

2.16. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТЕЙ ЗВЕНЬЕВ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ

Для решения задачи о скоростях звеньев пространственных механизмов применим векторный метод, использованный ранее при решении задачи о положениях.

Сохраняя все обозначения, введенные в п. 2.14 и 2.15, дополнительно введем следующие обозначения: $\dot{\alpha}_{2i}$ и \dot{a}_{2i-1} - производные по времени от параметров α_{2i} и a_{2i-1} ($i = 1, \dots, n$); $\bar{\omega}_{i,i-1}$ - относительная угловая скорость звена i по отношению к звену $i - 1$ ($i = 1, \dots, n$); $\bar{\omega}_i$ - абсолютная угловая скорость звена i ; \bar{v}_{A_i} и v_{O_i} - скорости точек A_i и O_i звена i ; v_{B_i} - скорость произвольной точки B_i звена i ($i = 1, \dots, n - 1$).

Среди параметров α_{2i} и a_{2i-1} имеются постоянные и переменные. Если α_{2i} (или a_{2i-1}) - постоянный параметр, то $\dot{\alpha}_{2i} = 0$

(или $\dot{a}_{2i-1} = 0$). Если α_{2i} (или a_{2i-1}) - переменный параметр, то $\dot{\alpha}_{2i} \neq 0$ (или $\dot{a}_{2i-1} \neq 0$). Один из переменных параметров (α_1 или α_2) есть обобщенная координата q механизма. Производная по времени от этого параметра, т.е. \dot{a}_1 или $\dot{\alpha}_2$, обозначается через \dot{q} . Производные по времени от других переменных параметров (кроме производной \dot{q}) имеют определенный кинематический смысл, а именно: $\dot{\alpha}_{2i}$ - относительная угловая скорость звена i по отношению к звену $i - 1$ (алгебраическое значение); \dot{a}_{2i-1} - относительная скорость точки A_i звена i по отношению к звену $i - 1$ (алгебраическое значение).

Все производные $\dot{\alpha}_{2i}$ и \dot{a}_{2i-1} , за исключением \dot{q} , от переменных параметров механизма объединяются в общий список $\{v\}$ - множество относительных скоростей звеньев. Множество $\{v\}$ включает N компонентов, причем $N = 6, 3$ и 1 для механизмов соответственно первого, второго и третьего семейств. Среди N компонентов множества $\{v\}$ имеется N_y относительных угловых скоростей $\dot{\alpha}_{2i}$ и N_l относительных линейных скоростей \dot{a}_{2i-1} . Причем если $N = 6$, то $N_y \geq 3$.

Пусть при данном значении q решена задача о положениях звеньев механизма в какой-либо его сборке, т.е. определены значения переменных параметров α_{2i} и a_{2i-1} механизма. При данном значении q надо найти относительные скорости звеньев, образующие введенное выше множество $\{v\}$. Задача решается отдельно для пространственных механизмов первого, второго и третьего семейств. После этого находятся угловые скорости $\omega_{i,i-1}$ и ω_i звеньев, а также скорости v_{A_i}, v_{O_i} и v_{B_i} отдельных их точек.

Механизмы первого семейства. Шесть неизвестных относительных скоростей $\dot{\alpha}_{2i}$ и \dot{a}_{2i-1} , входящих в множество $\{v\}$, определяются из следующей системы двух векторных уравнений:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \dot{\alpha}_{2i} e_{2i-1} &= 0; \\ \sum_{i=1}^n \dot{a}_{2i-1} e_{2i-1} + \sum_{i=1}^{n-1} \dot{\alpha}_{2i} \left(e_{2i-1} \times \sum_{k=2i}^{2n-2} a_k e_k \right) &= 0. \end{aligned} \quad (2.16.1)$$

Все неизвестные входят в уравнения (2.16.1) линейно, так что они могут быть легко получены для всех 239 схем механизмов первого семейства.

Для механизма ВЩЩ (см. рис. 2.14.1, а) уравнения (2.16.1) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_2 e_1 + \dot{\alpha}_4 e_3 + \dot{\alpha}_6 e_5 + \dot{\alpha}_8 e_7 &= 0; \\ \dot{a}_3 e_3 + \dot{a}_5 e_5 + \dot{a}_7 e_7 + V_1 &= 0, \end{aligned} \quad (2.16.2)$$

где

$$\begin{aligned} V_1 = \dot{\alpha}_2 \left(e_1 \times \sum_{k=2}^6 a_k e_k \right) + \dot{\alpha}_4 \left(e_3 \times \sum_{k=4}^6 a_k e_k \right) + \\ + \dot{\alpha}_6 a_6 (e_5 \times e_6). \end{aligned} \quad (2.16.3)$$

Неизвестными являются $\dot{\alpha}_4, \dot{\alpha}_6, \dot{\alpha}_8, \dot{a}_3, \dot{a}_5, \dot{a}_7$. Первые три неизвестных определяются из первого уравнения системы (2.16.2), а три других неизвестных - из второго уравнения этой системы. После обозначения левых частей первого и второго уравнений системы (2.16.2) соответственно через U и V и умножения левых и правых частей первого и второго уравнений скалярно на $e_6, e_3 \times e_7$ и e_4 , получены шесть уравнений

$$\begin{aligned} Ue_6 = 0; U(e_3 \times e_7) = 0; Ue_4 = 0; \\ Ve_6 = 0; V(e_3 \times e_7) = 0; Ve_4 = 0, \end{aligned} \quad (2.16.4)$$

каждое из которых содержит по одному неизвестному: соответственно $\dot{\alpha}_4, \dot{\alpha}_6, \dot{\alpha}_8, \dot{a}_3, \dot{a}_5, \dot{a}_7$.

Из уравнений (2.16.4)

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_4 = -\dot{\alpha}_4 \frac{s_1 s_8}{s_5 s_6}; \quad \dot{\alpha}_6 = \dot{\alpha}_2 \frac{s_1 s_2 s_3}{s_5 s_6 s_7}; \\ \dot{\alpha}_8 = -\dot{\alpha}_2 \frac{s_3 s_4}{s_6 s_7}; \end{aligned} \quad (2.16.5)$$

$$\begin{aligned} \dot{a}_3 = -(V_1 e_6) / (s_5 s_6); \\ \dot{a}_5 = V_1 (e_3 \times e_7) / (s_5 s_6 s_7); \quad (2.16.6) \\ \dot{a}_7 = -(V_1 e_4) / (s_6 s_7). \end{aligned}$$

Механизмы второго семейства. Три неизвестных относительных скорости, входящих в множество $\{v\}$, определяются из векторного уравнения

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \dot{a}_{2i-1} e_{2i-1} + \sum_{i=1}^{m-1} \dot{\alpha}_{2i} \left(e_{2i-1} \times \sum_{k=2i}^{2m-2} a_k e_k \right) - \\ - \sum_{i=m+1}^n \dot{\alpha}_{2i} \left(e_{2i-1} \times \sum_{k=2m}^{2i-2} a_k e_k \right) = 0, \end{aligned} \quad (2.16.7)$$

в которое неизвестные входят линейно. Поэтому они могут быть легко найдены для всех 112 схем механизмов второго семейства.

Для механизма ВВСВВ (см. рис. 2.14.1, б) уравнение (2.16.7) принимает вид:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_2 \left(e_1 \times \sum_{k=2}^4 a_k e_k \right) + \dot{\alpha}_4 a_4 (e_3 \times e_4) - \\ - \dot{\alpha}_8 a_6 (e_7 \times e_6) - \dot{\alpha}_{10} \left(e_9 \times \sum_{k=6}^8 a_k e_k \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.16.8)$$

Неизвестными являются $\dot{\alpha}_4, \dot{\alpha}_8$ и $\dot{\alpha}_{10}$. Уравнение (2.16.8) можно упростить:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_2 [e_2 (a_3 s_3 - a_4 c_3 s_4) + E_2 (a_2 + a_4 c_4)] + \\ + \dot{\alpha}_4 a_4 E_4 + \dot{\alpha}_8 a_6 E_7 + \\ + \dot{\alpha}_{10} [e_8 (a_7 s_9 - a_6 s_8 c_9) + E_9 (a_8 + a_6 c_8)] = 0. \end{aligned} \quad (2.16.9)$$

Механизмы третьего семейства. Дифференцирование уравнения (2.15.27) по времени дает уравнение с одним неизвестным:

$$R_1 \dot{R}_1 = 0. \quad (2.16.10)$$

В зависимости от структурной схемы механизма этим неизвестным является одна из следующих величин $\dot{a}_1, \dot{a}_3, \dot{a}_7, \dot{\alpha}_2, \dot{\alpha}_4, \dot{\alpha}_8$. В зависимости от значений m и n все 10 схем механизмов третьего семейства можно разделить на три группы.

n	3	4	4
m	2	2	3
Число схем	2	4	4

В случае $n = 3, m = 2$ уравнение (2.16.10) имеет следующий вид:

$$a_1 \dot{a}_1 - a_2 a_6 s_2 \dot{\alpha}_6 = 0. \quad (2.16.11)$$

При $n = 4, m = 2$ уравнение (2.16.10) приводится к виду:

$$\begin{aligned}
 & (a_1 + a_6 s_1 s_8 + a_7 c_1) \dot{a}_1 + \\
 & + (a_1 c_1 + a_2 s_1 s_2 + a_7) \dot{a}_7 + \\
 & + a_2 [-a_6 (s_2 c_8 + c_1 c_2 s_8) + a_7 s_1 c_2 - a_8 s_2] \ddot{\alpha}_2 + \\
 & + a_6 [a_1 s_1 c_8 - a_2 (c_2 s_8 + c_1 s_2 c_8) - a_8 s_8] \ddot{\alpha}_8 = 0.
 \end{aligned} \tag{2.16.12}$$

При $n = 4, m = 3$ уравнение (2.16.10) принимает вид:

$$\begin{aligned}
 & (a_1 + a_3 c_3 + a_4 s_3 s_4) \dot{a}_1 + \\
 & + (a_1 c_3 + a_3 + a_8 s_2 s_3) \dot{a}_3 + \\
 & + a_8 [-a_2 s_2 + a_3 c_2 s_3 - a_4 (s_2 c_4 + c_2 c_3 s_4)] \ddot{\alpha}_2 + \\
 & + a_4 [a_1 s_3 c_4 - a_2 s_4 - a_8 (c_2 s_4 + s_2 c_3 c_4)] \ddot{\alpha}_4 = 0.
 \end{aligned} \tag{2.16.13}$$

Для механизма ВССВ (см. рис. 2.14.1, θ) $n = 4, m = 2, \dot{a}_1 = \dot{a}_7 = 0$. Из уравнения (2.16.12)

$$\begin{aligned}
 \ddot{\alpha}_8 = \ddot{\alpha}_2 \frac{a_2 a_6 (s_2 c_8 + c_1 c_2 s_8) -}{a_6 a_1 s_1 c_8 - a_2 (c_2 s_8 +} \\
 \leftarrow \frac{a_7 s_1 c_2 + a_8 s_2}{+ c_1 s_2 c_8) - a_8 s_8}.
 \end{aligned} \tag{2.16.14}$$

Угловые скорости звеньев и скорости отдельных точек звеньев. Векторы $\omega_i, \dot{\omega}_i, v_{A_i}, v_{O_i}, v_{B_i}$, введенные выше, определяются по формулам:

$$\omega_{i,i-1} = \dot{\alpha}_{2i} e_{2i-1} \quad (i = 1, 2, \dots, N_1); \tag{2.16.15}$$

$$\omega_{i-1,i} = -\dot{\alpha}_{2i} e_{2i-1} \quad (i = n, n-1, \dots, N_2); \tag{2.16.16}$$

$$\omega_i = \sum_{k=1}^i \dot{\alpha}_{2k} e_{2k-1} \quad (i = 1, 2, \dots, N_3); \tag{2.16.17}$$

$$\omega_i = - \sum_{k=i+1}^n \dot{\alpha}_{2k} e_{2k-1} \quad (i = n-1, n-2, \dots, N_4); \tag{2.16.18}$$

$$v_{A_i} = \sum_{k=1}^i \dot{a}_{2k-1} e_{2k-1} +$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{k=1}^{i-1} \omega_k \times (a_{2k} e_{2k} + a_{2k+1} e_{2k+1}) \\
 & \quad (i = 1, 2, \dots, N_3);
 \end{aligned} \tag{2.16.19}$$

$$\begin{aligned}
 v_{A_i} = - \sum_{k=i+1}^n \dot{a}_{2k-1} e_{2k-1} - a_{2i} (\omega_i \times e_{2i}) - \\
 + \sum_{k=i+1}^{n-1} \omega_k \times (a_{2k} e_{2k} + a_{2k-1} e_{2k-1}) \\
 \quad (i = n-1, n-2, \dots, N_4);
 \end{aligned} \tag{2.16.20}$$

$$\begin{aligned}
 v_{O_i} = \sum_{k=1}^i \dot{a}_{2k-1} e_{2k-1} + \\
 + \sum_{k=1}^{i-1} \omega_k \times (a_{2k} e_{2k} + a_{2k+1} e_{2k+1}) + a_{2i} (\omega_i \times e_{2i}) \\
 \quad (i = 1, 2, \dots, N_3);
 \end{aligned} \tag{2.16.21}$$

$$\begin{aligned}
 v_{O_i} = \sum_{k=1}^i \dot{a}_{2k-1} e_{2k-1} + \\
 - \sum_{k=i+1}^{n-1} \omega_k \times (a_{2k} e_{2k} + a_{2k-1} e_{2k-1}) \\
 \quad (i = n-1, n-2, \dots, N_4);
 \end{aligned} \tag{2.16.22}$$

$$v_{B_i} = v_{A_i} + \omega_i \times \rho_{B_i} \quad (i = 1, 2, \dots, N_3). \tag{2.16.23}$$

Здесь

$$\rho_{B_i} = x_i e_{2i} + y_i E_{2i} + z_i e_{2i-1}; \tag{2.16.24}$$

$$v_{B_i} = v_{O_i} + \omega_i \times \rho_{B_i} \quad (i = n-1, n-2, \dots, N_4), \tag{2.16.25}$$

где

$$\rho_{B_i} = x_i e_{2i} + y_i E_{2i} + z_i e_{2i-1}. \tag{2.16.24}$$

В формулах (2.16.24) и (2.16.26) приняты обозначения: x_i, y_i, z_i и X_i, Y_i, Z_i - координаты точки B_i звена i в системах координат $A_i x_i y_i z_i$ и $O_i X_i Y_i Z_i$, неизменно связанных со звеном i . Номера N_1, N_2, N_3, N_4 , встречающиеся в формулах (2.16.15) - (2.16.23) и (2.16.25), зависят от того, к какому семейству

относится исследуемый механизм. Значения N_1, N_2, N_3, N_4 для механизмов первого, второго и третьего семейств приведены в табл. 2.16.1.

2.16.1. Значения номеров

Семейство механизмов	N_1	N_2	N_3	N_4
Первое	n	1	$n - 1$	1
Второе	$m - 1$	$m + 1$	$m - 1$	m
Третье	$m - 1$	$m + 2$	$m - 1$	$m + 1$

Для каждого из определяемых векторов приведено по две формулы, например для вектора ω_i - формулы (2.16.17) и (2.16.18). Выбор конкретной формулы из каждой пары формул существенен для механизмов второго и третьего семейств и зависит от номера i звена, к которому относится искомый вектор: если звено i входит в состав первой ветви одноконтурного механизма, включающей звенья 1, 2, ..., $m - 1$, то нужно использовать формулы (2.16.15), (2.16.17), (2.16.19), (2.16.21) и (2.16.23); если звено i принадлежит второй ветви механизма, включающей звенья $n - 1, n - 2, \dots, N_4$, то нужно использовать формулы (2.16.16), (2.16.18), (2.16.20), (2.16.22) и (2.16.25). Для механизмов первого семейства можно выбрать любую из двух приведенных формул независимо от номера i звена. Однако целесообразней использовать ту формулу, которая требует меньшего объема вычислений при данном i (например, для расчета $\bar{\omega}_{n-1}$ лучше использовать формулу (2.16.18), а не (2.16.17)).

Угловые ускорения звеньев рассматриваемых механизмов, а также ускорения отдельных точек этих звеньев могут быть найдены путем дифференцирования по времени соответствующих формул для угловых и линейных скоростей, приведенных выше.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Артоболовский И.И. Теория механизмов и машин. М.: Наука, 1988. 640 с.
2. Диментберг Ф.М. Теория пространственных шарнирных механизмов. М.: Наука, 1982. 336 с.
3. Левитский Н.И. Теория механизмов и машин. М.: Наука, 1979. 576 с.
4. Морозкин Ю.Ф. Определение конфигураций механизмов // Докл. АН СССР. 1952. Т.82. N 4 С. 533-536.

5. Пейсах Э.Е. Векторная рекуррентная формула и ее применение в пространственной кинематике // Теория механизмов и машин. Харьков, 1985. Вып. 39. С. 133 - 140.

6. Пейсах Э.Е. Критерии передачи движения для рычажных механизмов // Машиноведение, 1986. N 1, С. 45-51.

7. Пейсах Э.Е. Определение положений звеньев четырехзвенных групп Ассура с вращательными парами // Машиноведение. 1985. N 5. С. 55-61.

8. Пейсах Э.Е., Нестеров В.А. Система проектирования плоских рычажных механизмов / Под ред. К.В. Фролова. М.: Машиностроение, 1988. 232 с.

9. Теория механизмов и машин / К.В. Фролов, С.А. Попов, А.К. Мусатов и др.; Под ред. К.В. Фролова. М.: Высш. шк., 1987. 496 с.

10. Bottema O., Roth V. Theoretical Kinematics. Amsterdam // North-Holland publ. comp., 1979. 558 p.

11. Erdman A.G., Sandor G.N. Mechanism Design: Analysis and Synthesis. New Jersey // Prentice-Hall, 1984. Vol. 1. P. 20-25.

12. Denavit J.J., Hartenberg R.S. A Kinematic Notation for Lower Pair Mechanisms Based on Matrices // Trans. of the ASME. Ser. E. 1955. Vol. 22. N 2. P. 215-221.

Глава 3

ОСНОВЫ КИНЕМАТИЧЕСКОГО СИНТЕЗА РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ

3.1. ПОСТАНОВКА И КЛАССИФИКАЦИЯ ЗАДАЧ КИНЕМАТИЧЕСКОГО СИНТЕЗА МЕХАНИЗМОВ

Обобщенная схема синтеза механизмов. Синтезом механизма называется проектирование схемы механизма по заданным его свойствам. Различают два основных этапа синтеза механизмов: структурный синтез - проектирование структурной схемы механизма по заданным его структурным характеристикам и другим неформальным признакам, связанным с функционированием механизма; параметрический синтез - определение постоянных параметров выбранной схемы механизма по заданным его свойствам. Если эти свойства относятся лишь к кинематике механизма, то возникает задача кинематического синтеза механизма, под которым понимается проектирование кинематической схемы механизма по заданным его кинематическим свойствам. Если наряду с кинематическими свойствами требуется учесть и динамические свойства механизма, то рассматривается более общая задача динамического синтеза, состоящая в проектировании кинематической схем механизма с определением параметров, характеризующих распределение масс звеньев.

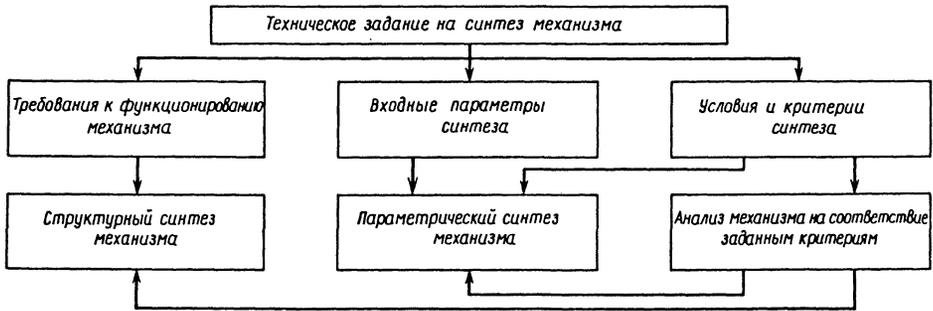


Рис. 3.1.1. Обобщенная схема синтеза механизма

Процесс синтеза механизма можно представить в виде обобщенной схемы, изображенной на рис. 3.1.1. Техническое задание на синтез механизма содержит исходные данные, достаточные для его синтеза. Требования к функционированию механизма содержат все необходимые данные для его структурного синтеза: число степеней свободы механизма, число звеньев, число и номенклатура желательных кинематических пар и др., а также неформальные признаки, характеризующие выполняемые механизмом преобразования движения (виды движения на входе и выходе механизма, число выходов и др.).

Независимые между собой постоянные величины, определяющие схему механизма, называются параметрами его синтеза. Различают параметры синтеза входные, известные из задания на синтез механизма, и выходные, определяемые в процессе его синтеза.

Свойства механизма, формируемые в результате его синтеза, описываются условиями синтеза, обеспечение которых является целью синтеза механизма. Для формализации процесса синтеза эти условия выражаются посредством системы ограничений в виде неравенств и равенств, связывающих критериальные функции, которые описывают зависимости выходных показателей (показателей качества) механизма от его искомым параметров при фиксированных входных параметрах, и заданные значения этих показателей. При корректной постановке задач синтеза одна из критериальных функций является целевой, минимизируемой (максимизируемой) в процессе синтеза, а остальные относятся к ограничениям. В этом случае синтез механизмов принято называть оптимизационным.

Однако инженерной практике свойственна и другая формулировка задачи синтеза, когда трудно или невозможно отдать пред-

почтение какому-либо выходному показателю (критерию) и требуется найти решение (область решений), удовлетворяющее системе всех критериальных неравенств. Метод решения подобных задач, основанный на построении общей зоны областей существования решений по отдельным критериям, в синтезе механизмов известен как метод блокирующих зон [5].

Процесс синтеза любого механизма может быть представлен в такой последовательности операций (см. рис. 3.1.1):

- 1) в соответствии с заданными требованиями к функционированию механизма генерируется множество структурных схем (вариантов) механизма, имеющих необходимые структурные характеристики;
- 2) для выбранной исходной структуры механизма выполняется параметрический синтез по заданным критериям и определяются неизвестные параметры кинематической схемы;

- 3) для синтезированных вариантов кинематической схемы блок анализа осуществляет проверку соответствия значений выходных показателей механизма заданным критериям. Если внутри выбранной структуры не найдено приемлемых решений, то производится переход к новым структурным вариантам с постепенным усложнением структуры. Если ни одна из имеющихся альтернативных структур не обеспечивает заданные значения критериальных функций, то следует изменить числовые значения ограничений.

Таким образом, процесс проектирования может быть рассмотрен в виде совокупности двух итерационных циклов: формирования и редактирования структуры и параметрического синтеза механизмов выбранной структуры.

Классификация задач кинематического синтеза механизмов. Условия преобразований

движений, для выполнения которых проектируются механизмы, весьма разнообразны, что определяется чрезвычайно широким спектром рабочих функций механизмов. Тем не менее в большинстве случаев их можно отнести к одной из следующих трех типовых задач кинематического синтеза механизмов:

1) воспроизведение заданного движения твердотельного объекта (объектов) по отношению к неподвижной системе отсчета;

2) воспроизведение движения отдельных элементов объекта (точки, прямой и др.) по отношению к неподвижной системе отсчета;

3) согласование угловых или линейных перемещений двух или более звеньев в соответствии с заданными функциональными зависимостями.

Программа движения, реализуемая посредством проектируемых механизмов, может быть задана либо непрерывно - в виде функций, описывающих требуемые изменения всех обобщенных координат объекта, либо дискретно - в виде заданной последовательности конечно-удаленных положений объекта, аппроксимирующих требуемое движение. Соответственно различают непрерывные и дискретные задачи кинематического синтеза механизмов. В ряде случаев для сведения непрерывной задачи к дискретной заданное непрерывное движение дискретизируется.

В общем случае точное воспроизведение заданных движений объекта каким-либо механизмом без высших пар возможно лишь при равенстве числа его степеней свободы числу обобщенных координат объекта. Соответственно точные генераторы заданных движений с низшими кинематическими парами должны иметь несколько степеней свободы, что требует введения специальной системы управления, обеспечивающей требуемые связи между обобщенными координатами перемещаемого объекта. Однако стремление к реализации заданных движений простейшими средствами, в частности рычажными механизмами с минимальным числом звеньев и управляемых степеней свободы, приводит к аппроксимационной постановке задач кинематического синтеза механизмов, суть которой состоит в построении механизмов, приблизительно реализующих заданную программу движения. Эти задачи в свою очередь представляются в виде классической задачи приближения функций: среди множества функций перемещения механизмов рассматриваемой структуры определить такую, которая наиболее близка к функции, описывающей заданное движение. "Наиболее близка" - естественно, понятие относительно, зависящее от метрики, в которой определено расстояние (отклонение) приближающей функции от заданной.

Задачи приближенного воспроизведения заданного закона движения (положение) объекта рычажными механизмами составляют предмет исследования теории приближенного (аппроксимационного) синтеза механизмов [1, 8].

Решение аппроксимационных задач кинематического синтеза механизмов выполняется в такой последовательности:

1) выбор структуры механизма - приближенного генератора заданного движения;

2) составление функции отклонения - функции, характеризующей отклонение зависимости, воспроизводимой синтезируемым механизмом, от заданной зависимости, - и выбор метода (нормы) приближения;

3) вычисление параметров функции отклонения, размеров механизма и анализ точности достигнутого приближения.

В аппроксимационном синтезе механизмов наибольшее распространение получили методы равномерного (чебышевского) и квадратического приближения, исходящие соответственно из минимаксной (чебышевской) и средней квадратической норм функции отклонения. Именно эти нормы принимают за критерии аппроксимационного синтеза. Вместе с тем в практике проектирования новых устройств нередко возникают такие случаи, когда число независимых уравнений синтеза равно числу расчетных положений механизма, в связи с чем приближение переходит в интерполирование. В таких случаях принято рассматривать интерполяционный синтез механизмов, объединяющий задачи о точном воспроизведении ограниченного числа заданных положений (перемещений) объекта.

Ниже рассмотрены методы решения всех трех типовых задач кинематического синтеза механизмов по единственному критерию точности воспроизведения заданного движения. Основы оптимизационного синтеза плоских рычажных механизмов при наложенных ограничениях в виде системы равенств и неравенств широко известны [5].

3.2. СИНТЕЗ МЕХАНИЗМОВ ДЛЯ ВОСПРОИЗВЕДЕНИЯ ЗАДАННОГО ДВИЖЕНИЯ

Точное воспроизведение плоских перемещений твердого тела. Пусть заданы конечно-удаленные положения e_i ($i = 1, 2, \dots, N$) плоскости (плоской фигуры) e на неподвижной плоскости E и требуется синтезировать одноподвижный механизм, перемещающий e через эти положения.

Механизмы для реализации заданных перемещений объекта строятся по следующему принципу. Сначала на плоскости e разыскиваются точки, которые в рассматриваемых N положениях лежат на окружности, прямой, т.е.

на любой легко механизированной плоской кривой, или же на линии, огибающие указанные кривые. Затем формируются связи в виде присоединяемых к e кинематических цепей, которые вынуждают найденные точки двигаться по соответствующим им кривым, а в случае линий - огибать их. Чтобы получить неподвижный механизм, воспроизводящий заданные перемещения e , из образованных связей достаточно сохранить любые два, таким образом лишая e двух степеней свободы. Рассматривая различные сочетания указанных связей, взятых по две, придем к множеству вариантов механизмов, точно воспроизводящих заданные N положений плоскости e .

Для синтеза механизмов особый интерес представляют точки плоскости e с несколькими положениями на окружности или прямой, поскольку соответствующие связи реализуются посредством бинарных (двухпарных) звеньев ВВ и ПВ, а механизмы, образуемые на базе этих точек, - четырехзвенные.

Из принципа построения механизмов для точного воспроизведения заданных положений (перемещений) плоскости e следует, что синтез любого из этих механизмов разбивается на локальные процедуры синтеза его составных подцепей, реализующих необходимые связи на движение e . В качестве примера рассмотрим синтез шарнирного четырехзвенника по положениям шатунной плоскости, сводящийся к синтезу двух бинарных звеньев типа ВВ.

Синтезируемое звено (рис. 3.2.1) определяется пятью постоянными параметрами, в число которых входят координаты x_B, y_B , центра шарнира B в системе $O_i x y$, жестко связанной с e , координаты X_A, Y_A шарнира

A в системе OXY , неразрывно связанной с плоскостью E , и длина R звена AB . Соответственно максимальное число задаваемых положений e также равна пяти.

Звено AB ограничивает движение точки B плоскости e по окружности радиусом R с центром в точке A . Соответствующее условие связи можно представить в виде

$$\begin{aligned} (\bar{R}_{B_i} - \bar{R}_A)^2 - \bar{R}^2 &= 0 \\ (i &= 1, 2, \dots, N). \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

Искомые параметры синтезируемого звена должны удовлетворять следующему уравнению, вытекающему из (3.2.1):

$$\begin{aligned} X_i X_A + Y_i Y_A + H &= 0,5(X_i^2 + Y_i^2), \\ (i &= 1, 2, \dots, N). \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

где X_i, Y_i - координаты точки B_i в системе OXY .

При заданных значениях параметров положения плоскости e

$$\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{0_i} \\ Y_{0_i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \end{bmatrix}, \tag{3.2.3}$$

где $X_{0_i}, Y_{0_i}, \theta_i$ - линейные функции от искомым подвижных координат x_B и y_B ,

Величина, не зависящая от положения e ,

$$H = 0,5(R^2 - X_A^2 - Y_A^2). \tag{3.2.4}$$

Пусть $N = 3$. Тогда при $X_i^2 + Y_i^2 = R_i^2$ из (3.2.2) получается система трех линейных уравнений относительно искомым величин X_A, Y_A, H :

$$\begin{aligned} X_i X_A + Y_i Y_A + H &= 0,5 R_i^2 \\ (i &= 1, 2, 3). \end{aligned} \tag{3.2.5}$$

Система (3.2.5) имеет единственное решение, если ее определитель D_{123} отличен от нуля. Случай $D_{123} = 0$ рассмотрен ниже.

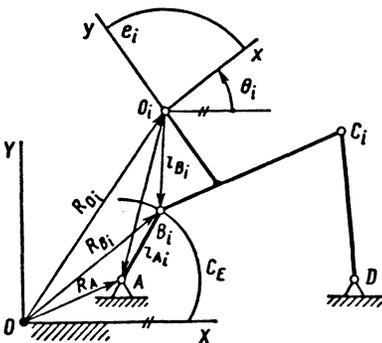


Рис. 3.2.1. Схема расчета синтезируемого звена шарнирного четырехзвенника

Синтез звена ВВ при $N = 3$ осуществляется в следующем порядке: 1) произвольно выбираются координаты x_B, y_B точки В на e ; 2) по формуле (3.2.3) вычисляются значения X_I, Y_I ; 3) решением системы (3.2.5) определяются X_A, Y_A ; 4) из (3.2.4) определяется R .

Пусть теперь задано $N = 4$ положений плоскости e . К системе (3.2.5) прибавляется еще одно линейное уравнение с индексом $i = 4$, в результате чего возникает система четырех линейных уравнений относительно трех неизвестных X_A, Y_A, H . Эти уравнения могут иметь общее решение, если определитель расширенной матрицы рассматриваемой системы равен нулю:

$$D_{1234} = \begin{vmatrix} X_I & Y_I & 1 & R_i^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} = 0. \quad (3.2.6)$$

$(i = 1, 2, 3, 4)$

Здесь использовано сокращенное обозначение определителя четвертого порядка, в котором строки отличаются лишь индексом положения. Так же в дальнейшем обозначены определители аналогичной формы.

Подстановкой в (3.2.6) соотношения (3.2.3) после преобразования получено уравнение третьей степени относительно x_B, y_B , определяющее на плоскости e геометрическое место таких точек, четыре положения которых лежат на одной окружности. Оно представляет собой циркулярную кривую третьего порядка, известную как кривая круговых точек, или кривая Бурместера [1]. Однако на практике уравнение (3.2.6) в процессе синтеза целесообразно использовать непосредственно в детерминантной форме.

Решение задачи синтеза в рассматриваемом случае ($N = 4$) сводится к следующему: задается одна из координат x_B и y_B и уравнение (3.2.6), преобразованное подстановкой соотношений (3.2.4), решается относительно другой координаты, чем и устанавливается положение точки В на плоскости e . Далее выполняются те же расчетные операции, что и в случае $N = 3$.

При $N = 5$ имеем пять линейных уравнений типа (3.2.5) с теми же неизвестными X_A, Y_A, H . Для совместности этой системы необходимо, чтобы ранг ее расширенной матрицы 4×5 был равен трем, а это возможно лишь в том случае, если равны нулю ее любые два минора четвертого порядка. Данное условие приводит к двум уравнениям

$$D_{1234} = 0; \quad D_{1235} = 0. \quad (3.2.7)$$

Первое уравнение имеет выражение (3.2.6), а выражение второго уравнения отличается от (3.2.6) индексом последней строки. Уравнения (3.2.7) определяют на плоскости e две бициркулярные кривые четвертого порядка, которые могут иметь четыре, две или ни одной вещественной общей точки. Эти точки, имеющие по пять положений на одной окружности, называются точками Бурместера [1].

Для синтеза шарнирного четырехзвенника нужны по меньшей мере две точки Бурместера, координаты которых определяются численным решением системы уравнений (3.2.7). Алгоритм синтеза бинарных звеньев при известных координатах центров их подвижных шарниров тот же, что и в случае $N = 4$. Таким образом, шарнирный четырехзвенник может воспроизвести пять заданных положений плоскости e лишь в том случае, если система (3.2.7) имеет вещественные решения.

Синтез четырехзвенника кривошипно-ползунного (коромыслово-ползунного) механизма по положениям шатунной плоскости e сводится к синтезу двух бинарных звеньев типа ВВ и ВП. Процедура синтеза первого из них была рассмотрена выше. Звено ВП определяется четырьмя параметрами - координатами x_C, y_C центра шарнира С на e - и двумя параметрами, устанавливающими положение направляющей ползуна на плоскости E . Соответственно максимальное число положений плоскости e , точно воспроизводимых механизмом рассматриваемой структуры, $N_{\max} = 4$.

Синтез звена ВП требует определения точки на плоскости e , рассматриваемые положения которой лежат на одной прямой. Если $N = 2$, положением точки С на плоскости e можно задаться, а положение направляющей на плоскости E определится прямой, проходящей через рассматриваемые положения C_1, C_2 выбранной точки С. При $N = 3$ необходимо найти точку на плоскости e с тремя коллинеарными положениями. Геометрическое место таких точек определяется условием равенства нулю определителя системы (3.2.5), поскольку при этом центр окружности, проходящий через положения C_1, C_2 и C_3 , удаляется в бесконечность. Условие $D_{123} = 0$ при подстановке соотношений (3.2.3) определяет на плоскости e окружность, любая точка которой имеет три коллинеарных положения [1]. При $N = 3$ на плоскости e имеется единственная точка с четырьмя коллинеарными

положениями (точка Болла), которая является общей точкой окружностей $D_{123} = 0$, $D_{124} = 0$, $D_{134} = 0$, $D_{234} = 0$. Остальные точки пересечения этих окружностей совпадают с полюсами конечного поворота плоскости e [1]. Графические процедуры решения рассмотренных выше задач описаны в литературных источниках [1, 2, 4, 12].

Точное воспроизведение пространственных перемещений твердого тела. С переходом к пространственному случаю число структурных вариантов механизмов, реализующих заданные перемещения (положения) тела, существенно возрастает, так как при построении пространственных механизмов кроме рассмотренных вращательных и поступательных пар имеются следующие пары: сферические (С), сферические с прорезью (СП), цилиндрические (Ц), плоскостные (Пл), винтовые (Г) и др. Кроме того, при синтезе пространственных перемещающих механизмов, в отличие от плоских, объект e не может быть связан со стойкой E не только бинарными звеньями, но и кинематическими цепями с большим числом звеньев.

Структурные схемы пространственных одноподвижных перемещающих механизмов формируются в соответствии с условием

$$\sum_{s=1}^4 sq_s - 5 = 0, \quad (3.2.8)$$

где q_s - число присоединяемых к объекту e подцепей, налагающих s связей; число s определяется по структурной формуле пространственных кинематических цепей.

Имеется шесть возможных сочетаний чисел q_s , удовлетворяющих соотношению (3.2.8). Соответственно все структурные схемы одноподвижных пространственных механизмов, реализующих заданные положения e , могут быть подразделены на шесть групп. Ограничимся рассмотрением наиболее простых по структуре механизмов, образуемых исключительно на базе бинарных звеньев. В табл. 3.2.1 представлены по три варианта таких механизмов, принадлежащих всем шести группам.

3.2.1. Варианты перемещающих механизмов

Группа	Состав механизма	Структурная схема механизма
I	$q_1 = 5$	
II	$q_1 = 3$, $q_2 = 1$	

Группа	Состав механизма	Структурная схема механизма
III	$q_1 = 2,$ $q_3 = 1$	
IV	$q_1 = 1,$ $q_2 = 2$	
V	$q_1 = 1,$ $q_4 = 1$	
VI	$q_2 = 1,$ $q_3 = 1$	

Как и в случае плоских механизмов, синтез любого из приведенных в табл. 3.2.1 механизмов по положениям объекта e реализуется как совокупность локальных процедур синтеза отдельных бинарных звеньев, входящих в состав проектируемого механизма [3].

В табл. 3.2.2 приведены основные характеристики бинарных звеньев различных типов, относящихся к их синтезу. Для любого бинарного звена $N_{\max} \leq k/s$, причем разность $(k/s) - N_{\max}$ определяет число свободных параметров синтеза. В последнем вертикальном столбце приведены геометрические места особых точек и линий тела e , удовлетворяющих условиям связей, налагаемых рассматриваемыми бинарными звеньями при $N = N_{\max}$ со ссылками на соответствующие источники.

В качестве примера рассмотрена задача синтеза семизвенника I со сферическими парами (см. табл. 3.2.1), формируемого соединением объекта e и стойки E посредством пяти

бинарных звеньев типа СС, по заданным положениям e . Звено СС определяется семью параметрами, в число которых входят: координаты x_B, y_B, z_B центра B подвижного сферического шарнира в системе $Oxuz$, неразрывно связанной с e ; координаты X_A, Y_A, Z_A центра опорного шарнира A в системе $OXYZ$, неразрывно связанной с E ; длина R звена AB . Поскольку звено СС накладывает всего одну связь на движение e , то число задаваемых положений e может достичь $N_{\max} = 7$.

Синтезируемое звено ограничивает движение точки B по сфере радиусом R с центром в точке A . Соответствующее условие связи, как и в случае плоского бинарного звена ВВ, выражается равенством (3.2.1).

Раскрывая (3.2.1), получаем систему уравнений синтеза рассматриваемого звена:

$$X_i X_A + Y_i Y_A + Z_i Z_A + H = 0,5 R_i^2 \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (3.2.9)$$

Координаты X_i, Y_i, Z_i точки B_i в системе $OXYZ$, выражаются через искомые величины x_B, y_B, z_B известными формулами линейного преобразования

$$\begin{aligned} [X_i, Y_i, Z_i]^t &= [X_0, Y_0, Z_0]^t + \\ &+ T_i [x_B, y_B, z_B]^t. \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

где t - транспонирование; T_i - ортогональная матрица вращения 3×3 , составленная из направляющих косинусов подвижных координат осей.

Величины, входящие в (3.2.10), так же как и координаты X_0, Y_0, Z_0 , считаются заданными в рассматриваемых N положениях объекта.

Вместо искомого радиуса R сферы в уравнениях (3.2.9) фигурирует параметрический комплекс H , подлежащий определению:

$$H = 0,5(R^2 - X_A^2 - Y_A^2 - Z_A^2). \quad (3.2.11)$$

При $N = 4$ из (3.2.9) получается система четырех линейных уравнений с четырьмя неизвестными. По заданным величинам x_B, y_B, z_B формулы (3.2.10) получены зна-

3.2.2. Данные для синтеза бинарных звеньев

Бинарное звено	s	k	N_{\max}	Геометрическое место точек и прямых удовлетворяющих условиям связи
СС	1	7	7	До 20 точек [7]
СПл	1	6	6	До 10 точек [7]
СВ	2	9	4	Пространственная кривая шестого порядка [7]
СЦ	1	8	8	При $N = 6$ до 31-й точки [7]
ЦЦ	2	10	5	До шести прямых [6]
ВЦ	3	11	3	Одна прямая при известном направлении оси вращательной пары [6]
ВВ	4	12	3	Две прямые [6]

П р и м е ч а н и е: k - число постоянных параметров, определяющих синтезируемое бинарное звено, т.е. наибольшее число выходных параметров его синтеза; N_{\max} - наибольшее число положений объекта e , которые могут быть воспроизведены посредством данного бинарного звена.

чения X_i, Y_i, Z_i . Решением системы (3.2.9) найдены X_A, Y_A, Z_A, H , а в завершении процедуры синтеза одного из бинарных звеньев из (3.2.11) вычислена длина R звена. Аналогично проектируются остальные четыре звена СС, входящие в состав семизвенника.

Пусть задано $N = 5$ положений e . Тогда уравнения (3.2.9) образуют систему пяти линейных уравнений относительно тех же четырех неизвестных. Для совместности полученной системы необходимо равенство нулю определителя ее расширенной матрицы:

$$D_{12345} = \begin{vmatrix} X_i & Y_i & Z_i & 1 & R_i^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5) \quad (3.2.12)$$

Вводя в (3.2.12) вместо X_i, Y_i, Z_i их выражения из (3.2.10) и преобразуя, приходим к алгебраическому уравнению четвертой степени относительно x_B, y_B, z_B . Это означает, что геометрическое место точек e , пять из которых лежат на одной сфере, суть алгебраическая поверхность четвертого порядка, принадлежащая e . Для синтеза каждого из пяти бинарных звеньев, необходимых для образования семизвенника, достаточно выбрать любые две из координат x_B, y_B, z_B , определить третью из уравнения (3.2.12) и повторить те же расчетные операции, что и при $N = 4$.

При $N = 6$ из (3.2.12) получена система шести линейных уравнений относительно x_B, y_B, z_B , которые могут иметь общее решение, если ранг расширенной матрицы этой системы равен четырем, а для этого необходимо, чтобы были равны нулю два минора пятого порядка в расширенной матрице полученной системы. При условиях $D_{12345} = 0$ и $D_{12346} = 0$, с учетом (3.2.10) и (3.2.12) выведена система двух алгебраических уравнений четвертой степени относительно x_B, y_B, z_B , которая в общем случае имеет бесконечно много решений, образующих внутри e пространственную кривую 12-го порядка - геометрическое место e с шестью положениями на одной сфере [7]. Чтобы построить семизвенник, достаточно найти пять решений полученной системы для произвольно принятых значений одной из координат x_B, y_B, z_B . Последующий синтез бинарных звеньев не составляет труда.

Наконец, при $N = 7$ условия совместности системы семи линейных уравнений (3.2.9) могут быть сведены к трем уравнениям типа (3.2.12), например: $D_{12345} = 0$, $D_{12346} = 0$, $D_{12347} = 0$, которые после подстановки (3.2.10) преобразуются к трем алгебраическим уравнениям четвертого порядка относительно x_B, y_B, z_B . Число вещественных решений полученной системы может достигнуть 20 [7]; задача синтеза может быть решена, если удастся определить пять решений системы, которым соответствуют точки e , каждая из них в рассматриваемых семи положениях тела лежит на одной сфере.

Приближенное воспроизведение заданных положений (заданного закона движения) твердого тела. Если число заданных положений, определяющих программу перемещения тела e , превышает предел N_{\max} , зависящий от чисел искомого параметров и налагаемых связей некоторой кинематической цепи (бинарного звена), то эти положения нельзя реализовать точно посредством данной цепи. Однако в таких случаях на базе этой же цепи можно построить механизмы, которые воспроизводят заданные положения приближенно. При такой постановке задачи в процессе синтеза надо стремиться к тому, чтобы отклонение приближения не выходило за пределы, определяемые заданием на проектирование механизма.

В качестве примера рассмотрена задача синтеза шарнирного четырехзвенника (см. рис. 3.2.1) по условию приближенного воспроизведения N положений шатунной плоскости, которые заданы $3N$ значениями X_{0i}, Y_{0i} ($i = 1, 2, \dots, 5$). Как и в случае $N = 5$, синтез четырехзвенника сводится к синтезу двух бинарных звеньев типа ВВ. Синтез бинарного звена рассматриваемого типа представляется в виде следующей аппроксимационной задачи: определение на плоскости e точки $B(x_B, y_B)$, которая в рассматриваемых N положениях e наименее отклоняется от некоторой окружности C_E радиусом R с центром в точке $A(X_A, Y_A)$.

Искомые параметры x_B, y_B, X_A, Y_A, R должны минимизировать по модулю отклонения положений B_i ($i = 1, 2, \dots, N$) от окружности C_E :

$$\Delta_i = \left| \overline{AB}_i \right| - R = \left[(X_{B_i} - X_A)^2 + (Y_{B_i} - Y_A)^2 \right]^{0,5} - R. \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

Для определения этих параметров обращаются к методу квадратического приближения. Однако условия стационарности суммы Δ_i^2 вследствие наличия радикала в выражении Δ_i приводят к достаточно сложной системе нелинейных уравнений, что значительно усложняет процедуру синтеза. Поэтому целесообразно вместо отклонения по нормали Δ_i в качестве меры отклонения точки B от окружности C_E принять разность $\Delta_{qi} = (AB_i)^2 - R^2$, которая обращается в нуль при $\Delta_i = 0$. Это приводит к следующей системе функций отклонения:

$$\Delta_{qi} = -2(X_i X_A + Y_i Y_A + H - 0,5R_i^2), \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (3.2.13)$$

где X_i, Y_i и H имеют выражения (3.2.10) и (3.2.11).

Функции (3.2.13) могут быть представлены линейно также относительно x_B, y_B и параметрического комплекса $H_0 = 0,5(R^2 - x_B^2 - y_B^2)$:

$$\Delta_{qi} = -2(x_{B_i} y_{A_i} + y_{B_i} x_{A_i} + H_0 - 0,5r_{A_i}^2), \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (3.2.14)$$

где x_{A_i}, y_{A_i} - координаты центра A в подвижной системе $O_i x y$; r_{A_i} - радиус-вектор точки A от начала O_i ; x_{A_i} и y_{A_i} - линейные функции от искомым координат X_A, Y_A :

$$\begin{bmatrix} x_{A_i} \\ y_{A_i} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \cos \theta_i & \sin \theta_i \\ -\sin \theta_i & \cos \theta_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{0_i} \\ Y_{0_i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \theta_i & \sin \theta_i \\ -\sin \theta_i & \cos \theta_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \end{bmatrix}. \quad (3.2.15)$$

Искомые параметры звена BB определяются из необходимых условий минимума суммы

$$S = \sum_{i=1}^N \Delta_{qi}^2, \quad (3.2.16)$$

а именно:

$$\begin{aligned} \partial S / \partial X_A &= 0; \quad \partial S / \partial Y_A = 0; \quad \partial S / \partial R = 0; \\ \partial S / \partial x_B &= 0; \quad \partial S / \partial y_B = 0. \end{aligned} \quad (3.2.17)$$

Первые три условия (3.2.17) с учетом линейного представления (3.2.13) для Δ_{qi} при допущении $R \neq 0$ приводятся к следующей линейной системе (пределы суммирования $i = 1, i = N$ опущены):

$$\begin{bmatrix} \sum X_i^2 & \sum X_i Y_i & \sum X_i \\ \sum X_i Y_i & \sum Y_i^2 & \sum Y_i \\ \sum X_i & \sum Y_i & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \\ H \end{bmatrix} = 0,5 \begin{bmatrix} \sum R_i^2 X_i \\ \sum R_i^2 Y_i \\ \sum R_i^2 \end{bmatrix}. \quad (3.2.18)$$

На базе второго линейного представления (3.2.14) функций Δ_{qi} последние три условия (3.2.17) при допущении $R \neq 0$ также приводятся к линейной системе:

$$\begin{bmatrix} \sum x_i^2 & \sum x_i y_i & \sum x_i \\ \sum x_i y_i & \sum y_i^2 & \sum y_i \\ \sum x_i & \sum y_i & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ H_0 \end{bmatrix} = 0,5 \begin{bmatrix} \sum r_i^2 x_i \\ \sum r_i^2 y_i \\ \sum r_i^2 \end{bmatrix}. \quad (3.2.19)$$

Для кратности вместо $x_{A_i}, y_{A_i}, r_{A_i}$ записаны x_i, y_i, r_i , а пределы суммирования вновь опущены. Выражая параметры X_A, Y_A, H через x_B, y_B , посредством системы (3.2.18) с учетом (3.2.10) первые два уравнения системы (3.2.19) можно привести к двум алгебраическим уравнениям девятой сте-

пени относительно x_B, y_B , которые могут иметь самое большое 25 вещественных общих корней [8]. Им соответствуют минимумы, максимумы и другие стационарные точки суммы (3.2.16).

Решение нелинейной системы связано с трудностями вычислительного характера, к тому же среди найденных корней могут быть и непригодные для синтеза механизмов. Ниже представлен итерационный алгоритм вычисления минимумов суммы S , реализуемый последовательным решением линейных систем (3.2.18) и (3.2.19).

Первый итерационный цикл алгоритма включает следующие операции:

1) выбор произвольной точки $B_0(x_B^{(0)}, y_B^{(0)})$ и определение по формуле (3.2.10) координаты ее положений $B_i^{(0)} (i = 1, 2, \dots, N)$ в системе OXY ;

2) определение из линейной системы (3.2.10) и равенства (3.2.11) параметров $X_A^{(1)}, Y_A^{(1)}, R^{(1)}$, по формуле (3.2.16) - значения $S^{(1)}$ суммы S ;

3) вычисление по формуле (3.2.15) координаты положений $A_i^{(1)} (i = 1, 2, \dots, N)$ точки $A^{(1)}$ в системе OXY ;

4) определение из линейной системы (3.2.19) и равенства $H_0 = 0,5(R^2 - x_B^2 - y_B^2)$ величин $x_B^{(1)}, y_B^{(1)}, R_0^{(1)}$, по формуле (3.2.16) - значения $S_0^{(1)}$ суммы S .

Продолжая этот процесс, получают убывающую последовательность значений целевой функции $S^{(1)}, S_0^{(1)}, S^{(2)}, S_0^{(2)}, \dots$, имеющую предел, равный значению S в точке ее локального минимума.

Рассмотренный алгоритм может привести только к минимумам целевой функции (3.2.16). Среди найденных точек минимума $V^*(x_B^*, y_B^*)$ для синтеза четырехзвенника достаточно определить две круговые квадратические точки, реализующие дугу окружности с допустимой погрешностью [8]. Для оценки приближения заданных положений плоскости e необходимо подсчитать отклонения действительных значений любых двух параметров X_0, Y_0, θ от значений, предписанных условиями синтеза, при варьировании третьего,

принятого за обобщенную координату исследуемого четырехзвенника.

Аналогично можно синтезировать рассмотренный выше семизвенник по условию приближенного воспроизведения заданной последовательности пространственных перемещений тела e . Здесь при синтезе составных бинарных звеньев CC функции отклонения Δq_i , составляемые на базе выражений (3.2.9), вновь представляются линейно относительно двух наборов из искомого семи переменных синтеза: X_A, Y_A, Z_A, H и x_B, y_B, z_B, H_0 , что позволяет для минимизации суммы S использовать описанный выше метод последовательных линейных итераций. Его можно применять также во всех других случаях, когда функции отклонения представляются линейно относительно n наборов неизвестных величин, охватывающих все множество искомого параметров [9]. Этому условию отвечают почти все бинарные звенья, рассмотренные выше.

3.3. СИНТЕЗ НАПРАВЛЯЮЩИХ МЕХАНИЗМОВ

Приближенное воспроизведение плоских кривых. В практике конструирования новых устройств нередко возникают кинематические задачи, условиями которых задается движение (траектория) лишь одной точки объекта, а поворот объекта вокруг этой точки не подчинен каким-либо ограничениям. Механизмы, предназначенные для воспроизведения заданной траектории (положений) точки объекта, называются направляющими. Задача синтеза направляющего механизма формулируется следующим образом: дана плоская кривая η , заданная непрерывно или дискретно (поточечно), и требуется синтезировать одноподвижный механизм с низшими парами, воспроизводящая (чертящая) точка которого описывает траекторию, приближенную к η на заданном ее участке.

Методику синтеза направляющих механизмов вновь представим на простейшем примере шарнирного четырехзвенника (рис. 3.3.1). Шатунная кривая этого механизма представляет собой трициркулярную алгебраическую кривую шестого порядка, определяемую девятью постоянными параметрами [2], в число которых входят координаты опорных шарниров A и D , длина a, b, c подвижных звеньев, параметры k и l , фиксирующие положение воспроизводящей точки M на шатунной плоскости. Это означает, что в общем случае посредством синтеза механизма можно достичь прохождения воспроизводящей точки (шатунной кривой) через девять фиксированных точек на заданной кривой, и аппроксимировать достаточно сложные траекто-

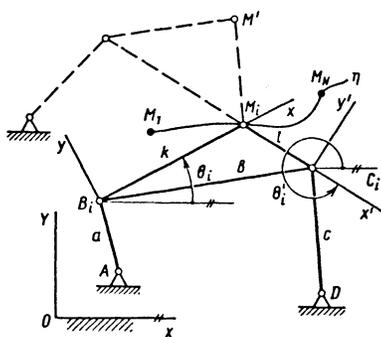


Рис. 3.3.1. Схема расчета синтезируемых направляющих механизмов шарнирного четырехзвенника

рии. В случае воспроизведения прямой или окружности это число уменьшается до шести.

Наиболее естественный подход к решению поставленной задачи - это составление системы уравнений синтеза на базе уравнения шатунной кривой, в которое подставляются координаты заданных положений воспроизводящей точки. Если число заданных положений не превышает девяти, возникает задача интерполирования заданной кривой. В противном случае приходят к задаче ее аппроксимации посредством шатунной кривой. Так как коэффициенты полинома, стоящего в левой части уравнения шатунной кривой, выражаются нелинейно через размеры искомого параметра, практическое использование этого уравнения для синтеза направляющего четырехзвенника неперспективно. С практической точки зрения предпочтительнее альтернативный итерационный способ решения задачи, сводящейся к процедуре синтеза бинарного звена ВВ, описанный выше. Первый цикл итерационного процесса синтеза реализуется в виде такой последовательности операций:

- 1) выбор исходных значений размеров диады ABM , $X_A^{(0)}$, $Y_A^{(0)}$, $a^{(0)}$, $k^{(0)}$;
- 2) совмещение точки M диады с заданными положениями M_i ($i = 1, 2, \dots, N$), вычисление координаты соответствующих положений B_i начала подвижной системы Bx_i , неразрывно связанной с шатуном BM , и значений θ_i угла θ , ориентирующего ось $B_i x_i$;
- 3) синтез звена CD по найденным N положениям плоскости e . При этом определяются круговая квадратическая точка $C^{(1)}$ плос-

кости e , соответствующий центр D в неподвижной плоскости E и длина звена $c^{(1)}$;

4) совмещение точки M диады DCM с заданными положениями M_i , определение координаты положений C_i начала C системы $C_i x' y'$, неразрывно связанной с шатуном CM , и значения θ'_i угла θ' , ориентирующего ось $C_i x'$;

5) синтез звена AB по положениям N плоскости e . При этом определяются круговая квадратическая точка $B^{(1)}$ на плоскости e , соответствующий центр $A^{(1)}$ в E и длина звена $a^{(1)}$;

6) вычисление значения Δ_i отклонения заданных точек M_i от шатунной кривой точки M синтезированного четырехзвенника $ABCD$ и проверка условия $\max_{i \in \{1, N\}} |\Delta_i| < \Delta_{доп}$.

При этом отклонение Δ_i может измеряться как по нормали к шатунной кривой, так и по направлениям Ox и Oy .

Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока не будет достигнута заданная точность приближения. Если же она окажется нереализуемой посредством шарнирного четырехзвенника, можно переходить к более сложным вариантам направляющего механизма, например, с присоединением к синтезированному четырехзвеннику новой диады (штриховые линии). Алгоритм синтеза направляющего шестизвенника с чертящей точкой M' в принципе не отличается от описанного выше. Различие состоит лишь в том, что вместо синтеза звена AB в данном случае в каждом цикле итерационного процесса синтезируется направляющий четырехзвенник $ABCD$ с чертящей точкой M .

Задача приближенного воспроизведения пространственных кривых и линейчатых поверхностей рассматривается в литературных источниках [3, 8].

Теорема Робертса - Чебышева о трехкратном воспроизведении шатунной кривой шарнирного четырехзвенника. Синтезированный направляющий четырехзвенник, воспроизводящий с необходимой точностью заданную траекторию чертящей точки, может не удовлетворить другим условиям синтеза, предусмотренным заданием на синтез механизма (допускаемые углы передачи, существование кривошипа, габаритные отклонения и др.). В подобных случаях можно обратиться к двум

другим четырехзвенникам, функционально эквивалентным рассматриваемому направляющему механизму. Существование таких механизмов, известных как траекторные родственники четырехзвенника [12], доказывается на базе известной теоремы Робертса, которую можно представить в следующей форме: одна и та же шатунная кривая шарнирного четырехзвенника в общем случае может быть воспроизведена тремя различными шарнирными четырехзвенниками.

Рис. 3.3.2, а иллюстрирует теорему Робертса-Чебышева. Вследствие свойств пантографов, образованных звеньями трех четырехзвенников - родственников $O_A A B O_B$, $O_A A' C' O_C$, $O_B B'' C'' O_C$, шарнирно соединенных в точке M , полученная система с избыточными связями обладает конечной подвижностью, и поэтому одноименные точки шатунов всех трех механизмов описывают идентичные шатунные кривые. Наиболее про-

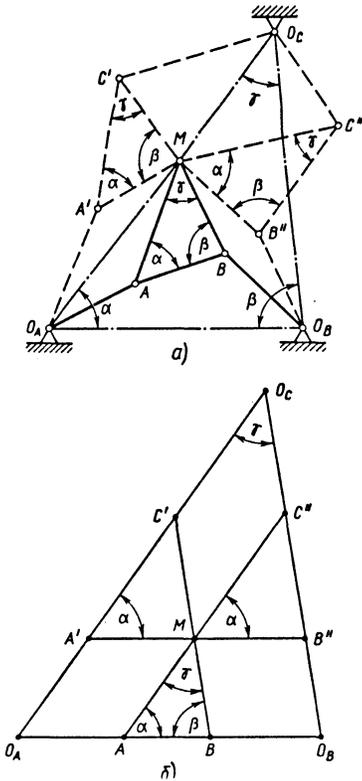


Рис. 3.3.2 Схема расчета, иллюстрирующая теорему Робертса-Чебышева: а - схема; б - план Кейли

сто размеры звеньев двух родственников исходного направляющего механизма $O_A A B O_B$ можно определить при помощи плана Кейли (рис. 3.3.2, б).

Воспроизведение поступательного движения по шатунным кривым шарнирного четырехзвенника. При проектировании манипуляционных систем и других устройств нередко возникает задача реализации параллельного переноса объекта по заданной траектории. Механизмы, выполняющие подобную функцию, называются поступательно-направляющими.

Один из способов построения поступательно-направляющих механизмов основан на свойствах траекторных родственников шарнирного четырехзвенника [2]. Чтобы реализовать вынужденное поступательное движение по шатунным кривым шарнирного четырехзвенника, можно использовать восьмизвенную систему двух одинаковых четырехзвенников, к шатунам которых шарнирно прикреплен выходной шатун. Однако эту же задачу можно решить значительно проще - посредством одного из шести шестизвенных родственников шарнирного четырехзвенника. На рис. 3.3.3, а, б приведены схемы таких двух механизмов, у которых звено AD движется поступательно по траектории, симметричной шатунной кривой точки M исходного четырехзвенника $ABCD$ относительно центра O отрезка, соединяющего рассматриваемую точку M' поступательного движения движущегося звена с точкой M . Размеры этих механизмов выражаются через параметры исходного четырехзвенника по следующим соотношениям:

$$a) \quad \Delta AFB \sim \Delta BMC, \quad FD' = \frac{BM}{BC} CD,$$

$$D'M = \frac{BM}{BC} AD, \quad D'M \# M'D;$$

$$б) \quad \Delta CF'D \sim \Delta BMC, \quad A'F' = \frac{MC}{BC} AB,$$

$$MA' = \frac{MC}{BC} AD, \quad MA' \# AM'.$$

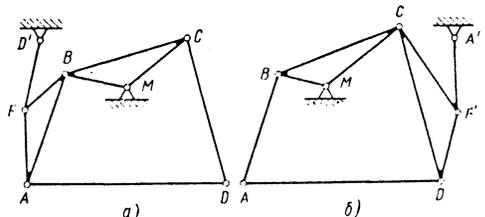


Рис. 3.3.3. Аналог шестизвенного шарнирного четырехзвенника

Остальные четыре схемы строятся на базе других двух родственников четырехзвенника *ABCD*.

3.4. СИНТЕЗ ПЕРЕДАТОЧНЫХ МЕХАНИЗМОВ

Механизмы, предназначенные для воспроизведения заданной зависимости между перемещениями звеньев, образующих кинематические пары со стойкой, называются передаточными.

Согласование угловых перемещений двух звеньев вокруг неподвижных параллельных осей. Плоские фигуры *E* и *e*, представляющие собой плоские сечения двух звеньев, вращаются соответственно вокруг параллельных неподвижных осей *Q* и *q*. С фигурами *E* и *e* неразрывно связаны прямоугольные координатные системы *AXY* и *Dxy* (рис. 3.4.1). Требуется спроектировать одноподвижный механизм, приближенно реализующий заданную зависимость $\psi = f(\varphi)$ между углами поворота ψ и φ фигур (тел) *e* и *E* в интервале $[0, \varphi_m]$.

Чтобы получить механизм с одной степенью подвижности, выполняющий требуемое преобразование движения, следует наложить одно условие связи на относительное движение независимо вращающихся звеньев *E* и *e*. Эту связь наиболее просто можно реализовать посредством бинарного звена, соединяемого с *E* и *e* при помощи вращательных или поступательных пар, в результате чего образуются четырехзвенные передаточные механизмы.

Рассмотрим случай введения бинарного звена типа *ВВ*, приводящий к синтезу передаточного шарнирного четырехзвенника *ABCD*. Обращая движение механизма его постановкой на входное звено *AB*, рассматриваемой задаче можно придать известную формулировку: дано движение плоскости *e* относительно неподвижной плоскости *E*, требуется определить

такую точку *B* на плоскости *e*, траектория которой в данном интервале $[0, \varphi_m]$ приближается к окружности. Если принять за единицу длину стойки *AD*, положение системы *Dxy* относительно системы *AXY* определится по формулам, непосредственно следующим из рис. 3.4.1:

$$X_D = \cos(2\pi - \varphi), \quad Y_D = \sin(2\pi - \varphi),$$

$$\theta = \psi - \varphi = f(\varphi) - \varphi. \tag{3.4.1}$$

Выходными параметрами синтеза являются координаты x_C, y_C круговой точки *C* в *Dxy*, координаты X_B и Y_B соответствующего центра *B* в *AXY* и радиус приближающей окружности $BC = R$. Процедура определения этих параметров была рассмотрена выше.

После определения указанных пяти неизвестных в соответствии с рис. 3.4.1 можно вычислить искомые размеры звеньев передаточного четырехзвенника:

$$a = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2}; \quad c = \sqrt{x_C^2 + y_C^2}; \quad R = b;$$

$$\varphi_0 = \arctg(Y_B/X_B); \quad \psi_0 = \arctg(y_C/x_C).$$

Однако функциональные возможности передаточного шарнирного четырехзвенника весьма ограничены, в частности, он не способен воспроизводить движение выходного звена с выстоями. Поэтому для реализации сложных законов движения выходного звена целесообразно обратиться к многозвенным передаточным механизмам. Так, после замены в схеме четырехзвенника бинарного звена *ВВ* четырехзвенной цепью *ABCD*, связывающей плоскости *E* и *e*, получается шестизвенник типа Стефенсона (рис. 3.4.2), посредством которого можно реализовать сложные законы преры-

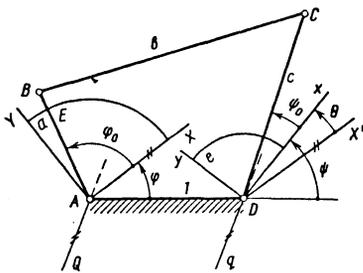


Рис. 3.4.1. Схема расчета перемещений двух звеньев вокруг неподвижных параллельных осей

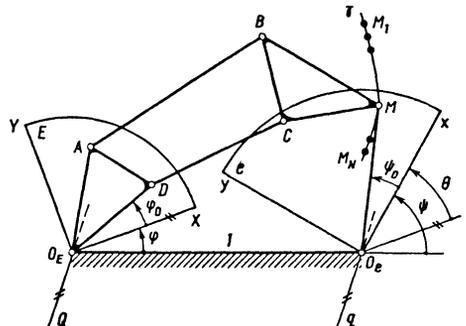


Рис. 3.4.2. Схема расчета шестизвенника типа Стефенсона

вистого движения выходного звена. Кинематическая схема этого механизма определяется одиннадцатью постоянными параметрами, девять из которых задают положение направляющего четырехзвенника $ABCD$ в системе $O_E XY$, а еще две задают положение шарнира M в плоскости e выходного звена (в системе $O_e xy$). Это означает, что определенным подбором размеров механизма можно достичь совпадения функции $\psi = f(\varphi)$ с функцией, воспроизводимой механизмом в 11 точках.

После замены внутреннего четырехзвенника $ABCD$ с чертящей точкой M высшей парой между кулачком, спрофилированным по шатунной кривой γ точки M , и коромыслом $O_e M$, получается кулачковый механизм кинематически эквивалентный рассматриваемому механизму, что свидетельствует о широких функциональных возможностях последнего.

Синтез рассматриваемого передаточного шестизвенника методом квадратического приближения функций целесообразно реализовать как циклический процесс. Первый цикл этого процесса осуществляется по следующему алгоритму:

1) выбор исходного положения $M^{(0)}(x_{M^{(0)}}, y_{M^{(0)}})$ центра шарнира M в системе $O_e xy$ и по формулам (3.4.1) для выбранных значений $\varphi_i \in [0, \varphi_m]$ ($i = 1, 2, \dots, N$) вычисление координат соответствующих N положений $M_i^{(0)}$ точки $M^{(0)}$ в системе $O_E XY$;

2) синтез по описанному выше алгоритму направляющего четырехзвенника $(ABCD)^{(1)}$, приблизительно воспроизводящего заданную последовательность точек - положений $M_i^{(0)}$ ($i = 1, 2, \dots, N$);

3) "проворачивание" четырехзвенника $(ABCD)^{(1)}$ - генерирование последовательности точек $M_{1\gamma}^{(1)}, M_{2\gamma}^{(1)}, \dots, M_{M\gamma}^{(1)}$, наименее удаленных от соответствующих точек последовательности $M_1^{(0)}, M_2^{(0)}, \dots, M_N^{(0)}$;

4) определение плоскости e новой точки $M^{(1)}$, рассматриваемые N положений которой наиболее близки к положениям соответствующих точек последовательности $[M_{i\gamma}^{(1)}]$.

Методы кинематического синтеза передаточных многозвенных механизмов различной структуры изложены в различных литературных источниках [2, 4, 5, 11].

Согласование угловых перемещений двух звеньев вокруг скрещивающихся осей (рис. 3.4.3). Пусть теперь e и E вращающихся вокруг неподвижных скрещивающихся осей q и Q с кратчайшим расстоянием O_1O_2 и углом скрещивания ρ . Со звеньями e и E неразрывно связаны соответственно прямоугольные системы O_2xyz и O_1XYZ . Необходимо синтезировать механизм, который реализует заданную зависимость $\psi = f(\varphi)$ между углами поворота ψ и φ тел e и E в интервале $[0, \varphi_m]$. Углы ψ и φ измеряются в плоскостях XZ и xz , причем осью отсчета является направление общего перпендикуляра O_1O_2 к осям q и Q .

Рассматриваемая система, состоящая из тел e, E и стойки, имеет две степени свободы. Примем E за входное звено синтезируемого механизма, а e - за выходное. Чтобы получить механизм с одной степенью подвижности, выполняющий требуемое преобразование движения, как и в случае параллельных осей вращения, следует связать e и E посредством кинематической цепи, налагающей одно условие связи на их относительное движение. Проще всего использовать для этой цели бинарные звенья типа СС, СПП и СЦ, присоединением которых образуются четырехзвенные передаточные механизмы.

После ввода в систему звена СС получается передаточный четырехзвенник ВССВ.

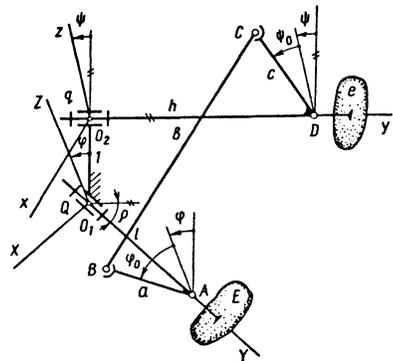


Рис. 3.4.3. Схема расчета угловых перемещений двух звеньев вокруг скрещивающихся осей

При принятом за единицу кратчайшем расстоянии между осями q и Q функция положения четырехзвенника определяется восьмью параметрами, в том числе: относительными размерами

$$O_1A = l; AB = a; BC = b; CD = c; O_2D = h,$$

межосевым углом ρ и углами φ_0, ψ_0 , необходимыми для определения положения звеньев AB и CD соответственно в системах O_1XYZ и O_2xyz .

Рассматриваемую систему синтеза можно свести к синтезу бинарного звена CC по условию приближенного воспроизведения заданного движения (заданных положений) звена e по отношению к звену E . С этой целью опреде-

ляются последовательные положения e_i ($i = 1, 2, \dots, N$) системы O_2xyz относительно системы O_1XYZ , соответствующие выбранным значениям φ_i ($i = 1, 2, \dots, N$) угла φ в интервале $[\varphi_0, \varphi_m]$.

Положения O_i начала O_2 определяются по соотношениям:

$$X_{o_i} = -\sin \varphi_i; Y_{o_i} = 0; X_{o_i} = \cos \varphi_i.$$

Направляющие косинусы осей системы O_2xyz определяются как элементы матрицы 3×3 :

$$T_i = \begin{bmatrix} \cos \rho \cos \psi_i \cos \varphi_i + \sin \varphi_i \sin \psi_i - \sin \rho \cos \varphi_i & \cos \rho \cos \varphi_i \sin \psi_i - \sin \varphi_i \cos \psi_i \\ \cos \psi_i \sin \rho & \cos \rho & \sin \psi_i \sin \rho \\ \cos \rho \cos \psi_i \sin \varphi_i - \cos \varphi_i \sin \psi_i - \sin \rho \sin \varphi_i & \cos \rho \sin \varphi_i \cos \psi_i + \cos \varphi_i \cos \psi_i \end{bmatrix}.$$

После вычисления для заданных φ_i, ψ_i ($i = 1, 2, \dots, N$) величин $X_{o_i}, Y_{o_i}, Z_{o_i}$ и направляющих косинусов осей системы O_2xyz имеется полная информация о положениях этой системы относительно системы O_1XYZ . Далее осуществляется синтез звена типа CC по условию приближенной реализации найденных N положений выходного звена CD относительно входного звена AB . Подлежат определению координаты X_B, Y_B, Z_B центра B сферического шарнира в системе O_1XYZ , координаты X_C, Y_C, Z_C центра C другого сферического шарнира в системе O_2xyz и длина B звена BC . Алгоритм вычисления этих параметров методом квадратического приближения приведен при рассмотрении синтеза звена CC .

После определения значений указанных семи параметров вычисляются искомые размеры передаточного механизма. Соответствующие расчетные формулы следуют из рис. 3.4.3:

$$h = y_C; l = Y_B; b = R;$$

$$a = \sqrt{X_B^2 + (Y_B - l)^2 + Z_B^2};$$

$$c = \sqrt{x_C^2 + (y_C - h)^2 + z_C^2};$$

$$\varphi_0 = \arccos\left(\frac{Z_B}{a}\right); \psi_0 = \arccos\left(\frac{Z_C}{c}\right).$$

3.5. СИНТЕЗ ДВУХПОДВИЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ

Структурные схемы и основные задачи синтеза двухподвижных механизмов для воспроизведения заданного семейства функций одной переменной. Синтезируемые передаточные механизмы должны содержать по крайней мере три звена, входящих в кинематические пары со стойкой: входное и выходное звенья (вход и выход), перемещения которых связаны определенной функцией данного семейства; управляющее звено, которое выполняет перенастройку механизма на новую функцию и фиксировано во время работы передаточного механизма. Таким образом, кинематическая цепь, присоединяемая к указанным трем звеньям для образования двухподвижного замкнутого механизма, должна наложить одну связь и, к тому же, иметь три свободных конца. Эти условия определяют структуру присоединяемых цепей.

Структурные схемы регулируемых передаточных механизмов наиболее просто могут быть образованы присоединением двухпроводковой кинематической группы к шатуну замкнутого двухподвижного пятизвенника. Различные количества и комбинации поступательных и вращательных пар приводят к множеству структурных схем двухподвижных семизвенников. На рис. 3.5.1 изображен базовый шарнирный семизвенник и некоторые его модификации с использованием поступательных пар.

Регулируемые направляющие механизмы образуются на базе двухподвижного замкнутого пятизвенника, у которого выходным звеном является один из шатунов. При различных положениях управляющего звена в соот-

ветствии с функцией управления эти механизмы должны вести точку шатуна по траекто-

риям, близким к определенным кривым данного семейства.

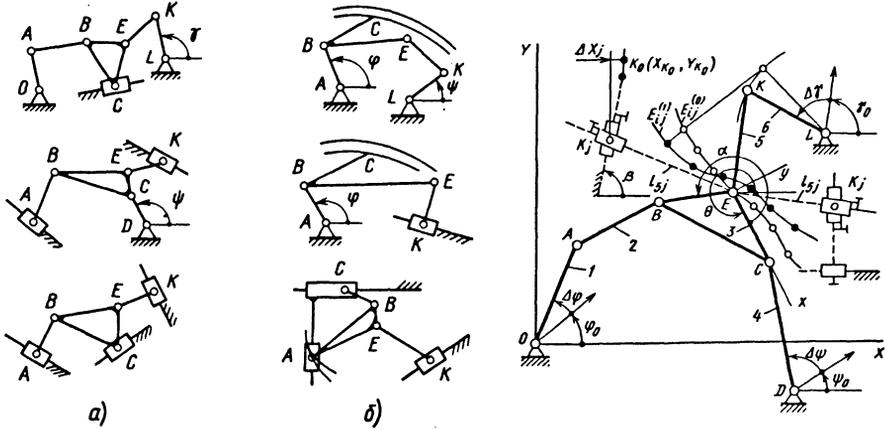


Рис. 3.5.1. Базовый шарнирный семизвенник и его модификации: а - передаточные механизмы; б - направляющие механизмы

В общем случае рассматриваются две основные разновидности задачи матрического синтеза проектируемых механизмов:

1) дана функция управления, сопоставляющая каждому положению управляющего звена определенную функцию данного семейства; подлежат определению постоянные параметры кинематической схемы;

2) функция управления не задана и ее требуется определить вместе с постоянными параметрами кинематической схемы.

Синтез двухподвижных передаточных и направляющих механизмов при заданной функции управления. Задача рассматривается на примере шарнирного семизвенного механизма. Механизм воспроизводит некоторую функцию двух переменных $\psi = F_M(\varphi, \gamma)$, зависящую в общем случае от следующих величин: от 15 постоянных параметров, в том числе длин звеньев $l_k (k = 1, 2, \dots, 6)$; параметров BE и α , задающих положение шарнира E на шатуне; координат X_L, Y_L, X_D, Y_D центров шарниров L и D ; углов $\psi_0, \varphi_0, \gamma_0$, ориентирующих оси отсчета углов ψ, φ и γ .

Задача синтеза формируется следующим образом. Даны функции $\psi_j = F_j(\varphi)$, $\varphi_{0j} \leq \varphi \leq \varphi_{mj} (j = 1, 2, \dots, n)$ таблицей N значений $\psi_{ij} (i = 1, 2, \dots, N)$, и функция

управления $\gamma = U(\psi)$, сопоставляющая каждой функции ψ_j значение угла γ_j , фиксирующее положение управляющего звена KL . Необходимо спроектировать механизм, который при каждом значении γ_j угла γ приблизительно воспроизводил бы соответствующую функцию $\psi_j = F_j(\varphi)$.

Синтез осуществляется посредством последовательных приближений, причем каждое приближение находится в процессе последовательного синтеза трех отдельных диад EKL, ECD и OAB , входящих в состав механизма. При синтезе каждой диады исходят из известных размеров остальных двух диад, составляющих двухподвижный пятизвенник, обобщенные координаты которого связаны между собой функциями $\psi_j = F_j(\varphi)$ или $\gamma = U(\psi)$.

Общая схема вычислительного процесса синтеза (рис. 3.5.2) предполагает, что за исходное (нулевое) приближение принимается семизвенник с заданными размерами, которые назначаются в соответствии с дополнительными условиями синтеза. Процедуре синтеза первой диады EKL предшествует анализ пятизвенника $OABCD$ для определения значений координат $X_{E_{ij}}, Y_{E_{ij}}$ каждого положения E_{ij} точки E , соответствующего углам

$\varphi_i \in [\varphi_{0j}, \varphi_{mj}]$ и $\psi_{ij} = F_j(\varphi_i)$. Поскольку в каждом интервале приближения выбрано N точек, число расчетных положений E_{ij} ($j = 1, 2, \dots, n, i = 1, 2, \dots, N$) равно N_n .

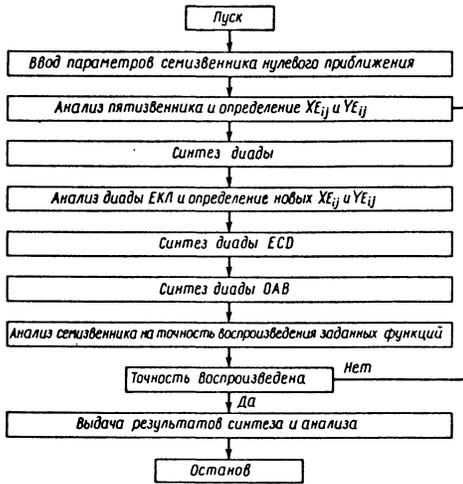


Рис. 3.5.2. Схема вычислительного процесса синтеза

Диада EKL проектируется так, чтобы заданным положениям E_{ij} точки E соответствовали значения угла γ , как можно близкие к заданным.

После синтеза первой диады определяются новые наборы точек $E_{ij}^{(1)}$. При этом точки каждого подмножества $E_{1j}^{(1)}, \dots, E_{Nj}^{(1)}$ ($j = 1, 2, \dots, n$) находят как точки E диады, у которой звено KL устанавливается под заданным углом $\gamma_j = \gamma_0 + \Delta\gamma_j$, а продольная ось шатуна EK проводится через точки нулевого приближения $E_{1j}^{(0)}, \dots, E_{Nj}^{(0)}$ (см. рис. 3.5.1). Значения $X_{Ej}^{(1)}, \dots, Y_{Ej}^{(1)}$ являются входными параметрами при синтезе диад ECD и OAB .

Первый цикл вычислений (вычисление первого приближения) завершается анализом семизвенника на точность воспроизведения заданных функций. Если максимальное по модулю отклонение от заданной функции $\max|\Delta_{ij}|$ выходит за пределы допустимого,

весь цикл вычислений повторяется до тех пор, пока не будет достигнута требуемая точность, если, конечно, эта точность для рассматриваемого механизма достижима. В тех случаях, когда описанный итерационный процесс сходится, но данный механизм не реализует заданные функции достаточно точно, следует переходить к другому нулевому приближению.

Синтез двухподвижных механизмов (см. рис. 3.5.1, а, б), в состав которых входят поступательные пары, проводится аналогичным образом, с той лишь разницей, что вместо искомых параметров, характеризующих звено с вращательной парой, определяются параметры поступательной пары: координата начала отсчета ползуна и угловой коэффициент направляющей.

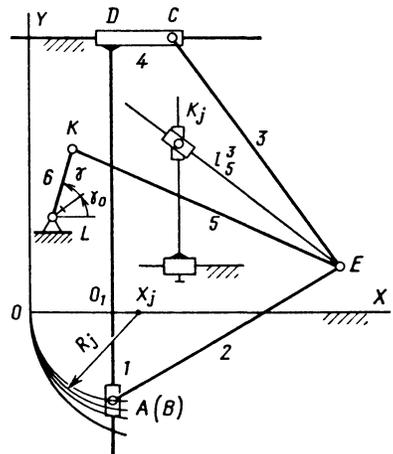


Рис. 3.5.3. Схема синтеза двухподвижного направляющего механизма

Синтез двухподвижных направляющих механизмов (рис. 3.5.3) формулируется следующим образом. Даны кривые $Y_A = F_j(X_A)$, $X_{A0j} \leq X_A \leq X_{Amj}$ ($j = 1, 2, \dots, n$), которые в данном случае заданы таблицей N значений координат (X_{Aij}, Y_{Aij}) чертящей точки A , и функция управления $\gamma = U(Y_A)$, сопоставляющая каждой функции Y_{Aj} значение γ_j , которое фиксирует положение управляющего звена KL . Необходимо спроектировать механизм, который при каждом значении γ_j угла γ приближенно воспроизводит соответствующую кривую $Y_A = F_j(X_A)$.

Общая процедура синтеза ничем не отличается от синтеза предыдущего механизма и осуществляется по схеме, представленной на рис. 3.5.2.

Синтез диад *EKL*, *ECD* и *EAB* по методу квадратического приближения. При синтезе диады *EKL* даны значения $\Delta\gamma_j$ ($j = 1, 2, \dots, n$) углов вращения управляющего звена *KL* и координаты X_{E_j}, Y_{E_j} , найденные после анализа пятизвенника *EABDC*. Требуется определить параметры $X_L, Y_L, l_5, l_6, \gamma_0$, чтобы при совмещении точки *E* с заданными точками E_j угол γ принимал значения, как можно близкие к заданным $\gamma_j = \gamma_0 + \Delta\gamma_j$.

Каждому подмножеству точек E_{ij} ($i = 1, 2, \dots, N$) соответствует одно и то же значение γ_j угла γ , а следовательно, одна и та же точка K_j на окружности с центром *L*. Но так как имеется *n* таких подмножеств, то искомые параметры должны минимизировать по модулю N_n функций пяти переменных $X_L, Y_L, l_5, l_6, \gamma_0$:

$$\Delta_{qij} = |E_{ij}K_j|^2 - l_5^2 = (X_{E_j} - X_{K_j})^2 + (Y_{E_j} - Y_{K_j})^2 - l_5^2$$

$$(i = 1, 2, \dots, N, j = 1, 2, \dots, n).$$

(3.5.1)

Функции (3.5.1) приводятся к системе алгебраических многочленов второго порядка от пяти новых параметров P_1, P_2, P_3, P_4 и P_5 :

$$\Delta_{qij} = 2(f_{1ij}P_1 + f_{2ij}P_2 + f_{3ij}P_3 - f_{0ij})$$

$$(i = 1, 2, \dots, N, j = 1, 2, \dots, n),$$

(3.5.2)

где

$$P_1 = l_6 \cos \gamma_0; \quad P_2 = l_6 \sin \gamma_0;$$

$$P_3 = 0,5(P_1^2 + P_2^2 + P_4^2 + P_5^2 - l_5^2);$$

$$P_4 = X_L; \quad P_5 = Y_L;$$

$$f_{1ij} = P_4 \cos \Delta\gamma_j + P_5 \sin \Delta\gamma_j - X_{E_j} \times$$

$$\times \cos \Delta\gamma_j - Y_{E_j} \sin \Delta\gamma_j;$$

$$f_{2ij} = -P_4 \sin \Delta\gamma_j + P_5 \cos \Delta\gamma_j + X_{E_j} \times$$

$$\times \sin \Delta\gamma_j - Y_{E_j} \cos \Delta\gamma_j;$$

$$f_{3ij} = 1; \quad f_{0ij} = P_4 X_{E_j} + P_5 Y_{E_j} -$$

$$- 0,5(X_{E_j}^2 + Y_{E_j}^2).$$

Многочлены (3.5.2) имеют “билинейную” структуру; они линейны относительно величин P_1, P_2 и P_3 , но вместе с тем их можно представить в виде другой системы линейных функций:

$$\Delta'_{qij} = 2(f_{3ij}P_3 + f_{4ij}P_4 + f_{5ij}P_5 - f_{0ij}),$$

$$(i = 1, 2, \dots, N, j = 1, 2, \dots, n)$$

(3.5.3)

где

$$f_{4ij} = P_1 \cos \Delta\gamma_j - P_2 \sin \Delta\gamma_j - X_{E_j};$$

$$f_{5ij} = P_1 \sin \Delta\gamma_j + P_2 \cos \Delta\gamma_j - Y_{E_j};$$

$$f_{0ij} = X_{E_j}(P_1 \cos \Delta\gamma_j - P_2 \sin \Delta\gamma_j) +$$

$$+ Y_{E_j}(P_1 \sin \Delta\gamma_j + P_2 \cos \Delta\gamma_j) -$$

$$- 0,5(X_{E_j}^2 + Y_{E_j}^2).$$

Вектор $P(P_1, \dots, P_5)$, минимизирующий модуль функций (3.5.2), определяется из необходимых условий минимума суммы квадратов Δ_{qij} т.е. двойной суммы

$$S = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^N \Delta_{qij}^2.$$

(3.5.4)

Тогда

$$\partial S / \partial P_k = 0 \quad (k = 1, 2, 3, 4, 5).$$

(3.5.5)

Первые три условия (3.5.5) согласно (3.5.2) приводятся к уравнениям, линейным относительно P_1, P_2 и P_3 :

$$\sum_{k=1}^3 C_{kl} P_k = \mu_l \quad (l = 1, 2, 3).$$

(3.5.6)

где

$$C_{kl} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^N f_{kij} f_{lij}, \quad \mu_l = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^N f_{lij} f_{0ij} \cdot$$

$$(k, l = 1, 2, 3) \tag{3.5.7}$$

Последние три условия (3.5.5) с учетом (3.5.3) также приводятся к линейной системе относительно P_3, P_4 и P_5 :

$$\sum_{k=3}^5 C_{kl} P_k = \mu_l \quad (l = 3, 4, 5), \tag{3.5.8}$$

где коэффициенты C_{kl} и μ_l определяются по формулам (3.5.7) при значениях $k, l = 3, 4, 5$ и замене f_{0ij} на f'_{0ij} .

На базе систем (3.5.6) и (3.5.8) строится быстросходящийся итерационный процесс для определения минимумов функции пяти переменных S , заключающийся в последовательном решении линейных систем типа (3.5.6) и (3.5.8). Причем входные данные для решения каждой последующей системы (пары P_1, P_2 или P_4, P_5) определяются в результате решения предыдущей. При этом получается убывающая последовательность значений минимизируемой суммы $(S^{(1)}, S_0^{(1)}, S^{(2)}, S_0^{(2)}, \dots, S^{(m-1)}, S_0^{(m-1)}, S^{(m)}, S_0^{(m)}, \dots)$, имеющей предел, равный значению S в точке локального минимума. При удовлетворении неравенств

$$\left| P_k^{(m)} - P_k^{(m-1)} \right| < \varepsilon \quad (k = 1, 2, 3, 4, 5),$$

где ε - допустимая погрешность вычислений, итерационный процесс поиска минимума завершается.

Примечательно, что описанный алгоритм приводит только к минимумам функции S . Данный этап синтеза завершается вычислением неизвестных размеров диады

$$X_L = P_4; \quad Y_L = P_5; \quad \gamma_0 = \text{arctg}(P_2/P_1);$$

$$l_5 = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + P_4^2 + P_5^2 - 2P_3};$$

$$l_6 = P_1 / \cos \gamma_0.$$

При синтезе следующей диады ECD заданными величинами, как отмечалось, являются координаты N_n новых точек $E_{ij}^{(1)}$, а также N_n значений углов ψ_{ij} , а подлежат определению параметры $X_D, Y_D, l_3, l_4, \psi_0$. Наконец, при синтезе последней диады EAB входными параметрами являются величины $X_{E_{ij}}^{(1)}, Y_{E_{ij}}^{(1)}, \theta_{ij}$, задающие в системе $OXY Nn$ положений подвижной системы E_{xy} , жестко связанной с шатуном EC , и Nn значений ψ_{ij} угла φ , а вычисляются параметры $x_B, y_B, l_1, l_2, \varphi_0$.

Процедура синтеза указанных диад не отличается от изложенной. Дело в том, что соответствующие выражения взвешенных разностей

$$\Delta_q^{(EC)} = |E_{ij} C_{ij}|^2 - l_3^2;$$

$$\Delta_q^{(AB)} = |B_{ij} A_{ij}|^2 - l_2^2$$

также приводятся к полиномам типа (3.5.2) и (3.5.3) относительно пяти величин P_k , зависящих от пяти параметров каждой диады, и поэтому уравнения для вычисления квадратического приближения сходны с приведенным выше.

Синтез двухподвижных передаточных и направляющих механизмов с определением дискретных значений управляемых параметров. Для достижения высокой точности воспроизведения заданных функций увеличивают число управляемых параметров до трех, принимая в качестве таковых координаты X_k, Y_k опорного шарнира и длину l_5 звена EK . Тогда вместо управляющей диады EKL получается четырехзвенная кинематическая цепь с тремя управляющими поступательными парами, которая на рис. 3.5.1 показана тонкой штриховой линией, или эквивалентная трехзвенная цепь с одной высшей парой.

В данном случае постановка задачи следующая: определить размеры семизвенника и дискретные значения $l_5^{(j)}, X_{Kj}, Y_{Kj}$ ($j = 1, 2, \dots, n$) управляемых параметров так, чтобы функции $\psi_{Mj} = F_{Mj}(\varphi)$ ($j = 1, 2, \dots, n$), воспроизводимые механизмом при значениях $l_5^{(j)}, X_{Kj}, Y_{Kj}$, как можно

меньше отличались от заданных функций $\Psi_{Mj} = F_{Mj}(\Phi)$ в требуемых интервалах $[\Phi_{0j}, \Phi_{mj}]$. Процесс синтеза аналогичен, за исключением процедуры синтеза управляющей диады.

Искомые значения каждой тройки управляемых параметров $X_{Kj}, Y_{Kj}, I_5^{(j)}$ входят в соответствующее выражение взвешенной разности (3.5.1), которому в рассматриваемом случае придается вид:

$$\Delta_{qij} = 2(f_{1ij}P_{1j} + f_{2ij}P_{2j} + f_{3ij}P_{3j} - f_{0ij})$$

$$(i = 1, 2, \dots, N, \quad j = 1, 2, \dots, n),$$

где

$$P_{1j} = X_{Kj}; \quad P_{2j} = Y_{Kj};$$

$$P_{3j} = 0,5 \left(P_{1j}^2 + P_{2j}^2 - (I_5^{(j)})^2 \right);$$

$$f_{1ij} = -X_{Eij}; \quad f_{2ij} = -Y_{Eij}; \quad f_{3ij} = 1;$$

$$f_{0ij} = -0,5 \left(X_{Eij}^2 + Y_{Eij}^2 \right).$$

Рассматривая в отдельности условия минимума n квадратических сумм S_j , соответствующих всем воспроизводимым функциям, приходим к n линейным системам вида (3.5.6), коэффициенты которых вычисляются по формулам (3.5.7) при $j = 1, 2, \dots, n$. Решение этих систем позволяет определить искомые значения управляемых параметров.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Артоболевский И. И., Левитский Н. И., Черкудинов С. А. Синтез плоских механизмов. М.: Физматгиз, 1959. 1084 с.
2. Бейер Р. Кинематический синтез механизмов. М.: Машгиз, 1959. 318 с.
3. Кинематика, динамика и точность механизмов: Справочник / Под ред. Г. В. Крейна: М.: Машиностроение, 1984. 224 с.
4. Лихтенхальт В. Синтез механизмов. М.: Наука, 1964. 228 с.
5. Пейсах Э. Е., Нестеров В. А. Система проектирования плоских рычажных механизмов. М.: Машиностроение, 1988. 232 с.
6. Росс Б. Кинематика движения через конечно-разделенные положения // Прикладная механика. 1967. № 3. С. 60-67.
7. Росс Б. О винтовых осях и других особых линиях, связанных с пространственными перемещениями твердого тела // Кон-

струирование и технология машиностроения. 1967. № 1. С. 120-132.

8. Саркисян Ю. Л. Аппроксимационный синтез механизмов. М.: Наука, 1982. 304 с.

9. Синтез двухподвижных механизмов-приближенных генераторов семейства одномерных функций / Ю. Л. Саркисян, С. С. Шагинян, С. Ш. Шахпаронян и др. // Машиноведение. 1982. № 5. С. 55-64.

10. Унифицированные итерационные методы аппроксимационного синтеза механизмов для управляемого перемещения твердого тела / Ю. Л. Саркисян, К. Г. Степанян, Г. П. Карапетян и др. // Машиноведение. 1987. № 1. С. 68-76.

11. Hain K. Applied Kinematics // Mc Graw-Hill Book Co, 1967. 727 p.

12. Hartenberg R. S., Denavit J. Kinematic synthesis of linkages. Н. Y. // Mc Graw-Hill Book Co., 1964. 435 p.

Глава 4

МЕХАНИЗМЫ ВЫСОКИХ КЛАССОВ

Группа Ассура - кинематическая цепь с нулевой степенью подвижности относительно тех звеньев, с которыми входят в кинематические пары свободные элементы ее звеньев и не распадается на более простые цепи, обладающие также нулевой степенью подвижности [1]. Если в состав механизма входят группы Ассура различных классов, то класс механизма определяется по той группе, которая относится к наивысшему классу. Плоские шарнирно-рычажные механизмы, содержащие в своем составе группы Ассура четвертого и более высокого класса и различных порядков, называются механизмами высоких классов (МВК) [2, 3].

Благодаря наличию изменяемых замкнутых контуров, составленных из одних подвижных звеньев, МВК обладают широкими кинематическими и динамическими возможностями, могут реализовать сложные программные движения одной, двух (и более) рабочих точек от одного привода, расположенного на стойке, что позволяет строить на их базе манипуляторы со многими рабочими органами и с простой системой управления [4, 5, 7].

К настоящему времени разработаны графоаналитическая теория [3], аналитические методы анализа и синтеза МВК [7, 10], на основе которых созданы принципиально новые грузоподъемные, погрузочно-разгрузочные и манипуляционные устройства, внедряемые в трех основных направлениях:

непосредственно в конструкциях манипуляторов;

в конструкциях адаптивных захватных устройств роботов и манипуляторов;

в качестве исполнительных механизмов в различных машинах и агрегатов.

Манипуляторы на базе МВК имеют большую грузоподъемность и небольшие габариты в сложенных положениях, приводятся в движение одним приводом, что существенно упрощает систему управления, повышает удобство обслуживания и надежность устройств. Придавая дополнительные степени свободы стойке МВК, можно получить манипуляторы с большой маневренностью. На основе двух спаренных прямолинейно направляющих МВК спроектирован исполнительный механизм передвижных строительно-монтажных лесов. Искусственные протезы, имитирующие движение кисти руки, плеча и стопы человека, являются одноподвижными устройствами и приводятся в движение от оставшихся культей человека.

Адаптивные захватные устройства для различных робототехнических систем на базе МВК [5] позволяют решать задачи захвата как пространственных объектов произвольной формы, так и плоских объектов сложной конфигурации.

К третьему направлению относятся различные передаточные механизмы между двигателем и рабочим органом и механизмы контрольно-измерительных устройств машинных агрегатов. В частности, это механизмы привода стана холодной прокатки труб, пресса двойного действия, пресса с регулируемым ходом ползуна, устройства измерения натяжения гибких материалов, бесшатунных поршневых двигателей и компрессоров, манипулятора для съема глета.

4.1. СТРУКТУРНЫЙ АНАЛИЗ

В основу образования одноконтурных групп Ассура высоких классов положен метод развития изменяемого замкнутого контура И. И. Артоболевского. Число контурных звеньев $n_k \geq 4$ определяет класс k группы Ассура. Следовательно, чтобы из изменяемого замкнутого контура с числом контурных звеньев n_k получить группу Ассура k -го класса с n звеньями и с относительной степенью свободы, равной нулю ($W = 0$), необходимо на этот контур наложить S_e внешних связей ($S_e = n_k$) посредством внешних шарниров с числом III и поводков с числом II . Число внешних кинематических пар p_5 пятого класса определяет порядок группы r . Чтобы группа Ассура высоких классов не распадалась на группы Ассура второго и третьего классов необходимо учесть следующее:

1) число контурных звеньев с двумя внешними связями должно равняться числу контурных звеньев без внешних связей и в замкнутом контуре эти звенья должны чередоваться между собой;

2) одноповодковые контурные звенья могут располагаться в любом месте, но не между контурными звеньями с внешним шарниром.

Для всех групп Ассура высоких классов

$$\begin{aligned} k &= n_k = S_e = II = III; \\ r &= II + III. \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

Причем при $III = 0$ имеем $S_e = II = r$ и получается группа Ассура высокого класса с равномерно распределенными поводками; при $II = 0$ имеем $S_e = 2III = 2r$ и получается бесповодковая группа Ассура высокого класса; при $III \neq 0$, $II \neq 0$ получается группа Ассура высокого класса с неравномерно распределенными поводками.

При этом

$$r \leq S_e \leq 2r; \quad (4.1.2)$$

$$\left. \begin{aligned} p_5 &= n + r; \quad n = n_k + II; \\ p_5 &= 3r; \quad n = 2r. \end{aligned} \right\} \quad (4.1.3)$$

Учитывая, что порядок r групп Ассура высоких классов - целое число, имеем:
для четных классов

$$\left. \begin{aligned} r &= \frac{k}{2}, \frac{k}{2} + 1, \dots, k - 1, k; \\ II &= 0, 2, \dots, k - 2, k; \\ III &= \frac{k}{2}, \frac{k}{2} - 1, \dots, 1, 0; \end{aligned} \right\} \quad (4.1.4)$$

для нечетных классов:

$$\left. \begin{aligned} r &= \frac{k+1}{2}, \frac{k+1}{2} + 1, \dots, k - 1, k; \\ II &= 1, 3, \dots, k - 2, k; \\ III &= \frac{k-1}{2}, \frac{k-1}{2} - 1, \dots, 1, 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.1.5)$$

Используя структурные формулы (4.1.1) - (4.1.5), можно получить все возможные группы Ассура четвертого и более высокого класса [3].

В общем случае длины отдельных поводков групп Ассура могут бесконечно увеличи-

ваться, тогда они заменяются соответствующими ползунами.

Структурная классификация МВК основана на известном принципе их образования и метода замены ведущего звена [3]. Основным требованием к структурному анализу МВК является единство структурной классификации и методов их исследования. Исходя из этого все МВК можно сгруппировать по трем видам:

- 1) механизмы высоких классов, которые методом замены ведущего звена сводятся к механизмам второго и третьего классов;
- 2) механизмы Ассура;
- 3) механизмы высоких классов, которые методом замены ведущего звена сводятся к механизму Ассура и наложенной к нему двухповодковой группе.

Если группа Ассура k -го класса ($k \geq 4$) и $(k - 1)$ -го порядка посредством бесповодкового контурного звена с внешним шарниром присоединяется к ведущему звену, а все $(k - 2)$ поводков группы Ассура посредством своих крайних кинематических пар присоединяются к стойке, то имеем механизм Ассура k -го класса.

4.2. АНАЛИЗ КИНЕМАТИКИ

4.2.1. Анализ положений МВК

В МВК в отличие от механизмов второго класса векторные уравнения независимых замкнутых контуров [12] содержат не меньше трех неизвестных и образуют систему тригонометрических уравнений, зависящую от всех неизвестных параметров, определяющих положения звеньев. Установить существование и число действительных решений такой системы, найти начальные приближения неизвестных для дальнейшего уточнения решений трудно, решение этой задачи облегчается с помощью рассматриваемых ниже методов решения задач анализа положений МВК. В задаче анализа положений МВК достаточно ограничиться задачей анализа положений групп Ассура, считая положения шарниров заданными.

Метод условных обобщенных координат. При отбрасывании одного звена в группах Ассура высоких классов с неравномерно распределенными поводками или двух звеньев в группах Ассура высоких классов с равномерно распределенными поводками путем разъединения их шарниров в этих группах появляются одна и две степени свободы. Если избрать соответственно одно или два звена этих групп в качестве условных ведущих звеньев, а параметры, определяющие их положения, в качестве условных обобщенных координат за счет появившихся степеней свободы, то рассматриваемые группы Ассура высоких классов

из статически определяемых систем преобразуются в механизмы второго класса [6].

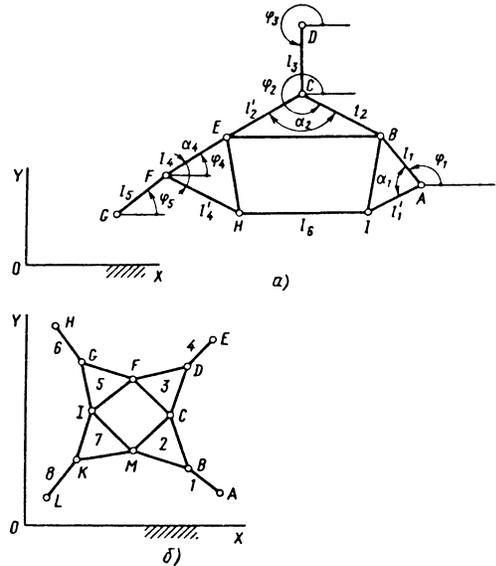


Рис. 4.2.1. Схема анализа механизма Ассура четвертого класса с поводками:

- a* - неравномерно распределенными;
- б* - равномерно распределенными

Так, при отбрасывании звена 6 группы Ассура четвертого класса третьего порядка с неравномерно распределенными поводками (рис. 4.2.1, *a*) и двух звеньев (7 и 8) группы Ассура четвертого класса с равномерно распределенными поводками (рис. 4.2.1, *б*) и выборе двух звеньев (1 и 2) в качестве условных ведущих эти группы преобразуются в механизмы второго класса со структурными формулами:

$$I(1) \rightarrow II(2, 3) \rightarrow II(4, 5);$$

$$I(1) \rightarrow I(2) \rightarrow II(3, 4) \rightarrow II(5, 6).$$

Составим функцию невязки группы Ассура четвертого класса третьего порядка:

$$\Delta = l_6 - l_6^*, \quad (4.2.1)$$

где l_6 - длина отброшенного звена группы; l_6^* - переменное расстояние между центрами разъединенных шарниров H и I группы:

$$l_6^* = \left[(X_H - X_I)^2 + (Y_H - Y_I)^2 \right]^{0.5};$$

$$\begin{bmatrix} X_H \\ Y_H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_F \\ Y_F \end{bmatrix} - l_{HF} \begin{bmatrix} \cos(\varphi_4 + \alpha_4) \\ \sin(\varphi_4 + \alpha_4) \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} X_I \\ Y_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \end{bmatrix} + l_{AF} \begin{bmatrix} \cos(\varphi_1 + \alpha_1) \\ \sin(\varphi_1 + \alpha_1) \end{bmatrix}.$$

Координаты X_F, Y_F шарнира F и значение угла φ_4 определяются последовательным решением задач о положениях полученных двухповодковых групп П (2, 3) и П (4, 5):

$$\varphi_2 = \operatorname{arctg} \frac{Y_B - Y_C}{X_B - X_C};$$

$$\cos(\varphi_{DB} - \varphi_3) = \frac{l_3^2 + l_{DB}^2 - l_{CB}^2}{2l_3 l_{DB}};$$

$$\varphi_4 = \operatorname{arctg} \frac{Y_E - Y_F}{X_E - X_F};$$

$$\cos(\varphi_{GE} - \varphi_5) = \frac{l_5^2 + l_{GE}^2 - l_{FE}^2}{2l_5 l_{GE}}.$$

где

$$l_{DB} = \left[(X_B - X_D)^2 + (Y_B - Y_D)^2 \right]^{0,5};$$

$$\varphi_{DB} = \operatorname{arctg} \frac{Y_B - Y_D}{X_B - X_D};$$

$$\begin{bmatrix} X_B \\ Y_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \end{bmatrix} + l_{AB} \begin{bmatrix} \cos \varphi_1 \\ \sin \varphi_1 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} X_C \\ Y_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_D \\ Y_D \end{bmatrix} + l_3 \begin{bmatrix} \cos \varphi_3 \\ \sin \varphi_3 \end{bmatrix};$$

$$l_{GE} = \left[(X_E - X_G)^2 + (Y_E - Y_G)^2 \right]^{0,5};$$

$$\varphi_{GE} = \operatorname{arctg} \frac{Y_E - Y_G}{X_E - X_G};$$

$$\begin{bmatrix} X_E \\ Y_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_C \\ Y_C \end{bmatrix} + l_{CE} \begin{bmatrix} \cos(\varphi_2 - \alpha_2) \\ \sin(\varphi_2 - \alpha_2) \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} X_F \\ Y_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_G \\ Y_G \end{bmatrix} + l_5 \begin{bmatrix} \cos \varphi_5 \\ \sin \varphi_5 \end{bmatrix}.$$

Функции невязок для групп Ассура четвертого класса с равномерно распределенными поводками имеют вид:

$$\Delta_1 = l_{IM} - l_{IM}^*;$$

$$\Delta_2 = l_8 - l_8^*,$$

$$(4.2.2)$$

где l_{IM} и l_8 - длина отброшенных звеньев; l_{IM}^* и l_8^* - переменные расстояния между центрами разъединенных шарниров I и M, K и L .

Переменные расстояния l_{IM}^* и l_8^* определяются аналогично по значениям координат центров разъединенных шарниров I и M, K и L уравнениями

$$l_{IM}^* = \left[(X_M - X_I)^2 + (Y_M - Y_I)^2 \right]^{0,5};$$

$$l_8^* = \left[(X_K - X_L)^2 + (Y_K - Y_L)^2 \right]^{0,5}.$$

Координаты шарниров M, L и K определяются последовательным решением задач о положениях полученных двухповодковых групп П (3, 4) и П (5, 6). Функции невязок для других одноконтурных групп Ассура высоких классов с неравномерно и равномерно распределенными поводками независимо от их класса составляются аналогично.

Определение числа сборок групп Ассура высоких классов. Число сборок групп Ассура при заданных размерах их звеньев и координатах внешних шарниров соответствует числу действительных корней уравнений замкнутости независимых векторных контуров. Общее число значений условных обобщенных координат, удовлетворяющих уравнениям невязок (4.2.1) или (4.2.2), умноженное на число сборок полученных двухповодковых групп, равное 2^m (где m - число двухповодковых групп), определяет число сборок групп Ассура высоких классов при заданных значениях координат их внешних шарниров и размеров звеньев.

Число сборок группы Ассура высоких классов определяется также сведением систем тригонометрических уравнений замкнутости независимых контуров путем многократного использования тождества $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi \equiv 1$ к одному алгебраическому полиному [14], число действительных корней которого определяется с помощью теоремы Штурма.

Например, группа Ассура четвертого класса третьего порядка (см. рис. 4.2.1, а) имеет три независимых контура $ABCD, DCEFGD$ и $AHFGA$, уравнения замкнутости которых при проектировании на оси координат

нат дают систему шести тригонометрический уравнений относительно $\varphi_1, \dots, \varphi_6$. Исключением на первом этапе $\varphi_3, \varphi_5, \varphi_6$ на основе указанного тождества, а затем φ_2, φ_4 получено [15] алгебраическое уравнение $\sum_{i=0}^{32} A_i u^i = 0$; $u = \operatorname{tg} \varphi_{1/2}$, откуда следует, что данная группа Ассура может иметь до 32 сборки, число которых соответствует числу действительных корней этого уравнения.

4.2.2. Графоаналитическое определение скоростей и ускорений МВК второго и третьего видов

Все МВК, относящиеся к одному виду, могут быть исследованы едиными методами кинематического и динамического анализ.

Рассмотрим механизм Ассура пятого класса (рис. 4.2.2). Определяются скорости и ускорения звеньев этого механизма по заданным угловым скоростям и ускорениям звена 1. Исходя из шарнирной точки A_2 контурного звена 2, на пересечении прямых A_2N и O_9M , A_2B и O_7C , A_3D и O_8E находят вспомогательные точки A_6, A_3, A_4 , а на пересечении прямых A_4F и A_6L - вспомогательную точку A_5 бесповодкового звена 5. По известным векторам скорости \bar{v}_{A_2} и ускорения \bar{w}_{A_2} и векторным соотношениям

$$\begin{aligned} \bar{v}_{A_6} &= \bar{v}_{A_2} + \bar{v}_{NA_2} + \bar{v}_{A_6N}; & \bar{v}_{A_6} &= \bar{v}_{MO_9} + \bar{v}_{A_6M}; \\ \dots & & \dots & \\ \bar{v}_{A_5} &= \bar{v}_{A_4} + \bar{v}_{FA_4} + \bar{v}_{A_5F}; & \bar{v}_{A_5} &= \bar{v}_{A_6} + \bar{v}_{LA_6} + \bar{v}_{A_5L}; \\ \bar{w}_{A_6} &= \bar{w}_{A_2} + \bar{w}_{NA_2}^n + \bar{w}_{A_6N}^n + \bar{w}_{NA_2}^t + \bar{w}_{A_6N}^t; \\ \bar{w}_{A_6} &= \bar{w}_{O_9} + \bar{w}_{MO_9}^n + \bar{w}_{A_6M}^n + \bar{w}_{MO_9}^t + \bar{w}_{A_6M}^t; \\ \dots & & \dots & \\ \bar{w}_{A_5} &= \bar{w}_{A_6} + \bar{w}_{LA_6}^n + \bar{w}_{LA_6}^t + \bar{w}_{A_5L}^t + \bar{w}_{A_5L}^n, \end{aligned} \tag{4.2.3}$$

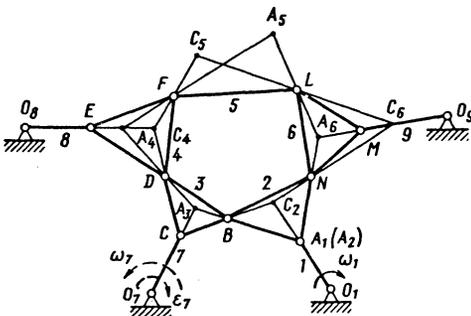
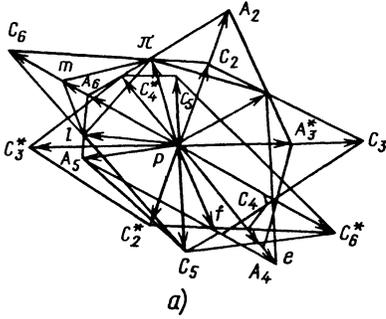


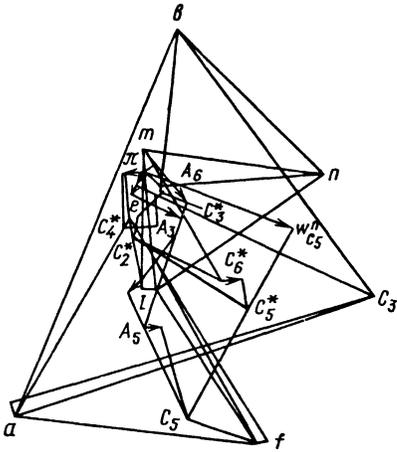
Рис. 4.2.2. Схема анализа механизма Ассура пятого класса

определяются векторы скорости \bar{v}_{A_5} и \bar{w}_{A_5} ускорения точки A_5 звена 5. Уравнения (4.2.3) могут быть решены аналитически или построением планов скоростей и ускорений. На рис. 4.2.3 приведены планы скоростей и ускорений для случая $\omega_7 = \text{const}$.

Теперь один из поводков механизма Ассура, например поводок 7, выбирается за условно ведущее звено и задается его ложная угловая скорость ω_7^* . Исходя из точки C контурного звена 3 находятся вспомогательные точки C_2, C_6, C_4 и C_5 , а на плане скоростей - вектор ложной скорости $\bar{v}_{C_5}^*$ вспомогательной точки C_5 звена 5. Направление ложной скорости $\bar{v}_{C_5}^*$ будет истинным и, следовательно, из рассмотрения скорости точки \bar{v}_{C_5} от-



a)



b)

Рис. 4.2.3. Планы:
а - скоростей; б - ускорений

носителю известной истинной скорости \bar{v}_{A_5} точки A_5 получается истинная скорость \bar{v}_{C_5} . Зная векторы скоростей \bar{v}_{A_5} и \bar{v}_{C_5} звена 5, легко установить все искомые истинные линейные скорости точек и угловые скорости звеньев, включая ω_7 .

Далее по ложному значению углового ускорения ε_7^* и истинному значению угловой скорости ω_7 условно ведущего звена 7 аналогичным образом определяется вектор ложного ускорения $\bar{w}_{C_5}^*$ точки C_5 контурного звена 5. Нормальная составляющая этого ложного ускорения будет истинной, с учетом чего из соотношения

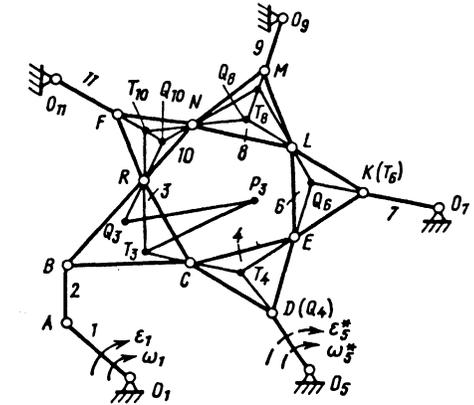


Рис. 4.2.4. Схема анализа механизма пятого класса

$\bar{w}_{C_5}^n + \bar{w}_{C_5}^r = \bar{w}_{A_5} + \bar{w}_{C_5 A_5}^n + \bar{w}_{C_5 A_5}^r$ находится истинное ускорение точки C_5 . Из истинных ускорений \bar{w}_{A_5} и \bar{w}_{C_5} двух точек контурного звена 5, можно найти ускорения всех остальных точек и угловые ускорения звеньев.

Изложенный метод вспомогательных точек справедлив для механизмов Ассуря любого k -го класса ($k \geq 4$).

Ниже рассмотрена задача определения скоростей и ускорений МВК третьего вида на примере механизма пятого класса (рис. 4.2.4), где ведущее звено 1 вращается с угловой скоростью ω_1 и угловым ускорением ε_1 . Примем поводок 5 за условно ведущее звено и зададимся ложными угловой скоростью ω_5^* и угловым ускорением ε_5^* . Тогда рассматриваемый механизм имеет структурную формулу $I(5) \rightarrow V(3, 4, \dots, 11) \rightarrow II(2, 1)$, т.е. он распадается на рассмотренный выше механизм Ассуря пятого класса, к бесповодковому звену которого присоединена двухповодковая группа. Исходя из вспомогательной точки Q_4 , совпадающей с шарнирной точкой D контурного звена 4, определяются рассмотренным выше методом вспомогательные точки Q_6, Q_8, Q_{10}, Q_3 , и их ложные скорости $\bar{v}_{Q_6}^*, \bar{v}_{Q_8}^*, \bar{v}_{Q_{10}}^*, \bar{v}_{Q_3}^*$. Исходя из вспомогательной точки T_6 , совпадающей с шарнирной точкой K контурного звена 6, аналогично определяются вспомогательные точки T_4, T_8, T_{10}, T_3 , а из заданной ложной скорости $\bar{v}_{T_4}^*$ - ложные скорости $\bar{v}_{T_6}^*, \bar{v}_{T_3}^*, \bar{v}_{T_{10}}^*, \bar{v}_{T_3}^*$. Линии дей-

ствия ложных скоростей $\bar{v}_{Q_3}^*$, $\bar{v}_{T_3}^*$ будут истинными. Восстановлением перпендикуляров к линиям действия этих скоростей в точках Q_3 , T_3 определяется мгновенный центр скоростей P_3 звена 3. Зная P_3 , по известной скорости ведущей точки A и векторному отношению $\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}$ определяется скорость \bar{v}_B точки B звена 3. По скорости \bar{v}_B звена 3 и известному его мгновенному центру скоростей (МЦС) P_3 устанавливаются скорости \bar{v}_R и \bar{v}_C точек R и C звена 3. Скорости всех остальных точек механизма, включая их вспомогательные, находятся просто - путем рассмотрения соответствующих двухповодковых групп.

Для определения ускорений по ложным значениям угловых ускорений ε_5^* , ε_7^* и истинным значениям угловых скоростей ω_5 , ω_7 условно ведущих звеньев 5, 7 находятся векторы ложных ускорений $\bar{w}_{Q_3}^*$, $\bar{w}_{T_3}^*$ вспомогательных точек Q_3 , T_3 . Нормальные составляющие ложных ускорений $\bar{w}_{Q_3}^*$ и $\bar{w}_{T_3}^*$ являются истинными. Проектированием этих ускорений соответственно на прямые P_3Q_3 и P_3T_3 находятся истинные нормальные ускорения $\bar{w}_{Q_3}^n$ и $\bar{w}_{T_3}^n$ точек Q_3 и T_3 звена 3. Откуда из векторных соотношений

$$\bar{w}_{P_3}^* = \bar{w}_{Q_3}^n + \bar{w}_{P_3Q_3}^n + \bar{w}_{Q_3}^{\tau*} + \bar{w}_{P_3Q_3}^{\tau*};$$

$$\bar{w}_{P_3}^* = \bar{w}_{T_3}^n + \bar{w}_{P_3T_3}^n + \bar{w}_{T_3}^{\tau*} + \bar{w}_{P_3T_3}^{\tau*}$$

определяется вектор $\bar{w}_{P_3}^*$ ложного ускорения мгновенного центра скоростей P_3 звена 3.

Это ложное ускорение $\bar{w}_{P_3}^*$ будет истинным. По известным векторам истинных ускорений $\bar{w}_{P_3}^*$ точки P_3 и \bar{w}_A ведущей точки A и векторным соотношениям

$$\bar{w}_B = \bar{w}_A + \bar{w}_{BA}^n + \bar{w}_{BA}^{\tau*};$$

$$\bar{w}_B = \bar{w}_{P_3} + \bar{w}_{BP_3}^n + \bar{w}_{BP_3}^{\tau*}$$

находится вектор \bar{w}_B ускорения точки B . По ускорениям \bar{w}_{P_3} и \bar{w}_B двух точек P_3 и B

звена 3 определяются ускорения шарнирных точек C и R этого звена.

Ускорения всех остальных звеньев механизмов легко получить по соответствующим двухповодковым группам. Изложенный метод вспомогательных точек и мгновенных центров скоростей справедлив для любых МВК третьего вида.

4.2.3. Анализ перемещений, скоростей и ускорений МВК со многими степенями свободы

При проектировании каждого векторного уравнения замкнутости МВК на координатные оси получается пара уравнений вида:

$$\sum_i l_i \cos \varphi_i = 0; \quad \sum_i l_i \sin \varphi_i = 0, \quad (4.2.4)$$

где l_i - длина i -го звена; i - индекс, значения которого "пробегают" все номера звеньев, входящих в рассматриваемый контур; φ_i - угол между направлением оси i -го звена и осью абсцисс.

Дифференцированием по времени t равенства (4.2.4) с учетом $\dot{\varphi}_i = \dot{\varphi}_i(t)$ получено:

$$\sum_i l_i \sin \varphi_i \dot{\varphi}_i = 0; \quad \sum_i l_i \cos \varphi_i \dot{\varphi}_i = 0. \quad (4.2.5)$$

Система уравнений (4.2.5) с учетом деления звеньев на входные и выходные может быть записана в виде:

$$\sum_{j=1}^n a_{ji}(\bar{\varphi}) \dot{\varphi}_i = \sum_{k=1}^w b_{jk}(\bar{q}) \dot{q}_k \quad (j = \bar{1}, n), \quad (4.2.6)$$

где n - число входных звеньев механизма; $a_{ji}(\bar{\varphi})$ - элементы матрицы Якоби системы

уравнений вида (4.2.4); $\bar{\varphi} = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)^T$ - вектор угловых координат выходных звеньев механизма; w - число степеней свободы механизма; $\bar{q} = (q_1, \dots, q_w)^T$ - вектор обобщенных координат.

Система уравнений (4.2.6) имеет решение относительно угловых скоростей $\dot{\varphi}_i$ ($i = \bar{1}, n$) во всех неособых положениях механизма. Особыми называются такие положения механизма, которые удовлетворяют условию

$$\det \|a_{ji}(\bar{\varphi})\|_{i,j=1}^n = 0. \quad (4.2.7)$$

Решение системы (4.2.6) во всех неособых положениях

$$\dot{\varphi}_i = \sum_{k=1}^w c_{ik}(\bar{\varphi}, \bar{q}) \dot{q}_k \quad (i = \overline{1, n}), \quad (4.2.8)$$

где

$$c_{ik}(\bar{\varphi}, \bar{q}) = \frac{1}{\det \|a_{ji}(\bar{\varphi})\|} \sum_{j=1}^n b_{jk}(\bar{q}) A_{ji}(\bar{\varphi});$$

$A_{ji}(\bar{\varphi})$ - алгебраическое дополнение элемента a_{ji} матрицы Якоби $A(\bar{\varphi})$.

Система n дифференциальных уравнений первого порядка (4.2.8) ввиду гладкости функций в правых частях согласно основной теореме Коши имеет при заданных начальных условиях $\bar{\varphi}(0) = \bar{\varphi}_0$ единственное непрерывное решение, которое соответствует перемещению механизма в определенной, соответствующей начальному положению сборке.

Угловые ускорения звеньев МВК в неособых положениях определяются дифференцированием (4.2.8) по времени.

4.3. АНАЛИЗ ДИНАМИКИ

4.3.1. Графоаналитическая кинестатика МВК второго и третьего видов

Пусть на звенье механизма Ассура (рис. 4.3.1) действуют приведенные к одной равнодействующей внешние силы, включая силы инерции $\bar{P}_1, \dots, \bar{P}_9$. По известной линии действия уравновешивающей силы \bar{P}_{y1} , приложенной в точке A ведущего звена, определяется ее величина с помощью метода жесткого рычага Н. Е. Жуковского. Механизм под действием всех внешних сил и уравновешивающей силы \bar{P}_{y1} находится в состоянии равновесия. Уравнения моментов сил, действующих на ведущее звено 1 и поводки 3, 5 и 7 относительно точек E, H, L ,

$$\sum_i M_0(\bar{F}_{1i}) = 0; \quad \sum_i M_E(\bar{F}_{3i}) = 0;$$

$$\sum_i M_H(\bar{F}_{5i}) = 0; \quad \sum_i M_L(\bar{F}_{7i}) = 0.$$

С учетом $\bar{R}_{kj} = -\bar{R}_{jk}$ находятся составляющие сил реакций $\bar{R}_{12}^{\tau}, \bar{R}_{34}^{\tau}, \bar{R}_{56}^{\tau}, \bar{R}_{78}^{\tau}$ на звенья 1, 3, 5, 7 со стороны соответствующих контурных звеньев 2, 4, 6, 8.

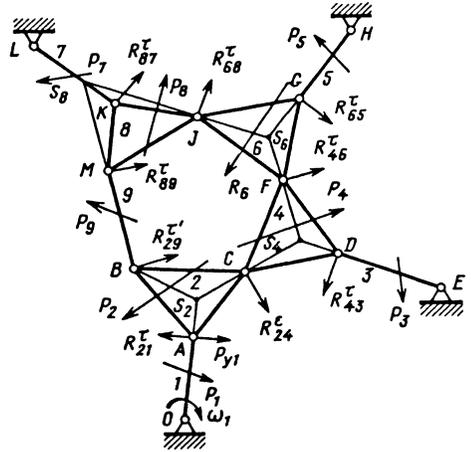


Рис. 4.3.1. Схема действия сил на механизм Ассура

Из уравнений $\sum_i M_B(\bar{F}_{9i}) = 0$ определяются составляющие силы реакции $\bar{R}_{89}^{\tau} = -\bar{R}_{98}^{\tau}$. На пересечении линии звена BM с линией поводка 7 находится вспомогательная точка S_8 контурного звена 8 и строятся остальные вспомогательные точки S_6, S_4, S_2 . Из уравнений моментов

$$\begin{aligned} \sum_i M_{S8}(\bar{F}_{8i}) &= 0; & \sum_i M_{S6}(\bar{F}_{6i}) &= 0; \\ \sum_i M_{S4}(\bar{F}_{4i}) &= 0; & \sum_i M_{S2}(\bar{F}_{2i}) &= 0 \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

определяются составляющие сил реакций соответственно $\bar{R}_{68}^{\tau}, \bar{R}_{46}^{\tau}, \bar{R}_{24}^{\tau}, \bar{R}_{92}^{\tau}$. Из уравнения $\sum_i M_M(\bar{F}_{9i}) = 0$ следует $\bar{R}_{29}^{\tau} = -\bar{R}_{92}^{\tau}$.

Таким образом, получены составляющие \bar{R}_{92}^{τ} и \bar{R}_{92}^{ξ} сил реакций в шарнире B , по которым можно найти вектор силы реакции \bar{R}_{29}^{τ} . После этого рассматриваются двухповод-

ковые группы Ассура П (2, 1), П (4, 3), П (6, 5), П (8, 7) и определяются силы реакций во всех остальных кинематических парах механизма.

Для силового анализа МВК третьего вида на примере механизма пятого класса (см. рис. 4.2.4) определяется с помощью метода жесткого рычага Жуковского уравнивающая сила \bar{P}_{y1} , приложенная в точке *A* ведущего звена 1. За условно ведущее принято звено поводка 5. Тогда механизм сводится к рассмотренному выше механизму Ассура, к которому в точке *B* бесповодкового звена 3 присоединена двухповодковая группа П (2, 1). Таким образом, силовой анализ МВК всех видов сводится к силовому анализу механизмов второго и третьего классов и механизмов Ассура.

4.3.2. Аналитическая кинестатика МВК второго и третьего видов

При аналитическом решении задачи кинестатики МВК координаты вспомогательных точек S_8, S_6, S_4, S_2 (см. рис. 4.3.1) определяются как координаты точек пересечения соответствующих прямых [8]. Например, координаты X_{S_8}, Y_{S_8} точки S_8 находятся решением следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} Y_{S_8} - X_{S_8} \operatorname{tg}\varphi_9 &= Y_B - X_B \operatorname{tg}\varphi_9; \\ Y_{S_8} - X_{S_8} \operatorname{tg}\varphi_7 &= Y_L - X_L \operatorname{tg}\varphi_7. \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

Эта система не имеет решения в том случае, когда определитель ее

$$\operatorname{tg}\varphi_9 - \operatorname{tg}\varphi_7 = 0, \quad (4.3.3)$$

т.е. при условии параллельности прямых. При этом может быть два случая:

- 1) ранг матрицы системы (4.3.2) меньше ранга ее расширенной матрицы - точка S_8 уходит в бесконечность, прямые *LK* и *BM* параллельны;
- 2) ранги указанных матриц совпадают - точка S_8 не определена, прямые *LK* и *BM* совпадают.

Во втором случае следует перейти к определению координат вспомогательных точек в обратном порядке S_2, S_4, S_6, S_8 . Если при этом какая-либо из точек также не определена, то задача силового анализа механизма группы Ассура неразрешима, так как механизм находится в особом положении.

Кроме указанных условий прерывания процесса построения вспомогательных точек могут иметь место условия вырожденности уравнений равновесия сил и моментов относительно искомым сил реакций. Так, уравнения (4.3.1) не имеют решений относительно R_{68}^r ,

$R_{46}^r, R_{24}^r, R_{92}^r$ соответственно при следующих условиях (см. рис. 4.3.1):

$$l_{S_8J} = 0; l_{S_8F} = 0; l_{S_4C} = 0; l_{S_2B} = 0, \quad (4.3.4)$$

означающих совпадение точек S_8, S_6, S_4, S_2 соответственно с точками *J, F, C, B*. Уравнение равновесия проекций сил, действующих на звено 2, на прямую, перпендикулярную к S_2B ,

$$\begin{aligned} R_{92}^r \sin(\varphi_9 - \varphi_{S_2B}) + \\ + R_{92}^r \cos(\varphi_9 - \varphi_{S_2B}) - R_{92}^r = 0 \end{aligned}$$

не имеет решения относительно R_{92}^r , если

$$\sin(\varphi_9 - \varphi_{S_2B}) = 0, \quad (4.3.5)$$

означающее пересечение трех прямых *BM, OA* и S_4S_2 в одной точке.

Таким образом, задача кинестатики МВК второго вида не имеет аналитического решения в их особых положениях, определяемых условиями неопределенности вспомогательных точек и условиями вырожденности уравнений равновесия сил и моментов (4.3.4), (4.3.5).

4.3.3. Уравнения динамики МВК

С точки зрения динамики любой МВК без учета упругости звеньев и трения в кинематических парах можно рассматривать как голономную механическую систему с идеальными связями. Уравнения связей механизма могут быть получены как уравнения кинематики на основе метода замкнутых векторных контуров [12]. В уравнениях кинематики МВК вида (4.2.4) зависимые координаты не могут быть выражены в явном аналитическом виде через обобщенные координаты, поэтому уравнения движения МВК должны быть рассмотрены совместно с системой тригонометрических уравнений связей.

Ниже приведен метод, позволяющий получить уравнения динамики МВК в явном аналитическом виде [10], который основан на представлении уравнений голономных связей

вида (4.2.4) в дифференциальной форме (4.2.8) с последующим интегрированием их совместно с уравнениями движения. При этом порядок решаемой системы дифференциальных уравнений движения повысится, однако получаемая система может быть решена явными методами численного интегрирования.

Пусть рассматриваемый МВК имеет W степеней свободы, т.е. число входных звеньев равно W . Число выходных звеньев примем n , тогда число подвижных звеньев МВК $N = n + W$. Пусть $\bar{q} = (q_1, \dots, q_W)^T$;

$\bar{\varphi} = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)^T$ - векторы соответственно обобщенных и зависимых координат механизмов.

Векторы координат центров масс и угловых положений подвижных звеньев, вычисляемых как функции \bar{q} и $\bar{\varphi}$:

$$\bar{X} = \bar{X}(\bar{q}, \bar{\varphi}) = (X_1, \dots, X_N)^T;$$

$$\bar{Y} = \bar{Y}(\bar{q}, \bar{\varphi}) = (Y_1, \dots, Y_N)^T;$$

$$\bar{\psi} = \bar{\psi}(\bar{q}, \bar{\varphi}) = (\psi_1, \dots, \psi_N)^T.$$

Тогда скорости центров масс и угловые скорости звеньев с учетом (4.2.8) можно выразить через обобщенные скорости:

$$\dot{\bar{X}} = \left(\frac{\partial \bar{X}}{\partial \bar{q}} + \frac{\partial \bar{X}}{\partial \bar{\varphi}} C \right) \dot{\bar{q}} = \mathfrak{a} \dot{\bar{q}};$$

$$\dot{\bar{Y}} = \left(\frac{\partial \bar{Y}}{\partial \bar{q}} + \frac{\partial \bar{Y}}{\partial \bar{\varphi}} C \right) \dot{\bar{q}} = Y \dot{\bar{q}};$$

$$\dot{\bar{\psi}} = \left(\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{q}} + \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{\varphi}} C \right) \dot{\bar{q}} = \Phi \dot{\bar{q}},$$

где $C = C(\bar{q}, \bar{\varphi})$ - матрица передаточных функций механизма; $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}(\bar{q}, \bar{\varphi})$, $Y = Y(\bar{q}, \bar{\varphi})$, $\Phi = \Phi(\bar{q}, \bar{\varphi})$ - матрицы $N \times W$.

Кинетическая энергия механизма, выраженная через обобщенные скорости,

$$T = 0,5 \left(\dot{\bar{X}}^T M \dot{\bar{X}} + \dot{\bar{Y}}^T M \dot{\bar{Y}} + \dot{\bar{\psi}}^T J \dot{\bar{\psi}} \right) = 0,5 \dot{\bar{q}}^T G(\bar{q}, \bar{\varphi}) \dot{\bar{q}},$$

где $M = \text{diag}\{m_1, \dots, m_N\}$, $J = \text{diag}\{J_1, \dots, J_N\}$ - диагональные матрицы соответственно масс и моментов инерции от-

носительно центров масс звеньев; $G(\bar{q}, \bar{\varphi}) = \mathfrak{a}^T M \mathfrak{a} + Y^T M Y + \Phi^T J \Phi = \|q_{kl}\|_{k, l=1}^W$ - матрица приведенных масс механизма.

Потенциальная энергия механизма может быть записана в виде:

$$P = q \sum_{v=1}^N m_v Y_v(\bar{q}, \bar{\psi}),$$

где q - ускорение свободного падения.

Из уравнений Лагранжа второго рода

$$\sum_{l=1}^W q_{kl} \ddot{q}_l + \sum_{l=1}^W \sum_{S=1}^W \left[\left(\frac{\partial q_{kl}}{\partial q_S} - \frac{1}{2} \frac{\partial q_{lS}}{\partial q_k} \right) + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial q_{kl}}{\partial \varphi_i} C_{il} - \frac{1}{2} \frac{\partial q_{lS}}{\partial \varphi_i} C_{ik} \right) \right] \dot{q}_i \dot{q}_S +$$

$$+ q \sum_{v=1}^N m_v \left(\frac{\partial Y_v}{\partial q_k} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial Y_v}{\partial \varphi_i} C_{ik} \right) = Q_k$$

$$(k = \overline{1, W}).$$

(4.3.6)

Эта система W дифференциальных уравнений второго порядка содержит $N = n + W$ неизвестных $q_1, \dots, q_W, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ и поэтому может быть проинтегрирована лишь вместе с уравнениями связи вида (4.2.4), неявно выражающих зависимые координаты механизма через обобщенные.

Для получения уравнений движения механизма в явном виде следует воспользоваться вместо системы уравнений голономных связей в конечной форме (4.2.4) уравнениями этих связей в дифференциальной форме (4.2.8). Системы уравнений (4.3.6) и (4.2.8), рассмотренные совместно, представляют собой систему дифференциальных уравнений в явном виде относительно неизвестных q_1, \dots, q_W , и для ее решения при заданных начальных условиях $\dot{q}_k = (\dot{q}_k) = \dot{q}_{k0}$; $k = \overline{1, W}$, $\varphi_i(t_0) = \varphi_{i0}$ ($i = \overline{1, n}$) могут быть использованы явные численные методы четвертого порядка точности.

4.4. СИНТЕЗ МЕХАНИЗМОВ ВЫСОКОГО КЛАССА НА ОСНОВЕ ИСХОДНЫХ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Обобщенные методы синтеза МВК [3, 11] основаны на использовании понятия исходной кинематической цепи (ИКЦ). В

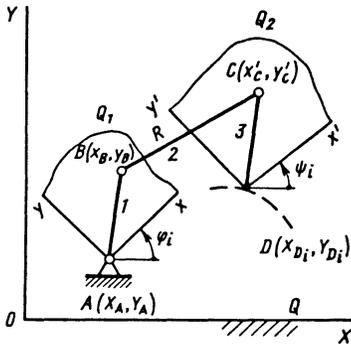


Рис. 4.4.1. Схема синтеза четырехзвенной незамкнутой кинематической цепи

первом методе в качестве исходной берется кинематическая цепь, состоящая из входного и выходного звеньев с заданными положениями и стойки.

Задача синтеза механизма сводится к синтезу присоединяющей цепи с отрицательной степенью подвижности. Во втором методе в качестве исходной берется четырехзвенная незамкнутая кинематическая цепь, включающая в качестве одного из звеньев стойку (рис. 4.4.1). Задача синтеза механизма сводится к

последовательности задач синтеза ИКЦ и ее модификаций [4].

4.4.1. Синтез ИКЦ

Пусть заданы N положений входного звена 1 и выходного звена 3 (рабочего органа) механизма, определяемые координатами его точки D и углами поворота вокруг этой точки. Требуется синтезировать ИКЦ $ABCD$, звенья 1 и 3 которой воспроизводили бы заданные положения входного и выходного звеньев проектируемого механизма.

Связывая неизменно со входным и выходным звеньями механизма соответственно две подвижные плоскости Q_1 и Q_2 , а с ними системы координат Ax и $Dx'y'$ можно определить соответствующие N конечно-удаленных положений плоскостей Q_1 и Q_2 . Взвешенная разность [13] для i -го положения плоскостей в виде

$$\Delta q_i = |B_i C_i|^2 - R^2 = (X_{C_i} - X_{B_i})^2 + (Y_{C_i} - Y_{B_i})^2 - R^2, \quad i = 1, N$$

где

$$\begin{bmatrix} X_{B_i} \\ Y_{B_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \varphi_i & -\sin \varphi_i \\ \sin \varphi_i & -\cos \varphi_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_B \\ Y_B \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} X_{C_i} \\ Y_{C_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{D_i} \\ Y_{D_i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \psi_i & -\sin \psi_i \\ \sin \psi_i & -\cos \psi_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_C \\ y'_C \end{bmatrix}.$$

Взвешенная разность является функцией семи искомых параметров ИКЦ ($X_A, Y_A, x_B, y_B, x'_C, y'_C, R$). Сумма квадратов взвешенной разности для заданных положений плоскостей

$$Q_1, Q_2: S = \sum_{i=1}^N \Delta q_i^2.$$

Определяются искомые параметры ИКЦ из условия минимума суммы S по этим параметрам итерационным методом [10, 13, 15].

1. Задаются начальные значения параметров x_B, y_B, x'_C, y'_C из конструктивных соображений.

2. Находятся неизвестные параметры X_A, Y_A, H_1 как решение линейной системы уравнений:

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{A_i}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{A_i} \tilde{Y}_{A_i} & \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{A_i} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{A_i} \tilde{Y}_{A_i} & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{A_i}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{A_i} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{A_i} & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{A_i} & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \\ H_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N R_{A_i}^2 \tilde{X}_{A_i} \\ \sum_{i=1}^N R_{A_i}^2 \tilde{Y}_{A_i} \\ \sum_{i=1}^N R_{A_i}^2 \end{bmatrix}, \quad (4.4.1)$$

где

$$R_A^2 = 0,5(\tilde{X}_A^2 + \tilde{Y}_A^2); \quad H_1 = 0,5(R^2 - X_A^2 - Y_A^2);$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{X}_A \\ \tilde{Y}_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{D_i} \\ Y_{D_i} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \cos \varphi_i - \sin \varphi_i \\ \sin \varphi_i - \cos \varphi_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \psi_i - \sin \psi_i \\ \sin \psi_i - \cos \psi_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_C \\ y'_C \end{bmatrix}.$$

Откуда

$$R = (X_A^2 + Y_A^2 + 2H_1)^{0,5}.$$

3. Находятся значения x_B, y_B, H_2 как решение линейной системы уравнений:

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{B_i}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{B_i} \tilde{Y}_{B_i} & \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{B_i} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{B_i} \tilde{Y}_{B_i} & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{B_i}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{B_i} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{B_i} & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{B_i} & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ H_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N R_{B_i}^2 \tilde{X}_{B_i} \\ \sum_{i=1}^N R_{B_i}^2 \tilde{Y}_{B_i} \\ \sum_{i=1}^N R_{B_i}^2 \end{bmatrix},$$

где

$$R_{B_i}^2 = 0,5(\tilde{X}_{B_i}^2 + \tilde{Y}_{B_i}^2); \quad H_2 = 0,5(R^2 - x_B^2 - y_B^2);$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{X}_{B_i} \\ \tilde{Y}_{B_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_i \sin \varphi_i \\ -\sin \varphi_i \cos \varphi_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{D_i} - X_A \\ Y_{D_i} - Y_A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos(\psi_i - \varphi_i) - \sin(\psi_i - \varphi_i) \\ \sin(\psi_i - \varphi_i) \cos(\psi_i - \varphi_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_C \\ y'_C \end{bmatrix}.$$

4. Вычисляются значения параметров x'_C, y'_C, H_3 как решение линейной системы уравнений:

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{C_i}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{C_i} \tilde{Y}_{C_i} & \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{C_i} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{C_i} \tilde{Y}_{C_i} & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{C_i}^2 & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{C_i} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{X}_{C_i} & \sum_{i=1}^N \tilde{Y}_{C_i} & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_C \\ y'_C \\ H_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N R_{C_i}^2 \tilde{X}_{C_i} \\ \sum_{i=1}^N R_{C_i}^2 \tilde{Y}_{C_i} \\ \sum_{i=1}^N R_{C_i}^2 \end{bmatrix},$$

где

$$R_{C_i}^2 = 0,5(\tilde{X}_{C_i}^2 + \tilde{Y}_{C_i}^2); \quad H_3 = 0,5(R^2 - x'_C{}^2 - y'_C{}^2);$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{X}_{C_i} \\ \tilde{Y}_{C_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi_i \sin \psi_i \\ -\sin \psi_i \cos \psi_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{D_i} - X_A \\ Y_{D_i} - Y_A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos(\psi_i - \varphi_i) \sin(\psi_i - \varphi_i) \\ -\sin(\psi_i - \varphi_i) \cos(\psi_i - \varphi_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \end{bmatrix}.$$

Циклическое повторение этапов 2-4 дает минимум функции с требуемой точностью. Значение искоемых параметров

$(X_A^*, Y_A^*, R^*, x_B, y_B, x'_C, y'_C)$, доставляющие минимум целевой функции S определяют

координаты X_A^*, Y_A^* точки $A \in Q$, x_B^*, y_B^* точки $B \in Q_1$, x_C^*, y_C^* точки $C \in Q_2$ и длину R^* звена BC . Совмещая с круговыми точками B и C плоские шарниры, получим искомую ИКЦ в виде незамкнутой цепи $ABCD$.

При проектировании механизмов часть параметров ИКЦ может быть задана из конструктивных соображений. В этих случаях решаются задачи синтеза модификаций ИКЦ (см. рис. 4.4.1), которые, очевидно, представляют частный случай синтеза самой ИКЦ. Если заданы координаты X_A, Y_A шарнира A на неподвижной плоскости OXY , то решается задача синтеза круговых квадратических точек в относительном движении плоскостей Q_1 и Q_2 по пяти искомым параметрам $(x_B, y_B, R, x_C', y_C')$. Если заданы координаты $x_B = y_B = 0$ шарнира B на плоскости Q_1 , то решается задача синтеза круговых точек по пяти искомым параметрам $(X_A, Y_A, R, x_C', y_C')$, а если заданы координаты $x_C' = y_C' = 0$ шарнира C на плоскости Q_2 , то - задача синтеза круговых точек по пяти искомым параметрам (X_A, Y_A, R, x_B, y_B) .

4.4.2. Структурно-кинематический синтез МВК на основе ИКЦ

С точки зрения структурного синтеза механизмов интересен тот факт, что для синтеза круговых квадратических точек и наложения геометрических связей на относительное движение звеньев ИКЦ можно использовать модификации ИКЦ, реализующие технически операцию "введение поводка" [10]. В результате наложения требуемого числа геометрических связей на движение звеньев ИКЦ к ним добавляется соответствующее число поводков, что создает определенную структуру механизма, т.е. выбор вариантов наложения геометрических связей определяет в итоге структуру спроектированного механизма.

Основные этапы обобщенного метода структурно-кинематического синтеза плоских рычажных механизмов на основе ИКЦ [10] заключается в следующем:

- 1) синтез ИКЦ по заданным положениям входного и выходного звена проектируемого механизма;
- 2) выбор вариантов наложения геометрической связи на звенья ИКЦ;
- 3) синтез круговых квадратических точек на основе синтеза модификаций ИКЦ.

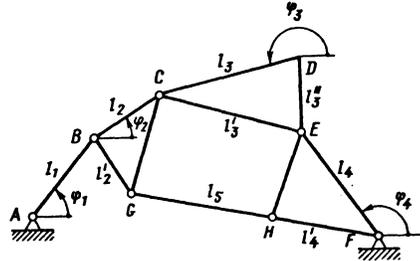


Рис. 4.4.2. Схема синтеза перемещающего механизма четвертого класса

Основные положения обобщенного метода рассмотрены на примере синтеза перемещающего механизма четвертого класса (рис. 4.4.2). Целевая функция синтеза ИКЦ, представленная кинематической цепью $ABCD$,

$$S_1 = \sum_{i=1}^N [\Delta q_i(X_A, Y_A, R_1, x_B, y_B, x_C', y_C')]^2.$$

Минимизируя S_1 по этим семи параметрам, например, с помощью изложенного выше метода, можно найти параметры ИКЦ $ABCD$. Искомые параметры механизма

$$l_1 = (x_B^2 + y_B^2)^{0,5}, l_2 = R_1, l_3 = (x_C'^2 + y_C'^2)^{0,5}$$

Следующий этап синтеза механизма - отыскание круговых точек в движении звена 3 относительно стойки на основе синтеза модификации ИКЦ. Отожествляя модификацию ИКЦ с кинематической цепью FED механизма, можно получить целевую функцию синтеза кинематической цепи FED :

$$S_2 = \sum_{i=1}^N [\Delta q_i(X_F, Y_F, R_2, x_E', y_E')]^2.$$

Минимизацией функции S_2 по пяти параметрам найдены оптимальные значения параметров ИКЦ FED , откуда искомые параметры механизма

$$l_3 = \left[(x_E' - x_C')^2 + (y_E' - y_C')^2 \right]^{0,5},$$

$$l_3'' = (x_E'^2 + y_E'^2)^{0,5}, l_4 = R_2.$$

Заключительный этап синтеза - отыскание круговых точек в относительном движении звеньев 2 и 4 полученной на предыдущем этапе кинематической цепи. Отожествление

ИКЦ с кинематической цепью *FHGB* дает целевую функцию синтеза цели *FHGB*

$$S_3 = \sum_{i=1}^N [\Delta q_i(x_H, y_H, R_3, x'_G, y'_G)]^2.$$

При наличии ограничений на параметры механизма используется в качестве целевой функции сумма целевых функций ИКЦ и ее модификаций.

4.4.3. Градиентные методы нахождения круговых квадратичских точек

Среди известных методов нахождения круговых квадратичских точек наиболее эффективными являются градиентные методы, особенно основанные на представлении суммы $S(X_A, Y_A, R, x_C, y_C)$ для модификаций ИКЦ в виде функции двух переменных x_C, y_C [2]. Для кратности принято $X_i = \tilde{X}_{A_i}, Y_i = \tilde{Y}_{A_i}, H = H_1$ и $p = x_C$ и y_C . Дифференцирование функции S по p :

$$\frac{\partial S}{\partial p} = 2 \sum_{i=1}^N \Delta q_i \frac{\partial \Delta q_i}{\partial p},$$

где

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta p_i}{\partial p} = & -2 \left(\frac{\partial X_A}{\partial p} X_i + X_A \frac{\partial X_i}{\partial p} + \frac{\partial Y_A}{\partial p} Y_i + \right. \\ & \left. + Y_A \frac{\partial Y_i}{\partial p} + \frac{\partial H}{\partial p} + X_i \frac{\partial X_i}{\partial p} + Y_i \frac{\partial Y_i}{\partial p} \right). \end{aligned}$$

Для нахождения производных $\frac{\partial X_A}{\partial p}$,

$\frac{\partial Y_A}{\partial p}, \frac{\partial H}{\partial p}$ дифференцируется уравнение (4.4.1) по p , предварительно представленное в виде

$$MX = Q. \tag{4.4.2}$$

Тогда

$$\frac{\partial M}{\partial p} X + M \frac{\partial X}{\partial p} = \frac{\partial Q}{\partial p}. \tag{4.4.3}$$

Откуда

$$\frac{\partial X}{\partial p} = M^{-1} \left(\frac{\partial Q}{\partial p} - \frac{\partial M}{\partial p} \right),$$

где X - решение уравнения (4.4.2).

Вторые производные от функции S по параметрам x_C и y_C :

$$\frac{\partial^2 S}{\partial p^2} = 2 \sum_{i=1}^N \left[\frac{\partial^2 \Delta q_i}{\partial p^2} \Delta q_i + \left(\frac{\partial \Delta q_i}{\partial p} \right)^2 \right];$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x_C \partial y_C} = 2 \sum_{i=1}^N \left[\frac{\partial \Delta q_i}{\partial x_C \partial y_C} + \frac{\partial \Delta q_i}{\partial x_C} \frac{\partial \Delta q_i}{\partial y_C} \right] \times$$

$$\times (p \in \{x_C, y_C\}).$$

Здесь

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Delta q_i}{\partial p^2} = & -2 \sum_{i=1}^N \left[\frac{\partial^2 X_A}{\partial p^2} X_i + \frac{\partial^2 Y_A}{\partial p^2} Y_i + \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 H}{\partial p^2} + 2 \left(\frac{\partial X_i}{\partial p} \frac{\partial X_A}{\partial p} + \frac{\partial Y_i}{\partial p} \frac{\partial Y_A}{\partial p} \right) - 1 \right]; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 \Delta q_i}{\partial x_C \partial y_C} = -2 \sum_{i=1}^N \left[\frac{\partial^2 X_A}{\partial x_C \partial y_C} X_i + \frac{\partial^2 Y_A}{\partial x_C \partial y_C} Y_i + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 H}{\partial x_C \partial y_C} + \left(\frac{\partial X_A}{\partial x_C} + \frac{\partial Y_A}{\partial y_C} \right) \cos \psi_i - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{\partial X_A}{\partial x_C} - \frac{\partial Y_A}{\partial y_C} \right) \sin \psi_i \right].$$

(4.4.4)

Вторые производные в уравнениях (4.4.4) получаются дифференцированием уравнения (4.4.3) по параметрам x_C и y_C :

$$\frac{\partial^2 M}{\partial p^2} X + 2 \frac{\partial M}{\partial p} \frac{\partial X}{\partial p} + M \frac{\partial^2 X}{\partial p^2} = \frac{\partial^2 Q}{\partial p^2};$$

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x_C \partial y_C} X + \frac{\partial M}{\partial x_C} \frac{\partial X}{\partial y_C} + M \frac{\partial^2 X}{\partial x_C \partial y_C} +$$

$$+ \frac{\partial M}{\partial y_C} \frac{\partial X}{\partial x_C} = \frac{\partial^2 Q}{\partial x_C \partial y_C}.$$

Откуда

$$\frac{\partial^2 X}{\partial p^2} = -M^1 \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial p^2} - \frac{\partial^2 M}{\partial p^2} X - 2 \frac{\partial M}{\partial p} \frac{\partial X}{\partial p} \right);$$

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x_C \partial u_C} = -M^1 \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x_C \partial u_C} - \frac{\partial^2 M}{\partial x_C \partial u_C} X - \frac{\partial M}{\partial x_C} \frac{\partial X}{\partial u_C} - \frac{\partial M}{\partial u_C} \frac{\partial X}{\partial x_C} \right).$$

Сравнительный анализ сходимости методов кинематической инверсии [15], наискорейшего градиентного спуска, сопряженных градиентов и метода Ньютона при решении задачи минимизации S как функции двух переменных x_C и u_C показал, что градиентные методы, особенно метод Ньютона, имеют большую скорость сходимости и отыскивают минимум с высокой точностью.

4.5. МАНИПУЛЯЦИОННЫЕ УСТРОЙСТВА ВЫСОКИХ КЛАССОВ

На основе изложенных методов синтеза МВК спроектированы принципиально новые грузоподъемные, погрузочно-разгрузочные, манипуляционные устройства и схваты промышленных роботов.

Шарнирно-рычажный подъемник с прямолинейно-направляющей стрелой (рис. 4.5.1). Подъемник предназначен для проведения работ на высоте при строительстве, эксплуатации и ремонте гражданских и промышленных со-

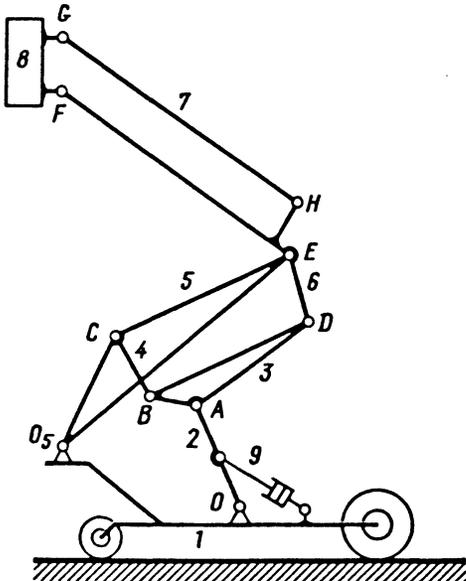


Рис. 4.5.1. Шарнирно-рычажный подъемник с прямолинейно-направляющей стрелой

оружений, линий электропередач и связи, в сельском хозяйстве при опрыскивании и стрижке плодовых деревьев, уборке урожая, может служить операторской вышкой при кинесемках, используется при тушении пожаров и т.д.

К опорной раме 1 шасси шарнирно прикреплено коромысло 2, к которому в точке А (и к раме в точке O_5) также посредством шарниров присоединена структурная группа четвертого класса из звеньев 3, 4, 5 и 6. К звену 6 в точках F и H прикреплена структурная группа второго класса, образованная звеньями 7 и 8, ориентирующая рабочую платформу 8 в движении. Подъем и опускание стрелы осуществляется гидроцилиндром 9. Подъемник по сравнению с существующими прототипами компактен, устойчив в работе, прост в управлении и обслуживании, обладает большой грузоподъемностью и надежностью.

Грузоподъемное устройство (рис. 4.5.2). Устройство, представляющее собой связанный с неподвижной платформой прямолинейно-направляющий механизм четвертого класса, предназначено для проведения работ как на высоте, так и на глубине относительно уровня установки его платформы. В частности, оно может быть использовано для подъема груза из глубины на высоту при ремонте и эксплуатации доменных печей.

К ведущему звену 2 устройства в точке А и к раме 1 в точке O_5 шарнирно присоединена структурная группа четвертого класса. К звеньям 5 и 6 данной группы в шарнирах F и H присоединены звенья 7 и 8, образующие структурную группу второго класса. Такая конструкция является компактной в нерабочем состоянии, имеет дополнительный вылет и простую систему управления захватным устройством.

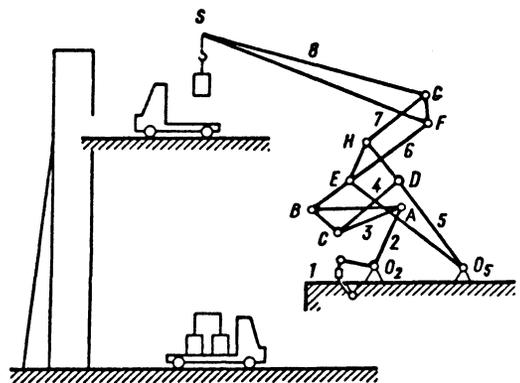


Рис. 4.5.2. Грузоподъемное устройство

Промышленный штабелер для складских работ (рис. 4.5.3). Он предназначен для погрузки, разгрузки, перевозки и складирования штучных грузов и представляет собой устройство для перемещения предметов в горизонтальной и вертикальной плоскостях.

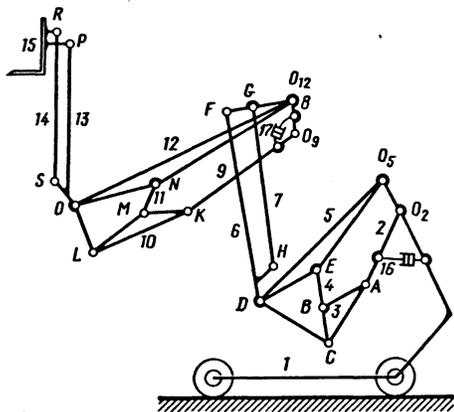


Рис. 4.5.3. Промышленный штабелер для складских работ

Площадка 15, на которой устанавливают перегружаемый объект, соединена с рамой самоходного шасси 1, посредством двух соединенных между собой механизмов четвертого класса. Коромысло является ведущим звеном первого механизма четвертого класса, состоящего из звеньев 3-6. К звену 6 шарнирно в точках *F* и *H* прикреплена структурная группа второго класса, из звеньев 7 и 8. При определенных соотношениях размеров звеньев механизма точки *F* и *G* имеют горизонтальные траектории, близкие к прямой на большом участке.

Звено 8 служит стойкой для второго механизма четвертого класса, у которого ведущим звеном является коромысло 9. К нему в точке *K* и к стойке в точке O_{12} шарнирно присоединена структурная группа четвертого класса со звеньями 10-13, относительные перемещения которых обуславливают вертикальное перемещение захватного устройства. К звену 13 в точках *P* и *S* шарнирно присоединена структурная группа второго класса из звеньев 14 и 15, которая ориентирует захватное устройство в движении. Горизонтальное перемещение захватного устройства осуществляется гидроцилиндром 16, а вертикальное - гидроцилиндром 17. Особым свойством штабелера является его компактность в нерабочем состоянии и простота управления захватным устройством.

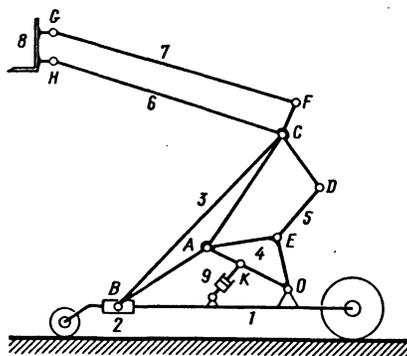


Рис. 4.5.4. Погрузчик

Погрузчик (рис. 4.5.4). Он предназначен для загрузки, разгрузки, транспортирования и штабелирования различных грузов в железнодорожных вагонах, контейнерах, автофургонах, морских и речных судах, малогабаритных складских помещениях.

Захватное устройство 8 связано с самоходным шасси 1 с помощью стрелы, представляющей собой прямолинейно-направляющий механизм, который состоит из ведущего звена 4 и звеньев 2, 3, 5, 6, образующих замкнутый изменяемый контур *AEDC*. Звено 7, шарнирно связано со звеном 6 и захватным устройством 8 в точках *G* и *F*, служит для ориентации захватного устройства. Поднимается и опускается стрела посредством гидроцилиндра 9. Погрузчик компактен, имеет небольшую массу, устойчив в работе, легок в управлении.

Подъемная площадка (рис. 4.5.5). Площадка устройства имеет вертикальное поступательное перемещение и служит для проведения строительных, спасательных, ремонтных и других видов работ на высоте.

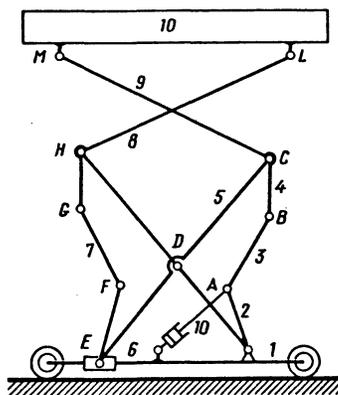


Рис. 4.5.5. Подъемная площадка

Площадка 10 связана с шасси транспортного средства посредством двухконтурного перемещающего механизма, состоящего из ведущего звена 2 и кинематической цепи со звеньями 3-7, образующих два изменяемых контура $ABCD$ и $DFGH$, взаимные соотношения размеров звеньев которых обеспечивают прямолинейность траекторий точек M и L . Подъем площадки осуществляется гидроцилиндром 10. Устройство имеет упрощенный гидропривод, большую продольную и поперечную жесткость за счет использования в кинематической схеме замкнутых контуров. Отличается значительной устойчивостью из-за постоянства центра масс, компактностью, простотой в обслуживании и эксплуатации.

Манипулятор для съема глета (окислов) с поверхности расплавленного свинца в изложницах на карусельно-разливочной машине (рис. 4.5.6). Манипулятор представляет собой шестизвенный кулачко-рычажный механизм четвертого класса, преобразующий вращательное движение ведущего звена 2 в возвратно-поступательное движение ведомого звена 5, равномерное при прямом ходе. К кривошипу 2, жестко связанному с кулачком 1, в точке A и к ползуну 5, взаимодействующему с прямолинейной направляющей 7 с роликом 8 в точках D и E , шарнирно присоединена кинематическая цепь из звеньев 3, 4 и 6, образующих с ползунком 5 структурную группу четвертого класса с контуром $BCDE$. Рабочий орган 9 манипулятора прикреплен к ползуну.

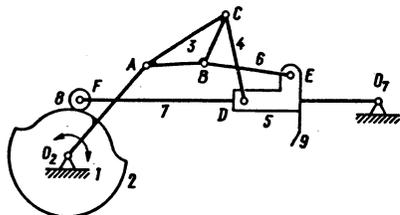


Рис. 4.5.6. Манипулятор для съема глета

Манипулятор позволяет заменить одного оператора, выполняющего монотонную работу по съему глета с поверхности чашек на карусельно-разливочной машине во вредных условиях повышенной температуре и химической активности среды.

Захватные устройства (рис. 4.5.7). Они предназначены для захвата и удержания перемещаемого предмета.

Захватное устройство, показанное на рис. 4.5.7, а, характеризуется поступательным движением губок 5 и 8, которые взаимодействуют через звенья 4, 6 и 7, 9 с двухшарнирным ползуном 3, установленным на штоке гидроцилиндра 2. Захватное устройство, показанное на рис. 4.5.7, б, может приспосабливаться к форме захватываемого объекта (адаптивное захватное устройство). Губки 6 и 9 устройства движутся поступательно вследствие их соединения со стойкой 1 с помощью параллелограммов, содержащих параллельные коромысла 5, 7 и 8, 10. Губки устройства выполнены в виде механизмов четвертого класса с двумя ведущими звеньями. К ведущим звеньям 11, 14 и 17, 21 присоединены структурные группы четвертого класса из звеньев 12, 13, 15, 16 и 18, 19, 20, 22, которые позволяют самоустанавливаться элементам устройства по поверхности захватываемого объекта. Масса элементов и захватываемого объекта воспринимается пружинами 23.

Захватное устройство с электромагнитными прихватами (рис. 4.5.7, в) предназначено для захвата и удержания плоских объектов произвольной формы. В нем использован кулисный механизм шестого класса с тремя ведущими звеньями 2, 6, 10. В узлах B , E , H механизма шестого класса установлены электромагнитные прихваты. Такое исполнение захватного устройства позволяет значительно расширить диапазон размеров и форм захватываемых объектов при одновременном увеличении точек контакта устройства и оно допускает оперативную перестройку геометрии захватного органа.

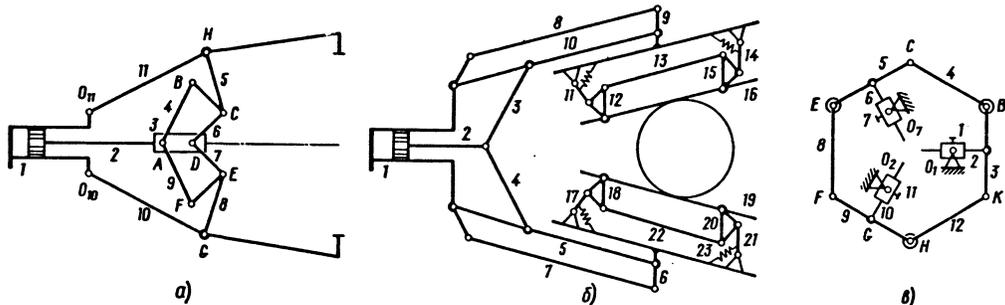


Рис. 4.5.7. Захватное устройство

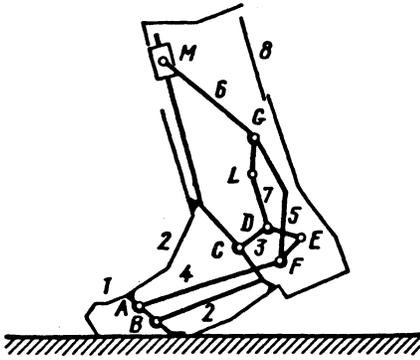


Рис. 4.5.8. Протез механизма голени

Протез механизма голени (рис. 4.5.8). Он обеспечивает движение механизма стопы по отношению к голени, близкое к естественному. В устройстве носок 1 стопы эластично связан с корпусом 2, который подвижен относительно гильзы голени 8 и соединен с ней приводной поступательной парой M . Звено AB жестко соединено с носком 1, а звено 2 - с корпусом. К звену 1 в точках A , B и к ползуну в точке M шарнирно присоединена структурная группа пятого класса третьего порядка из звеньев 2-7.

Протез механизма плеча (рис. 4.5.9). Он воспроизводит основные движения руки человека. В устройстве плечевой сустав 2, шарнирно связанный с основой 1 в точке A , имеет жесткое соединение с коромыслом O_2A . К звену O_2A в точке A и к основе 1 в точке O_5 шарнирно присоединена структурная группа четвертого класса из звеньев 3-6. Предплечье руки жестко соединено с звеном 6. Относительные перемещения звеньев, составляющих изменяемый контур, обеспечивают заданную криволинейную траекторию лучезапястного сустава 7.

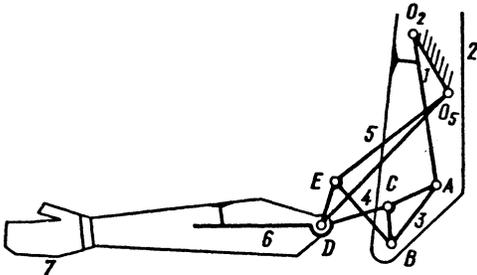


Рис. 4.5.9. Протез механизма плеча

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Артоболевский И. И. Теория механизмов и машин. М.: Наука, 1988. 638 с.
2. Байгунчиев С. У., Симмаков М. А. Градиентные методы нахождения круговых квадратических точек // Теория механизмов и машин. Алма-Ата: КазГУ, 1985. С. 3-14.
3. Джолдасбеков У. А. Графо-аналитические методы анализа и синтеза механизмов высоких классов. Алма-Ата: Наука, 1983. 256 с.
4. Джолдасбеков У. А. Манипуляционные устройства и адаптивные захваты на основе механизмов высоких классов. Т. 4. // Механика и научно-технический прогресс. М.: Машиностроение, 1988. С. 56-65.
5. Джолдасбеков У. А. Механизмы высоких классов в робототехнике // Теоретична и приложна механика: Доклады V Нац. конгр. по теор. и прикл. мех. София: Болгарская АН, 1985. Кн. 1. С. 276-284.
6. Джолдасбеков У. А., Байгунчиев Ж. Ж. Аналитическая кинематика рычажных механизмов высоких классов. Алма-Ата: КазГУ, 1980. 102 с.
7. Джолдасбеков У. А., Байгунчиев Ж. Ж. Теория и проблемы создания новых механизмов высоких классов // Успехи механики. Варшава, 1983. Вып. 3/4. Т. 6. С. 165-181.
8. Джолдасбеков У. А., Молдабеков М. М. Новые аналитические методы силового анализа механизмов высоких классов // Рычажные механизмы и манипуляционные устройства. Алма-Ата: КазГУ, 1989. С. 30-36.
9. Джолдасбеков У. А., Молдабеков М. М. Определение положений звеньев группы Ассур IV класса 3-го порядка // Изв. АН КазССР. Физ.-мат. 1983. № 3. С. 70-73.
10. Джолдасбеков У. А., Молдабеков М. М. Основы аналитической теории манипуляционных устройств высоких классов. Алма-Ата: КазГУ, 1989, 82 с.
11. Дорониц В. И. Синтез плоских стрелневых механизмов, приближенно воспроизводящих заданное движение ведомого объекта // Механика машин. Вып. 15, 16. М.: Наука, 1969. С. 5-23.
12. Зиновьев В. А. Аналитические методы расчета плоских механизмов. М.: Гостехиздат, 1949. 204 с.
13. Левитский Н. И. Проектирование механизмов с низшими парами. М.: АН СССР, 1950. 184 с.
14. Пейсах Э. Е., Нестеров В. А. Система проектирования плоских рычажных механизмов. М.: Машиностроение, 1988. 203 с.
15. Саркисян Ю. Л. Аппроксимационный синтез механизмов. М.: Наука, 1982. 304 с.

Глава 5

ТОЧНОСТЬ МЕХАНИЗМОВ

5.1. ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Одной из основных характеристик, определяющих функционирование механизма, является точность его работы, которая характеризуется разностью фактических и расчетных значений параметров механизма. В механизмах, к параметрам которых относятся в том числе размеры звеньев кинематической цепи, первичные ошибки механизма обусловлены отклонениями во взаимном расположении элементов в звеньях кинематических пар и неточностью геометрической формы поверхностей последних. Первичные ошибки механизмов вызваны производственными погрешностями, связанными как с изготовлением элементов кинематических пар, сборкой кинематических цепей, так и процессом эксплуатации (например, при износе сопрягаемых поверхностей элементов кинематических пар).

Теория точности включает два основных направления. Первое направление связано с выбором: метода определения точности функционирования механизмов исходя из значений первичных ошибок для конкретного (единичного) экземпляра механизма и законов их распределения для партии механизмов, выполненных по единому конструкторскому и технологическому проекту; его рациональной схеме и допусков на изготовление отдельных элементов кинематических пар звеньев. Второе направление определяет нахождение показателей точности, которым должны удовлетворять механизмы в течение некоторого, вполне определенного интервала времени их эксплуатации (вопросы параметрической надежности механизмов).

В настоящее время в теории точности механизмов получили развитие два следующих основных направления:

- 1) общая методология расчетного обоснования точности механизмов, работающих в кинематических и динамических условиях;
- 2) оценка параметрической надежности механизмов, обеспечивающей сохранение определенных техническими требованиями показателей точности в течение заданного времени их эксплуатации.

5.2. ОШИБКИ ПОЛОЖЕНИЯ МЕХАНИЗМОВ

Механизм будет считаться идеальным, если им осуществляется абсолютно точно заданная (расчетная) зависимость между координатами входных (ведущих) и выходного

(ведомого) звеньев. Различие в положениях звеньев действительного и соответствующего ему идеального механизма при одинаковых положениях ведущих звеньев - ошибка положения механизма. При этом предполагается, что ведущие звенья механизма движутся по законам, определяющим введенное выше понятие идеального механизма.

Обозначим обобщенную координату ведомого звена идеального механизма через φ_0 , координаты ведущих звеньев через β_m , идеальные значения параметров механизма через q_n . В идеальном механизме, положения звеньев которого описываются конечным уравнением, соотношение между координатами ведущего и ведомого звеньев может быть

$$\varphi_0 = \varphi(\beta_m, q_n). \quad (5.2.1)$$

По причине первичных ошибок механизма действительные значения его параметров отличаются от идеальных (расчетных) значений. При наличии отклонения Δq_n параметров механизма зависимость между координатами ведущих и ведомого звеньев

$$\varphi = \varphi(\beta_m, q_n + \Delta q_n). \quad (5.2.2)$$

Разность $\Delta\varphi$ характеризует ошибку положения механизма:

$$\Delta\varphi = \varphi - \varphi_0. \quad (5.2.3)$$

Величины отклонений q_n обычно регламентируются допусками и являются малыми величинами по сравнению с расчетными значениями параметров Δq_n . Поэтому понятие идеального механизма в теории точности используется лишь в смысле некоторого предела, к которому могут сколь угодно приближаться изготовленные механизмы при непрерывном повышении их точности. При разложении (5.2.2) в ряд Тейлора по степеням малых отклонений Δq_n и ограничении нулевым и первым членами ряда ошибка положения механизма выражается в виде линейной функции первичных ошибок

$$\Delta\varphi_{\Sigma} = \sum_n \left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_n} \right) \Delta q_n. \quad (5.2.4)$$

При вычислении ошибок положения $\Delta\varphi$ следует иметь в виду, что значения частной производной определяются для идеальных (расчетных) параметров механизма и, кроме того, соблюдается принцип независимости действия первичных ошибок.

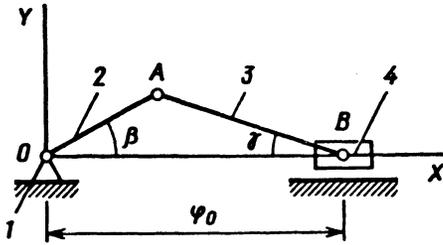


Рис. 5.2.1. Кривошипно-ползунный механизм

Входящие в (5.2.4) частные производные могут быть вычислены аналитическим путем или, что существенно проще (особенно для сложных кинематических цепей), на основе использования предложенного Н. Г. Бруевичем простого графо-аналитического метода, позволяющего построить так называемый преобразованный механизм и соответствующую ему картину малых перемещений [3, 7].

Пример. Определить ошибку положения кривошипно-ползунного механизма, состоящего из стойки 1, кривошипа 2, шатуна 3 и ползуна 4 (рис. 5.2.1), имеющего первичные ошибки длин звеньев 2 и 3 (Δl_2 и Δl_3 соответственно). Для идеального и реального кривошипно-ползунного механизма в условиях постановки решаемой задачи согласно (5.2.1) и (5.2.2)

$$\varphi_0 = l_2 \cos \beta + l_3 \left(1 - \frac{l_2^2}{l_3^2} \cos^2 \beta \right)^{0,5};$$

$$\varphi = (l_2 + \Delta l_2) \cos \beta + (l_3 + \Delta l_3) \times \left[1 - \frac{(l_2 + \Delta l_2)^2}{(l_3 + \Delta l_3)^2} \cos^2 \beta \right]^{0,5}.$$

В соответствии с (5.2.3) и (5.2.4)

$$\begin{aligned} \Delta \varphi_{\Sigma} &= \varphi - \varphi_0 = \frac{\partial \varphi}{\partial l_2} \Delta l_2 + \\ &+ \frac{\partial \varphi}{\partial l_3} \Delta l_3 = \frac{\cos(\beta + \gamma)}{\cos \gamma} \Delta l_2 + \\ &+ \frac{1}{\cos \gamma} \Delta l_3. \end{aligned} \quad (5.2.5)$$

Аналогичный результат может быть получен при помощи картин малых перемещений, позволяющих определить слагаемые правой части (5.2.5). Картина малых перемещений для первичной ошибки Δl_2 (рис. 5.2.2, а) строится следующим образом:

Проводится прямая *I-I*, параллельная звену 2, на ней выбирается полюс *P*, от которого в выбранном масштабе откладывается первичная ошибка $pa = \Delta l_2$;

через точку *a* проводится прямая *II-II*, перпендикулярная к звену 3;

через точку *p* проводится прямая *III-III*, параллельная *OB*;

Треугольник *rab* представляет собой картину малых перемещений (в выбранном масштабе). Из этого треугольника находится ошибка положения механизма при наличии в нем первичной ошибки Δl_2 :

$$\Delta x_2 = \frac{\cos(\beta + \gamma)}{\cos \gamma} \Delta l_2.$$

Для первичной ошибки Δl_3 (рис. 5.2.2, б) построение картины малых перемещений выполняется аналогично. Проводятся прямые *I-I* || *AB* (точка *p* - полюс, $pl = \Delta l_3$), *II-II* \perp *AB*, *III-III* || *OB*. Треугольник *pbb'* представ-

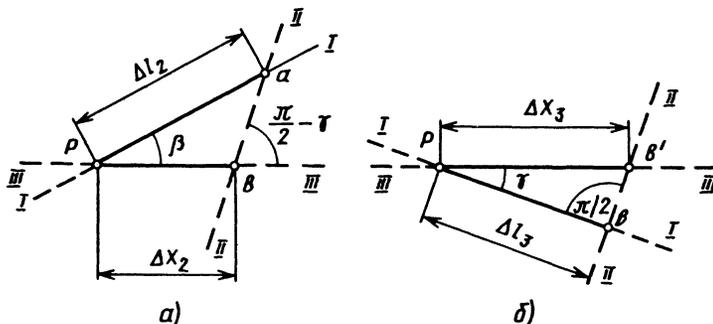


Рис. 5.2.2. Картина малых перемещений кривошипно-ползунного механизма

ляет собой картину малых перемещений, из которой находится ошибка положения механизма при наличии первичной ошибки Δl_3 :

$$\Delta x_3 = \frac{1}{\cos \gamma} \Delta l_3 .$$

Пример. Определить ошибку положения кулачкового механизма, состоящего из стойки *I*, кулачков *2* и *3* (рис. 5.2.3) и имеющего первичные ошибки профилей и эксцентриситетов кулачков *2* и *3* ($\Delta \rho_2, \Delta \rho_3$ и $\Delta l_2 = O_1O_2$, $\Delta l_3 = O_1O_3$ соответственно; *NN* - нормаль к профилям кулачков *2* и *3* в точке их касания *A*, $O_1F \perp NN$, *OII*, и O_1III - отсчетные риски).

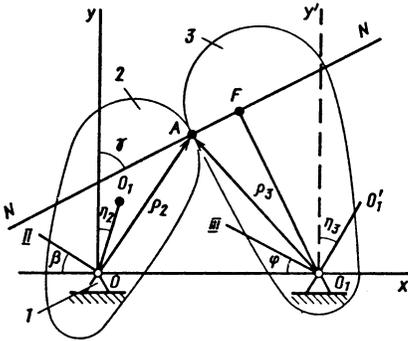


Рис. 5.2.3. Схема определения ошибок положения кулачкового механизма

Известно, что положение ведомого звена в кулачковом механизме при наличии в нем только ошибок $\Delta \rho_2$ и $\Delta \rho_3$ определяется радиусами-векторами соприкасающихся профилей элементов высшей кинематической пары и не зависит ни от направления касательной к профилям в точке их соприкосновения, ни от кривизны профилей в этой точке. Поэтому поворот элемента профиля и ошибка его кривизны в случае, когда они малы, не вызывают ошибки положения механизма. Действующей первичной ошибкой в указанном случае является только составляющая ошибки радиуса-вектора профиля кулачка, спроектированная на нормаль *NN* ($\Delta \rho_2^n$ и $\Delta \rho_3^n$).

Таким образом, ошибку положения вызывают только составляющие первичных ошибок, параллельные нормали *NN*. Можно найти сумму проекций всех рассматриваемых первичных ошибок на нормаль, что равносильно построению картины малых перемещений для преобразованного механизма по всем первичным ошибкам (рис. 5.2.4).

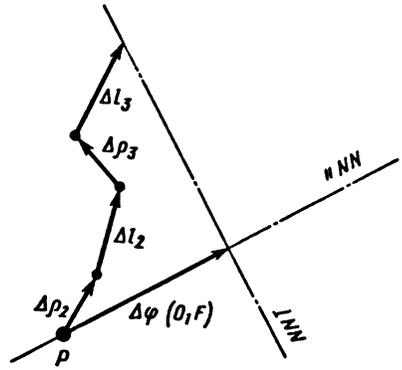


Рис. 5.2.4. Картина малых перемещений кулачкового механизма

Сумма нормальных составляющих проекций первичных ошибок определяет смещение точки касания профиля кулачков *2* и *3* в направлении нормали *NN*. Тогда ошибка положения механизма

$$\Delta \varphi_{\Sigma} = \frac{1}{O_1F} \left[\Delta \rho_2^n + \Delta \rho_3^n + \cos(\eta_2 - \gamma) \Delta l_2 + \cos(\eta_3 - \gamma) \Delta l_3 \right].$$

Для упрощения ряда дальнейших выкладок введем обозначение $(\partial \varphi / \partial q_n) = A_n$, с учетом которого фундаментальная формула теории точности принимает вид:

$$\Delta \varphi_{\Sigma} = \sum_n A_n \Delta q_n . \tag{5.2.6}$$

Согласно (5.2.6) частные производные при первичных ошибках кулачкового механизма

$$A_1 = \frac{1}{O_1F}; \quad A_2 = \frac{1}{O_1F};$$

$$A_3 = \frac{\cos(\eta_2 - \gamma)}{O_1F};$$

$$A_4 = \frac{\cos(\eta_3 - \gamma)}{O_1F} .$$

Наиболее полное решение общих вопросов линейной теории точности механизмов изложено в монографии Н. Г. Бруевича [3].

5.3. ОШИБКИ СКОРОСТИ И УСКОРЕНИЯ МЕХАНИЗМОВ

Для механизма, закон движения которого описывается конечным уравнением, ошибка положения в случае отсутствия в его схеме принципиальных ошибок может быть вычислена по формуле (5.2.6). При этом для механизмов с низшими кинематическими парами путем последовательного дифференцирования выражения (5.2.6) по времени могут быть найдены ошибки скорости Δv_{Σ} и ускорения Δw_{Σ} :

$$\Delta v_{\Sigma} = \frac{d}{dt} \sum_n A_n \Delta q_n; \quad \Delta w_{\Sigma} = \frac{d^2}{dt^2} \sum_n A_n \Delta q_n \quad (5.3.1)$$

Для механизмов с высшими кинематическими парами ошибку положения можно вычислить по формуле (5.2.6), основываясь на доказательстве [3], согласно которому при малом смещении элементов высшей кинематической пары по направлению нормалей к их расчетной поверхности ошибки кривизны соответствующих элементов могут принимать какие угодно конечные значения. Вместе с тем вычисление Δv_{Σ} и Δw_{Σ} для механизмов с высшими кинематическими парами не может быть основано на использовании формул (5.3.1). Это является следствием того, что на величину Δv_{Σ} существенное влияние оказывает ошибка направления касательной в точке соприкосновения реальных элементов высшей кинематической пары, а на величины Δw_{Σ} - еще ошибка радиусов кривизны. Поэтому ошибки Δv_{Σ} и Δw_{Σ} для механизмов с высшими кинематическими парами могут быть вычислены при помощи методов, разработанных в нелинейной теории точности.

5.4. ОШИБКИ МЕХАНИЗМОВ, ДВИЖЕНИЕ ЗВЕНЬЕВ КОТОРЫХ ОПИСЫВАЕТСЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

Для широкого класса механизмов положения звеньев описываются линейными дифференциальными уравнениями первого порядка. Поэтому в задачах теории точности эти механизмы занимают особое положение в первую очередь потому, что в их структуру входят гибкие навивающиеся звенья или кинематические пары качения. В подобных механизмах нормаль в точках соприкосновения элементов кинематической пары пересекает ось вращения с ведомым элементом, вследствие чего не представляется возможным воспользоваться построением преобразованного

механизма для определения передаточных отношений при первичных ошибках.

Следствие указанной специфики этого класса механизмов основная формула расчета точности принимает вид [4, 12]:

$$\Delta \varphi_{\Sigma}^* = \sum_i \int_{\psi_1}^{\psi_2} \Delta c_i dq, \quad (5.4.1)$$

где Δc_i - ошибка передаточного отношения механизма.

Для единичной первичной ошибки выражение подынтегральной функции представлено в виде произведения

$$\Delta c_i = c(\psi) \Delta q_i(\psi), \quad (5.4.2)$$

в котором первый сомножитель является частью передаточного отношения, не зависящий от первичной ошибки. В простейшем случае при $q_i = \text{const}$

$$\Delta \varphi_{\Sigma}^* = \sum_i \left[\int_{\psi_1}^{\psi_2} \Delta c(\psi) dq \right] \Delta q_i. \quad (5.4.3)$$

Принимая в (5.4.3) значения функции, стоящей в квадратных скобках, за соответствующие значения передаточных отношений при ошибках Δq_i , можно выразить

$$\Delta \varphi_{\Sigma}^* = \sum_i (A_{i,2} - A_{i,1}) \Delta q_i. \quad (5.4.4)$$

Формулы (5.2.6) и (5.4.4) существенно различны. Действительно, согласно (5.4.3) ошибки механизмов, положения звеньев которых описываются дифференциальными уравнениями, зависят от интервала изменения положения ведущего звена механизмов. Поэтому ошибки этого класса механизмов называются ошибками перемещения, которые обозначаются через $\Delta \varphi^*$. К характерным примерам этого класса механизмов можно отнести фрикционную и тросовую передачи.

Пример. Определить ошибку положения интегрирующего фрикционного механизма (рис. 5.4.1). Для идеального фрикционного механизма имеет место следующее соотношение:

$$\varphi_3 = \frac{h}{r} \int_0^{\varphi_2} \varphi_5 d\varphi_2, \quad (5.4.5)$$

где h - шаг ходового винта 5; r - радиус съемного ролика 3; $\varphi_2, \varphi_3, \varphi_5$ - угловые координаты звеньев механизма соответственно 2, 3, 5.

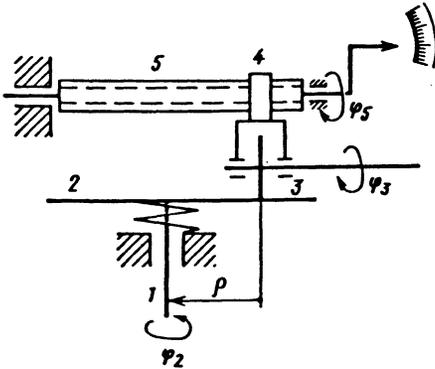


Рис. 5.4.1. Фрикционный механизм

Согласно (5.4.5) для интегрирующего фрикционного механизма за аргумент и подынтегральную функцию принимаются угловые перемещения соответственно диска 2 и ходового винта 5.

Основными ошибками являются [11, 12]: ξ - проскальзывание в паре качения 2-3; Δr - средняя ошибка радиуса ролика; $\Delta h(\varphi_5)$ шага в паре 4-5; $\Delta r_{мв}$, $\Delta r_{мк}$, обусловленные наличием зазоров (люфта) в опорах соответственно ходового винта и каретки; $\Delta \rho_0$ установки начального значения подынтегральной функции. С учетом перечисленных первичных ошибок ошибка перемещения

$$\Delta \varphi_{\Sigma}^* = \Delta \varphi_3 = \varphi_3 \left(\xi + \frac{\Delta r}{r} \right) \pm \varphi_2 \frac{\Delta \rho_{мв} + \Delta \rho_{мк}}{r} + \varphi_2 \frac{\Delta \rho_0}{r} + \frac{1}{r} \int_0^{\varphi_2} \varphi_5 \Delta h(\varphi_5) d\varphi_2 + \varepsilon. \quad (5.4.6)$$

Малая величина ε определяет действие остальных первичных ошибок механизма.

5.5. ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОШИБОК МЕХАНИЗМОВ

В задаче точности механизмов наибольший интерес представляет анализ точности партии механизмов, выполненных по одному конструкторскому и технологическому проекту

(серийное изготовление механизмов). При этом ошибки Δq в зависимости от их физической природы в общем случае могут быть рассмотрены в виде случайных величин или случайных функций, ограниченных соответствующими полями допусков.

Первичные ошибки в зависимости от законов их распределения связываются с назначенными на них допусками при помощи известных соотношений [2, 12, 13], которые позволяют составить выражения для средней ($\Delta \varphi_{0\Sigma}$) и квадрата предельной ($\Delta \varphi_{\Sigma}^2$) ошибки положения. Если ошибки Δq в партии механизмов представляют собой случайные величины, то

$$\Delta \varphi_{0\Sigma} = \sum A_i (\Delta_{0i} + \alpha_i \delta_i) + \sum_s A_s C_s \delta_s \pm \sum_j A_j |\Delta_{0j} + \alpha_j \delta_j|; \quad (5.5.1)$$

$$\Delta \varphi_{\Sigma}^2 = \sum_i A_i^2 k_i^2 \delta_i^2 + \sum_s A_s^2 k_s^2 \delta_s^2 + \sum_j A_j^2 k_j^2 \delta_j^2. \quad (5.5.2)$$

Здесь по i и j суммируются скалярные первичные ошибки, соответственно не вызывающие явления люфта и характеризующие явление люфта; по s суммируются векторные ошибки; $\delta_i, \delta_j, \delta_s$ - половины полей допусков на соответствующие ошибки; Δ_{0i}, Δ_{0j} - координаты середины полей допусков, отсчитанные от номинальных размеров элементов звеньев; $C_s, \alpha_i, k_i, k_s, k_j$ - коэффициенты, характеризующие законы распределения ошибок и введенные в практику расчета точности механизмов Н. А. Бородачевым.

На основе формул (5.5.1) и (5.5.2) может быть найдена практически предельная ошибка

$$\Delta \varphi_{пп} = |\Delta \varphi_{0\Sigma}| + \Delta \varphi_{\Sigma}. \quad (5.5.3)$$

Вопросы расчетного обоснования точности механизмов, основанные на использовании формулы (5.5.3), достаточно полно изложены в литературных источниках [3, 4, 6, 7, 11].

В механизме все первичные ошибки могут быть случайными величинами. Тем не менее, ошибка положения для партии подобных механизмов может представлять собой случай-

ную функцию, если передаточные отношения при первичных ошибках являются функциями координат положения ведущих звеньев механизмов. Вследствие отмеченной специфики указанного вида случайной функции для ошибки положения ее анализ не может дать существенно новых результатов по сравнению с получаемыми из анализа выражениями для предельного значения ошибки положения. Поэтому точность партии механизмов, первичные ошибки которых являются случайными величинами, может быть достаточно полно охарактеризована при помощи выражений (5.5.1) и (5.5.2).

Однако для весьма широкого класса механизмов представление всех первичных ошибок в виде одних только случайных величин является определенной идеализацией. В качестве примера можно отметить ошибки элементов высших кинематических пар, которые в абсолютном большинстве представляют собой случайные функции.

Поскольку отдельные первичные ошибки в партии механизмов являются случайными функциями, то и ошибка положения, характеризующая собой показатель точности партии механизмов, также должна быть представлена в виде случайной функции. Формулы (5.5.1) и (5.5.2) могут быть рассмотрены как основанные на знании математического ожидания и дисперсии случайной функции. Для более полного описания случайной функции дополнительно к таким характеристикам, как математическое ожидание и дисперсия, необходимо выявить корреляционную функцию, которая характеризует собой степень зависимости между сечениями случайной функции, относящимися к разным значениям аргумента:

$$K(\psi_1, \psi_2) = M\left\{\left[\Delta q(\psi_1) - M[\Delta q(\psi_1)]\right] \times \left[\Delta q(\psi_2) - M[\Delta q(\psi_2)]\right]\right\} \quad (5.5.4)$$

где ψ - координата, определяющая положение некоторого звена механизма; ψ_1 и ψ_2 - два произвольных значения координаты ψ , пробегающих всю совокупность ее возможных значений.

При $\psi_1 = \psi_2 = \psi$ подучим выражение для дисперсии случайной функции

$$K(\psi_1, \psi_2) \Big|_{\psi_1 = \psi_2} = \sigma^2[\psi] = M\left[\left\{\Delta q(\psi) - M[\Delta q(\psi)]\right\}^2\right] \quad (5.5.5)$$

При расчете точности механизмов действие всех первичных ошибок приводится к ведомому звену. Это позволяет выявить влияние каждой ошибки на точностные показатели работы механизма в целом. Для первичных ошибок, представляющих собой случайные функции, характеристики последних в виде математических ожиданий и корреляционных функций также должны быть приведены к ведомому звену механизма. Поскольку передаточные отношения при скалярных первичных ошибках являются регулярными функциями, то соответствующее выражение корреляционной функции, приведенной к ведомому звену механизма, имеет следующий вид:

$$K_{\sigma, i}(\psi_1, \psi_2) = A_{i-1} A_{i-2} K_{i'}(\psi_1, \psi_2), \quad (5.5.6)$$

где A_{i-1} и A_{i-2} - значения передаточных отношений механизма, соответствующие значениям ψ_1 и ψ_2 ; $K_{i'}(\psi_1, \psi_2)$ - корреляционная функция для одноименных скалярных первичных ошибок в партии механизмов.

Плоские векторные ошибки в основном имеют следующий характерный признак: модули их представляют собой существенно положительные величины, а составляющие передаточных отношений при первичных ошибках - гармонические функции, начальная фаза которых без каких-либо существенных ограничений может быть принята распределенной по закону равной вероятности внутри области изменения аргумента от 0 до 2π [2, 3]. Тогда

$$K_{\sigma s}(\tau) = A_{s-1} A_{s-2} K_{s'}(\tau), \quad (5.5.7)$$

где $K_{s'}$ - корреляционная функция для одноименных векторных ошибок в партии механизмов; $\tau = \psi_2 - \psi_1$ - интервал изменения независимой переменной.

При изготовлении звеньев механизма ошибки ограничиваются полем допуска, связанным с выражением для дисперсии известным соотношением [2, 4, 13]. С другой стороны, корреляционная функция случайной функции при равных значениях ее аргумента равна ее дисперсии. Поэтому правые части корреляционных функций (5.5.6) и (5.5.7), выраженные через параметры, характеризующие поля допусков на скалярных ошибках и на модули плоских векторных ошибок, могут быть преобразованы следующим образом:

$$K_{\sigma i}(\psi_1, \psi_2) = A_{i-1} A_{i-2} k_{i'}^2 \delta_{i'}^2 K_{i'}^0(\psi_1, \psi_2); \quad (5.5.8)$$

$$K_{\delta s^*}(\tau) = A_{s^*1} A_{s^*2} k_{s^*}^2 \delta_{s^*}^2 K_{s^*}^0(\tau), \quad (5.5.9)$$

где $K_{i^*}^0(\psi_1, \psi_2)$ и $K_{i^*}^0(\tau)$ - нормированные корреляционные функции исходных случайных функций.

При наличии в механизмах нескольких одновременно действующих скалярных и векторных ошибок вместо (5.5.8) и (5.5.9)

$$K_{\Sigma i^*}(\psi_1, \psi_2) = \sum_{i^*} A_{i^*1} A_{i^*2} k_{i^*}^2 \delta_{i^*}^2 \times \\ \times K_{i^*}^0(\psi_1, \psi_2); \quad (5.5.10)$$

$$K_{\Sigma s^*}(\tau) = \sum_{s^*} A_{s^*1} A_{s^*2} k_{s^*}^2 \delta_{s^*}^2 K_{s^*}^0(\tau). \quad (5.5.11)$$

Вспользуемся теоремой сложения корреляционных функций и дисперсией, полагая, что разноименные первичные ошибки взаимно некоррелированы между собой. Тогда на основании (5.5.2), (5.5.10) и (5.5.11) получим:

$$K_{\Sigma\Sigma}(\psi_1, \psi_2) = \sum_i A_i^2 k_i^2 \delta_i^2 + \\ + \sum_{i^*} A_{i^*1} A_{i^*2} k_{i^*}^2 \delta_{i^*}^2 K_{i^*}^0(\psi_1, \psi_2) + \\ + \sum_s A_s^2 k_s^2 \delta_s^2 + \sum_{s^*} A_{s^*1} A_{s^*2} k_{s^*}^2 \delta_{s^*}^2 K_{s^*}^0(\tau) + \\ + \sum_j A_j^2 k_j^2 \delta_j^2. \quad (5.5.12)$$

Если корреляционные функции для всех скалярных первичных ошибок являются стационарными, то (5.5.12) преобразуется к виду:

$$K_{\Sigma\Sigma}(\tau) = \sum_i A_i^2 k_i^2 \delta_i^2 + \sum_{i^*} A_{i^*1} A_{i^*2} k_{i^*}^2 \delta_{i^*}^2 \times \\ \times K_{i^*}^0(\tau) + \sum_s A_s^2 k_s^2 \delta_s^2 + \sum_{s^*} A_{s^*1} A_{s^*2} k_{s^*}^2 \times \\ \times \delta_{s^*}^2 K_{s^*}^0(\tau) + \sum_j A_j^2 k_j^2 \delta_j^2. \quad (5.5.13)$$

Математическое ожидание ошибки положения для партии механизмов может быть получено на основе теоремы о математическом ожидании суммы случайных величин и случайных функций:

$$\Delta\varphi_{0\Sigma} = \sum_i A_i (\Delta_{0i} + \alpha_i \delta_i) + \\ + \sum_{i^*} A_{i^*} (\Delta_{0i^*} + \alpha_{i^*} \delta_{i^*}) + \sum_s A_s C_s \delta_s + \\ + \sum_{s^*} A_{s^*} C_{s^*} \delta_{s^*} \pm \sum_j |\Delta_{0j} + \alpha_j \delta_j|. \quad (5.5.14)$$

Формулы (5.5.12) и (5.5.14) характеризуют собой общие выражения соответственно корреляционной функции и математического ожидания ошибки положения для партии механизмов.

Из сравнения между собой формул (5.5.2) и (5.5.12) следует, что первая из них является частным случаем второй. Так, полагив в (5.5.12) $\psi_1 = \psi_2$ и $\tau = 0$, имеем:

$$A_{i^*1} = A_{i^*2} = A_{i^*}, \quad A_{s^*1} = A_{s^*2} = A_{s^*},$$

$$K_{i^*}^0(0) = K_{s^*}^0(0) = 1.$$

Ввиду идентичности получаемых членов, суммирующихся по i и i^* , а также по s и s^* , объединим соответствующие суммы, в результате чего получим выражение, совпадающее с (5.5.2). Поэтому

$$\Delta\varphi_{\Sigma}^2 = K_{\Sigma\Sigma}(\psi_1, \psi_2) \Big|_{\psi_1=\psi_2, \tau=0}.$$

Аналогичным образом (5.5.14) преобразуется в (5.5.1).

Как отмечалось выше, для определенного класса механизмов положения звеньев описываются линейными дифференциальными уравнениями первого порядка. В общем случае в партии подобных механизмов ошибки $\Delta q(\psi)$ представляют собой отдельные реализации случайной функции. Обычно допуски на первичные ошибки в элементах кинематических пар задаются не зависящим от положения ведущего звена механизма. Это дает основание считать математическое ожидание случайной функции $\Delta q(\psi)$ постоянной величиной. Тогда на основании (5.4.3) для ошибок: скалярных

$$M[\Delta\varphi_{i^*}^*] = \sum_{i^*} \left[\int_{\psi_1}^{\psi_2} c(\psi) d\psi \right] M[\Delta q_{i^*}]; \quad (5.5.15)$$

плоских векторных

$$M[\Delta\varphi_{s^*}^*] = \sum_{s^*} \left[\int_{\psi_1}^{\psi_2} c(\psi) d\psi \right] M[\Delta q_{s^*}]. \quad (5.5.16)$$

Выражения (5.5.15) и (5.5.16) могут быть преобразованы к виду, соответствующему форме записи выражения (5.4.4):

$$M[\Delta\varphi_{i^*}^*] = \sum_{i^*} (A_{i^*2} - A_{i^*1})(\Delta_{0i^*} + \alpha_{i^*}\delta_{i^*});$$

$$M[\Delta\varphi_{s^*}^*] = \sum_{s^*} (A_{s^*2} - A_{s^*1})C_{s^*}\delta_{s^*}. \quad (5.5.17)$$

В (5.5.17) величины A_{s^*1} и A_{s^*2} определяются не только расчетными значениями параметров механизма, но и значением математического ожидания плоской векторной ошибки. В частном случае, если принять начальную фазу плоской векторной ошибки, распределенной по закону равной вероятности в области изменения аргумента от 0 до 2π , то $A_{s^*1} = A_{s^*2} = 0$. Аналогичным образом могут быть получены все остальные составляющие математического ожидания ошибки перемещения для партии механизмов

$$M[\Delta\varphi_i^*] = \sum_i (A_{i2} - A_{i1})(\Delta_{0i} + \alpha_i\delta_i);$$

$$M[\Delta\varphi_s^*] = \sum_s (A_{s2} - A_{s1})C_s\delta_s;$$

$$M[\Delta\varphi_j^*] = \pm \sum_j (A_{j2} - A_{j1})|\Delta_{0j} + \alpha_j\delta_j|. \quad (5.5.18)$$

На основании (5.5.17) и (5.5.18) может быть получен общий вид выражения для математического ожидания ошибки перемещения:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_{0\Sigma}^* = & \sum_i (A_{i2} - A_{i1})(\Delta_{0i} + \alpha_i\delta_i) + \\ & + \sum_{i^*} (A_{i^*2} - A_{i^*1})(\Delta_{0i^*} + \alpha_{i^*}\delta_{i^*}) + \\ & + \sum_s (A_{s2} - A_{s1})C_s\delta_s + \sum_{s^*} (A_{s^*2} - A_{s^*1})C_{s^*}\delta_{s^*} \pm \\ & \pm \sum_j (A_{j2} - A_{j1})|\Delta_{0j} + \alpha_j\delta_j|. \end{aligned} \quad (5.5.19)$$

Корреляционная функция ошибки перемещения одноименных первичных ошибок может быть получена на основе выражений (5.4.1) и (5.4.2) путем линейного преобразования случайной функции $\Delta q(\psi)$, приведенной к ведомому звену механизма:

$$\begin{aligned} K^*(\psi_1, \psi_2) = & \int_0^{\psi_1} \int_0^{\psi_2} c(\psi_1')c(\psi_2')K(\psi_1', \psi_2') \times \\ & \times d\psi_1'd\psi_2', \end{aligned} \quad (5.5.20)$$

где $c(\psi_1')$ и $c(\psi_2')$ - регулярные функции; $K(\psi_1', \psi_2')$ - корреляционная функция исходной случайной функции для скалярных или плоских векторных первичных ошибок.

В (5.5.20) без ограничения общности излагаемого материала оба нижних предела приняты равными нулю. Переходя к нормированной корреляционной функции для условий рассматриваемой задачи, получим для скалярных и плоских векторных ошибок соответственно:

$$\begin{aligned} K_{\Sigma_i^*}^*(\psi_1, \psi_2) = & \sum_{i^*} k_{i^*}^2\delta_{i^*}^2 \int_0^{\psi_1} \int_0^{\psi_2} c(\psi_1')c(\psi_2') \times \\ & \times K_{i^*}^0(\psi_1', \psi_2')d\psi_1'd\psi_2'; \\ K_{\Sigma_s^*}^*(\psi_1, \psi_2) = & \sum_{s^*} k_{s^*}^2\delta_{s^*}^2 \int_0^{\psi_1} \int_0^{\psi_2} c(\psi_1')c(\psi_2') \times \\ & \times K_{s^*}^0(\psi_1', \psi_2')d\psi_1'd\psi_2'. \end{aligned} \quad (5.5.21)$$

Наконец, рассмотрим ошибки Δq в виде случайных величин. Основываясь на (5.4.4) и принимая во внимание предложенные Н. А. Бородачевым соотношения [2, 13], связывающие между собой выражения для дисперсий первичных ошибок с видом их дифференциальных законов распределения, для соответствующих групп ошибок

$$\sigma_{\Sigma_i^*}^2[\Delta\varphi_i^*] = \frac{1}{9} \sum_i (A_{i2} - A_{i1})^2 k_i^2 \delta_i^2;$$

$$\sigma_{\Sigma_s^*}^2[\Delta\varphi_s^*] = \frac{1}{9} \sum_s (A_{s2} - A_{s1})^2 k_s^2 \delta_s^2;$$

$$\sigma_{\Sigma_j^*}^2[\Delta\varphi_j^*] = \frac{1}{9} \sum_j (A_{j2} - A_{j1})^2 k_j^2 \delta_j^2. \quad (5.5.22)$$

Выражения (5.5.21) и (5.5.22) позволяют, воспользовавшись теоремой сложения случайных функций и случайных величин, взаимно некоррелированных между собой, получить общий вид корреляционной функции ошибки перемещения для партии механизмов следующего образом:

$$\begin{aligned}
 K_{\Sigma\Sigma}^*(\psi_1, \psi_2) &= \sum_i (A_{i2} - A_{i1})^2 k_i^2 \delta_i^2 + \\
 &+ \sum_{i^*} k_{i^*}^2 \delta_{i^*}^2 \int_0^{\psi_1} \int_0^{\psi_2} c(\psi_1') c(\psi_2') K_{i^*}^0(\psi_1', \psi_2') \times \\
 &\times d\psi_1' d\psi_2' + \sum_s (A_{s2} - A_{s1})^2 k_s^2 \delta_s^2 + \\
 &+ \sum_{s^*} k_{s^*}^2 \delta_{s^*}^2 \int_0^{\psi_1} \int_0^{\psi_2} c(\psi_1') c(\psi_2') K_{s^*}^0(\psi_1', \psi_2') \times \\
 &\times d\psi_1' d\psi_2' + \sum_j (A_{j2} - A_{j1})^2 k_j^2 \delta_j^2.
 \end{aligned}
 \tag{5.5.23}$$

Формулы (5.5.19) и (5.5.23) представляют собой соответственно общие выражения математического ожидания и корреляционной функции ошибки перемещения для партии механизмов, выполненных по одному проекту.

Если в партии механизмов все первичные ошибки представляют собой случайные величины, то

$$(\Delta\Phi_{\Sigma}^*)^2 = K_{\Sigma\Sigma}^*(\psi_1, \psi_2) \Big|_{\psi_1 = \psi_2}$$

Рассмотрим корреляционные функции (5.5.12) и (5.5.23). Разновидность первой из них - (5.5.13) вместе с (5.5.14) - может характеризовать для весьма широкого класса механизмов случайную функцию ошибки как стационарную. Корреляционная функция ошибки перемещений (5.5.23) всегда характеризует последнюю как нестационарную случайную функцию. Корреляционная функция нестационарной случайной функции зависит от двух аргументов и поэтому внутри рабочего интервала изменения независимой переменной механизмов определяется значениями ψ_1 и ψ_2 .

Однако в условиях эксплуатации многих механизмов существуют вполне определенные начальные положения, от которых каждый раз проводится отсчет тех или иных параметров. Обычно такие положения называют началь-

ными (нулевыми), и соответствующее им одно из значений аргумента корреляционной функции становится "закрепленным" с момента установки отсчетных шкал, что характерно, например, для механизмов, используемых в кинематических цепях контрольно-измерительных приборов.

Следовательно, значение аргумента, обозначаемого, например, через ψ_1 , становится вполне определенным, хотя на выбор начального положения звена механизма, определяющего конкретное значение ψ_2 , не накладывается каких-либо существенных ограничений. Это позволяет в значительной степени использовать разработанные способы корреляционно-го анализа точности [4, 12].

Пример. Определить практически предельную ошибку положения для партии кривошипно-ползунковых механизмов (см. рис. 5.2.1). Согласно (5.5.3) на основании (5.2.5)

$$\begin{aligned}
 \Delta\Phi_{\Pi\Pi} &= \left| A_2(\Delta\alpha_2 + \alpha_2\delta_2) + A_3(\Delta\alpha_3 + \alpha_3\delta_3) \right| + \\
 &+ \left(A_2 k_2^2 \delta_2^2 + A_3 k_3^2 \delta_3^2 \right)^{0,5},
 \end{aligned}$$

где $A_2 = \cos(\beta + \gamma)/\cos\gamma$; $A_3 = 1/\cos\gamma$.

Пример. Определить практически предельную ошибку перемещения для партии трещинных механизмов (см. рис. 5.4.1). Согласно (5.5.19) и (5.5.23) на основании (5.4.6)

$$\begin{aligned}
 \Delta\Phi_{0\Sigma}^* &= \Phi_3 \left[\xi + \frac{1}{r} (\Delta\alpha_r + \alpha_{\Delta r} \delta_{\Delta r}) \right] \pm \\
 &\pm \frac{\Phi_2}{r} (\Delta\alpha_{\rho_{\text{мк}}} + \alpha_{\Delta\rho_{\text{мк}}} \delta_{\Delta\rho_{\text{мк}}} + \Delta\alpha_{\rho_{\text{мв}}} + \\
 &+ \alpha_{\Delta\rho_{\text{мв}}} \delta_{\Delta\rho_{\text{мв}}});
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_{\Sigma\Sigma}^*(\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}) &= \frac{1}{r^2} \left\{ \Phi_3^2 k_{\Delta r}^2 \delta_{\Delta r}^2 + \Phi_2^2 \left[k_{\Delta\rho_0}^2 \delta_{\Delta\rho_0}^2 + \right. \right. \\
 &+ k_{\Delta\rho_{\text{мк}}}^2 \delta_{\Delta\rho_{\text{мк}}}^2 + k_{\Delta\rho_{\text{мв}}}^2 \delta_{\Delta\rho_{\text{мв}}}^2 \left. \right] + \frac{1}{\nu^2} k_{\Delta h}^2 \delta_{\Delta h}^2 \times
 \end{aligned}$$

$$\times \int_0^{\psi_2^{(1)}} \int_0^{\psi_2^{(2)}} \Phi_5^{(1)} \Phi_5^{(2)} K_{\Delta h}^0(\varphi_5^{(1)}, \varphi_5^{(2)}) d\varphi_2^{(1)} d\varphi_2^{(2)}.$$

Тогда

$$\Delta\varphi_{\Pi\Pi} = \left| \Delta\varphi_{0\Sigma}^* \right| + \left(K_{\Sigma\Sigma}^* \right)^{0,5} \left|_{\varphi_2^{(1)} = \varphi_2^{(2)}} \right. . \quad \Delta\varphi_{\Sigma}(T) = \sum_n A_n (\Delta q_n^0 + \Delta L_n T); \quad (5.6.2)$$

Ряд характерных видов корреляционных функций для первичных ошибок отдельных звеньев механизмов и ошибок перемещения последних рассмотрен в литературных источниках [4, 12]. Так, для многих видов механизмов (зубчатых, винтовых, кулачковых и др.) корреляционные функции являются стационарными и поэтому могут быть представлены в виде (5.5.13).

$$\Delta\varphi_{\Sigma}^*(T) = \sum_n (A_{n2} - A_{n1}) (\Delta q_n^0 + \Delta L_n T). \quad (5.6.3)$$

Введем обозначения

$$\Phi_1(\varphi, 0) = \sum_n A_n \Delta q_n^0;$$

$$\Phi_1^*(\varphi, 0) = \sum_n (A_{n2} - A_{n1}) \Delta q_n^0;$$

$$\Phi_2(\varphi, T) = T \sum_n A_n \Delta q_n^0;$$

$$\Phi_2^*(\varphi, T) = T \sum_n (A_{n2} - A_{n1}) \Delta q_n^0$$

в (5.6.2) и (5.6.3):

$$\Delta\varphi_{\Sigma}(T) = \Phi_1(\varphi, 0) + \Phi_2(\varphi, T); \quad (5.6.4)$$

$$\Delta\varphi_{\Sigma}^*(T) = \Phi_1^*(\varphi, 0) + \Phi_2^*(\varphi, T). \quad (5.6.5)$$

Вопросы, связанные с исследованием надежности механизмов, могут быть рассмотрены в двух аспектах: 1) ненадежность механизмов ввиду возможности возникновения в них внезапных отказов (например, поломки звеньев кинематической цепи); 2) ненадежность механизмов вследствие накопления с течением времени абсолютных величин первичных ошибок (например, ошибок в результате износа элементов кинематических пар). В теории точности рассматривается второй аспект. При этом решение сводится к определению с выбранной вероятностью некоторого усредненного времени работы механизмов, в период которого соответствующие показатели их точности удовлетворяют заданным допускам или техническим требованиям [4, 5]. Решение обратной задачи заключается в том, что по заданному времени эксплуатации механизма подбираются соответствующие допуски на изготовление его отдельных элементов звеньев исходя из реальных возможностей производства. Как прямая, так и обратная задача (в рассматриваемой постановке) базируются на разработанный аппарат точности механизмов при наличии соответствующего статистического материала.

Уже отмечалось, величины ряда первичных ошибок механизмов могут изменяться с течением времени, например, вследствие износа элементов кинематических пар. В настоящее время накоплен соответствующий статический материал, позволяющий во многих случаях аппроксимировать показатели изменения первичных ошибок в виде линейной функции:

$$\Delta q_n = \Delta q_n^0 + \Delta L_n T, \quad (5.6.1)$$

где Δq_n^0 - начальная первичная ошибка; T - время эксплуатации механизма с момента его изготовления или последней регулировки.

После подстановки (5.6.1) в (5.2.6) и (5.4.4)

Формулы (5.6.4) и (5.6.5) позволяют вычислить ошибку конкретного экземпляра механизма при известных первичных ошибках и усредненных показателях изменения ряда последних в функции времени. При массовом (серийном) производстве однотипных механизмов и идентичных условиях их эксплуатации входящие в формулу (5.6.1) параметры Δq_n^0 и ΔL_n в зависимости от физической природы их возникновения могут носить систематический или случайный характер. В последнем случае Δq_n^0 и ΔL_n рассматриваются как случайные величины. Тогда согласно (5.6.4) и (5.6.5) математическое ожидание и дисперсии ошибок $\Delta\varphi_{\Sigma}$ и $\Delta\varphi_{\Sigma}^*$ могут быть выражены

$$M[\Delta\varphi_{\Sigma}(T)] = M[\Phi_1] + M[\Phi_2];$$

$$M[\Delta\varphi_{\Sigma}^*(T)] = M[\Phi_1^*] + M[\Phi_2^*]; \quad (5.6.6)$$

$$\begin{aligned}\sigma^2[\Delta\varphi_{\Sigma}(T)] &= \sigma^2[\Phi_1 + \Phi_2]; \\ \sigma^2[\Delta\varphi_{\Sigma}^*(T)] &= \sigma^2[\Phi_1^* + \Phi_2^*].\end{aligned}\quad (5.6.7)$$

При отсутствии достаточного объема экспериментальных данных законы распределения первичных ошибок могут быть найдены методами математического моделирования [4, 8, 10]. В указанной постановке задачи оценку параметрической надежности механизмов можно определить, основываясь на условиях (5.6.6) и (5.6.7):

$$\begin{aligned}& |M[\Phi_1] + M[\Phi_2]| \pm 3 \{M(\Phi_1 - M[\Phi_1])^2 + \\ & + M(\Phi_2 - M[\Phi_2])^2\}^{0.5} \leq \delta; \\ & |M[\Phi_1^*] + M[\Phi_2^*]| \pm 3 \{M(\Phi_1^* - M[\Phi_1^*])^2 + \\ & + M(\Phi_2^* - M[\Phi_2^*])^2\}^{0.5} \leq \delta^*.\end{aligned}\quad (5.6.8)$$

Половина поля допуска выбирается в этом случае на основе следующих равенств:

$$\begin{aligned}\delta &= G |M[\Phi_1]| + B \{M(\Phi_1 - M[\Phi_1])^2\}^{0.5}; \\ \delta^* &= G |M[\Phi_1^*]| + B \{M(\Phi_1^* - M[\Phi_1^*])^2\}^{0.5},\end{aligned}$$

где G, B - целые положительные числа; их выбор обуславливает необходимый запас точности при эксплуатации.

Первое выражение (5.5.8) может быть приведено к следующему виду:

$$ST^2 + 2NT + F = 0, \quad (5.6.9)$$

где

$$\begin{aligned}S &= 9M(\Phi_2 - M[\Phi_2])^2 - (M[\Phi_2])^2; \\ N &= \theta M[\Phi_2](\delta - \theta M[\Phi_1]);\end{aligned}\quad (5.6.10)$$

$$F = 9M(\Phi_1 - M[\Phi_1])^2 - (\delta - \theta M[\Phi_1])^2;$$

$$\theta = \begin{cases} 1 & \text{при } M[\Phi_1] + M[\Phi_2] > 0; \\ -1 & \text{при } M[\Phi_1] + M[\Phi_2] < 0. \end{cases}$$

В соответствии с (5.6.10) коэффициенты S, N и F не зависят от T . Таким образом, из решения уравнения (5.6.9) может быть найдена величина $T > 0$, определяющая эксплуатационную надежность механизма. Аналогичный вывод может быть получен на основе второго выражения (5.6.8) [4, 5].

5.7. ВОПРОСЫ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ТОЧНОСТИ МЕХАНИЗМОВ (ВЕРОЯТНОСТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ЗАДАЧАХ ТОЧНОСТИ МЕХАНИЗМОВ)

Достаточно полно разработанная линейная теория точности, основоположником которой является академик Н. Г. Бруевич, не позволяет считать окончательно решенной задачу исследования точности, в частности, для механизмов с высшими кинематическими парами и ряда других важных классов механизмов. Методы линейной теории точности дают возможность проводить анализ ошибок положения и перемещения механизмов с низшими и высшими кинематическими парами. Исследование ошибок скорости и ускорения не может быть осуществлено на основе разработанных методов линейной теории точности, так как эти величины являются существенно нелинейными функциями первичных ошибок.

Другой класс объектов исследования, для которых не представляется возможным применение фундаментальных формул линейной теории точности, - механизмы с уравнениями движения, заданными в неявном виде. Указанные обстоятельства привели к дальнейшему развитию теории точности, связанной, в частности, с разработкой общих методов исследования точности сложных кинематических цепей (без наложения каких-либо ограничений на вид кинематических пар, их звеньев или формы записи уравнений, описывающих движение последних).

Развитие вычислительной математики и техники позволило найти весьма эффективное и универсальное направление в разработке методов решения сходных по своей постановке задач и привело к разработке основ нелинейной теории точности механизма, что открывало возможность проводить исследование точности в тех случаях, когда разработанные ранее методы оказывались неприемлемыми.

Поскольку нелинейная система уравнений, описывающих ошибки механизма, охватывает как частный случай линейную систему уравнений, рассматриваемую в линейной теории точности, то, следовательно, нелинейные методы анализа точности могут быть применены и в этом случае, когда допустима линеаризация уравнений ошибок механизма.

Сущность вероятностного моделирования в задачах точности заключается в следующем. На основе всестороннего изучения исследуемого механизма строится его математическая

модель, представляющая собой совокупность уравнений, позволяющих однозначно определить закон изменения выходных координат ведомого звена механизма с учетом произвольно выбранного возможного сочетания его первичных ошибок. Имитация случайных первичных ошибок выполняется с помощью случайных (псевдослучайных) чисел, вырабатываемых ЭВМ в соответствии с их законами распределения по ходу моделирования - при использовании метода статических испытаний (метода СИ), или путем введения в память ЭВМ таблицы дискретных значений первичной ошибки с соответствующими вероятностями - при использовании метода деревьев логических возможностей (метода ДЛВ),

Моделирующий алгоритм, построенный с использованием метода СИ или ДЛВ, позволяет получить любые вероятностные характеристики на выходе, предусмотренные программой исследования, в частности, средние значения, средние квадратические отклонения, а также гистограммы распределений, характеризующие вид законов распределения искомым ошибок.

Общие моделирующие алгоритмы [4, 8, 10] позволяют методами СИ и ДЛВ в вероятностной постановке вычислить ошибки положения (перемещения), скорости и ускорения плоских механизмов с низшими и высшими кинематическими парами, а также механизмов, описываемых уравнениями в неявном виде. В моделирующих алгоритмах выделены стандартная и нестандартная части. В первой сосредоточены все общие по своей постановке специфические особенности задач теории точности, связанные с вероятностным моделированием скалярных, векторных и представляющих собой реализации случайной функции первичных ошибок, а во второй - содержание конкретной схемы кинематической цепи исследуемого на точность функционирования механизма.

Метод ДЛВ основан на использовании ряда теорем, касающихся свойств линейных графов, характеризуется рассмотрением "лагранжева дерева", ветвями которого, инцидентным одной вершине, приписывается вполне определенная "масса" вероятности.

В целом ряде инженерных задач, точность решения которых во многих случаях ограничивается несколькими процентами, применение метода ДЛВ может дать определенные преимущества по сравнению с использованием метода СИ ввиду относительной простоты формирования законов распределения случайных чисел, характеризующих в определенном масштабе соответствующие первичные ошибки в изготовлении отдельных

звеньев и элементов устройств. Отмеченное обстоятельство приобретает особое значение в случае, когда законы распределения первичных ошибок получены эмпирическим путем и не поддаются аппроксимации с желаемой точностью с помощью относительно несложных аналитических выражений. Кроме того, метод ДЛВ позволяет отыскать решение стохастических уравнений на ЭВМ без какого-либо формального преобразования соответствующего алгоритма или машинного уравнения, составленных для решения задачи в детерминированной постановке.

Основные положения метода ДЛВ в приложении к решению задач точности механизмов заключается в следующем. Пусть имеется некоторое пространство логических возможностей. В этом пространстве может быть построено так называемое дерево, представляющее собой связанный граф, в котором нет ни одного контура. Каждая ветвь такого дерева характеризует один из возможных исходов опыта, заключающегося в том, что при изменении некоторого параметра звена или его элемента выявлено конкретное значение соответствующей первичной ошибки. В условиях массового производства механизмов по единому конструкторскому и технологическому проекту все первичные ошибки принимают случайный характер, причем их модули ограничены соответствующими полями допусков. Тогда каждой ветви дерева приписывается некоторая вероятностная мера, представляющая собой безусловную или условную вероятность получения отдельных одноименных первичных ошибок или возможного сочетания разноименных.

Метод ДЛВ основан на представлении законов распределения первичных ошибок в виде дискретных и во многих случаях (например, при наличии в устройствах нескольких разноименных первичных ошибок) не уступает по точности методу СИ, позволяет решать задачи более коротким и простым путем.

Ниже рассмотрен простейший пример графического построения ДЛВ. Пусть система включает независимые случайные величины a , b , и c , каждая из которых может принимать несколько дискретных случайных значений a_i, b_j, c_k (например, $i, j, k = 1, 2, 3$) с заданными вероятностями $P_{a_i}, P_{b_j}, P_{c_k}$:

$$a_i(a_1, a_2, a_3); \quad b_j(b_1, b_2, b_3);$$

$$c_k(c_1, c_2, c_3);$$

$$P_{a_i}(P_{a_1}, P_{a_2}, P_{a_3}); P_{b_j}(P_{b_1}, P_{b_2}, P_{b_3});$$

$$P_{c_k}(P_{c_1}, P_{c_2}, P_{c_3}).$$

(5.7.1)

щем случае, когда случайные величины являются зависимыми (в статистическом смысле), вероятности $P_{a_i b_j}$ и $P_{a_i b_j c_k}$ являются условными. Следующее равенство очевидно:

$$P = \sum_{ijk} P_{a_i b_j c_k} = 1.$$

Для независимых случайных величин процесс построения ДЛВ можно начать с любой из них и в произвольной последовательности. Пусть реализация - это каждое из возможных сочетаний случайных величин, имеющих место при проведении опыта. Тогда вероятность появления каждой из проведенных реализаций

На рис. 5.7.1 показано ДЛВ, построенное по условиям (5.7.1) с помощью выражений вида (5.7.2). Точка O называется корнем дерева, отрезки прямых P_{a_i} - ветвями первого ранга, отрезки прямых $P_{a_i b_j}$ - ветвями второго ранга, а отрезки прямых $P_{a_i b_j c_k}$ - ветвями третьего ранга. При построении ДЛВ ветви всех рангов откладываются в одном масштабе. Поэтому схеме ДЛВ присуща определенная наглядность. По ветвям наивысшего ранга можно определить число путей логических возможностей. В рассматриваемом случае $N = 27$.

$$P_{a_i b_j c_k} = P[a_i \wedge b_j \wedge c_k] = P_{a_i} P_{a_i b_j} P_{a_i b_j c_k}.$$

(5.7.2)

Последние два сомножителя в правой части выражения (5.7.2) последовательно указывают выбранный путь на ДЛВ. В более об-

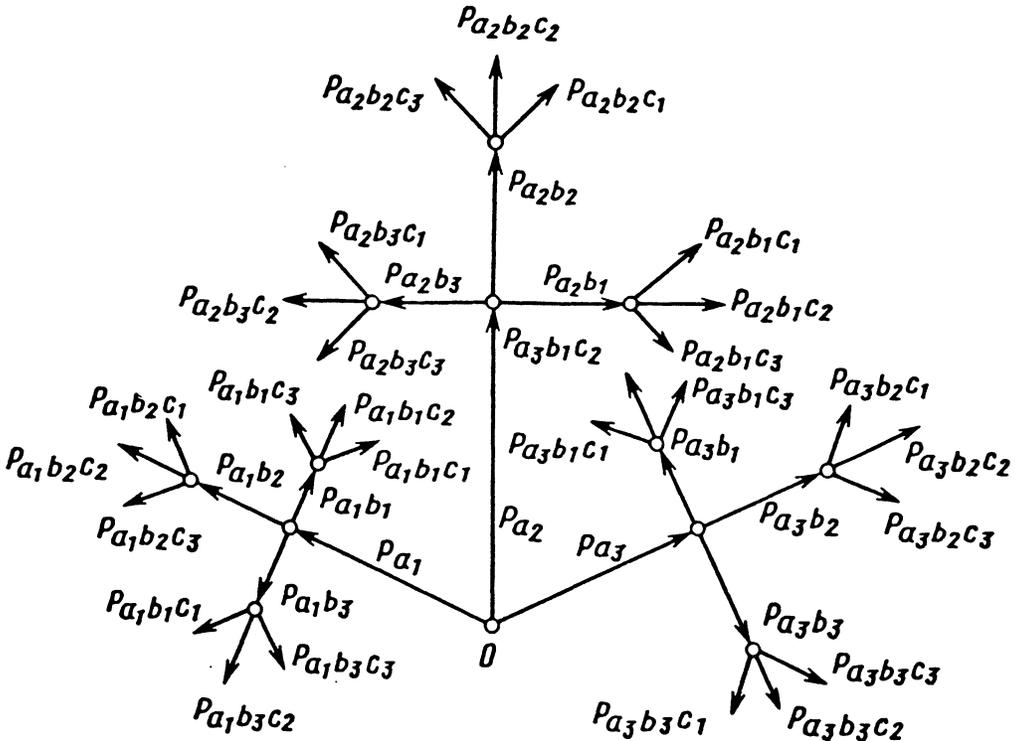


Рис. 5.7.1. Схема дерева логических возможностей

5.7.1. Таблица, эквивалентная схеме ДЛВ с ветвями m^* -го ранга

$0a_i b_j c_k$	P_{a_i}	$P_{a_i b_j}$	$P_{a_i b_j c_k}$
$0a_1 b_1 c_1$ $0a_1 b_1 c_2$ $0a_1 b_1 c_3$	P_{a_1}	$P_{a_1 b_1}$	$P_{a_1 b_1 c_1}$ $P_{a_1 b_1 c_2}$ $P_{a_1 b_1 c_3}$
$0a_1 b_2 c_1$ $0a_1 b_2 c_2$ $0a_1 b_2 c_3$	P_{a_1}	$P_{a_1 b_2}$	$P_{a_1 b_2 c_1}$ $P_{a_1 b_2 c_2}$ $P_{a_1 b_2 c_3}$
$0a_1 b_3 c_1$ $0a_1 b_3 c_2$ $0a_1 b_3 c_3$	P_{a_1}	$P_{a_1 b_3}$	$P_{a_1 b_3 c_1}$ $P_{a_1 b_3 c_2}$ $P_{a_1 b_3 c_3}$
$0a_2 b_1 c_1$ $0a_2 b_1 c_2$ $0a_2 b_1 c_3$	P_{a_2}	$P_{a_2 b_1}$	$P_{a_2 b_1 c_1}$ $P_{a_2 b_1 c_2}$ $P_{a_2 b_1 c_3}$
$0a_2 b_2 c_1$ $0a_2 b_2 c_2$ $0a_2 b_2 c_3$	P_{a_2}	$P_{a_2 b_2}$	$P_{a_2 b_2 c_1}$ $P_{a_2 b_2 c_2}$ $P_{a_2 b_2 c_3}$
$0a_2 b_3 c_1$ $0a_2 b_3 c_2$ $0a_2 b_3 c_3$	P_{a_2}	$P_{a_2 b_3}$	$P_{a_2 b_3 c_1}$ $P_{a_2 b_3 c_2}$ $P_{a_2 b_3 c_3}$
$0a_3 b_1 c_1$ $0a_3 b_1 c_2$ $0a_3 b_1 c_3$	P_{a_3}	$P_{a_3 b_1}$	$P_{a_3 b_1 c_1}$ $P_{a_3 b_1 c_2}$ $P_{a_3 b_1 c_3}$
$0a_3 b_2 c_1$ $0a_3 b_2 c_2$ $0a_3 b_2 c_3$	P_{a_3}	$P_{a_3 b_2}$	$P_{a_3 b_2 c_1}$ $P_{a_3 b_2 c_2}$ $P_{a_3 b_2 c_3}$
$0a_3 b_3 c_1$ $0a_3 b_3 c_2$ $0a_3 b_3 c_3$	P_{a_3}	$P_{a_3 b_3}$	$P_{a_3 b_3 c_1}$ $P_{a_3 b_3 c_2}$ $P_{a_3 b_3 c_3}$

В общем случае аналогично может быть построена схема ДЛВ с ветвями m^* -го ранга или составлена эквивалентная ей табл. 5.7.1. При этом если через n_i обозначить число

дискретных значений случайной величины номер l , то число путей в дереве $N = \prod_{l=1}^{l=l^*} n_l$, причем пути имеют вероятности, определяе-

мые с помощью следующих выражений в зависимости от того, являются ли случайные величины n_1, n_2, \dots, n_{r-1} связанными или независимыми в статистическом смысле:

$$P_{n_1 n_2 \dots n_r} = P[n_1 \wedge n_2 \dots n_{r-1} \wedge n_r] = \\ = \begin{cases} P_{n_1} P_{n_2} \dots P_{n_1 n_2} \dots n_{r-1} n_r; \\ P[n_1] P[n_2] \dots P[n_{r-1}] P[n_r]. \end{cases}$$

Таким образом, в конечных случайных процессах каждому пути на ДЛВ приписывается некоторая "масса" вероятности, равная произведению масс вероятностей, характеризующих собой ветви разных рангов, входящих в рассматриваемый путь.

Для моделирования случайных процессов, связанных с применением метода СИ в задачах точности, необходимо осуществлять формирование случайных чисел, подчиняющихся соответствующим законам распределения. Результаты, получаемые методом СИ, носят случайный характер, и, следовательно, необходимо обеспечить их статистическую устойчивость, поэтому вопрос о числе реализаций приобретает первоочередное значение.

Число реализаций при решении задач методом СИ определяется требуемым уровнем точности получаемых результатов. Пусть цель моделирования - вычисление вероятности P появления некоторого случайного события E . Например, при исследовании точности механизмов практический интерес могут представлять вероятности выхода значений ошибок положения, скорости, ускорения ведомого звена за определенные пределы. В качестве оценки для искомой вероятности P принимают частоту L/N наступления события E при N реализациях (где L - число испытаний, при которых происходит событие E). По центральной предельной теореме теории вероятностей частота L/N при достаточно больших значениях N имеет распределение, близкое к нормальному, с математическим ожиданием $M[L/N] = p$ и дисперсией $\sigma^2[L/N] = P(1-p)/N$.

Задаваясь определенной вероятностью P , можно найти по таблицам нормального распределения значения t_p и получить достоверную оценку L/N в виде:

$$P(|L/N - p| < \varepsilon) = t_p (p(1-p)/N)^{0,5}. \quad (5.7.3)$$

По формуле (5.7.3) с вероятностью, большей чем 0,997, величина L/N удовлетворяет условию

$$\left| \left(\frac{L}{N} - p \right) \right| < 3 \left(\frac{p(1-p)}{N} \right)^{0,5}.$$

Таким образом, погрешность метода статистических испытаний при вычислении вероятности события никогда не превышает величины

$$\varepsilon = 3 \left(\frac{p(1-p)}{N} \right)^{0,5}.$$

Отсюда можно определить число реализаций N , необходимых для получения оценки L/N с точностью ε и достоверностью $P = 0,997$:

$$N = 9p(1-p)/\varepsilon^2.$$

Аналогично можно оценить число реализаций, необходимых для оценки по результатам моделирования среднего значения случайной величины. Предположим, осуществляется формирование N реализаций случайной величины x , имеющей среднее значение a и дисперсию σ^2 . В качестве оценки среднего значения используется среднее арифметическое

$$\bar{x} = N^{-1} \sum_{i=1}^N x_i. \quad (5.7.4)$$

По центральной предельной теореме при больших значениях N среднее арифметическое (5.7.4) имеет распределение, близкое к нормальному с математическим ожиданием a и дисперсией σ^2/N . Отсюда достоверная оценка \bar{x} принимает вид:

$$P(|a - \bar{x}| < \varepsilon) = t_p \sigma / \sqrt{N}.$$

Поэтому точность

$$\varepsilon = t_p \sigma / \sqrt{N}. \quad (5.7.5)$$

Решение уравнения (5.7.5)

$$N = t_p^2 \sigma^2 / \varepsilon^2. \quad (5.7.6)$$

При $P = 0,997$ формулы (5.7.5) и (5.7.6) принимают соответственно вид:

$$\epsilon = 3\sigma/\sqrt{N}; \quad N = 9\sigma^2/\epsilon^2.$$

Весьма существенной частью аппарата вероятностного моделирования является умение формировать реализации случайных величин, подчиняющихся различным законам распределения. Вопросы, связанные с законами распределения первичных ошибок, исходя из специфических условий производства и сборки механизмов, впервые рассмотрены Н. А. Бородачевым. В литературных источниках [4, 8] изложены методы формирования случайных величин, подчиняющихся различным, наиболее часто встречающимся на практике законам распределения, обладающие повышенным быстродействием и точностью.

Пример. Пусть свободное движение автоколебательной системы описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$f_{\mathfrak{z}}(y_{\mathfrak{z}}^{(n)}, \dots, y_{\mathfrak{z}}; B_1^0, \dots, B_V^0; b_1, \dots, b_w; b_{w+1}^0, \dots, b_m^0; t) = 0; \quad 1 \leq \mathfrak{z} \leq \mathfrak{z}^*, \quad (5.7.7)$$

где B^0 и b^0 - расчетные значения параметров, характеризующих соответственно линейную и нелинейную части уравнения; t - независимая переменная.

Входящие в (5.7.7) параметры b_1, \dots, b_w представляются в виде:

$$b_l = b_l^0 + \Delta b_l, \dots; \quad b_w = b_w^0 + \Delta b_w, \quad (5.7.8)$$

где $\Delta b_1, \dots, \Delta b_w$ - некоторые приращения параметров, которые принимаются случайными с известными законами распределения.

Определив величины $M[b_1], \dots, M[b_w]$ и подставив их в (5.7.7), имеем:

$$f_{\mathfrak{z}0}(y_{\mathfrak{z}}^{(n)}, \dots, y_{\mathfrak{z}}; B_1^0, \dots, B_V^0; M[b_1], \dots, M[b_w]; b_{w+1}^0, \dots, b_m^0; t) = 0. \quad (5.7.9)$$

Найденные из (5.7.9) путем решения на ЭВМ амплитуды и частоты автоколебаний принимаются за расчетные (a^0, ω^0), по отношению к которым рассматриваются возможные отклонения значений a и ω . При этом предполагается наличие в системе устойчивых предельных циклов.

Решение задачи основано на методе ДЛВ, для чего непрерывные законы распределения $\eta(\Delta b_1), \dots, \eta(\Delta b_w)$ в области практических возможных значений варьируемых параметров преобразуются в дискретные. Это дает возможность определить число и вероятность появления логических путей в дереве, а следовательно, построить дерево или составить идентичную ему таблицу. Тогда исходное уравнение (5.7.7) преобразуется к виду:

$$f_{\mathfrak{z}}(y_{\mathfrak{z}}^{(n)}, \dots, y_{\mathfrak{z}}; B_1^0, \dots, B_V^0; b_1, \dots, b_w; b_{w+1}^0, \dots, b_m^0; t) = 0. \quad (5.7.10)$$

Согласно (5.7.1)

$$b_l(b_l^{(1)}, \dots, b_l^{(l)}), \dots, b_w(b_w^{(1)}, \dots, b_w^{(j)}); \\ P_{b_l}(P_{b_l}^{(1)}, \dots, P_{b_l}^{(l)}), \dots, P_{b_w}(P_{b_w}^{(1)}, \dots, P_{b_w}^{(j)}).$$

Для определения параметрической надежности динамической системы представим выражения (5.7.8) с учетом (5.6.1) следующим образом:

$$b_l(T_v) = b_l^0 + \Delta b_l(T_v), \dots; \\ b_w(T_v) = b_w^0 + \Delta b_w(T_v), \quad (5.7.11)$$

где $T_v \leq T$.

Функции $\Delta b_l(T_v), \dots, \Delta b_w(T_v)$ в связи с рассмотренными выше обстоятельствами являются медленно изменяющимися, для которых из теоретических соображений или экспериментальных данных известны законы распределения $\eta(\Delta b_1), \dots, \eta(\Delta b_w, T_v)$. При решении задачи на основе методов ДЛВ для каждого фиксированного значения $T_v = \text{const}$ должен быть осуществлен переход от непрерывных законов распределения $\eta(\Delta b_1, T_v = C_v), \dots, \eta(\Delta b_w, T_v = C_v)$ к их дискретным аналогам, в результате чего условия (5.7.11) принимают вид:

$$b_l(b_l^{(1)}, \dots, b_l^{(l)}) \Big|_{T_v=C_v}, \dots, \\ b_w(b_w^{(1)}, \dots, b_w^{(j)}) \Big|_{T_v=C_v};$$

$$P_{b_1} \left(P_{b_1}^{(1)}, \dots, P_{b_1}^{(i)} \right) \Big|_{T_v = C_v}, \dots,$$

$$P_{b_w} \left(P_{b_w}^{(1)}, \dots, P_{b_w}^{(j)} \right) \Big|_{T_v = C_v}.$$

(5.7.12)

Подстановка условий (5.7.12) в дифференциальное уравнение (5.7.10) позволяет вычислить всю последовательность решений и оценить вероятности получения последних, в том числе с позиций удовлетворения заданных технических условий по точности функционирования системы, под которыми понимают заданный уровень амплитуд автоколебаний.

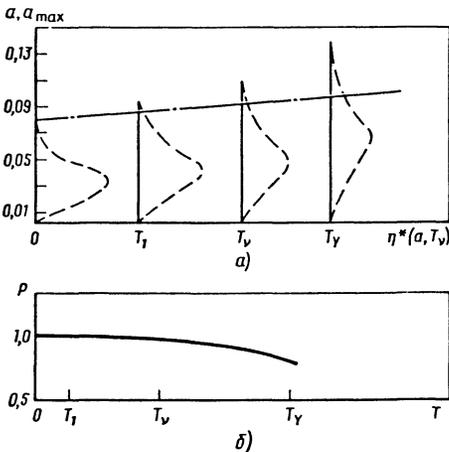


Рис. 5.7.2. Зависимости изменения распределения ошибок функционирования партии систем (а) и оценки параметрической надежности партии машин (б)

Дискретные распределения (5.7.12) для всей последовательности значений $T_v = C_v$ дают возможность построить схемы ДЛВ (или составить эквивалентные им таблицы) и тем самым в рассмотренной выше последовательности отыскать всю совокупность реализаций случайной функции, получаемой в виде решений уравнений (5.7.10). При этом значению $T_v = 0$ будет соответствовать уровень точности партии систем, достигнутый в процессе их изготовления и настройки. В работах [4, 5] рассмотрены примеры расчета управляющих систем, в которых ряд параметров подчинялся законам распределения, изменяющихся во времени. Характерный вид указанной последовательности приведен на рис. 5.7.2, а. Если техническими требованиями на эксплуатацию систем оговариваются вид зависимости

$a_{\max}(T_v)$ и вероятность $P(T_v)$ ее удовлетворения, то нанесение $a_{\max}(T_v)$ на график дает возможность оценить надежность работы партии систем (в рассмотренной постановке решаемой задачи) по выбранным параметрам.

К ключевым вопросам решения задачи определения ошибок скорости Δv_{Σ} и ускорения Δw_{Σ} механизмов с высшими кинематическими парами следует отнести также выбор вида интерполяционного полинома, при помощи которого описывается реальный профиль элемента пары. Исходя из специфики задач теории точности целесообразно использовать интерполяционные полиномы Лагранжа при неравных или равных расстояниях между соседними однократными узлами [4, 5]. При этом выбор положения узлов существенным образом зависит от вида корреляционной функции ошибки профиля элемента пары. Сформулированные подобным образом отдельные реализации случайной функции удовлетворительно отражают данные эксперимента (по критерию Пирсона $P(\chi^2) = 0,64$), связанного с измерением профиля изготовления партии звеньев механизмов с высшими кинематическими парами.

Существуют программы выполнения на ЭВМ вычислений интерполяционных полиномов по Лагранжу и его первых двух производных. Имеется методология и рассмотрены примеры формирования законов распределения ошибок положения касательных и центров кривизны реализаций (в выбранных сечениях последних), описывающих реальные элементы высших кинематических пар, и на их основе разработана методология построения законов распределения ошибок скоростей и ускорений ведомого звена кулачкового механизма [4, 5].

Следует отметить, что комплекс общих вопросов точности и параметрической надежности механизмов путем имитационного вероятностного моделирования еще на стадии проектирования позволяет сравнивать количественно варьируемые расчетные характеристики с требуемыми по техническому заданию, выявить "слабые" места в конструкции кинематической цепи и принять меры к повышению ее надежности с одновременной ее оценкой.

В задачах параметрической надежности механизмов структура сложной кинематической цепи машины и ее предназначение должны обязательно учитываться. Без этого невозможно ответить на следующий вопрос: отказы какого характера и в каком узле машины могут привести к ошибкам точности ее функционирования, превышающим предусмотренные техническими условиями? Помощь при реше-

нии этого кардинального вопроса теории точности и параметрической надежности механизмов должна основываться на формировании соответствующего банка данных по параметрическим отказам типовых узлов конструкций машин.

При наличии подобных данных расчет ожидаемой точности и надежности функционирования механизмов может быть в определенной мере основан на разработанных положениях теории точности и методах ее решения путем вероятностного имитационного моделирования на ЭВМ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бозров Б. М. Расчет точности машин на ЭВМ. М.: Машиностроение, 1984. 256 с.
2. Бородачев Н. А. Основные вопросы теории точности производства. М.: Изд-во АН СССР, 1950. 416 с.
3. Бруевич Н. Г. Точность механизмов. М.: ГИТТЛ, 1946. 332 с.
4. Бруевич Н. Г., Правоторова Е. А., Сергеев В. И. Основы теории точности механизмов. М.: Наука, 1988. 237 с.
5. Бруевич Н. Г., Сергеев В. И. Основы нелинейной теории точности и надежности устройств. М.: Наука, 1976. 134 с.
6. Быховский М. Л. Основы динамической точности электрических и механических цепей. М.: Изд-во АН СССР, 1958. 156 с.
7. Иванцов А. И. Основы теории точности измерительных устройств. М.: Изд-во стандартов, 1972. 210 с.
8. Кинематика, динамика, точность механизмов: Справочник / Под ред. Г. В. Крейна. М.: Машиностроение, 1984. 214 с.
9. Коротков В. М., Тайц Б. А. Основы метрологии и теории точности измерительных устройств. М.: Изд-во стандартов, 1978. 352 с.
10. Коченов М. И., Правоторова Е. А., Сергеев В. И. Вероятностное моделирование в задачах точности. М.: Наука, 1973. 152 с.
11. Сергеев В. И. Инструментальная точность кинематических и динамических систем. М.: Наука, 1971. 200 с.
12. Сергеев В. И. Основы инструментальной точности электромеханических цепей. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 215 с.
13. Точность производства в машиностроении и приборостроении / Под ред. А. Н. Гаврилова. М.: Машиностроение, 1973. 567 с.

Глава 6

ДИНАМИКА МАШИН

6.1. ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Отличительная особенность машин и большинства механизмов среди других конструкций состоит в том, что их функции вы-

полняются в процессе движения. Большинство современных машин работают в напряженных режимах (форсированных по скоростям и нагрузкам), поэтому задачи динамики машин являются важнейшими, так как они определяют надежность работы машин с точки зрения ее прочности, долговечности, точности функционирования. Знание динамических явлений в машинах позволяет снизить металлоемкость, затраты энергии, улучшить управляемость и в итоге повысить их качество.

Современные машины используются в виде комплекса - машинного агрегата, состоящего из двигателя, передаточного механизма, рабочей машины и управляющей системы. Понятие "динамика машин" очень емкое, в которое включено определение: сил, действующих на звенья и в кинематических парах; движения всей системы, колебаний, уравнивания; виброзащиты; динамической точности и управляемости.

В настоящей главе рассматривается задача динамики движения машинного агрегата, на которое влияют характеристики привода (электрический, тепловой, гидравлический, пневматический, магнитный), характер механической части (звенья, кинематические пары, их структура и конструкция), технологический процесс выполняемый машиной и тип управления. Для изучения динамики движения машин математическими методами необходимо прежде всего разработать динамическую модель машинного агрегата: динамические модели двигателя-привода, механической части - передаточного механизма, рабочей машины с моделью технологического процесса. Конечно, составление динамической модели носит эвристический характер. С одной стороны, стремятся учесть как можно больше таких факторов, как характеристики двигателей и рабочих машин с включением в них процессов, протекающих в двигателях и рабочих машинах, распределенность или сосредоточенность масс, их переменность, упругость звеньев, зазоры и характер трения в кинематических парах, физику явлений технологических процессов, а с другой - пытаются получить такие модели, для которых системы уравнений движения позволяют точнее и проще решить задачу. Конечно, нужны разумные компромиссы [3, 4, 5, 8].

6.2. СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ В МАШИНАХ

Силы (моменты сил) делят на движущие и сопротивления. Движущие силы такие, элементарная работа которых на возможных перемещениях положительная, они стремятся увеличить скорость ведущего звена. Силы со-

противления - это силы, у которых элементарная работа на возможном перемещении отрицательная, они стремятся замедлить движение ведущего звена. Иногда движущие силы (например, момент электродвигателя) могут стать силами сопротивления, если двигатель переходит в генераторный режим работы.

Силы или моменты сил двигателей и рабочих машин в функции кинематических параметров (время, положения или скорости звена) называют механическими характеристиками (рис. 6.2.1). При решении задач динамики машин они считаются известными внешними силами и моментами.

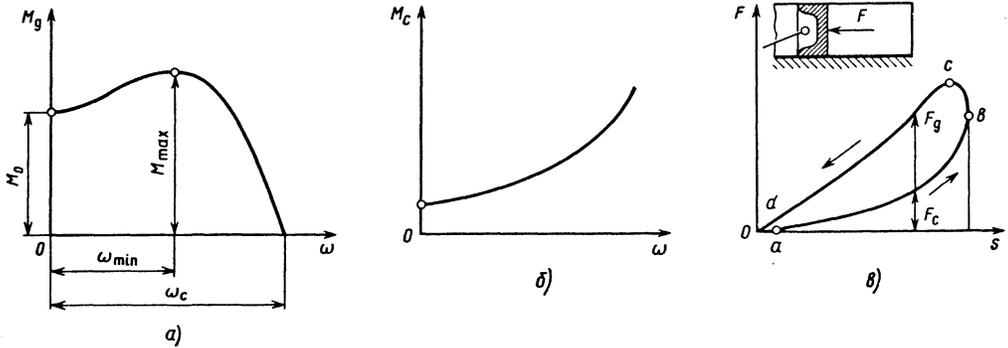


Рис. 6.2.1. Механические характеристики двигателей и рабочих машин:

а - трехфазного асинхронного электродвигателя; б - электрогенератора, вентилятора, центробежного насоса; в - двухтактного двигателя внутреннего сгорания (ab- сила сопротивления; bcd - движущая сила)

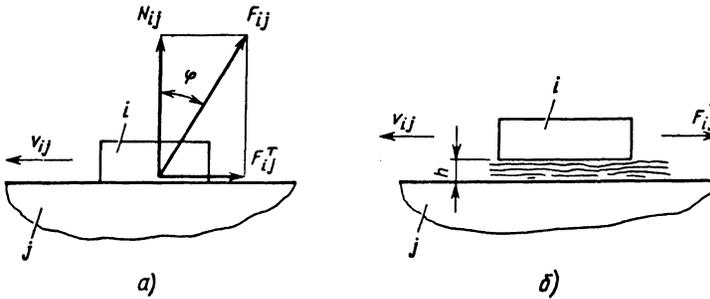


Рис. 6.2.2. Действие силы трения в поступательной паре:

а - трение без смазочного материала; б - жидкостное трение

К силам сопротивления относится сила трения (без смазочного материала и жидкостного трения).

В поступательной кинематической паре модуль силы трения F_{ij}^T согласно закону Амонтона (рис. 6.2.2)

$$F_{ij}^T = fN_{ij}. \tag{6.2.1}$$

Полная реакция \bar{F}_{ij} отклоняется от нормали на угол трения φ , который определяется по формуле

$$\operatorname{tg} \varphi = f, \tag{6.2.2}$$

где f - коэффициент трения между звеньями i и j .

Если между трущимися с относительной скоростью v_{ij} поверхностями звеньев в зазоре h площадью S есть слой жидкости с динамической вязкостью μ , то модуль силы трения F_{ij}^T между звеньями i и j может быть приближенно рассчитан в соответствии с формулой Ньютона:

$$F_{ij}^T = \mu S v_{ij} / h \quad (6.2.3)$$

или

$$F_{ij}^T = \beta v_{ij}, \quad (6.2.4)$$

где $\beta = \mu S / h$ - постоянный коэффициент вязкого трения.

Силы жидкостного трения значительно меньше сил трения без смазочного материала.

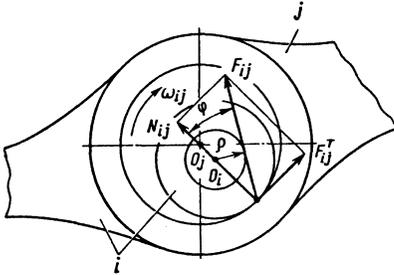


Рис. 6.2.3. Действие сил трения без смазочного материала во вращательной паре

Во вращательной паре с зазором (на рис. 6.2.3. зазор показан увеличенным) сила трения в точке контакта цилиндрических поверхностей также рассчитывается по закону Амонтона, однако коэффициент трения f' звеньев i и j , как показывает опыт, несколько больший, чем в плоской паре. Если из центра O_i опустить перпендикуляр на вектор силы \vec{F}_{ij} и радиусом ρ описать окружность, то круг радиусом ρ называют кругом трения. Радиус

$$\rho = r \sin \varphi \approx r g \varphi = r f', \quad (6.2.5)$$

где r - радиус цапфы. Угол φ обычно мал.

Момент сил трения во вращательной паре

$$M_{ij}^T = F_{ij} r f'. \quad (6.2.6)$$

Силы трения и моменты сил трения направлены противоположно относительной скорости скольжения тел. Значительное уменьшение моментов сил трения во вращательных парах достигается следующими путями

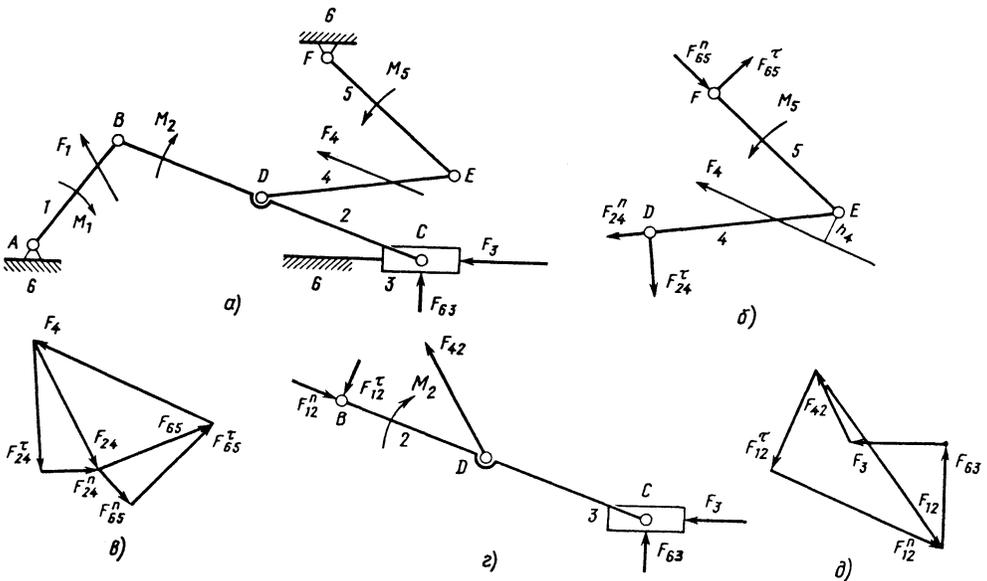


Рис. 6.2.4. Схемы шестизвенного механизма, нагруженного силами и парами сил, и выделенных групп

ми: заменой трения скольжения трением качения с помощью шариковых или роликовых подшипников; переходом на гидростатические или гидродинамические вращательные пары, т.е. вводом слоя смазочного материала между вращающимися звеньями i и j . Совершенно особые расчеты трения производят при работе машин в экстремальных условиях (при очень высоких или низких температурах, в разреженных средах или вакууме) [6].

В быстроходных машинах существенные значения имеют силы и моменты сил инерции. При плоском движении звена как твердого тела главный вектор $\bar{F}_и$ и главный момент $M_и$ сил инерции определяются по формулам

$$\bar{F}_и = -m\bar{a}_S; \quad (6.2.7)$$

$$M_и = -J_S\varepsilon, \quad (6.2.8)$$

где m - масса звена; \bar{a}_S - вектор полного ускорения центра масс; J_S - момент инерции относительно центра масс S ; ε - угловое ускорение звена.

Знак минус в этих уравнениях показывает, что сила $\bar{F}_и$ и момент $M_и$ направлены противоположно соответственно \bar{a}_S и ε .

При пространственном движении звена сила инерции звена

$$\bar{F}_и = -m\bar{a}_S,$$

где \bar{a}_S - пространственный вектор полного ускорения центра масс звена.

Что касается главного момента от сил инерции звена, то как известно из теоретической механики его удобно подсчитывать через составляющие - проекции на главные центральные оси инерции звена:

$$M_{иx} = -J_x\varepsilon_x - (J_z - J_y)\omega_y\omega_z;$$

$$M_{иy} = -J_y\varepsilon_y - (J_x - J_z)\omega_z\omega_x; \quad (6.2.9)$$

$$M_{иz} = -J_z\varepsilon_z - (J_y - J_x)\omega_x\omega_y,$$

где $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ - проекции вектора угловой скорости на главные центральные оси инерции звена; $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ - проекции вектора углового ускорения на главные центральные оси инерции звена; J_x, J_y, J_z - главные центральные моменты инерции звена.

6.3. СИЛОВОЙ РАСЧЕТ МЕХАНИЗМОВ

Задачи силового расчета состоят в определении реакций в кинематических парах механизмов, по которым разрабатывают конструкции кинематических пар, подбирают подшипники, характер смазки в смазываемых кинематических парах, местах подачи смазки, величены зазоров и т.д.

В многосвязных стержневых механизмах удобно вести силовой расчет по группам Ассура, так как в теории механизмов доказывается, что группа Ассура является статически определимой системой.

Общий прием силового расчета такой. Ко всем внешним силам добавляют силы инерции и тогда на основе принципа Даламбера решают задачу статического равновесия каждой группы, начиная с наиболее удаленной от начального звена. Поэтому силовой расчет называют еще кинетостатическим расчетом механизмов.

Пример. Рассмотрим шестизвенный плоский механизм (рис. 6.2.4). Порядок расчета следующий. На рис. 6.2.4, а механизм нагружен известными силами и моментами, включая силы и моменты инерции. Трением в кинематических парах пренебрегают.

Выделена группа 4-5, отброшенные звенья 2 и 6 заменены реакциями этих звеньев в точках F и D . Реакции разложены на нормальные и тангенциальные составляющие вдоль и поперек соответствующих звеньев: $\bar{F}_{24}^x, \bar{F}_{24}^y, \bar{F}_{65}^x, \bar{F}_{65}^y$ (рис. 6.2.4, б).

Рассматривая отдельно равновесие звеньев 4 и 5 и составляя уравнения равновесия путем суммы моментов относительно точки E , найдем тангенциальные составляющие

$$F_{24}^x = F_4 h_4 / l_{DE}; \quad F_{65}^x = M_5 / l_{EF}. \quad (6.3.1)$$

Уравнение равновесия всей группы 4-5 как векторная сумма всех сил

$$\bar{F}_4 + \bar{F}_{24}^x + \bar{F}_{24}^y + \bar{F}_{65}^x + \bar{F}_{65}^y = 0. \quad (6.3.2)$$

На рис. 6.2.4, в по этому уравнению построен многоугольник сил, из которого найдены составляющие \bar{F}_{24}^y и \bar{F}_{65}^y . Реакция в шарнире E $\bar{F}_{45}(\bar{F}_{54})$ находится из равновесия отдельного звена 4 или 5.

Зная полную реакцию $\bar{F}_{24} = \bar{F}_{24}^x + \bar{F}_{24}^y$ в точке D , рассматривают группу 2-3. Незвестную реакцию в точке B раскладывают на две составляющие \bar{F}_{12}^x и \bar{F}_{12}^y . Что касается

реакции \bar{F}_{63} , то направление ее перпендикулярно к направляющей ползуна (силой трения пренебрегают), точка приложения проходит через центр шарнира C из условия равновесия отдельно взятого ползуна. Тангенциальная составляющая \bar{F}_{21}^{τ} находится, как и выше, из суммы моментов всех сил и моментов, приложенных к звену 2 относительно точки C :

$$F_{12}^{\tau} = (M_2 - F_{42}h_{42})/l_{BC}.$$

Затем составляется векторная сумма всех сил, приложенных к группе 2-3 (рис. 6.2.4, д), из которой находятся силы \bar{F}_{12}^n и \bar{F}_{63} :

$$\bar{F}_3 + \bar{F}_{42} + \bar{F}_{12}^{\tau} + \bar{F}_{12}^n + \bar{F}_{63} = 0. \quad (6.3.3)$$

Векторная сумма \bar{F}_{12}^{τ} и \bar{F}_{12}^n дает полную силу реакции \bar{F}_{21} в точке B . Векторная сумма равновесия сил на ползуне 3 дает силу реакции в шарнире C \bar{F}_{23} (\bar{F}_{32}). Остается рассмотреть реакцию \bar{F}_{61} в кинематической паре A , которая находится из рассмотрения равновесия сил на звене 1.

Наглядные методы силового анализа механизмов с помощью построения векторных многоугольников служат основанием для решения этих задач аналитическим методом [12].

Учет трения при силовом расчете является не простой задачей и может быть выполнен, например, методом последовательного приближения, предложенного академиком И. И. Артоболевским [11]. Идея метода состоит в следующем. Вначале делается расчет без учета сил трения (нулевое приближение). Затем по реакциям в кинематических парах определяют силы трения и моменты сил трения во всех кинематических парах. Эти силы и моменты добавляют ко всем внешним силам по нулевому приближению и повторяют силовой расчет, из которого определяют реакции в кинематических парах (первое приближение). Затем по этим реакциям находят уточненные силы и моменты сил трения и снова их рассматривают как внешние силы и моменты и расчет повторяют. Практика показывает, что для большинства механизмов приближенный метод является сходящимся процессом и дает хорошие результаты уже при первом приближении. Нельзя, например, пользоваться этим методом в механизмах с зонами, близкими к самоторможению. Явление самоторможения в механизмах и подсчет их КПД рассмотрены в учебной, научной и справочной литературе по механизмам [1, 10].

6.4. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЗМОВ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

При описании движения механизмов распространен метод приведения сил и масс к начальному звену механизма, которое совершает либо вращательное движение, либо поступательное. Например, для механизма, показанного на рис. 6.2.4, за звено приведения можно выбрать звено AB или за точку приведения - точку B , к которым и приводят все силы и массы звеньев. Силы (моменты пар сил) находят из равенства мощностей, т.е. приведенная сила (приведенный момент пары сил) есть такая сила (момент), мощность которой равна сумме мощностей всех приложенных к механизму сил и моментов. Отсюда сила, приведенная в точке B ,

$$F_{\Pi} = \sum_{k=1}^m \left[F_k \frac{v_k}{v_B} \cos \alpha_k + M_k \frac{\omega_k}{v_B} \right] \quad (6.4.1)$$

и момент

$$M_{\Pi} = \sum_{k=1}^m \left[F_k \frac{v_k}{\omega} \cos \alpha_k + M_k \frac{\omega_k}{\omega} \right], \quad (6.4.2)$$

где F_k - приводимая сила; v_k - скорость точки приложения силы F_k ; v_B - скорость точки B приведения; α_k - угол между векторами \bar{F}_k и \bar{v}_k ; M_k - приводимый момент; ω_k - угловая скорость звена, к которому приложен момент сил M_k ; m - число сил и моментов приложенных к звеньям механизма; ω - скорость звена приведения.

Для пространственных механизмов формулы для определения F_{Π} и M_{Π} аналогичны формулам (6.4.1) и (6.4.2):

$$F_{\Pi} = \sum_{k=1}^m \left[F_k \frac{v_k}{v} \cos \alpha_k + M_k \frac{\omega_k}{v} \cos \beta_k \right]; \quad (6.4.3)$$

$$M_{\Pi} = \sum_{k=1}^m \left[F_k \frac{v_k}{\omega} \cos \alpha_k + M_k \frac{\omega_k}{\omega} \cos \beta_k \right], \quad (6.4.4)$$

где v - скорость точки приведения; α_k - угол между векторами \vec{F}_k и \vec{v}_k ; β_k - угол между векторами \vec{M}_k и $\vec{\omega}_k$; ω - угловая скорость звена приведения.

Массы (моменты инерции) приводятся по равенству кинетических энергий, т.е. приведенная масса m_{Π} (приведенный момент инерции J_{Π}) есть такая масса (момент инерции), кинетическая энергия которой при скорости точки приведения v_B (скорости звена приведения) равна сумме кинетических энергий всех звеньев механизма

$$T = 0,5J_{\Pi}\omega^2; T_i = 0,5m_i v_{S_i}^2 + 0,5J_{S_i}\omega_i^2. \quad (6.4.5)$$

Формулы для расчета этих величин следующие:

$$m_{\Pi} = \sum_{i=1}^n \left[m_i \left(\frac{v_{S_i}}{v_B} \right)^2 + J_{S_i} \left(\frac{\omega_i}{v_B} \right)^2 \right]; \quad (6.4.6)$$

$$J_{\Pi} = \sum_{i=1}^n \left[m_i \left(\frac{v_{S_i}}{\omega} \right)^2 + J_{S_i} \left(\frac{\omega_i}{\omega} \right)^2 \right], \quad (6.4.7)$$

где m_{Π} - приведенная масса в точке B ; m_i - масса i -го звена; v_{S_i} - скорость центра масс i -го звена; v_B - скорость точки B приведения; J_{S_i} - момент инерции i -го звена относительно его центра масс S_i ; ω_i - угловая скорость i -го звена; i - номер звена; n - число подвижных звеньев механизма.

Величины m_{Π} и J_{Π} при постоянных m_i и J_{S_i} являются периодическими функциями положения механизма. Эти функции существенно положительны.

Кинетическая энергия пространственного механизма подсчитывается сложнее и поэтому труднее определить приведенную массу (приведенный момент инерции). В общем случае кинетическая энергия i -го звена, совершающего сложное пространственное движение, определяется как сумма кинетической энергии поступательного движения звена вместе с центром его масс со скоростью v_{S_i} и кинетической энергии сферического движения около этого центра масс S_i .

Если поместить начало системы координат, связанной со звеном i в центре масс S_i и расположить координаты x_i, y_i, z_i так, чтобы они совпадали с главными осями инерции, относительно которых центробежные моменты инерции равны нулю, то кинетическая энергия

$$T_i = 0,5 \left(m_i v_{S_i}^2 + J_{x_i} \omega_{x_i}^2 + J_{y_i} \omega_{y_i}^2 + J_{z_i} \omega_{z_i}^2 \right). \quad (6.4.8)$$

Тогда аналогично с формулами (6.4.6) и (6.4.7) для пространственного механизма: приведенная масса

$$m_{\Pi} = \sum_{i=1}^n \left[m_i \left(\frac{v_{S_i}}{v} \right)^2 + J_{x_i} \left(\frac{\omega_{x_i}}{v} \right)^2 + J_{y_i} \left(\frac{\omega_{y_i}}{v} \right)^2 + J_{z_i} \left(\frac{\omega_{z_i}}{v} \right)^2 \right]; \quad (6.4.9)$$

приведенный момент инерции

$$J_{\Pi} = \sum_{i=1}^n \left[m_i \left(\frac{v_{S_i}}{\omega} \right)^2 + J_{x_i} \left(\frac{\omega_{x_i}}{\omega} \right)^2 + J_{y_i} \left(\frac{\omega_{y_i}}{\omega} \right)^2 + J_{z_i} \left(\frac{\omega_{z_i}}{\omega} \right)^2 \right], \quad (6.4.10)$$

где $J_{x_i}, J_{y_i}, J_{z_i}$ - центральные моменты инерции относительно главных осей инерции; $\omega_{x_i}, \omega_{y_i}, \omega_{z_i}$ - проекции угловой скорости при сферическом движении звена i относительно центра S_i на соответствующие оси; v - скорость точки приведения; ω - угловая скорость звена приведения.

Таким образом, метод приведения сил и масс позволяет свести задачу о движении многозвонного механизма, нагруженного многими силами и моментами сил, к движению одной точки B или звена AB (см. рис. 6.2.4). При составлении уравнений движения механизма эти функции m_{Π} и J_{Π} можно подставлять лишь в уравнения, содержащие кинетическую энергию. Обычно используют либо уравнение кинетической энергии, либо уравнение Лагранжа второго рода.

На рис. 6.4.1 показано звено приведения, к которому приведены силы и массы, с приведенным моментом сил M_{Π} и моментом инер-

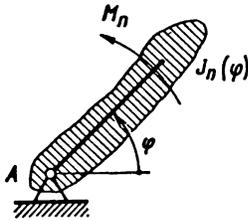


Рис. 6.4.1. Модель вращательного звена приведения

ции $J_{\Pi}(\varphi)$, где φ - угол поворота звена приведения. Уравнение Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = M_{\Pi}, \quad (6.4.11)$$

где T - кинетическая энергия механизма; $\dot{\varphi} = \omega$ - угловая скорость звена приведения (обобщенная скорость).

Обычно в приведенном моменте сил M_{Π} выделяют приведенный момент движущихся сил M_d и момент сил сопротивления M_c , тем более что часто они являются функциями различных кинематических параметров. Так, момент электродвигателя зависит от скорости вращения, а момент рабочей машины - от положения механизма. Таким образом, приведенный момент $M_{\Pi} = M_d - M_c$, а кинетическая энергия $T = 0,5 J_{\Pi} \omega^2$; их подставляют в уравнение (6.4.11) и выполняют операции частного и полного дифференцирования. При этом

$$J_{\Pi}(\varphi) \frac{d\omega}{dt} + \frac{dJ_{\Pi}}{d\varphi} \frac{\omega^2}{2} = M_d - M_c. \quad (6.4.12)$$

Нелинейное дифференциальное уравнение (6.4.12) второго порядка (t - аргумент, φ - искомая функция) усложнено еще и тем, что M_d и M_c могут быть сложными функциями одной или даже нескольких переменных.

Решение в квадратурах может быть только для частных случаев. Например, если $J_{\Pi} = \text{const}$, $M_d = M_d(\omega)$, $M_c = M_c(\omega)$, то это уравнение имеет вид:

$$J_{\Pi} \frac{d\omega}{dt} = M_d(\omega) - M_c(\omega). \quad (6.4.13)$$

Тогда переменные разделяются и решение приводит к квадратуре

$$t = t_0 + \int_{\omega_0}^{\omega} \frac{J_{\Pi} d\omega}{M_d(\omega) - M_c(\omega)}.$$

Решению общего уравнения (6.4.12) посвящено много работ, где излагаются графические, графо-аналитические и численные методы [1, 2, 9, 11].

6.5. ДИНАМИКА МЕХАНИЗМОВ С НЕСКОЛЬКИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Общие замечания. Особенности кинематических соотношений. Механизмы с несколькими степенями свободы находят все большее применение в различных отраслях техники: динамические упругие муфты; трансформаторы крутящих моментов; механизмы для сборки покрышек колес; вариаторы; дифференциальные зубчатые механизмы; механизмы простейших автооператоров и роботов; вибрационные машины. При переходе от механизмов с одной степенью свободы к механизмам с двумя степенями свободы обнаруживается принципиальное различие этих систем как по форме уравнений движения, так и по сути этого движения. При большем числе степеней свободы механизмов возрастает громоздкость уравнений.

Общее описание движения рассмотрено на примере пятизвенного шарнирного механизма с двумя степенями свободы (рис. 6.5.1). Положения и скорости звеньев этого механизма определяются двумя обобщенными координатами φ_1 и φ_4 . За начало координат принята точка А. Тогда положение точки С определяется радиусом-вектором

$$\vec{r}_C = \vec{r}_C(\varphi_1, \varphi_4). \quad (6.5.1)$$

Положение всех точек звеньев 2 и 3 определяется аналогичными функциями.

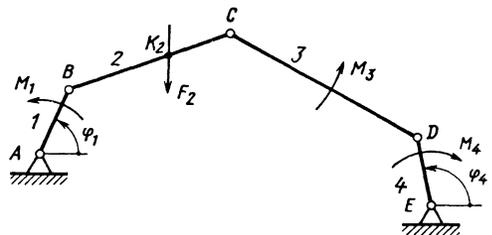


Рис. 6.5.1. Пятизвенный шарнирный механизм с двумя степенями свободы

Для определения скорости точки C дифференцируется выражение (6.5.1) по времени

$$\frac{d\bar{r}_C}{dt} = \frac{\partial \bar{r}_C}{\partial \varphi_1} \frac{d\varphi_1}{dt} + \frac{\partial \bar{r}_C}{\partial \varphi_4} \frac{d\varphi_4}{dt}.$$

Введены обозначения $\frac{\partial \bar{r}_C}{\partial \varphi_1} = \bar{u}_{C_1}$;

$$\frac{\partial \bar{r}_C}{\partial \varphi_4} = \bar{u}_{C_4}; \quad \frac{d\varphi_1}{dt} = \omega_1; \quad \frac{d\varphi_4}{dt} = \omega_4.$$

Величины \bar{u}_{C_1} и \bar{u}_{C_4} являются аналогами линейных скоростей точки C . Физический смысл их следующий: \bar{u}_{C_1} - скорость точки C при условии, что $\omega_4 = 0$, а $\omega_1 = 1 \text{ с}^{-1}$; \bar{u}_{C_4} - скорость точки C при условии, что $\omega_1 = 0$, а $\omega_4 = 1 \text{ с}^{-1}$. Тогда $\bar{v}_C = \bar{u}_{C_1}\omega_1 + \bar{u}_{C_4}\omega_4$. Векторы \bar{u}_{C_1} и \bar{u}_{C_4} определяются обычными приемами кинематики для механизмов с одной степенью свободы, заданием поочередно $\omega_4 = 0$ и $\omega_1 = 0$. Таким образом, $\bar{u}_{C_1} = \bar{u}_{C_1}(\varphi_1, \varphi_4)$, $\bar{u}_{C_4} = \bar{u}_{C_4}(\varphi_1, \varphi_4)$. Функции двух переменных получены либо в виде семейства кривых, либо в виде массивов чисел при фиксированных звеньях соответственно 4 и 1.

Действительная скорость точки C

$$\bar{v}_C = \bar{u}_{C_1}(\varphi_1, \varphi_4)\omega_1 + \bar{u}_{C_4}(\varphi_1, \varphi_4)\omega_4. \quad (6.5.2)$$

Углы поворота звеньев 2 и 3 и их угловые скорости будут функциями двух переменных φ_1 и φ_4 . Так, $\varphi_3 = \varphi_3(\varphi_1, \varphi_4)$, а скорость

$$\omega_3 = \frac{\partial \varphi_3}{\partial \varphi_1} \frac{d\varphi_1}{dt} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial \varphi_4} \frac{d\varphi_4}{dt}.$$

Обозначая

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial \varphi_1} = i_{31}; \quad \frac{\partial \varphi_3}{\partial \varphi_4} = i_{34},$$

получим

$$\omega_3 = i_{31}(\varphi_1, \varphi_4)\omega_1 + i_{34}(\varphi_1, \varphi_4)\omega_4. \quad (6.5.3)$$

Аналоги угловых скоростей i_{31} и i_{34} определяются так же, как \bar{u}_{C_1} и \bar{u}_{C_4} .

Уравнения движения механизма. Для описания движения механизма воспользуемся уравнениями Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \omega_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = M_{п1};$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \omega_4} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_4} = M_{п4}, \quad (6.5.4)$$

где $M_{п1}$ - приведенный (обобщенный) момент к координате φ_1 ; $M_{п4}$ - приведенный (обобщенный) момент к координате φ_4 .

Приведенные моменты определяются как обычно из равенства мощностей. Пусть к звену 3 приложен момент M_3 , к звену 2 - сила F_2 в точке K_2 , к звену 1 - момент M_1 , а к звену 4 - момент M_4 . Тогда мощность всех сил, приложенных к механизму,

$$W = M_1\omega_1 + M_3\omega_3 + \bar{F}_2\bar{v}_2 + M_4\omega_4.$$

Скорость точки K_2 приложения силы

F_2

$$\bar{v}_2 = \bar{u}_{21}(\varphi_1, \varphi_4)\omega_1 + \bar{u}_{24}(\varphi_1, \varphi_4)\omega_4.$$

Угловая скорость ω_3 звена 3

$$\omega_3 = i_{31}(\varphi_1, \varphi_4)\omega_1 + i_{34}(\varphi_1, \varphi_4)\omega_4.$$

Подставляя эти выражения в формулу для мощности, получим

$$W = M_{п1}\omega_1 + M_{п4}\omega_4, \quad (6.5.5)$$

где

$$M_{п1} = M_1 + \bar{F}_2\bar{u}_{21} + M_3i_{31};$$

$$M_{п4} = M_4 + \bar{F}_2\bar{u}_{24} + M_3i_{34}.$$

Для составления выражения для кинетической энергии механизма запишем вначале кинетическую энергию j -го звена через обобщенные координаты и обобщенные скорости:

$$T_j = 0,5m_j v_{S_j}^2 + 0,5J_{S_j} \omega_j^2,$$

где m_j и ω_j - соответственно масса и угловая скорость j -го звена; v_{S_j} - скорость центра

j -го звена; J_{S_j} - момент инерции j -го звена относительно его центра.

В дальнейшем для простоты опустим индекс S у скорости и момента инерции:

$$T_j = 0,5m_j v_j^2 + 0,5J_j \omega_j^2.$$

Как было показано выше, скорости

$$v_j = u_{j1}(\varphi_1, \varphi_4)\omega_1 + u_{j4}(\varphi_1, \varphi_4)\omega_4;$$

$$\omega_j = i_{j1}(\varphi_1, \varphi_4)\omega_1 + i_{j4}(\varphi_1, \varphi_4)\omega_4.$$

Возводя их в квадрат, получим:

$$v_j^2 = u_{j1}^2 \omega_1^2 + 2u_{j1}u_{j4} \cos \gamma_j \omega_1 \omega_4 + u_{j4}^2 \omega_4^2;$$

$$\omega_j^2 = i_{j1}^2 \omega_1^2 + 2i_{j1}i_{j4} \omega_1 \omega_4 + i_{j4}^2 \omega_4^2,$$

где γ_j - угол между векторами \bar{u}_{j1} и \bar{u}_{j4} .

Кинетическая энергия j -го звена в развернутом виде

$$\begin{aligned} T_j = & 0,5m_j \left(u_{j1}^2 \omega_1^2 + 2u_{j1}u_{j4} \cos \gamma_j \omega_1 \omega_4 + \right. \\ & \left. + u_{j4}^2 \omega_4^2 \right) + 0,5J_j \left(i_{j1}^2 \omega_1^2 + 2i_{j1}i_{j4} \omega_1 \omega_4 + i_{j4}^2 \omega_4^2 \right) + \\ & + 0,5 \left(m_j u_{j1}^2 + J_j i_{j1}^2 \right) \omega_1^2 + \left(m_j u_{j1}u_{j4} \cos \gamma_4 + \right. \\ & \left. + J_j i_{j1}i_{j4} \right) \omega_1 \omega_4 + 0,5 \left(m_j u_{j4}^2 + J_j i_{j4}^2 \right) \omega_4^2. \end{aligned}$$

Суммирование по всем звеньям механизма дает полную кинетическую энергию механизма

$$T = 0,5J_{11}\omega_1^2 + J_{14}\omega_1\omega_4 + 0,5J_{44}\omega_4^2, \quad (6.5.6)$$

$$\text{где } J_{11} = \sum_j \left(m_j u_{j1}^2 + J_j i_{j1}^2 \right);$$

$$J_{14} = \sum_j \left(m_j u_{j1}u_{j4} \cos \gamma_j + J_j i_{j1}i_{j4} \right);$$

$$J_{44} = \sum_j \left(m_j u_{j4}^2 + J_j i_{j4}^2 \right).$$

Так как величины \bar{u}_{j1} , \bar{u}_{j4} , i_{j1} , i_{j4} зависят лишь от обобщенных координат φ_1 и φ_4 , то и инерционные коэффициенты J_{11} , J_{14} , J_{44} являются функциями φ_1 и φ_4 . Этим инерционным коэффициентам можно дать интересное толкование. Инерционный

коэффициент J_{11} вычисляется как обыкновенный, приведенный к звену 1 момент инерции механизма с одной степенью свободы, если закрепить звено 4. Меняя положение закрепленного звена 4, можно каждый раз находить новое значение J_{11} . Таким образом можно получить однопараметрическое семейство кривых $J_{11}(\varphi_1)$ при параметре φ_4 , т.е. выразить функцию $J_{11}(\varphi_1, \varphi_4)$ как поверхность в координатах J_{11} , φ_1 , φ_4 .

Аналогичные рассуждения можно привести и для инерционного коэффициента J_{44} , который также является функцией двух переменных $J_{44}(\varphi_1, \varphi_4)$.

Инерционный коэффициент J_{14} отличается от обычного приведенного момента инерции. Величину J_{14} нельзя рассчитывать как приведенный момент инерции условного механизма с одной степенью свободы, что можно сделать для J_{11} и J_{44} . При вычислении J_{14} следует считать, что оба звена 1 и 4 движутся одновременно. В выражение для J_{14} не входят массы звеньев, положение которых зависят лишь от одной обобщенной координаты φ_1 или φ_4 . В отличие от J_{11} и J_{44} J_{14} не всегда существенно положительная величина.

Таким образом, при приведении масс в механизмах с двумя степенями свободы все звенья можно разбить на три группы: 1) звенья, положения которых определяются лишь одной обобщенной координатой φ_4 ; массы таких звеньев не могут входить в выражения J_{11} и J_{14} ; 2) звенья, положения которых определяются лишь одной обобщенной координатой φ_1 ; массы таких звеньев не могут входить в выражение для J_{14} и J_{44} ; 3) звенья, положение каждого из которых определяется двумя обобщенными координатами φ_1 и φ_4 ; массы таких звеньев могут входить в любое из выражений J_{11} , J_{14} , J_{44} , причем выражение для J_{14} целиком состоит из слагаемых, в которые входят массы только этого типа звеньев.

Если окажется, что в механизме с двумя степенями свободы нет ни одного звена, положение которого определяется двумя обобщенными координатами, то величина $J_{14} = 0$

и такой механизм распадается на два, каждый из которых имеет одну степень свободы, и между этими механизмами имеется силовая связь. К таким механизмам относятся механизмы, у которых кинематические цепи разделены упругими муфтами, упругими валами, ременными передачами, фрикционными соединениями и др.

Из выражения кинетической энергии (6.5.6), выписывая необходимые производные в соответствии с уравнениями Лагранжа второго рода (6.5.4), можно получить уравнения движения:

$$\begin{aligned}
 & J_{11} \frac{d\omega_1}{dt} + J_{14} \frac{d\omega_4}{dt} + \frac{1}{2} \frac{\partial J_{11}}{\partial \varphi_1} \omega_1^2 + \\
 & + \frac{\partial J_{11}}{\partial \varphi_4} \omega_1 \omega_4 + \left(\frac{\partial J_{14}}{\partial \varphi_4} - \frac{1}{2} \frac{\partial J_{44}}{\partial \varphi_1} \right) \omega_4^2 = M_{п1}; \\
 & J_{44} \frac{d\omega_4}{dt} + J_{14} \frac{d\omega_1}{dt} + \frac{1}{2} \frac{\partial J_{44}}{\partial \varphi_4} \omega_4^2 + \\
 & + \frac{\partial J_{44}}{\partial \varphi_1} \omega_1 \omega_4 + \left(\frac{\partial J_{14}}{\partial \varphi_1} - \frac{1}{2} \frac{\partial J_{11}}{\partial \varphi_4} \right) \omega_1^2 = M_{п4}.
 \end{aligned} \tag{6.5.7}$$

Решение сложной системы (6.5.7) нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка возможно, конечно, численным методом с помощью ЭВМ. Следует отметить, однако, что коэффициенты этих уравнений являются сложными функциями двух переменных φ_1 и φ_4 , которые должны быть предварительно вычислены.

6.6. ДИНАМИКА МЕХАНИЗМОВ С ПЕРЕМЕННОЙ МАССОЙ ЗВЕНЬЕВ

Под механизмами с переменной массой звеньев понимают механизмы, хотя бы у одного звена которого меняется масса или момент инерции или центр масс звена в процессе движения механизма. Такие механизмы в современной промышленности довольно широко распространены. Масса, как правило, этих механизмов меняется при взаимодействии рабочего органа с обрабатываемой средой.

Примерами механизмов, где имеется взаимодействие звеньев с сыпучими телами, являются вагонопрокидыватели, скиповые подъемники, погрузные машины в горной промышленности, землеройные машины, автоматические весы периодического действия, весовые дозаторы непрерывного действия и др. Весьма распространенными являются механизмы с переменными массами, где рабочий орган взаимодействует с различными гибкими материалами. Сюда относятся различные мо-

талки и разматыватели прокатных, плющильных и волочильных станов, канатовьющие машины, текстильные и полиграфические машины и многие другие.

Встречаются и такие механизмы, у которых изменение массы происходит за счет присоединения или удаления твердых тел, в этом случае масса меняется скачкообразно. Сюда относятся транспортирующие устройства для штучных изделий, скребковые конвейеры, некоторые автооператоры и роботы и др. Иногда к механизмам с переменной массой могут быть отнесены механизмы, в которых рабочий орган взаимодействует с жидкими телами, например, чугуновозы, конверторные установки, гидравлические аксиально-поршневые машины, машины центробежного литья и др.

В механизмах с переменной массой могут изменяться инерционные параметры (масса, момент инерции, координата центра масс) в функции времени, положения механизма, а иногда и скорости вращения.

Указанные инерционные параметры довольно часто точно или приближенно могут рассматриваться как детерминированные функции. (Здесь рассматриваются только такие случаи). Естественно, при изучении механизмов с переменной массой опираются на сведения из механики переменных масс.

Звено как тело переменной массы и его кинетическая энергия. Под телом переменной массы понимают систему точек переменной массы m_v , расстояния между которыми в процессе движения тела остаются неизменными. В таком теле могут изменяться: масса, моменты инерции, координата центра масс. Кинематика такого тела не отличается от кинематики твердого тела постоянной массы. Уравнение движения центра масс тела переменной массы формулируется следующим образом в виде теоремы: центр масс тела переменной массы движется как точка затвердевшей массы, в которой сосредоточена масса тела в данный момент и к которой приложены силы - главный вектор активных внешних сил и главные векторы реактивных сил. Уравнение движения

$$m = \frac{V_{Snep}}{dt} = \bar{F} + \bar{R}^k + \bar{R}^r + \bar{\Phi},$$

где V_{Snep} - переносная скорость центра масс; \bar{F} - главный вектор активных внешних сил, приложенных к телу; $\bar{R}^k = \sum_v \bar{R}_v^k$ - главный вектор Кориолисовых сил инерции, приложенных к телу; $\bar{R}^r = \sum_v \bar{R}_v^r$ - главный вектор

сил инерции относительного движения, приложенных к телу; $\bar{\Phi}$ - главный вектор импульсных сил, приложенных к телу.

Кинетическая энергия тела с переменной массой, вычисленная относительно неподвижного начала координат 0,

$$T_0 = \sum_v 0,5m_v v_v^2 = \sum_v 0,5m_v \bar{v}_v \bar{v}_v,$$

где \bar{v}_v - скорость точки v тела переменной массы (суммирование идет по всем точкам v тела переменной массы).

Кинетическая энергия тела относительно центра масс S

$$T_S = \sum_v 0,5m_v v_{vS}^2,$$

где \bar{v}_{vS} - относительная скорость точки v относительно S (суммирование ведется по всем точкам v).

Из механики переменной массы известно, что кинетическая энергия

$$T_0 = T_S + 0,5m v_{S_{пер}}^2 - 0,5m v_{S_{от}}^2, \quad (6.6.1)$$

где $\bar{v}_{от}$ - относительная скорость перемещения центра масс звена в системе координат, связанной со звеном.

В частном случае $\bar{v}_{S_{от}} = 0$, тогда

$\bar{v}_{S_{пер}} = \bar{v}_S$ и $T_0 = T_S + 0,5m v_S^2$, т.е. выражение совпадает с выражением теоремы Кенига для тела постоянной массы.

Следует обратить внимание, что в выражении кинетической энергии (6.6.1) содержится член со знаком минус, который уменьшает энергию T_S . Это объясняется тем, что кинетическая энергия T_S тела вычислена относительно перемещающегося внутри тела центра масс.

Уравнение движения механизмов с переменной массой звеньев. Общности ради допускается, что все звенья в механизме имеют переменную массу. Выразим кинетическую энергию j -го звена массой m_j в форме, удобной для динамики механизмов (рис. 6.6.1).

Тогда

$$T_j = T_{S_j} + 0,5m_j v_{S_{jпер}}^2 - 0,5m_j v_{S_{jот}}^2,$$

где $\bar{v}_{S_{jот}}$ - относительная скорость центра масс звена, которая определяется исходя из

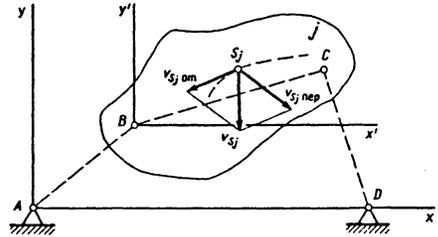


Рис. 6.6.1. Схема расчета звена j механизма с переменной массой, в котором центр масс S_j перемещается относительно границ звена j

характера изменения массы звена; $\bar{v}_{S_{jпер}}$ - переносная скорость центра масс звена, которая может быть определена, например, методом планов скоростей, так как это скорость той точки звена, которая в данный момент совпадает с центром масс звена.

Кинетическая энергия j -го звена относительно центра масс этого звена

$$T_{S_j} = \sum_v 0,5m_v v_{vS_j}^2.$$

Так как центр масс звена перемещается внутри звена со скоростью $\bar{v}_{S_{jот}}$, то

$$\bar{v}_{vS_j} = \bar{\omega}_j \times \bar{\rho}_{vS_j} + (-\bar{v}_{S_{jот}}),$$

где $\bar{\rho}_{vS_j}$ - радиус-вектор точки v звена с началом этого вектора в центре масс S_j .

Возводя в квадрат \bar{v}_{vS_j} и подставляя его в выражение для T_{S_j} , получим:

$$\begin{aligned} T_{S_j} &= \sum_v 0,5m_v \left[\omega_j^2 \rho_{vS_j}^2 - 2(\bar{\omega}_j \times \bar{\rho}_{vS_j}) \times \right. \\ &\quad \left. \times \bar{v}_{S_{jот}} + \bar{v}_{S_{jот}}^2 \right] = 0,5\omega_j^2 \sum_v m_v \rho_{vS_j}^2 - \\ &\quad - \sum_v m_v (\bar{\omega}_j \times \bar{\rho}_{vS_j}) \bar{v}_{S_{jот}} + 0,5 \sum_v m_v v_{S_{jот}}^2 = \\ &= 0,5J_{S_j} \omega_j^2 - \sum_v m_v (\bar{\omega}_j \times \bar{\rho}_{vS_j}) \bar{v}_{S_{jот}} + \\ &\quad + 0,5m_j v_{S_{jот}}^2, \end{aligned} \quad (6.6.2)$$

где $J_{S_j} = \sum_v m_v \rho_{vS_j}^2$ - момент инерции звена

на относительно его центра масс; по форме он совпадает с моментом инерции звена с постоянной массой, но m_v - переменная величина и, так как центр масс S_j перемещается внутри звена, то $\bar{\rho}_{vS_j}$ изменяется.

Сумма

$$\begin{aligned} \sum_v m_v (\bar{\omega}_j \times \bar{\rho}_{vS_j}) &= \bar{\omega}_j \times \sum_v m_v \bar{\rho}_{vS_j} = \\ &= \bar{\omega}_j \times m_j \bar{\rho}_{S_j S_j} = 0, \end{aligned}$$

где m_j - масса всего звена; $\bar{\rho}_{S_j S_j} = 0$.

Тогда

$$T_{S_j} = 0,5 J_{S_j} \omega_j^2 + 0,5 m_j v_{S_j \text{ пер}}^2,$$

а следовательно,

$$T_j = 0,5 J_{S_j} \omega_j^2 + 0,5 m_j v_{S_j \text{ пер}}^2. \quad (6.6.3)$$

Кинетическая энергия звена с переменной массой равна сумме кинетических энергий затвердевшего звена во вращательном движении относительно центра масс и в переносном движении центра масс, причем скорость переносного движения центра масс звена является скоростью той точки звена, которая в данный момент совпадает с перемещающимся центром масс.

Последняя форма кинетической энергии очень напоминает форму для кинетической энергии звена с постоянной массой, но при этом J_{S_j} , m_j и $v_{S_j \text{ пер}}$ - переменные величины. Конечно, могут быть частные случаи, когда любая из этих величин будет постоянной величиной. Если все они постоянные, то получается обычное выражение для кинетической энергии звена с постоянной массой.

Пользуясь последним уравнением кинетической энергии, легко составить выражение для приведенного момента инерции механизма (приведенной массы). Как обычно, определяется приведенный момент инерции механизма исходя из равенства кинетических энергий звена приведения и всего механизма:

$$0,5 J_{\Pi} \omega^2 = \sum_j \left(0,5 J_{S_j} \omega_j^2 + m_j v_{S_j \text{ пер}}^2 \right).$$

Откуда

$$J_{\Pi} = \sum_j \left[J_{S_j} \left(\frac{\omega_j}{\omega} \right)^2 + m_j \left(\frac{v_{S_j \text{ пер}}}{\omega} \right)^2 \right]. \quad (6.6.4)$$

Форма совпадает с обычным выражением приведенного момента инерции для механизмов постоянной массы. Особенности связаны с тем, что приведенный момент инерции может определяться не только положением ф звена приведения механизма, но и, например, временем, если масса каких-либо звеньев зависит от времени, $\bar{m} = \bar{m}(t)$. Даже если масса звена изменяется в функции угла поворота φ , т.е. зависит от положения звена $\bar{m} = \bar{m}(\varphi)$, то и в этом случае приведенный момент инерции количественно будет другим, тем более что часто масса звена изменяется не периодически. Таким образом, приведенный момент инерции в механизмах переменной массы является функцией не только положения, но и времени (а может быть, и скорости) и не является периодической функцией. В дальнейшем если приведенный момент инерции будет зависеть от массы, его выражение будет представлено в общем виде так: $J_{\Pi} = J_{\Pi}(\bar{m}, \varphi)$.

Приведение сил в механизмах с переменной массой выполняется по равенству мощностей приведенного момента (или приведенной силы) и приводимых сил и моментов. Все внешние силы (движущие и силы сопротивления) приводятся обычным образом, поэтому ниже рассмотрено лишь приведение реактивных сил. Приведенный момент реактивных сил

$$M = \sum_j (\bar{R}_j^k + \bar{R}_j^r + \bar{\Phi}_j) v_j / \omega,$$

где \bar{R}_j^k , \bar{R}_j^r , $\bar{\Phi}_j$ - главные векторы кориолисовых сил инерции, сил инерции относительного движения и импульсивных сил приложенных к j -му звену; v_j - скорость точки приложения реактивных сил.

В частных случаях некоторые из векторов, а возможно и все, равны нулю или настолько малы, что ими можно пренебречь. Для составления уравнения движения машинного агрегата используется теорема об изменении кинетической энергии механизма как система твердых тел с учетом принципа затвердевания (переменную массу выносят за знак дифференцирования как постоянной величиной и оператор отмечают звездочкой.) Для этого случая

$$d^*T = dA + dA_R,$$

где $T = 0,5J_{\Pi}(\tilde{m}, \varphi)\omega^2$ - полная кинетическая энергия механизма; $dA = M_d d\varphi - M_c d\varphi$ - элементарная работа всех внешних движущих сил и сил сопротивления; $dA_R = M d\varphi$ - элементарная работа всех реактивных сил.

После деления левой и правой части на $d\varphi$ получено

$$\frac{d^*}{d\varphi} [0,5J_{\Pi}(\tilde{m}, \varphi)\omega^2] = M_d - M_c + M.$$

Производная

$$\begin{aligned} \frac{d^*}{d\varphi} \left[\frac{J_{\Pi}(\tilde{m}, \varphi)\omega^2}{2} \right] &= \frac{J_{\Pi}(\tilde{m}, \varphi)}{2} 2\omega \frac{d\omega}{d\varphi} + \\ &+ \frac{\omega^2}{2} \frac{d^* J_{\Pi}(\tilde{m}, \varphi)}{d\varphi} = J_{\Pi}(\tilde{m}, \varphi) \frac{d\omega}{dt} + \\ &+ \frac{\omega^2}{2} \frac{d^* J_{\Pi}(\tilde{m}, \varphi)}{d\varphi}. \end{aligned}$$

Уравнение движения машинного агрегата с переменной массой

$$\begin{aligned} J_{\Pi}(\tilde{m}, \varphi) \frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega^2}{2} \frac{d^* J_{\Pi}(\tilde{m}, \varphi)}{d\varphi} = \\ = M_d - M_c + M. \end{aligned} \quad (6.6.5)$$

По форме уравнение (6.6.5) похоже на уравнение движения машинного агрегата с постоянной массой, но имеет особенности. В правой части уравнения кроме привычных приведенных моментов движущих сил и сил сопротивления имеется момент реактивных сил, а в левой части стоит производная со звездочкой, которая позволяет за знак этой производной выносить массу \tilde{m} .

Это и без того сложное нелинейное уравнение второго порядка еще усложняется наличием переменных масс, поэтому решать такие уравнения наиболее целесообразно численным методом с использованием ЭВМ [2, 7].

6.7. УЧЕТ УПРУГОСТИ ЗВЕНЬЕВ И ДИССИПАТИВНЫХ СВОЙСТВ СИСТЕМЫ

Звенья машинного агрегата не являются абсолютно жесткими недеформируемыми телами, поэтому в процессе движения механизмов отдельные звенья могут скручиваться,

изгибаться, растягиваться, сжиматься. Все материалы, из которых изготавливают звенья, деформируемы, и в некоторых задачах нельзя не считаться с этим при изучении динамики машин, тем более что иногда необходимо вводить упругие элементы в цепи механизмов, например упругие предохранительные муфты. Совсем нельзя не учитывать упругость звеньев при изучении колебательных процессов в машинах. Учитывать все виды деформаций звеньев и соединений их в кинематические пары нет необходимости, так как в практических задачах только отдельные узлы или даже отдельные звенья имеют значительно большие податливости по сравнению с другими.

Учет упругости звеньев и диссипации энергии рассмотрен на примере зубчатого редуктора с упругими звеньями, входящего в состав машинного агрегата. На рис. 6.7.1, а приведена схема такого агрегата. Будем учитывать деформацию вала между двигателем D и входным звеном 2 редуктора, деформацию зубьев в обоих парах зубчатых колес и деформацию вала между выходным звеном 5 редуктора и рабочей машиной M .

Характер упругих деформаций следующий: валы скручиваются; зубья колес изгибаются. Упругая деформация характеризуется жесткостью или, точнее, коэффициентом жесткости упругого элемента. Коэффициент жесткости - это коэффициент пропорциональности между силой (моментом) и деформацией. Эти коэффициенты имеются в справочниках по сопротивлению материалов и зависят от геометрии упругого элемента и материала, из

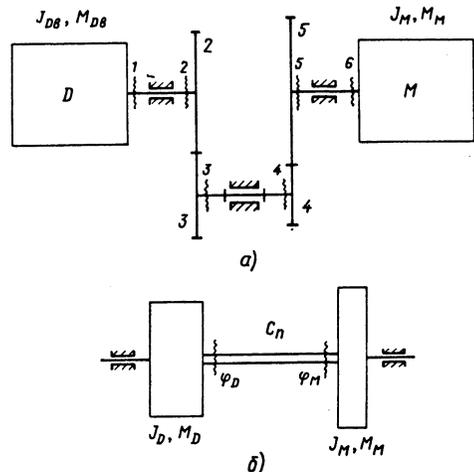


Рис. 6.7.1. Зубчатый редуктор с упругими звеньями

которого он изготовлен. Например, жесткость при кручении вала

$$C = GJ_p / l,$$

где G - модуль сдвига при кручении; J_p - полярный момент инерции; l - длина скручиваемого участка вала.

С учетом всех деформаций система имеет шесть степеней свободы, а не одну, если считать все звенья редуктора жесткими. Однако если инерционные свойства редуктора несущественны по сравнению с такими же свойствами двигателя и рабочей машины (что часто бывает), то для учета упругих свойств редуктора можно построить динамическую модель машинного агрегата с приведением жесткостей, как при приведении сил и масс.

На рис. 6.7.1, б показана модель, в которой упругие свойства редуктора представлены схемой упругого вала с приведенной жесткостью. Известно, что при последовательном соединении упругих элементов, как в этом редукторе, приведенный коэффициент жесткости C_{Π} условного вала находится из формулы

$$\frac{1}{C_{\Pi}} = \frac{1}{C_{61}} = \frac{1}{C_{65}} + \frac{1}{C_{54}} + \frac{1}{C_{43}/u_{54}^2} + \frac{1}{C_{32}/u_{54}^2} + \frac{1}{C_{21}/u_{52}^2}. \quad (6.7.1)$$

Здесь коэффициент $C_{61} = M_6/\phi_6$ находится при условии, что сечение l неподвижно, а момент M_6 прикладывается к сечению б; C_{65} , C_{54} , C_{43} , C_{32} , C_{21} - коэффициенты жесткости между соответствующими сечениями; u_{54} , u_{52} - передаточные отношения зубчатых передач между колесами 5-4 и 5-2. Таким образом, получена система с двумя степенями свободы с обобщенными координатами ϕ_D и ϕ_M . Исследование динамики систем с упругими свойствами приводит к изучению движений колебательного характера, а в таких случаях нужно учитывать и диссипацию энергии, связанную с внешним и внутренним трением в элементах машин. Так как деформации обычно в таких системах малы, наиболее распространенный вид трения приближенно принимается в виде моментов или сил трения, пропорциональных скорости относительного движения. Для рассматриваемой модели (рис. 6.7.1, б) момент трения в системе

$$M_{\text{тр}} = -K(\phi_M - \phi_D),$$

где K - коэффициент вязкого сопротивления, приведенный к сечению б, который определяется опытным путем.

Система двух уравнений движения (двух звеньев приведения) - валов рабочей машины и двигателя - следующая:

$$\begin{aligned} J_M(\phi_M) \frac{d\omega_M}{dt} + \frac{dJ_M}{d\phi_M} \frac{\omega_M^2}{2} &= \\ &= M_M - C_{\Pi}(\phi_M - \phi_D) - K(\omega_M - \omega_D); \\ J_D(\phi_D) \frac{d\omega_D}{dt} + \frac{dJ_D}{d\phi_D} \frac{\omega_D^2}{2} &= \\ &= M_D - C_{\Pi}(\phi_D - \phi_M) - K(\omega_D - \omega_M). \end{aligned} \quad (6.7.2)$$

При формальной замене в схеме редуктора условным валом следует сохранить кинематические параметры в сечении б без изменений, а кинематические параметры в сечении 1 нужно подкорректировать, так как передаточное отношение редуктора в схеме вал как бы исчезло, поэтому

$$\phi_D = \phi_1 u_{52}; \quad \omega_D = \omega_1 u_{52}; \quad \frac{d\omega_D}{dt} = \frac{d\omega_1}{dt} u_{52}.$$

Корректировка приведения сил и масс двигателя следующая;

$$\begin{aligned} J_D &= \frac{J_{Db}}{u_{52}^2}; \quad \frac{dJ_D}{d\phi_D} = \frac{1}{u_{52}^3} \frac{dJ_{Db}}{d\phi_1}; \\ M_D &= \frac{M_{Db}}{u_{52}}. \end{aligned}$$

Система уравнений (6.7.2) позволяет решать динамические задачи как установившегося, так и переходных режимов движения агрегата, изучать колебания, влияние упругости звеньев и демпфирующих свойств в системе [9-12].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Артоболевский И. И. Теория механизмов и машин. М.: Наука, 1988. 640 с.
2. Бессонов А. П. Основы динамики механизмов с переменной массой звеньев. М.: Наука, 1967. 280 с.
3. Вейц В. Л., Кочура А. Е. Динамика машинных агрегатов с двигателями внутреннего сгорания. Л.: Машиностроение, 1976. 384 с.
4. Вульфсон И. И. Колебания машин с механизмами циклового действия. Л.: Машиностроение, 1990. 310 с.

5. **Динамика машин и управление машинами:** Справочник / В. К. Асташев, В. И. Бабицкий, И. И. Вульфсон и др. М.: Машиностроение, 1988. 240 с.

6. **Дроздов Ю. Н., Павлов В. Г., Пучков В. Н.** Трение и износ в экстремальных условиях: Справочник. М.: Машиностроение, 1986. 224 с.

7. **Кинематика, динамика и точность механизмов:** Справочник / Г. В. Крейнин, А. П. Бессонов, В. В. Воскресенский и др. М.: Машиностроение, 1984. 214 с.

8. **Кожевников С. Н.** Динамика нестационарных процессов в машинах. Киев: Наукова думка, 1986, 288 с.

9. **Коловский М. Г.** Динамика машин. Л.: Машиностроение, 1989. 280 с.

10. **Левитский Н. И.** Колебания в механизмах. М.: Наука, 1988. 336 с.

11. **Левитский Н. И.** Теория механизмов и машин. М.: Наука, 1990. 592 с.

12. **Теория механизмов и машин:** Учеб. для вузов / К. В. Фролов, С. А. Попов, А. К. Мусатов и др.; Под ред. К. В. Фролова. М.: Высшая школа, 1987. 496 с.

Глава 7

УРАВНОВЕШИВАНИЕ МЕХАНИЗМОВ

7.1. СИЛЫ И МОМЕНТЫ, ВЫЗЫВАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ СТАНИНЫ МЕХАНИЗМА

В шарнирных механизмах звенья образуют только вращательные кинематические пары. Если механизм содержит не только вращательные, но и поступательные, цилиндрические и сферические кинематические пары, то он относится к категории рычажных механизмов. Неподвижным звеном механизма является станина.

Входное звено O_1A_1 механизма произвольной структуры (рис. 7.1.1, а) нагружено движущим моментом $M_{дв}$, а выходное O_jA_j - силой \bar{P}_C полезного сопротивления. В общем случае механизм имеет n подвижных звеньев, из которых k звеньев образуют со станиной кинематические пары. Если звенья механизма отсоединить от станины, а их действие на станину заменить силами реакций, то можно получить систему сил R_j (рис. 7.1.1, б). Силы

R_j ($j = 1, 2, \dots, k$) можно привести к точке O_1 , тогда на подшипник входного звена действует сила

$$\bar{Q} = \bar{P}_C + \sum_{i=1}^n G_i - \left(\sum_{i=1}^n m_i \right) \bar{a}_S \quad (7.1.1)$$

и момент, воспринимаемый станиной (рис. 7.1.1, в),

$$M = M_{дв} + M_0(\bar{P}_C) + \sum_{i=1}^n M_0(\bar{G}_i) - \sum_{i=1}^n J_{si} \bar{\epsilon}_i - \sum_{i=1}^n m_i a_{si} q_{si} 0_1 = 0. \quad (7.1.2)$$

В выражениях (7.1.1) и (7.1.2) $M_0(\bar{P}_C)$

и $\sum_{i=1}^n M_0(\bar{G}_i)$ - моменты относительно центра

O_1 ; \bar{P}_C - сила; G_i ($i = 1, 2, \dots, n$) - сила тяжести подвижных звеньев механизма; $\bar{\epsilon}_i$ и J_{si} - соответственно вектор углового ускорения и момент инерции i -го звена относительно оси, проходящей через точку S_i перпендикулярно к плоскости $O_1x_1y_1$; m_i и \bar{a}_{si} - соответственно масса i -го звена и вектор ускорения ее центра; \bar{a}_S - вектор ускорения центра

масс $\left(\sum_{i=1}^n m_i \right)$ подвижных звеньев механизма;

$q_{si} 0_1$ - плечо неуравновешенной силы $m_i \bar{a}_{si}$ относительно центра O_1 .

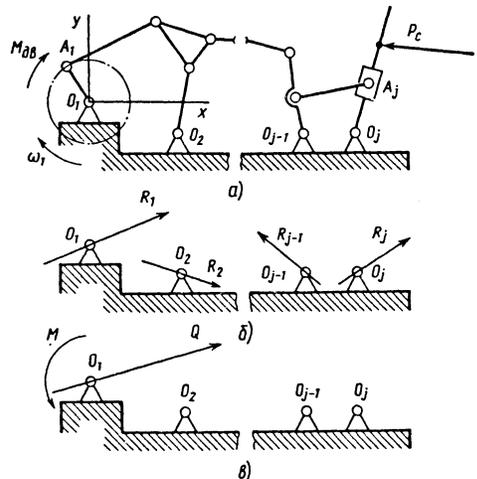


Рис. 7.1.1. Силы и моменты, действующие на станину механизма

Формулы (7.1.1) и (7.1.2) определяют соответственно главный вектор и главный момент неуравновешенных сил, действующих на станину плоского механизма произвольной структуры. Таким образом, в самом общем случае неуравновешенная сила, действующая на станину плоского механизма, равна геометрической сумме внешних сил, приложенных к звеньям механизма, и произведения со знаком

минус общей массы $\left(\sum_{i=1}^n m_i\right)$ подвижных

звеньев механизма на ускорение \bar{a}_s центра этой массы. Сила (7.1.1) и момент (7.1.2) являются в общем случае переменными по величине и направлению и поэтому вызывают вынужденные колебания станины. Такой механизм является неуравновешенным.

Полное уравнивание механизма представляет собой сложную теоретическую и инженерную задачу. На практике при упрощенном решении этой задачи не учитывают воздействие на станину внешних сил

$\left(\bar{P}_C + \sum_{i=1}^n G_i\right)$ и движущего момента $M_{дв}$, а

также принимают частоту вращения входного звена постоянной. В этом случае вектор силы

$$\bar{P} = -\left(\sum_{i=1}^n m_i\right) \bar{a}_s = -\sum_{i=1}^n m_i \bar{a}_{si}, \quad (7.1.3)$$

являющейся одним из слагаемых формулы (7.1.1), и момент

$$M = -\sum_{i=1}^n J_{si} \bar{\epsilon}_i - \sum_{i=1}^n m_i \bar{a}_{si} q_{si} 0_i, \quad (7.1.4)$$

входящий в выражение (7.1.2), называют соот-

ветственно главным вектором и главным моментом неуравновешенных сил механизма.

Механизм, для которого модуль силы (7.1.3)

$$P = 0, \quad (7.1.5)$$

называют статически уравновешенным механизмом. У такого механизма центр массы

$\left(\sum_{i=1}^n m_i\right)$ всех его подвижных звеньев остается неподвижным при работе механизма.

Если на станину не действует момент (7.1.4), т.е.

$$M = 0, \quad (7.1.6)$$

то механизм имеет моментную уравновешенность. Когда условия (7.1.5) и (7.1.6) выполняются одновременно, механизм будет уравновешен динамически.

Следует отметить, что точное динамическое и даже статическое уравнивание механизмов очень трудно выполнить простыми конструктивными средствами. Поэтому на практике механизмы обычно уравнивают приближенно путем уравнивания, например, только первых гармоник главного вектора (7.1.3) и главного момента (7.1.4) неуравновешенных сил, а также другими способами.

7.2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

В теории уравнивания механизмов большое распространение получили понятия: главные точки подвижных звеньев и векторы главных точек.

Главные точки H_i ($i = 1, 2, 3$) звеньев шарнирного четырехзвенного механизма (рис. 7.2.1, а) можно определить при помощи

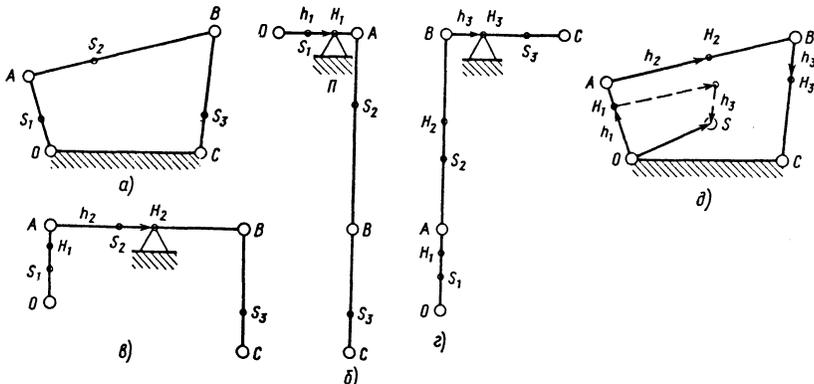


Рис. 7.2.1. Схемы экспериментального определения главных точек звена

призмы. Для этого кинематическая цепь $OABC$ механизма отсоединяется от станины и кладется на ребро призмы Π последовательно каждым ее звеном так, чтобы вся цепь находилась в равновесии (рис. 7.2.1, б - з). Точка H_i ($i = 1, 2, 3$) i -го звена, расположенная над ребром призмы, будет главной точкой этого звена.

В соответствии с рис. 7.2.1, б - з точки H_i ($i = 1, 2, 3$) можно определить теоретически по векторам главных точек звеньев 1, 2, 3:

$$\bar{h}_1 = \frac{m_1 \overline{OS}_1 + (m_2 + m_3) \overline{OA}}{m_1 + m_2 + m_3}; \quad (7.2.1)$$

$$\bar{h}_2 = \frac{m_2 \overline{AS}_2 + m_3 \overline{AB}}{m_1 + m_2 + m_3}; \quad (7.2.2)$$

$$\bar{h}_3 = \frac{m_3 \overline{BS}_3}{m_1 + m_2 + m_3}. \quad (7.2.3)$$

В теории механизмов доказано, что центр S масс подвижных звеньев механизма произвольной структурой определяется вектором

$$\overline{OS} = \sum_{i=1}^n \bar{h}_i, \quad (7.2.4)$$

где \bar{h}_i - вектор главной точки i -го звена; n - число подвижных звеньев механизма.

Для рассматриваемого механизма (рис. 7.2.1, д)

$$\overline{OS} = \bar{h}_1 + \bar{h}_2 + \bar{h}_3. \quad (7.2.5)$$

7.3. СТАТИЧЕСКИЕ И ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ШАТУНА

Шатун является звеном, не входящим в кинематические пары со станиной механизма, поэтому оно совершает в общем случае плоскопараллельное движение. Примером шатуна является звено AB кривошипно-ползунного механизма OAB (рис. 7.3.1, а). На этом же рисунке показаны планы скоростей $0As_2b0$ и ускорений $0As'_2b'0$ этого механизма, совмещенные с его схемой. Из механики известно, что масса m_2 шатуна действует на соединенные с ним звенья механизма с силой

$$\overline{P}_{2S} = -m_2 \overline{a}_{2S}, \quad (7.3.1)$$

приложенной в центре S_2 массы шатуна, и парой сил с моментом (рис. 7.3.1, б)

$$M_2 = -J_{2S} \varepsilon_2. \quad (7.3.2)$$

Статическая модель шатуна представляет собой невесомый стержень с двумя точечными массами:

$$m_{2A} = m_2 \frac{b}{b+a}; \quad m_{2B} = m_2 \frac{a}{a+b}, \quad (7.3.3)$$

расположенными в центрах вращательных пар A и B (рис. 7.3.1, в). Из формул (7.3.3) следует, что у шатуна и его статической модели массы и координаты центров масс одинаковы. Точечные массы действуют на невесомый стержень AB с силами

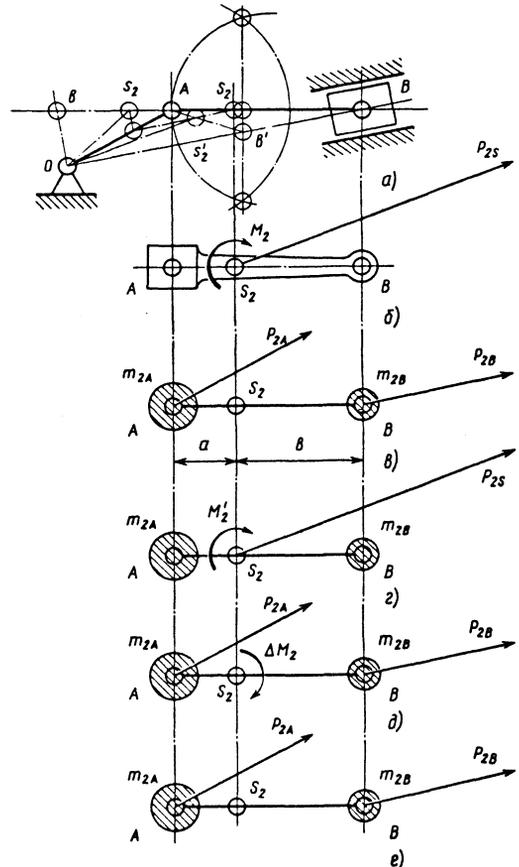


Рис. 7.3.1. Статические (в, з) и динамические (д, е) модели шатуна

$$\bar{P}_{2A} = -m_{2A}\bar{a}_{2A}; \quad \bar{P}_{2B} = -m_{2B}\bar{a}_{2B}, \quad (7.3.4)$$

где \bar{a}_{2A} , \bar{a}_{2B} - векторы ускорений точек A и B шатуна (рис. 7.3.1, ϵ).

Если силы (7.3.4) привести к центру S_2 , то получим также статическую модель шатуна (7.3.1, ϵ), на которую будут действовать:

сила

$$\bar{P}_{2S} = \bar{P}_{2A} + \bar{P}_{2B}; \quad (7.3.5)$$

пара сил с моментом

$$M'_2 = -abm_2\epsilon_2. \quad (7.3.6)$$

Сила (7.3.5) равна силе (7.3.1), а момент (7.3.6) отличается от момента (7.3.2) на величину

$$\Delta M_2 = M_2 - M'_2. \quad (7.3.7)$$

Отсюда следует, что динамическая модель шатуна (рис. 7.3.1, δ) будет представлять собой невесомый стержень с точечными массами (7.3.3), нагруженный динамическим моментом (7.3.7).

$$\Delta M_2 = -m_2(\rho_{2S}^2 - ab)\epsilon_2^2. \quad (7.3.8)$$

Таким образом, на динамическую модель шатуна будут действовать силы (7.3.4) и пара сил с моментом (7.3.8). В частном случае, при

$$\rho_{2S}^2 = ab \quad (7.3.9)$$

момент (7.3.8) будет равен нулю, поэтому при условии (7.3.9) динамическая модель шатуна будет представлять невесомый стержень с двумя точечными массами m_{2A} , m_{2B} (рис. 7.3.1, ϵ), на который действуют только силы (7.3.4). Если эти силы привести к центру, то получится схема оил, показанная на рис. 7.3.1, δ .

Следует отметить, что момент (7.3.6) действует в статической модели шатуна на стержень AB (рис. 7.3.1, ϵ) всегда в направлении, противоположном угловому ускорению шатуна. Что касается направления момента (7.3.8), приложенного к динамической модели шатуна, то оно зависит от знака разности $\rho_{2S}^2 - ab$ и поэтому может как совпадать, так и не совпадать с направлением ускорения шатуна. Очевидно, при условии $\rho_{2S}^2 < ab$ мо-

мент (7.3.8) и угловое ускорение ϵ_2 шатуна имеют одинаковые направления, а в случае $\rho_{2S}^2 > ab$ направление момента (7.3.8) будет противоположно направлению углового ускорения ϵ_2 .

7.4. МЕТОДЫ СТАТИЧЕСКОГО УРАВНОВЕШИВАНИЯ МЕХАНИЗМОВ

Метод нуль-векторов. Этот метод позволяет точно уравнивать механизмы произвольной структуры. Рассмотрим шарнирный четырехзвенный механизм $OABC$ (см. рис. 7.2.1, a). Положение центра масс подвижных звеньев механизма определяется в соответствии с формулой (7.2.5) вектором

$$\bar{oS} = \bar{h}_1 + \bar{h}_2 + \bar{h}_3,$$

как показано на рис. 7.2.1, δ . При выполнении условий

$$\bar{h}_3 = 0; \quad (7.4.1)$$

$$\bar{h}_2 = 0; \quad (7.4.2)$$

$$\bar{h}_1 = 0 \quad (7.4.3)$$

центр S общей массы всех подвижных звеньев механизма всегда будет совпадать с его неподвижной точкой O . Поэтому в соответствии с (7.1.3) механизм $OABC$ (см. рис. 7.2.1) сделается статически уравновешенным.

Условия (7.4.1), (7.4.2) и (7.4.3) полностью определяют координаты центров масс звеньев механизма $OABC$ и необходимы для его уравновешивания. Из (7.4.1) и (7.2.3) следует, что центр S_3 массы звена BC должен совпасть с точкой B ; из (7.4.2) и (7.2.2) получим, что с точкой S_3 будет совпадать центр S_2 , z масс двух звеньев AB и BC ; из (7.4.3) и (7.2.1) становится очевидным, что в точке O должен находится центр S_1 , 2 , 3 масс подвижных звеньев шарнирного четырехзвенного механизма $OABC$ (рис. 7.4.1, a).

Метод подобия. Для статического уравновешивания шарнирного четырехзвенного механизма $OABC$ необязательно требовать обращения в нуль векторов \bar{h}_i ($i = 1, 2, 3$) главных точек звеньев. Тот же результат получится, если воспользоваться методом подобия. Для этого необходимо, чтобы многоугольник $OabS$, построенный из векторов \bar{h}_i ($i = 1, 2, 3$) главных точек звеньев, был подобен кинематической цепи механизма (рис. 7.4.1, δ). В

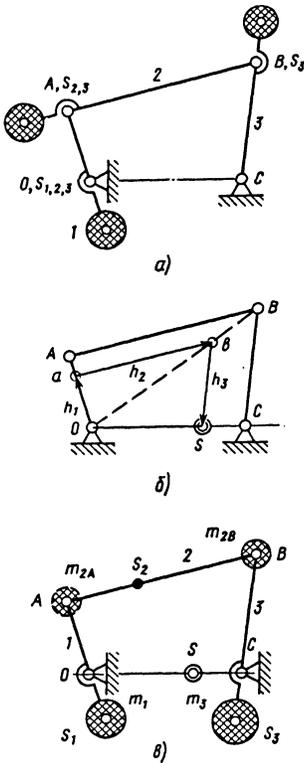


Рис. 7.4.1. Уравновешивание шарнирного четырехзвенного механизма методами куль-векторов и подобия

этом случае вектор \overline{OS} , определенный формулой (7.2.4), делается постоянным по модулю и направлению, а механизм - статически уравновешенным.

Из подобия многоугольников $OabS$ и $OABC$ можно, учитывая формулы (7.2.1) - (7.2.3), определить дисбалансы звеньев OA и BC :

$$D_1 = m_1 OS_1 = -m_{2A} l_1; \quad D_3 = m_3 CS_3 = -m_{2B} l_3. \quad (7.4.4)$$

Они необходимы для уравновешивания механизма. В равенствах (7.4.4) m_1, m_3 обозначают массы кривошипа 1 и коромысла 3 , а OS_1 и CS_3 - модули эксцентриситетов этих масс; l_1, l_3 - длины звеньев $1, 3$ (рис. 7.4.1, в).

После реализации (7.4.4) центр масс подвижных звеньев механизма будет находится на

линии OC на расстоянии $\overline{OS} = OC \frac{m_3 + m_{2B}}{m_1 + m_2 + m_3}$ от точки O , что непо-

средственно следует из рис. 7.4.1, в.

Метод точечных масс. Уравнение (7.4.4) можно интерпретировать по-другому. Если шатун AB механизма $OABC$ (рис. 7.4.1, в) заменить статической моделью, показанной на рис. 7.3.1, в, и перенести точечные массы m_{2A}, m_{2B} соответственно в точку A кривошипа OA и в точку B коромысла BC , а затем уравновесить эти массы массами m_1, m_3 звеньев 1 и 3 то условия уравновешенности вращающихся звеньев 1 и 3 можно представить в форме уравнений (7.4.4). Такая интерпретация уравнений (7.4.4), называемая обычно методом уравновешивания механизмов точечными массами, может быть полезной в некоторых случаях при уравновешивании механизмов с симметричными звеньями.

Метод уравновешивания механизмов с несимметричными звеньями. Несимметричным звеном (рис. 7.4.2, а) называется звено, у которого центр массы не лежит на оси AB и имеет в общем случае координаты $a = AS'; b = S'B$. Параметр b принято называть отрезком несимметричного звена AB .

Механизмы с несимметричными звеньями (произвольной структуры) могут быть уравновешены методом подобия [6-8]. Покажем это на примере шарнирного четырехзвенника механизма $OABC$ с несимметричным шатуном (рис. 7.4.2, б). Согласно теории механизмов [7] центр общей массы n подвижных несимметричных звеньев механизма определяется вектором

$$\overline{OS} = \sum_{i=1}^n \overline{h}_i + \sum_{i=1}^n \overline{h}'_i, \quad (7.4.5)$$

где $\overline{h}_i, \overline{h}'_i$ - векторы главных точек i -го звена и его отрезка.

Если многоугольники $Oabc$ и ca_1b_1S , построенные соответственно из векторов \overline{h}_i ($i = 1, 2, 3$) и \overline{h}'_i ($i = 1, 2, 3$), подобны кинематической цепи механизма $OABC$, то механизм статически уравновешен, так как в этом случае вектор (7.4.5) постоянен по величине и направлению, а ускорение центра S равно нулю при работе механизма.

Таким образом, для статического уравновешивания механизма с несимметричными звеньями методом подобия необходимо и достаточно выполнение условий:

$$\frac{h_1}{OA} = \frac{h_2}{AB} = \frac{h_3}{BC}; \quad (7.4.6)$$

$$\frac{h'_1}{OA} = \frac{h'_2}{AB} = \frac{h'_3}{BC}. \quad (7.4.7)$$

Они представляют собой отношения сходственных сторон многоугольников $OABC$, $Oabc$ и ca_1b_1S ;

то для решения задачи достаточно воспользоваться формулами (7.4.4), полученными при условии (7.4.9). Применительно к шарнирному четырехзвеннику формулы (7.4.4) при условии (7.4.8) примут вид:

$$m_1 a_1 = m_2 (l_2 - a_2) l_1 / l_2; \quad (7.4.10)$$

$$m_3 a_3 = m_2 a_2 l_3 / l_2. \quad (7.4.11)$$

Модули \bar{h}'_i ($i = 1, 2, 3$) определяются, так же как и модули \bar{h}_i ($i = 1, 2, 3$), экспериментально при помощи призмы Π или по формулам

$$h'_1 = \frac{m_1 b_1}{m_1 + m_2 + m_3};$$

$$h'_2 = \frac{m_2 b_2}{m_1 + m_2 + m_3}; \quad (7.4.12)$$

$$h'_3 = \frac{m_2 b_3}{m_1 + m_2 + m_3},$$

очевидность которых следует из рис. 7.4.2, в, на котором показана схема определения модуля вектора \bar{h}'_i для отрезка $S_1 S'_i$ звена OA .

Равенство (7.4.7) распадается на два уравнения, которые с учетом (7.4.1) имеют вид:

$$m_1 b_1 / l_1 = m_2 b_2 / l_2; \quad (7.4.13)$$

$$m_3 b_3 / l_3 = m_2 b_2 / l_2. \quad (7.4.14)$$

Уравнения (7.4.10), (7.4.11) и (7.4.12), (7.4.14) являются расчетными. Они содержат 12 параметров m_i ($i = 1, 2, 3$) - массы звеньев; a_i ($i = 1, 2, 3$) и b_i ($i = 1, 2, 3$) - координаты центров масс; l_i ($i = 1, 2, 3$) - длины звеньев. Поэтому при проектировании уравновешенного шарнирного четырехзвенного механизма, можно выбрать произвольно восемь параметров, а оставшиеся четыре параметра определить из уравнений (7.4.10), (7.4.11), (7.4.13), (7.4.14).

Пример. (см. рис. 7.4.2, б). Заданы длины звеньев l_1, l_2, l_3 ; масса m_2 шатуна AB ; координаты a_2, b_2 центра массы m_2 . Следовательно, можно дополнительно выбрать еще два параметра, например абсциссы a_1, a_3 центров масс m_1, m_3 , а остальные параметры b_1, b_3 и

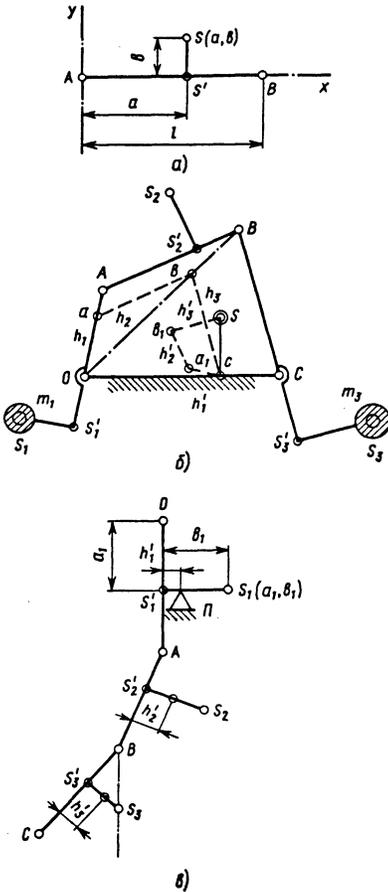


Рис. 7.4.2. Уравновешивание шарнирного четырехзвенного механизма с несимметричными звеньями методом подобия

Если принять во внимание, что равенство (7.4.6) справедливо как при

$$b_i \neq 0, (i = 1, 2, 3), \quad (7.4.8)$$

так и при

$$b_i = 0, (i = 1, 2, 3). \quad (7.4.9)$$

m_1, m_3 найти из уравнений (7.4.10), (7.4.11), (7.4.13) и (7.4.14). Из уравнений (7.4.10), (7.4.11)

$$m_1 = m_2 (l_2 - a_2) l_1 / (a_3 l_2)^2; \quad (7.4.15)$$

$$m_3 = m_2 a_2 l_3 / (a_3 l_2); \quad (7.4.16)$$

а из уравнений (7.4.13) и (7.4.14)

$$b_1 = m_2 b_2 l_1 / (l_2 m_1); \quad (7.4.17)$$

$$b_3 = m_2 b_2 l_3 / (l_2 m_3). \quad (7.4.18)$$

Следует отметить, что при других исходных данных получится другое решение, однако оно будет определяться теми же уравнениями.

Метод расчленения. Во многих случаях многозвенный механизм α целесообразно расчленить на k механизмов α_i ($k = 1, 2, \dots, k$) более простой структуры в отношении их уравновешивания. Это может быть достигнуто, например, расчленением некоторого звена j на два или большее число звеньев j_1, j_2, \dots, j_k , эквивалентных звену j по механическим характеристикам. Возможны и другие способы решения этой задачи.

Согласно методу расчленения [12], используемому для уравновешивания сложных механизмов, статическая уравновешенность каждого из механизмов α_i является необходимым и достаточным условием для статической уравновешенности механизма α .

Пример. Рассмотрено уравновешивание шарнирного восьмизвенного механизма α с несимметричными звеньями методом расчленения в сочетании с методом подобия (рис. 7.4.3, а).

Механизм α расчленяется на три шарнирных четырехзвенных механизма α_i ($i = 1, 2, 3$), как показано на рис. 7.4.3, б. Для этого звено 3 расчленяется на два звена 3' и 3'' произвольно, но так, чтобы выполнялось условие

$$m_3' = k m_3;$$

$$m_3'' = (1 - k) m_3, \quad (7.4.19)$$

где m_3 - масса звена 3 перед расчленением; m_3', m_3'' - массы звеньев 3', 3''; k - постоянная,

$$0 < k < 1. \quad (7.4.20)$$

Аналогично звено 5 делится на два звена 5', 5''.

Механизмы α_i ($i = 1, 2, 3$) уравновешиваются статически методом подобия, как изложено выше, а затем соединяются вместе. В результате получается исходный механизм α , уравновешенный статически (рис. 7.4.3, в).

Определение параметров механизма α .

Методика определения m_j ($j = 1, 3, 5, 7$) звеньев механизма α и координат a_j, b_j ($j = 1, 3, 5, 7$) их центров зависит от исходных данных задачи. Для примера будем счи-

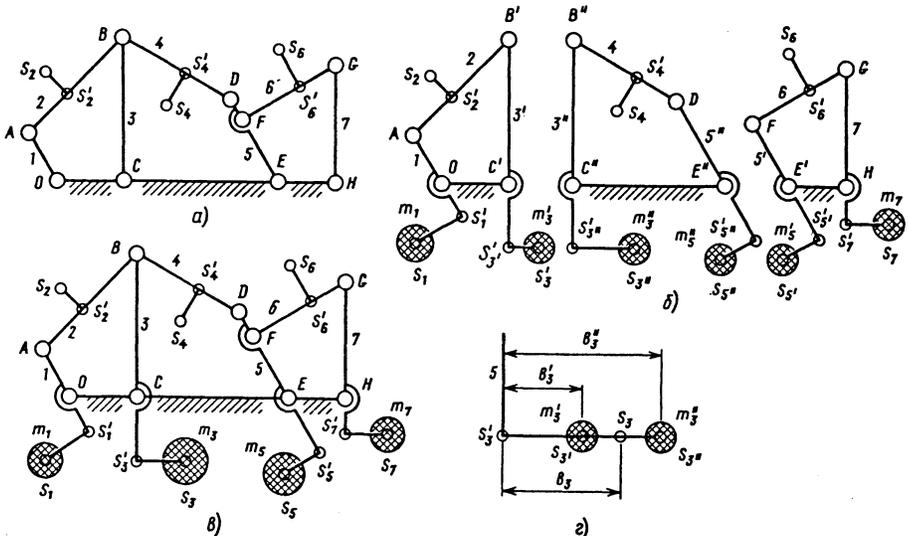


Рис. 7.4.3. Уравновешивание восьмизвенного механизма методом расчленения в сочетании с методом подобия

тять исходными данными массы m_2, m_4, m_6 шатунов и координаты l_j ($j = 1, 2, \dots, 7$) их центров, а также длины всех звеньев механизма (рис. 7.4.3, а). Из конструктивных соображений выбирают абсциссы a_j ($j = 1, 3, 5, 7$) центров масс m_j ($j = 1, 3, 5, 7$) и принимают, что у механизмов α_i ($i = 1, 2, 3$)

$$a'_3 = a''_3 = a_3;$$

$$a'_5 = a''_5 = a_5,$$

где a'_3, a''_3 и a'_5, a''_5 - абсциссы центров масс соответственно m'_3, m''_3 и m'_5, m''_5 (рис. 7.4.3, б).

На основании исходных данных определяются значения масс m_j ($j = 1, 3, 5, 7$) и ординаты b_j ($j = 1, 3, 5, 7$) их центров, необходимые для статического уравновешивания механизма α (рис. 7.4.3, а).

По формулам (7.4.15), (7.4.16)

$$m_1 = m_2 (l_2 - a_2) l_1 / (a_1 l_1); \quad (7.4.21)$$

$$m_7 = m_6 a_6 l_7 / (a_7 l_6). \quad (7.4.22)$$

Ординаты центров масс (7.4.21), (7.4.22) по формулам (7.4.17) и (7.4.18)

$$b_1 = m_2 b_2 l_1 / (m_1 l_2);$$

$$b_7 = m_6 b_6 l_7 / (l_6 m_7). \quad (7.4.23)$$

При определении масс звеньев 3', 3'' принимают коэффициент (7.4.20) равным 0,5. Тогда в соответствии с (7.4.19)

$$m'_3 = m''_3 = 0,5 m_3; \quad (7.4.24)$$

и аналогично

$$m'_5 = m''_5 = 0,5 m_5. \quad (7.4.25)$$

При условии (7.4.24), (7.4.25) массы третьего и пятого звеньев в соответствии с (7.4.15) и (7.4.16)

$$m_3 = a_3^{-1} [m_3 a_2 l_3 / l_2 + m_4 (l_4 - a_4) l_3 / l_4]; \quad (7.4.26)$$

$$m_5 = a_5^{-1} [m_4 a_4 l_{DE} / l_4 + m_6 (l_6 - a_6) l_{FE} / l_6]. \quad (7.4.27)$$

Ординаты масс (7.4.26), (7.4.27) согласно (7.4.17) и (7.4.18)

$$b'_3 = b''_3 = 2 m_2 b_2 l_3 / (m_3 l_2);$$

$$b'_5 = 2 m_4 b_4 l_{DE} / (m_5 l_4); \quad (7.4.28)$$

$$b''_5 = 2 m_6 b_6 l_{EF} / (m_5 l_6).$$

В соответствии с рис. 7.4.3, з при условии (7.4.24)

$$b_3 = 0,5 (b'_3 + b''_3). \quad (7.4.29)$$

Аналогично при условии (7.4.25)

$$b_5 = 0,5 (b'_5 + b''_5). \quad (7.4.30)$$

Формулы (7.4.21) - (7.4.23), (7.4.26) - (7.4.30) полностью определяют все параметры механизма α (рис. 7.4.3, а) после его уравновешивания методом расчленения в сочетании с методом подобия (рис. 7.4.3, в), при принятых выше исходных данных. Следует отметить, что при других исходных данных параметры механизмов α_i ($i = 1, 2, 3$) и α будут другими, однако их нужно определять на основании приведенных выше уравнений (7.4.10), (7.4.11), (7.4.13) и (7.4.14), которые являются основными при уравновешивании шарнирных четырехзвенников с несимметричными звеньями.

Рассмотренный метод уравновешивания сложных механизмов позволяет решать практические задачи по статическому уравновешиванию механизмов различных классов и порядков с несимметричными звеньями.

Метод функциональных цепей. В теории механизмов [7] доказывается, что для статического уравновешивания сложного механизма α , например механизма дробилки (рис. 7.4.4, а), необходимо и достаточно статически уравновесить его функциональную цепь (рис. 7.4.4, б). Последняя получается из механизма α путем отделения от него в общем случае одного или нескольких невесомых звеньев. В данном примере за невесомое звено можно принять звено 4. Чтобы сделать шатун BD невесомым, его нужно сначала заменить статической моделью (рис. 7.4.4, в), представляющей собой невесомый стержень BD с двумя точечными массами (см. гл. 1)

$$m_{4B} = m_4 \frac{DS_4}{BD}; \quad m_{4D} = m_4 \frac{BS_4}{BD}, \quad (7.4.31)$$

затем перенести точечные массы (7.4.31) со звена 4 на смежные звенья 3 и 5 и отсоединить от механизма невесомый стержень 4. В результате получится функциональная цепь (рис. 7.4.4, б) для механизма дробилки.

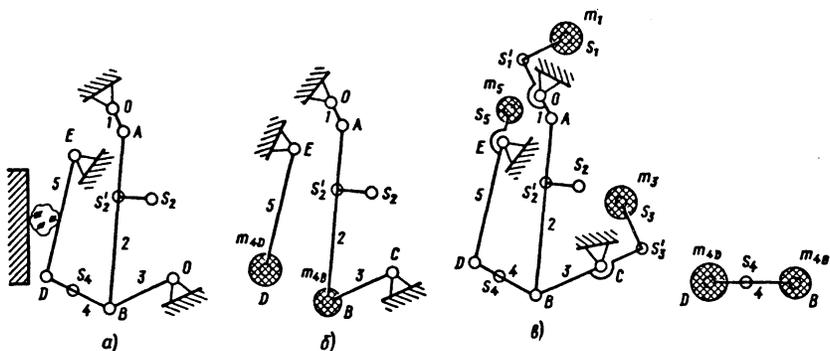


Рис. 7.4.4. Уравновешивание механизма дробилки методом функциональных цепей в сочетании с методом подобия

Для уравновешивания функциональной цепи нужно, пользуясь методом подобия, придать звеньям 5, 3 и 1 такие формы, чтобы центры их масс оказались соответственно в точках E , S_3 и S_1 . После восстановления звена 4 в схеме уравновешенной функциональной цепи получится структурная схема исходного механизма дробилки, уравновешенного статически методом функциональных цепей. и методом подобия (рис. 7.4.4, в). Метод функциональных цепей в сочетании с методом подобия и расчленения является универсальным для статического уравновешивания сложных механизмов любого класса и порядка как с симметричными, так и с несимметричными звеньями.

Для решения задачи методом нуль-векторов нужно было в соответствии с (7.4.11) - (7.4.12) придать звеньям механизма такие формы, чтобы с точками B , A , O совпали соответственно центры масс $m_3(m_3 + m_2)$ и $(m_3 + m_2 + m_1)$.

7.5. ПРИМЕРЫ УРАВНОВЕШИВАНИЯ МЕХАНИЗМОВ

Шарнирно-зубчатый механизм. Пятизвенный шарнирно-зубчатый механизм с ведущим солнечным колесом (рис. 7.5.1, а, б) уравновешивается методом нуль-векторов. В соответствии с (7.4.1) - (7.4.3) корректирующая масса m_3 должна быть такой, чтобы центр S_{34} массе третьего и четвертого звеньев оказался в точке B . Масса m_2 должна обеспечить совпадение с неподвижной точкой A центра масс подвижных звеньев 2, 3 и 4 механизма ABC (рис. 7.5.1, б).

Рычажно-зубчатый механизм. Механизм $OABC$ (рис. 7.5.1, в), с зубчатым вектором 3 и рейкой 4, уравновешивается статически методом нуль-векторов. Другими методами, например методом подобия или методом точечных масс, этот механизм нельзя уравновесить, так как при вращении кривошипа OA изменяется геометрия механизма.

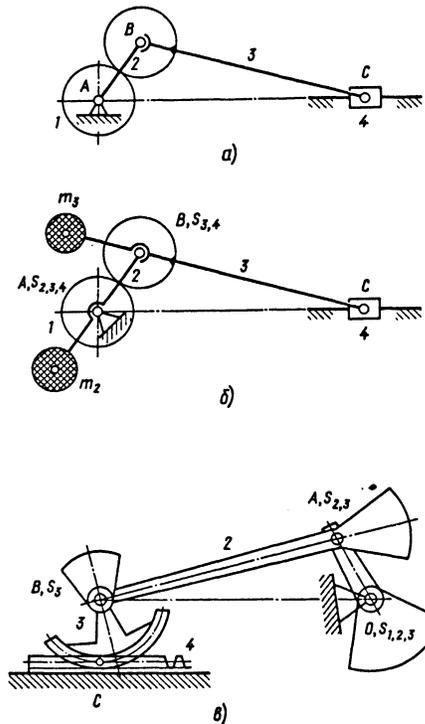


Рис. 7.5.1. Уравновешивание шарнирно-зубчатых механизмов

Кривошипно-ползунные механизмы. Центральные (рис. 7.5.2, а) и дезаксиальные (рис. 7.5.2, б) кривошипно-ползунные механизмы (одноцилиндровых насосов, компрессоров, двигателей и др.) с симметричными шатунами уравнивают обычно методом подобия или методом точечных масс несмотря на то, что этими методами не устраняется полностью действие силы (7.3.6) по оси цилиндра.

$$m_{2A} = m_2 BS_2 / AB; \quad m_{2B} = m_2 AS_2 / AB. \quad (7.5.1)$$

Затем массу m_{2A} следует перенести на кривошип 1, а массу m_{2B} - на ползун 3 и уравновесить массу m_{2A} массой m_1 кривошипа. Для этого кривошипу нужно придать такую форму (рис. 7.5.2, в), чтобы его дисбаланс

$$D_1 = m_1 OS_1 = -m_2 AOA. \quad (7.5.2)$$

После уравнивания вращающихся масс m_1 и m_{2A} на станину механизма будет действовать неуравновешенная сила,

$$\bar{P} = -(m_3 + m_{2A}) \bar{a}_B, \quad (7.5.3)$$

ускорения \bar{a}_B . Вектор ползуна 3 по модулю

$$a_B = 0A\omega^2 \cos \varphi + 0A\omega^2 A_2 \cos 2\varphi + 0A\omega^2 A_4 \cos 4\varphi + 0A\omega^2 A_6 \cos 6\varphi + \dots \quad (7.5.4)$$

Коэффициенты ряда (7.5.4), зависящие от геометрического параметра $\lambda = OA / AB$, приведены в табл. 7.5.1.

Таким образом, модуль силы (7.5.3) определяется тригонометрическим рядом

$$P_B = 0A\omega^2 m \cos \varphi + 0A\omega^2 mA_2 \cos 2\varphi + 0A\omega^2 mA_4 \cos 4\varphi + 0A\omega^2 mA_6 \cos 6\varphi + \dots \quad (7.5.5)$$

Здесь

$$m = m_3 + m_{2B} \quad (7.5.6)$$

поступательно движущаяся масса, состоящая из массы звеньев 3 и одной из точечных масс (7.5.2).

Слагаемые ряда (7.5.5) называются силами соответственно первого, второго и более высокого порядка в зависимости от коэффициента при φ :

$$\begin{aligned} P^I &= 0A\omega^2 m \cos \varphi; \\ P^{II} &= 0A\omega^2 mA_2 \cos 2\varphi; \\ P^{IV} &= 0A\omega^2 mA_4 \cos 4\varphi; \\ P^{VI} &= 0A\omega^2 mA_6 \cos 6\varphi. \end{aligned} \quad (7.5.7)$$

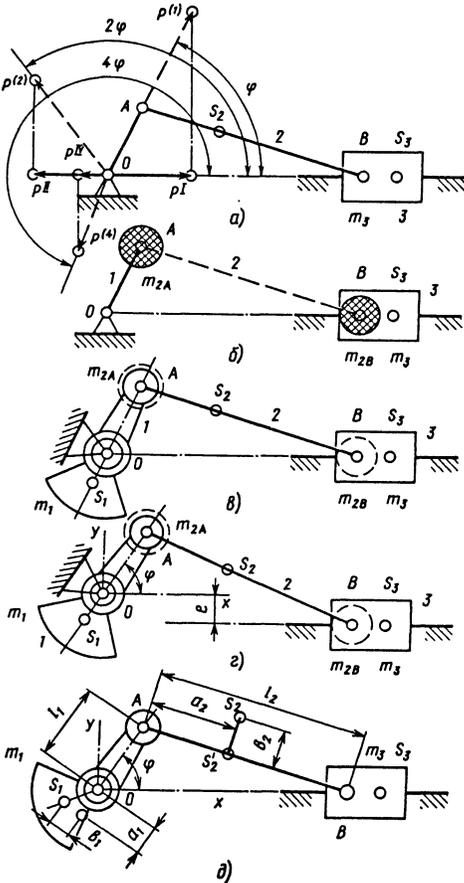


Рис. 7.5.2. Статическое уравнивание кривошипно-ползунных механизмов:

а, б, в - центрального; г - дезаксиального; д - центрального с несимметричным шатуном

Центральный механизм $0AB$ (рис. 7.5.2, а) статически уравнивается методом подобия или методом точечных масс. Для этого необходимо шатун AB заменить его статической моделью (см. гл. 1), представляющей собой невесомый стержень с двумя точечными массами m_{2A} , m_{2B} (рис. 7.5.2, б), которые согласно (7.3.3)

7.5.1. Коэффициенты ряда (7.4.35), зависящие от геометрического параметра λ

Коэффициент	λ					
	1/3,5	1/4	1/4,5	1/5	1/6	1/7
A_2	0,2918	0,2540	0,2250	0,2020	0,1678	0,1436
A_4	0,0062	0,0041	0,0028	0,0020	0,0012	0,0007
A_6	0,000126	0,000069	0,000038	0,000022	0,000009	0,000004

Силы (7.5.7) можно рассматривать как проекции на направление движения ползуна некоторых вспомогательных векторов [7]: равных по модулю (рис. 7.5.2, а)

$$P^{(1)} = 0A\omega^2 m;$$

$$P^{(2)} = 0A\omega^2 mA_2;$$

$$P^{(4)} = 0A\omega^2 mA_4;$$

$$\dots \dots \dots \quad (7.5.8)$$

и образующих с осью направляющей углы

$$\varphi = \omega t;$$

$$2\varphi = 2\omega t;$$

$$4\varphi = 4\omega t;$$

$$6\varphi = 6\omega t.$$

$$(7.5.9)$$

Из (7.5.9) следует, что векторы (7.5.8) вращаются с угловыми скоростями $\omega, 2\omega, 4\omega, \dots$. Поэтому силы (7.5.7) второго, четвертого и более высокого порядка нельзя уравновесить в одноцилиндровой машине путем прикрепления корректирующих масс к кривошипу. Точно также нельзя уравновесить и силу первого порядка \bar{P}^I , но можно при необходимости только повернуть на 90° линию действия ее составляющей $K\bar{P}^I$, где

$$0 < k \leq 1. \quad (7.5.10)$$

Для этого достаточно увеличить дисбаланс кривошипа от значения (7.5.2) до значения

$$D_{11} = D_1 + 0Amk, \quad (7.5.11)$$

где $0A$ - длина кривошипа; m - поступательно движущаяся масса (7.5.6).

После реализации дисбаланса (7.5.11) на станину кривошипно-ползунного механизма действует остаточная неуравновешенная сила в двух направлениях:

по оси направляющей

$$P_{BX} = (1 - K)P^I + P^{II} + P^{IV} + P^{VI} + \dots; \quad (7.5.12)$$

перпендикулярно к оси

$$P_{BY} = KP^I. \quad (7.5.13)$$

Очевидно, при $K = 1$ согласно (7.5.12) сила $P_{BX} = P^{II} + P^{IV} + P^{VI}$, а по (7.5.3)

сила $P_{BY} = P^I$. Следует отметить, что коэффициент (7.5.10) выбирается в зависимости от упругих свойств фундамента одноцилиндровой машины в горизонтальном и вертикальном направлениях.

Дезаксиальный механизм уравновешивается следующим образом. Шатун AB заменяется невесомым стержнем с двумя точечными массами (7.5.1), из которых масса m_{2A} переносится на кривошип 1 , а масса m_{2B} на ползун 3 . Если кривошипу 1 придать такую форму, чтобы центр его массы m_1 оказался в точке S_1 , а дисбаланс отвечает (7.5.2), то кривошипно-ползунный дезаксиальный механизм становится уравновешенным (рис. 7.5.2, з).

После уравновешивания механизма его станина будет воспринимать неуравновешенную силу (7.5.3). Однако в этом случае ускорение поршня

$$a_B = 0A\omega^2 \cos \varphi + 0A\omega^2 A_2 \cos 2\varphi \pm \varepsilon \lambda \sin \varphi. \quad (7.5.14)$$

В последнее слагаемое многочлена (7.5.14) входит величина

$$\varepsilon = e / 0A,$$

а его знак должен быть одноименным со знаком дезаксиала e в системе отсчета xOy (рис. 7.5.2, з).

Центральный механизм с несимметричным шатуном (рис. 7.5.2, д) уравнивается методом подобия. Исходными являются выражения (7.2.1) - (7.2.3), (7.4.6), (7.4.7) и (7.4.12). Расчетные уравнения:

$$m_1 a_1 l_2 = m_2 (l_2 - a_2) l_1; \quad (7.5.15)$$

$$m_1 b_1 l_2 = m_2 b_2 l_1. \quad (7.5.16)$$

В уравнения (7.5.15), (7.5.16) входят восемь параметров, поэтому при проектировании статического уравновешенного механизма можно выбрать шесть параметров. Если, например, заданы длины звеньев l_1, l_2 и их массы m_1, m_2 , а также координаты a_2, b_2 центра массы m_2 , то координаты a_1, b_1 центра массы m_1 кривошипа можно определить по формулам (рис. 7.5.2, д):

$$a_1 = \frac{m_2 (l_2 - a_2)}{m_1 l_2};$$

$$b_1 = \frac{m_2 b_2 l_1}{m_1 l_2}.$$

Кривошипно-ползунный механизм, уравновешенный методом нуль-векторов. Как уже отмечалось, методом нуль-векторов можно осуществить точное статическое уравновешивание рычажного механизма. Рассмотрим уравновешивание кривошипно-ползунного механизма этим методом. положение центра масс такого механизма в соответствии с (7.2.5) определяется радиусом-вектором \vec{OS} , равным геометрической сумме векторов главных точек подвижных звеньев механизма (рис. 7.5.3, а):

$$\vec{OS} = \vec{h}_1 + \vec{h}_2 + \vec{h}_3.$$

Векторы главных точек $\vec{h}_1, \vec{h}_2, \vec{h}_3$ определяются по формулам (7.2.1) - (7.2.3). Для статического уравновешивания механизма необходимо выполнение условий (7.4.1) - (7.4.3). В результате центр масс механизма совпадает с неподвижной точкой O. Следует отметить, что для кривошипно-ползунного механизма выполнение условия $\vec{h}_3 = 0$ не обязательно, так как вектор \vec{h}_3 имеет постоянную величину и направление. При равенстве нулю векторов \vec{h}_1 и \vec{h}_2 центр масс механизма

определяется вектором \vec{h}_3 , т.е. $\vec{OS} = \vec{h}_3 = \text{const.}$

Из (7.2.1) и (7.2.2) при условии $\vec{h}_1 = 0$ и $\vec{h}_2 = 0$ получены уравнения дисбалансов $m_1 \vec{OS} = -(m_2 + m_3) \vec{OA}$; $m_2 \vec{AS}_2 = -m_3 \vec{AB}$, при реализации которых осуществляется точное статическое уравновешивание механизма методом нуль-векторов (рис. 7.5.3, б). Центры масс шатуна и кривошипа в таком механизме должны находиться соответственно в точках S_2 и S_1 .

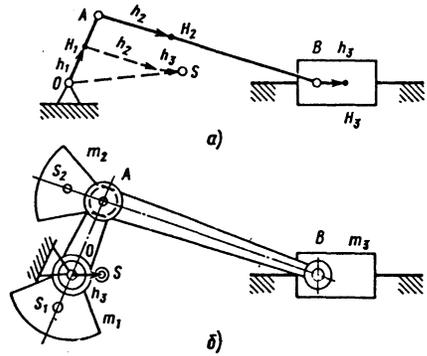


Рис. 7.5.3. Статическое уравновешивание кривошипно-ползунного механизма методом нуль-векторов

Метод нуль-векторов не получил широкого распространения для уравновешивания механизмов ввиду значительного увеличения массы подвижных звеньев вследствие постановки на них корректирующих масс, а также невозможности использования в механизме консольного шатуна. Однако в ряде случаев для уравновешивания кривошипно-ползунных механизмов, имеющих незначительные поступательно движущиеся массы, применение метода нуль-векторов вполне допустимо. Исследования показывают, что общее увеличение массы подвижных звеньев при выборе эксцентриситетов шатуна и кривошипа в пределах $AS_2 = OS_2 = (2 \dots 2,5) OA$, (где OA - длина кривошипа)

$$\Delta m = 4m_{II},$$

где m_{II} - поступательно движущаяся масса.

К преимуществам этого метода следует отнести полное статическое уравновешивание механизма, т.е. главный вектор неуравновешенных сил любого порядка равен нулю. Вме-

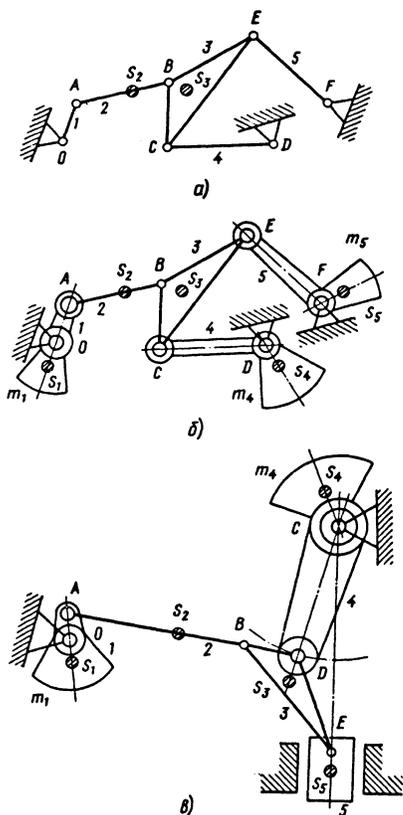


Рис. 7.5.4. Уравновешивание шарнирных и рычажных механизмов третьего класса (при начальном звене 1)

сте с тем постановка дополнительной массы на шатуне увеличивает его момент инерции и приводит к увеличению моментной неуравновешенности механизма.

Шарнирный механизм третьего класса и третьего порядка. Так как шатун 3 пятизвенного механизма несимметричный (рис. 7.5.4, а), то механизм можно уравновесить методом подобия в сочетании с методом функциональных цепей. Необходимые для этого операции следующие:

1) звено 2 заменяется статической моделью (см. рис. 7.3.1, е), а затем отсоединяется от механизма, а точечные массы m_{2A} , m_{2B} остаются присоединенными к звеньям 1 и 3 в точках соответственно А и В;

2) звену 1 придается такая форма (см. рис. 7.5.4, б), при которой дисбаланс его массы m_1 относительно оси вращения $D_1 = m_{2A}OA$. После этого центр вращающихся

масс m_1 и m_{2A} совпадает с неподвижной точкой 0;

3) шарнирный четырехзвенник $BCDEF$ с несимметричным шатуном 3 уравновешивается методом подобия в соответствии с рис. 7.4.2, б;

4) невесомое звено 2 занимает первоначальное положение. В результате получается статически уравновешенный механизм (рис. 7.5.4, в).

Рычажный механизм третьего класса и третьего порядка. Уравновешивание механизма штамповочного прессы с несимметричным шатуном 3 (рис. 7.5.4, е) осуществляется методом подобия в сочетании с методом функциональных цепей. Для этого выполняется следующее:

1) шатун AB заменяется статической моделью (см. рис. 7.3.1, е) и после переноса точечных масс m_{2A} , m_{2B} на смежные звенья 1 и 3, отсоединяется от механизма. В результате получается функциональная цепь, состоящая из звена 1 и кривошипно-ползунного механизма с несимметричным шатуном BDE ;

2) звено 1 проектируется такой формы (рис. 7.5.4, е), чтобы его дисбаланс относительно оси вращения $D_1 = m_{2A}/OA$;

3) кривошипно-ползунный механизм с несимметричным шатуном BDE , к которому присоединена масса m_{2B} , уравновешивается статически методом подобия в соответствии с рис. 7.5.2, д;

4) после восстановления невесомого звена AB , получается статически уравновешенный механизм штамповочного прессы (рис. 7.5.4, е).

7.6. УРАВНОВЕШИВАНИЕ МАНИПУЛЯТОРОВ ПРОМЫШЛЕННЫХ РОБОТОВ

Основной механизм манипулятора промышленного робота (ПР) представляет собой в общем случае пространственный механизм с несколькими степенями свободы, содержащий разомкнутые и замкнутые кинематические цепи. Последние образуются в частности звеньями механизмов приводных устройств, передвижения, захвата и других, необходимых для выполнения технологических операций. Поэтому кинематическую цепь манипулятора можно уравновесить статически только методом нуль-векторов. Эта задача решается или точно, или приближенно в зависимости от того, является ли кинематическая цепь манипулятора шарнирной или рычажной. В некоторых конструкциях ПР манипулятор содержит не только открытые, но и замкнутые кинематические цепи. В последнем случае, уравновешивание манипулятора должно проводить-

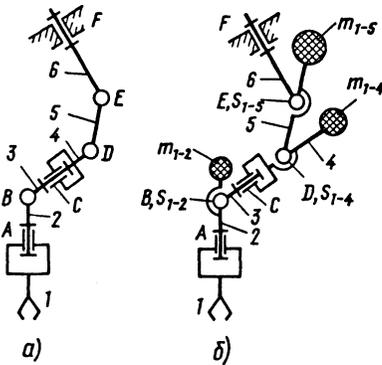


Рис. 7.6.1. Уравновешивание манипулятора ЛПИ-2 методом нуль-векторов:

1 - 6 - звенья

ся методом нуль-векторов в сочетании с другими методами, рассмотренными выше. Покажем это на примерах.

Манипулятор ЛПИ-2. Этот манипулятор представляет собой шарнирную кинематическую цепь $ABCDEF$ с шестью степенями свободы (рис. 7.6.1, а). Такая кинематическая цепь, как было рассмотрено выше, может быть точно уравновешена статически методом нуль-векторов. Для этого достаточно установить на звеньях 2, 4 и 5 манипулятора корректирующие массы m_{1-2} , m_{1-4} и m_{1-5} такой величины, чтобы центры масс

$$m_B = m_1 + m_2 + m_{1-2};$$

$$m_2 = m_B + m_3 + m_4 + m_{1-4}; \quad (7.6.1)$$

$$m_F = m_D + m_5 + m_{1-5}$$

совпадали соответственно с точками B , D и E (рис. 7.6.1, б).

В выражениях (7.6.1) m_i ($i = 1, 2, \dots, 5$) - масса i -го подвижного звена манипулятора.

Манипулятор ПР фирмы АСИА (Швеция). Манипулятор ПР фирмы АСИА с шестью степенями свободы (рис. 7.6.2, а) предназначен для образования заготовок водяной струей высокого давления. Аналогичную схему имеет и манипулятор ПР типа V15 фирмы "Рейс" (Германия), служащий для перемещения груза массой до 15 кг в любую точку сферического пространства, диаметром 3 м.

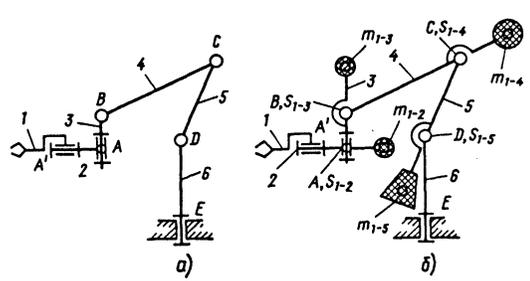


Рис. 7.6.2. Уравновешивание манипулятора ПР фирмы АСИА (Швеция)

Так как рассматриваемый манипулятор имеет шарнирные кинематические цепи, то он может быть точно уравновешен методом нуль-векторов при помощи четырех корректирующих масс. Очевидно, после уравновешивания манипулятора (рис. 7.6.2, б) точки A , B , C , D кинематической цепи должны совпасть соответственно с центрами масс:

$$m_A = m_1 + m_2 + m_{1-2};$$

$$m_B = m_A + m_3 + m_{1-3};$$

$$m_C = m_B + m_4 + m_{1-4};$$

$$m_D = m_C + m_5 + m_{1-4};$$

где m_i ($i = 1, 2, \dots, 5$) - масса i -го звена;

m_{1-i} - корректирующая масса, установленная на i -м звене.

7.7. УРАВНОВЕШИВАНИЕ МЕХАНИЗМОВ МНОГОЦИЛИНДРОВЫХ МАШИН

Отдельно взятый кривошипно-ползунный механизм согласно (7.5.5) нельзя уравновесить путем прикрепления корректирующей массы к кривошипу. Но в цилиндрических машинах, состоящих из одинаковых центральных кривошипно-ползунных механизмов с симметричными шатунами, уравновешенных каждый в отдельности методом подобия или точечных масс, вполне можно достигнуть взаимного уравновешивания сил первого, второго, а в некоторых случаях и более высокого порядка при помощи простейших конструктивных средств, к которым относится, например, выбор относительного расположения кривошипов.

Двухцилиндровая машина с кривошипами, расположенными под углом 180° (рис. 7.7.1, а). Для определения сил первого порядка, направим по соответствующим кривошипам вспомогательные векторы $\bar{P}_1^{(1)}, \bar{P}_2^{(1)}$ (см. п. 7.5), равные по модулю

$$P_1^{(1)} = 0A\omega^2 m; P_2^{(1)} = P_1^{(1)},$$

где $0A$ - длина кривошипа; m - поступательно движущаяся масса, определяемая формулой (7.5.6); ω - угловая скорость коленчатого вала.

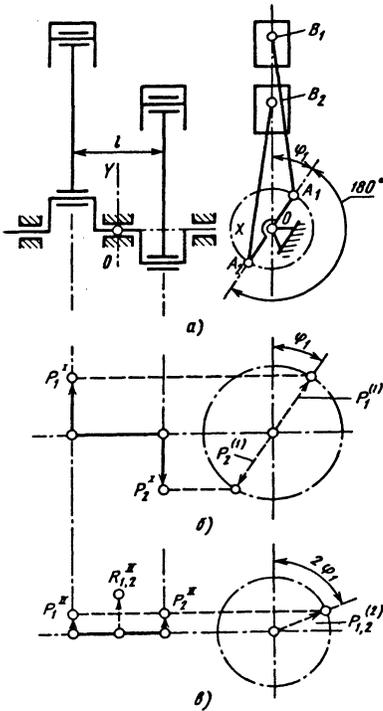


Рис. 7.7.1. Действие неуравновешенных сил в двухцилиндровой машине

Проекции векторов $P_1^{(1)}, P_2^{(1)}$ на геометрические оси цилиндров определяют силы первого порядка P_1^I, P_2^I по величине и направлению. Неуравновешенные силы первого порядка приводятся в двухцилиндровой машине к паре сил с моментом, модуль которого изменяется по гармоническому закону (рис. 7.7.1, б):

$$M_{1,2}^I = 0A\omega^2 ml \cos \varphi_1,$$

где l - расстояние между геометрическими осями цилиндров.

Силы второго порядка определяются проекциями на геометрические оси цилиндров вспомогательных векторов $\bar{P}_1^{(2)}, \bar{P}_2^{(2)}$, по модулю $P_1^{(2)} = 0A\omega^2 mA_2; P_2^{(2)} = P_1^{(2)}$. Они совпадают по фазе, так как образуют с геометрическими осями цилиндров углы $2\varphi_1$ и $2(\varphi_1 + 180^\circ)$. Главный вектор сил второго порядка по модулю (рис. 7.7.1, в)

$$R_{1,2}^{II} = P_1^{II} + P_2^{II} = 20A\omega^2 mA_2 \cos 2\varphi_1,$$

где A_2 - коэффициент, зависящий от геометрического параметра $\lambda = 0A_1 / A_1 B_1$ (см. табл. 1.1). Силы более высоких порядков также приводятся к равнодействующей.

Четырехцилиндровая машина с кривошипами, расположенными под углом 180° (рис. 7.7.2, а). Неуравновешенные силы первого порядка определяются с помощью вспомогательных векторов $\bar{P}_i^{(1)}$ ($i = 1, 2, 3, 4$), равных по модулю $P_i^{(1)} = 0A\omega^2 m$. Их направляют по соответствующим кривошипам (рис. 7.7.2, б).

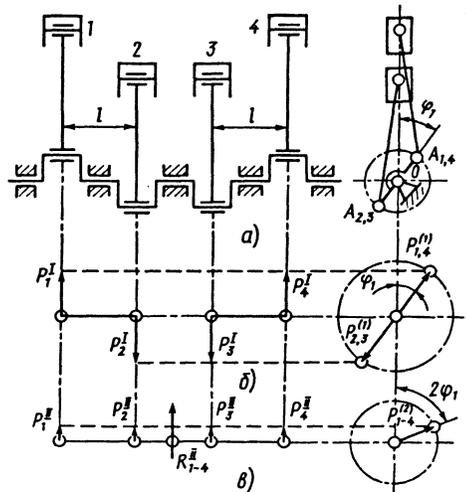


Рис. 7.7.2. Действие неуравновешенных сил в четырехцилиндровой машине с кривошипами, расположенными под углом 180°

Проекции векторов $P_i^{(1)}$ на геометрические оси цилиндров равны силам первого порядка $P_1^I = P_4^I = 0A\omega^2 m \cos \varphi;$
 $P_2^I = P_3^I = -P_1^I$. Тогда главный вектор и главный момент неуравновешенных сил перво-

го порядка, действующих в четырехцилиндровой машине, представляют собой нулевые векторы (рис. 7.7.2, б). Неуравновешенные силы порядка $2n$ (где n - произвольное число) приводятся к равнодействующим, линии действия которых проходят через среднюю точку коленчатого вала параллельно осям цилиндров (рис. 7.7.2, в).

Шестицилиндровая машина с кривошипами, расположенными под углом 120° (рис. 7.7.3, а). Вспомогательные векторы $\bar{P}_i^{(1)}$ ($i = 1, 2, \dots, 6$), где модуль $P_i^{(1)} = 0A\omega^2 m$, направляют по соответствующим кривошипам и проектируют их на геометрические оси цилиндров (рис. 7.7.3, б). В результате неуравновешенные силы первого порядка

$$P_1^I = P_6^I = 0A\omega^2 m \cos \varphi_1;$$

$$P_2^I = P_5^I = 0A\omega^2 m \cos(\varphi_1 + 120^\circ);$$

$$P_3^I = P_4^I = 0A\omega^2 m \cos(\varphi_1 + 240^\circ).$$

Так как равенства $P_1^I + P_2^I + P_3^I = 0$ и $P_4^I + P_5^I + P_6^I = 0$ удовлетворяются тождественно при любом угле φ_1 , то неуравновешенные силы первого порядка \bar{P}_i^I ($i = 1, 2, 3$) и \bar{P}_i^I ($i = 4, 5, 6$) приводятся соответственно к парам сил с моментами $\bar{M}_{1,2,3}^I, \bar{M}_{4,5,6}^I$, которые равны по модулю, но противоположны по направлению:

$$\bar{M}_{1,2,3}^I = -\bar{M}_{4,5,6}^I,$$

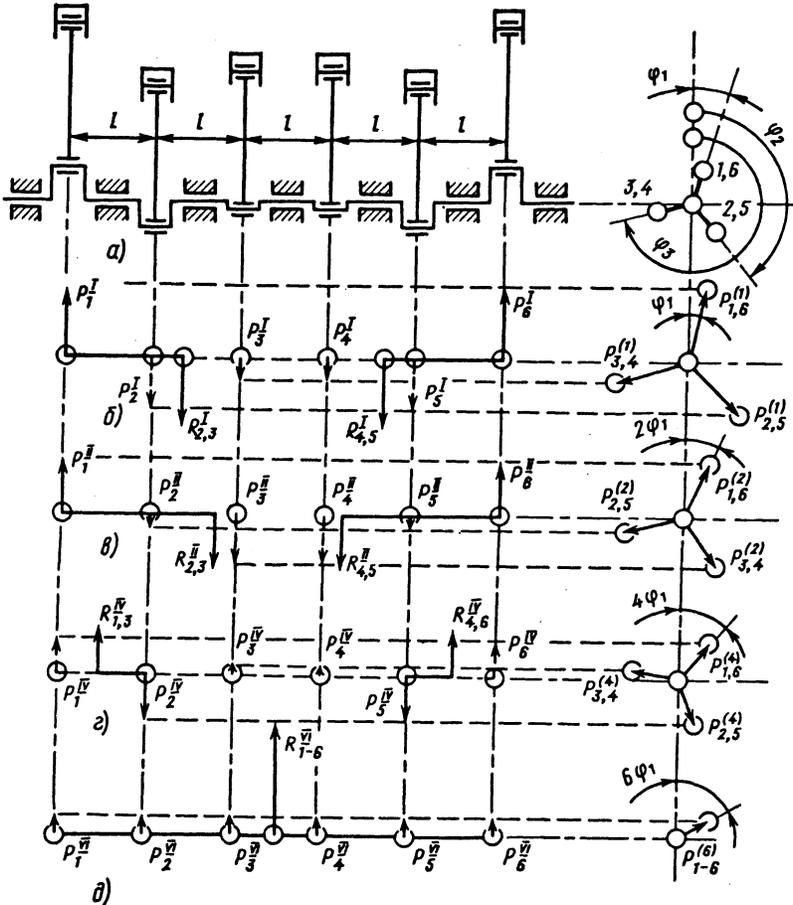


Рис. 7.7.3. Действие неуравновешенных сил в шестицилиндровой машине с кривошипами, расположенными под углом 120°

где $\bar{M}_{1,2,3}^I = \sqrt{3} 0A\omega^2 ml \cos(\varphi_1 + 30^\circ)$.

Аналогично силы второго порядка \bar{P}_i^{II} ($i = 1, 2, 3$) и \bar{P}_i^{II} ($i = 4, 5, 6$) также приводятся к парам сил с моментами $\bar{M}_{1,2,3}^{II}$ и $\bar{M}_{4,5,6}^{II}$, равными по модулю, но противоположными по направлению (рис. 7.7.3, в):

$$\bar{M}_{1,2,3}^{II} = -\bar{M}_{4,5,6}^{II},$$

где $\bar{M}_{1,2,3}^{II} = \sqrt{3} 0A\omega^2 m_{A2} l \cos(2\varphi_1 - 30^\circ)$.

Аналогично действуют неуравновешенные силы четвертого (рис. 7.7.3, г) и более высоких четных порядков, если только порядок силы не является кратным числу 3.

Силы, порядок которых $3k_0$ ($k_0 = 2, 4, 6, \dots$), приводятся к равнодействующей

$$R_{1-6}^{3k_0} = 6 0A\omega^2 m_{A3k_0} \cos 3k_0\varphi_1.$$

Например, при $k_0 = 2$ (рис. 7.7.3, д)

$$R_{1-6}^{VI} = 6 0A\omega^2 m_{A6} \cos 6\varphi_2.$$

В общем случае линии действия силы $R_{1-6}^{3k_0}$ проходят через точку коленчатого вала параллельно геометрическим осям цилиндров.

Следует отметить, что моменты неуравновешенных сил, порядок которых кратен трем, являются внешне уравновешенными, но вызывают изгибные колебания коленчатого вала в плоскости, проходящей через геометрические оси цилиндров [7].

Технологические втулки коленчатых валов. Если для коленчатого вала многоцилиндровой машины справедливы два условия: 1) центр массы коленчатого вала лежит на оси вращения; 2) коленчатый вал является симметричным относительно его средней плоскости (левая половина вала - зеркальное отражение правой половины), то его можно балансировать динамически на балансировочном станке без технологических втулок.

Если эти условия не выполняются, то балансировку коленчатого вала следует проводить с технологическими втулками. Технологическая втулка делается разъемной и имеет такую массу, чтобы ее действие на коленчатый вал во время балансировочного процесса заменяло действие шатунно-поршневой группы.

Масса одной технологической втулки [см. формулу (7.3.3)]

$$m_T = m_{2A} = m_2 \frac{b}{a + b}, \quad (7.7.1)$$

где m_2 - масса шатуна; a, b - расстояния от центра массы шатуна до осей вращения вращательных кинематических пар (см. рис. 7.3.1, б).

Так, коленчатые валы рассмотренных четырехцилиндровой (см. рис. 7.7.2) и шестицилиндровой (см. рис. 7.7.3) машин можно динамически балансировать на балансировочном станке без технологических втулок, а балансировка коленчатого вала двухцилиндровой машины (см. рис. 7.7.1) должна проводиться обязательно с технологическими втулками.

Необходимо отметить, что условия 1 и 2 не однозначно определяют возможность балансировки коленчатых валов без технологических втулок. В этом можно убедиться на примере механизма трехцилиндрового оппозитного компрессора (рис. 7.7.4, а). Если уравновесить коленчатый вал без технологических втулок, то условия 1 и 2 выполняются. Однако после присоединения к коленчатому валу шатунов масса m_{2A} , определяемая по формуле (7.7.1), вызывает его статическую и динамическую неуравновешенность. Для уравновешивания коленчатого вала необходимо эксцен-

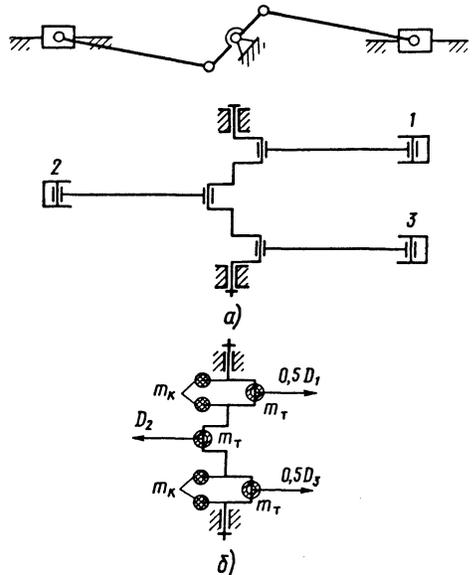


Рис. 7.7.4. Уравновешивание коленчатого вала трехцилиндрового оппозитного компрессора

трично расположенную массу колена $m_{кв}$ и массу m_{2A} уравновесить корректирующими массами m_k , установленными на щеках коленчатого вала первого и третьего цилиндров (рис. 7.7.4, б). При этом должно выполняться условие $\bar{D}_2 = 0,5\bar{D}_1 + 0,5\bar{D}_3$, (где $\bar{D}_1 = \bar{D}_2 = \bar{D}_3$ - дисбалансы эксцентрично расположенных масс колена и части массы шатуна, статически отнесенной к шатунной шейке коленчатого вала). Таким образом, балансировать коленчатый вал такого компрессора нужно только с технологическими втулками. Аналогичная ситуация может возникнуть и для других многоцилиндровых машин с нечетным числом цилиндров.

Для статического уравновешивания механизма, показанного на рис. 7.7.4, необходимо выполнение условия: поступательно движущаяся масса цилиндра должна быть равна сумме поступательно вращающихся масс первого и третьего цилиндров. Реализовать необходимое условие статического уравновешивания компрессора можно разными путями. Одним из возможных способов решения этой задачи является изготовление поршней из различных материалов, например поршней первого и третьего цилиндров из алюминия, а поршня второго - из чугуна или стали.

В некоторых случаях, например, при балансировке коленчатого вала двухцилиндровой V-образной машины с углом развала цилиндров, равным 90° (рис. 7.7.5), масса m'_i каждой технологической втулки должна включать шатунные массы m_{2A} , m_{3A} шатунов 2 и 3, кроме того, должно учитываться действие в машине неуравновешенных сил первого порядка.

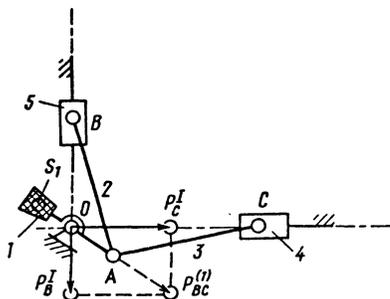


Рис. 7.7.5. Действие неуравновешенных сил в двухцилиндровой V-образной машине с углом развала цилиндров 90°

При равенстве шатунно-поршневых групп рассматриваемой V-образной машины масса технологической втулки для балансировки коленчатого вала [7]

$$m'_T = m_T + (m_3 + m_4),$$

где $(m_3 + m_4)$ - масса шатунно-поршневой группы, состоящей из шатуна 3 и поршня 4; m_T - масса, определяемая формулой (7.7.1).

7.8. ПРИНЦИПЫ ДИНАМИЧЕСКОГО УРАВНОВЕШИВАНИЯ МЕХАНИЗМОВ

Согласно изложенному при выполнении условий (7.1.5) и (7.1.6) механизм имеет соответственно статическую или моментную уравновешенность. Динамическая уравновешенность механизма достигается при одновременном выполнении условий (7.1.5), (7.1.6). Точное решение этой задачи весьма трудно получить в общем виде простыми конструктивными средствами. В настоящее время разработан лишь общий метод статического уравновешивания в механизмах произвольной структуры с симметричными и с несимметричными звеньями и общий метод уравновешивания в механизмах произвольной структуры первой гармонике главного момента неуравновешенных сил [7]. Известны также решения частных задач моментного уравновешивания. Ниже рассмотрены принципы этих методов.

Компенсация главного вектора и первой гармонике главного момента неуравновешенных сил. Этот метод основан на принципе независимости статической уравновешенности механизма от координат оси вращения какой-либо вращающейся массы статически уравновешенного механизма [7, 8]. На рис. 7.8.1, а показана схема статически уравновешенного механизма $OABC$ массомесильной машины. Перенесем ось вращения массы km_1 кривошипа 1, где

$$k \leq 1, \quad (7.8.1)$$

из положения 0 в положение O_1 (рис. 7.8.2, б). При этом не изменяется статическая уравновешенность механизма согласно указанному выше принципу, но появляется пара сил с моментом

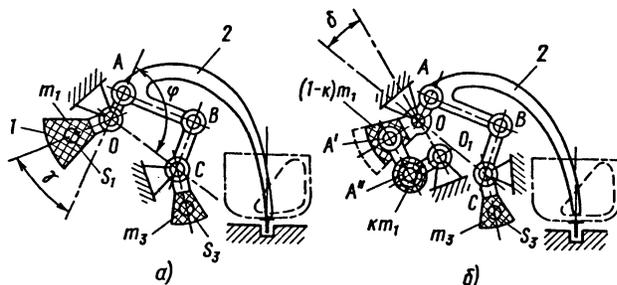
$$M_p = km_1 b_0 A'' \omega^2 \sin(\varphi + \delta - \gamma), \quad (7.8.2)$$

который скомпенсирует момент

$$M_1 = M_1^0 \sin(\varphi + \delta), \quad (7.8.3)$$

представляющий собой первую гармонику главного момента M неуравновешенных сил.

Рис. 7.8.1. Компенсация главного вектора и первой гармоники главного момента неуравновешенных сил



В формулах (7.8.1) - (7.8.3) b - расстояние между осями вращения кривошипа и корректирующей массы km_1 ; m_1 - масса кривошипа OA статически уравновешенного механизма $OABC$ (рис. 7.8.1, а); ω - угловая скорость кривошипа; O_1A'' - эксцентриситет массы km_1 ; φ - угловая координата кривошипа OA относительно линии OC ; δ - угол между линиями центров OC и OO_1 ; γ - угол между линиями OA и OS_1 .

Амплитуда M_1^0 и фазовый угол δ_1 момента (7.8.3) должны определяться на основании гармонического анализа главного момента неуравновешенных сил, действующих в механизме:

$$M = M_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (n\varphi + \delta_n).$$

После определения значений M_1^0 и δ_1 , конструктор может выбрать (из конструктивных соображений) весьма важный параметр b и определить коэффициент k из интервала

значений (7.8.1) по формуле

$$k = \frac{M_1^0}{m_1 b OA' \omega^2}.$$

Следует отметить, что для шарнирных механизмов изложенный метод позволяет точно уравновесить главный вектор и первую гармонику главного момента неуравновешенных сил при произвольном значении параметра b . В случае рычажных механизмов, которые, как известно, уравновешиваются статически приближенно, метод позволяет, не изменяя качество статической уравновешенности механизма, дополнительно уравновесить первую гармонику главного момента неуравновешенных сил также при произвольном значении параметра b . Таким образом, рассмотренный метод является универсальным и может быть использован для механизмов произвольной структуры.

Принцип симметрии. В некоторых случаях при симметричном расположении одинаковых механизмов достигается частичная компенсация неуравновешенных сил и моментов. Например, у центральных кривошипно-ползунных механизмов OA_1B_1 и OA_2B_2 (рис. 7.8.2, а),

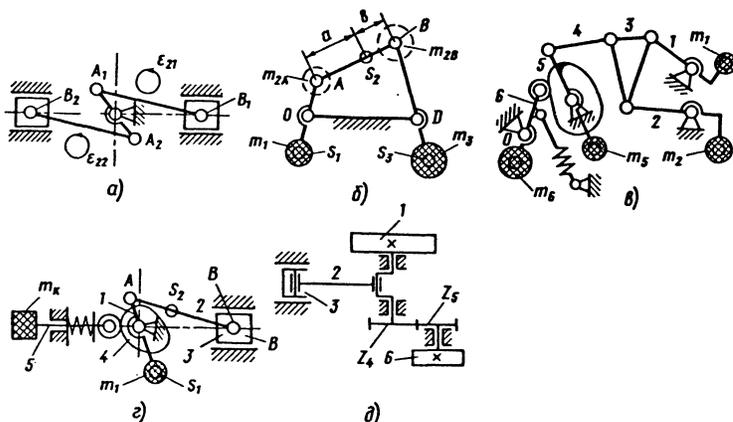


Рис. 7.8.2. Механизмы, частично уравновешенные динамически

расположенных симметрично относительно точки O , главные векторы и главные моменты неуравновешенных сил $\bar{P}^I, \bar{P}^{II}, \bar{P}^{IV}, \dots$, (7.5.7) различных порядков становятся нулевыми векторами. Вращающиеся массы кривошипов также будут уравновешены. Станина такого механизма воспринимает только действие неуравновешенного момента от масс шатунов A_1B_1 и A_2B_2 :

$$M_{III} = -(J_{21}\varepsilon_{21} + J_{22}\varepsilon_{22}), \quad (7.8.4)$$

где J_{21}, J_{22} - моменты инерции шатунов относительно осей, проходящих через центры их масс перпендикулярно к плоскости чертежа; $\varepsilon_{21}, \varepsilon_{22}$ - угловые ускорения шатунов, одинаковые по величине и направлению.

Компенсация неуравновешенных сил, создаваемых шатунными массами. Момент типа (7.8.4) является переменным по величине и направлению и поэтому может быть одной из причин вибрации станины механизма. Чтобы устранить неуравновешенные моменты от шатунных масс, достаточно выполнить условие:

$$\rho_{2si}^2 = a_i b_i \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (7.8.5)$$

где ρ_{2si} - радиус инерции i -го шатуна относительно оси, проходящей через центр S_{2i} его массы, перпендикулярно к плоскости чертежа; a_i, b_i - расстояния от центра массы m_{2i} i -го шатуна до осей вращения кинематических пар.

Так, после статического уравновешивания четырехзвенного шарнирного механизма (рис. 7.8.2, б) методом подобия (см. п. 7.1.4), главный вектор неуравновешенных сил нулевой, но на станину механизма действует неуравновешенный момент от массы шатуна m_2

$$M_{III} = -m_2 (\rho_{2s}^2 - ab) \varepsilon_2, \quad (7.8.6)$$

где ρ_{2s} - радиус инерции шатуна относительно оси, проходящей через центр S_2 , перпендикулярно к плоскости чертежа; a, b - расстояния от центра S_2 до центров A и B ; ε_2 - угловое ускорение шатуна. Если массу шатуна скорректировать так, чтобы выполнить условие (7.8.5)

$$\rho_{2s}^2 - ab = 0,$$

то вектор момента (7.8.6) станет нулевым.

Использование кулачковых механизмов для компенсации неуравновешенных сил. После статического уравновешивания механизма

третьего класса (при начальном звене 5) (рис. 7.8.2, в) методом подобия (см. п. 7.5) при помощи корректирующих масс m_1, m_2, m_3 на его станину действует главный момент \bar{M} неуравновешенных сил. Момент \bar{M} можно уравновесить при помощи кулачкового механизма с вращающимся толкателем 6. Для этого кулачок следует закрепить на валу звена 5, а толкатель - на валу 0. Центр массы толкателя должен находиться на оси вращения. Рассматриваемый механизм уравновешен динамически, если профиль кулачка удовлетворяет условию

$$J_6 \varepsilon_6 = -M_5, \quad (7.8.7)$$

где J_6 - момент инерции толкателя относительно его оси 0 вращения; ε_6 - угловое ускорение толкателя; \bar{M}_5 - главный момент неуравновешенных сил, приведенный к звену 5.

Кулачковый механизм можно использовать также для компенсации неуравновешенных сил различных порядков, создаваемых поступательно-вращающейся массой (рис. 7.8.2, з)

$$m = m_3 + m_{2B}, \quad (7.8.8)$$

где m_3 - масса звена 3; $m_{2B} = m_2 AS_2 / AB$ - часть массы m_2 шатуна 2, приведенная в точке B .

Для этого профиль кулачка 4 должен обеспечить движение толкателя 5 с ускорением

$$\bar{a}_k = -\frac{m}{m_k} \bar{a}_B,$$

где m - поступательно-движущаяся масса (7.8.8); m_k - корректирующая масса, установленная на толкателе 5; \bar{a}_B - ускорение точки B звена 3.

Компенсация действия на станину момента - $J_1 \varepsilon_1$. При статическом и динамическом уравновешивании механизмов обычно считают угловую скорость кривошипа $\omega_1 = \text{const}$. В действительности ω_1 является переменной величиной даже при установившемся движении механизма и изменяется с заранее заданным коэффициентом неравномерности δ . Поэтому на станину механизма передается неуравновешенный момент

$$M_\delta = -J_1 \varepsilon_1, \quad (7.8.9)$$

где J_1 - момент инерции вращающихся масс, приведенных к кривошипу; ε_1 - угловое ускорение кривошипа.

В некоторых случаях момент M_δ может во много раз превышать момент от сил полезных сопротивлений и оказывать нежелательное воздействие на станину. Момент M_δ можно компенсировать при помощи маховой уравновешивающей массы, вращающейся с угловым ускорением $\varepsilon_{ур.м} = -\varepsilon_1$.

Механизм одноцилиндровой машины (рис. 7.8.2, д) состоит из маховика 1, коленчатого вала и маховой уравновешивающей массы 6, соединенной с коленчатым валом зубчатой передачей. Для устранения действия на станину механизма неуровновешенного момента (7.8.9), вызванного неравномерностью вращения коленчатого вала, момент инерции уравновешивающего маховика 6 должен быть $J_6 = J_1 Z_5 / Z_4$.

Принцип приближенного уравновешивания механизмов методом оптимизации неуровновешенных сил. В ряде случаев в механизмах можно полностью устранить моментную неуровновешенность и минимизировать главный вектор неуровновешенных сил, используя для этого теорию приближения функций. Пусть в простейшем рычажном механизме (рис. 7.8.3, а) станина $0AB$ воспринимает в общем случае главный вектор (7.1.3) и главный момент (7.1.4) неуровновешенных сил. Если принять, что угловая скорость кривошипа $\omega_1 = \text{const}$, то для уравновешивания вращающихся масс и компенсации неуровновешенного момента, создаваемого массой шатуна, достаточно выполнить условия (см. п. 7.5):

$$m_1 a_1 = -m_2 \frac{b_2 l_1}{l_2}; \quad (7.8.10)$$

$$J_{2s} = m_2 \rho_{2s}^2; \quad (7.8.11)$$

$$\rho_{2s}^2 = a_2 b_2; \quad (7.8.12)$$

$$l_2 = a_2 + b_2, \quad (7.8.13)$$

где m_1 и m_2 - масса соответственно кривошипа и шатуна; a_2, b_2 - расстояния от точек A и B шатуна до центра S_2 его массы; J_{2s}, ρ_{2s} - соответственно момент инерции и радиус инерции шатуна относительно оси, проходящей через центр S_2 перпендикулярно к плоскости чертежа; a_1 - абсцисса центра S_1 массы кривошипа; l_1 - длина кривошипа OA ; l_2 - длина шатуна AB .

В равенства (7.8.10) - (7.8.13) входят девять параметров, из которых пять можно выбрать из технологических и конструктивных условий. Пусть, например, выбраны размеры звеньев l_1, l_2 и масса m_2 шатуна, а также абсциссы a_1, a_2 центров масс кривошипа и шатуна. По этим данным из (7.8.13) $b_2 = l_2 - a_2$, а из (7.8.10) $m_1 = -m_2 b_2 l_1 / (a_1 l_1)$. Знак минус показывает, что эксцентриситеты массы m_1 кривошипа и шатунной массы $m_2 b_2 / l_2$ противоположны по знаку. Из выражения (7.8.12) радиус инерции шатуна $\rho_{2s} = \sqrt{a_2 b_2}$. По формуле (7.8.11) необходимый момент инерции шатуна $J_{2s} = m_2 \rho_{2s}^2$.

После реализации условий (7.8.10) - (7.8.13) дисбаланс кривошипа

$$D_1 = m_1 a_1. \quad (7.8.14)$$

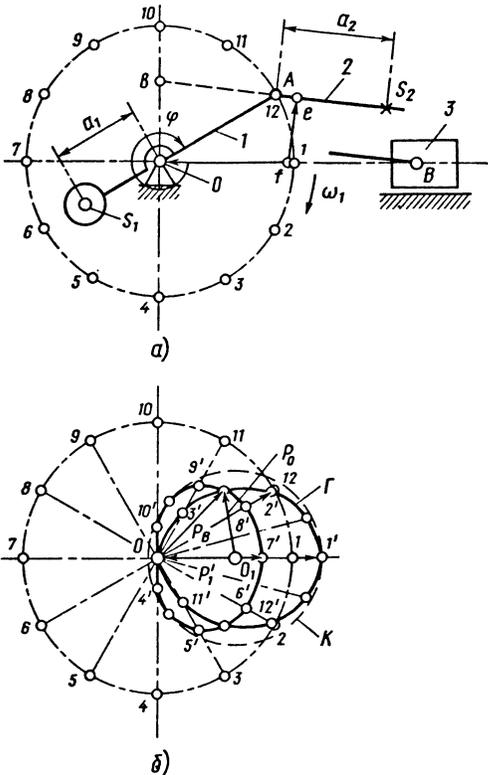


Рис. 7.8.3. Уравновешивание механизма методом оптимизации неуровновешенных сил

Станина механизма воспринимает действие только неуравновешенной силы (7.5.5):

$$P_B = l_1 \omega_1^2 m \cos \varphi + l_1 \omega_1^2 m A_2 \cos 2\varphi + \\ + l_1 \omega_1^2 m A_4 \cos 4\varphi + \dots,$$

где m - поступательно движущаяся масса механизма, определяемая формулой (7.5.6); A_2, A_4, \dots - коэффициенты ряда (см. табл. 7.5.1).

В тех случаях, когда действие силы \bar{P}_B в механизме является нежелательным, ее можно уменьшить путем увеличения дисбаланса кривошипа от значения, определяемого по (7.8.14), до значения

$$D_2 = (m_1 + m_1') a_1, \quad (7.8.15)$$

где m_1' - дополнительная корректирующая масса, закрепленная на кривошипе так, чтобы ее центр совпадал с точкой S_1 кривошипа.

После реализации (7.8.15) в механизме действует неуравновешенная сила

$$\bar{P}_{ост} = \bar{P}_B + \bar{P}_1. \quad (7.8.16)$$

Сила \bar{P}_1' , равная по модулю

$$\bar{P}_1' = m_1' a_1 \omega_1^2, \quad (7.8.17)$$

создается дополнительной корректирующей массой m_1' .

Для решения задачи о том, какой должна быть сила \bar{P}_1' , чтобы максимум модуля остаточной неуравновешенной силы (7.8.1), воспринимаемой станиной механизма, был наименьшим в соответствии с теорией равномерного наилучшего приближения функций П. Л. Чебышева, необходимо выполнить следующие графоаналитические вычисления [1, 2]:

1) по формуле (7.5.5) определить неуравновешенную силу \bar{P}_B для различных положений кривошипа (например, 1, 2, ... , 12, см. рис. 7.8.3, а);

2) построить годограф Γ вектора \bar{P}_B в системе отсчета, неподвижной относительно кривошипа, в соответствии с принципом обращения движения [2]. За начало годографа Γ следует принять точку O кривошипа (см. рис. 7.8.3, б), а векторы \bar{P}_B изобразить в масштабе (Н/мм)

$$K_p = m a_B / (O1'),$$

где $(O1')$ - длина произвольно выбранного отрезка, мм; соответствует модулю силы \bar{P}_B при $\varphi = 0$; m - поступательно движущаяся масса, кг; определяется по формуле (7.5.6); a_B - модуль ускорения точки B звена 3, м/с²; при $\varphi = 0$;

3) вокруг годографа Γ описать окружность K наименьшего радиуса из такого центра O_1 , чтобы она не пересекала годограф Γ , но касалась его в нескольких точках (например, в трех);

4) измерить длину отрезка (OO_1) , мм; определить пропорциональную ему в масштабе силу K_p (7.8.1), Н;

$$P_1' = K_p (OO_1). \quad (7.8.18)$$

Из (7.8.17) и (7.8.18) найти дополнительную корректирующую массу, кг;

$$m_1' = \frac{K_p (OO_1)}{a_1 \omega_1^2};$$

вычислить по формуле (7.8.1) искомый дисбаланс кривошипа, г·мм;

$$D_1 = \left(m_1 + \frac{K_p (OO_1)}{a_1 \omega_1^2} \right) a_1, \quad (7.8.19)$$

обеспечивающий уравнивание в механизме вращающихся масс и минимизацию главного вектора (7.5.5) неуравновешенных сил по методу наилучшего приближения функций.

Следует отметить, что рассмотренную задачу можно решить также методом квадратического приближения функций. В этом случае точка O_1 должна совпадать не с центром окружности K , как было указано выше, а с центром массы годографа Γ , если представить его выполненным из проволоки с равномерно распределенной массой [1, 2].

С учетом этого значение дисбаланса D_2 при уравнивании механизма методом квадратического приближения функций также будет определяться формулой (7.8.19).

Замечание о разгрузке кинематических пар механизма от действия неуравновешенных сил. В практике разгрузка кинематических пар от действия неуравновешенных сил имеет самостоятельное значение, так как уменьшает силу трения в кинематических парах и повышает ресурс, КПД и даже производительность машин. Это достигается путем введения в механизм пружин или пневматических, гидравлических и электромагнитных устройств, работающих на специальной программе. Следует,

однако, иметь в виду, что последние создают силы, являющиеся внутренними по отношению ко всему механизму, и поэтому не изменяют главного вектора и главного момента неуравновешенных сил, действующих на станину механизма [7].

7.9. ВЛИЯНИЕ СИЛ, ДЕЙСТВУЮЩИХ В МЕХАНИЗМЕ, НА ХАРАКТЕР ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ЗВЕНЬЕВ В КИНЕМАТИЧЕСКИХ ПАРАХ

7.9.1. Силы, действующие на звенья механизма

В самом общем случае на i -е звено механизма действуют три категории сил:

- 1) статические \bar{Q}_i , постоянные по величине и направлению;
- 2) динамические \bar{P}_i , постоянные по величине, но переменные по направлению;
- 3) динамические \bar{C}_i , переменные как по величине, так и по направлению.

Характер изменения этих сил определяется в каждом конкретном случае конструкцией и назначением механизма. Если силы \bar{C}_i являются периодическими функциями угла поворота кривошипа, то их можно аппроксимировать тригонометрическим рядом Фурье:

$$C_i = C_{i0} + \sum_1^{\infty} C_{in}^0 \sin(n\varphi + \delta_{in}),$$

где C_{i0} - постоянная; C_{in}^0 и δ_{in} - соответственно амплитуды и фазовые углы n -х гармоник.

Очевидно, силы C_{i0} можно отнести к статическим силам, а силы

$C_{i1} = C_{i1}^0 \sin(\varphi + \delta_{i1})$ - объединить с динамическими силами, действующими на соответствующее звено механизма. Составляющие сил C_i второго и более высоких порядков целесообразно в первом приближении не учитывать. Однако даже при этом допущении определение характера движения звеньев в кинематических парах является сложной задачей динамики механизмов. Вместе с тем подробный анализ действующих на звенья механизма сил и определение характера их относительного движения в кинематических парах позволит выявить экстремальные условия работы механизма или машины и наметить пути их устранения.

Рассмотрим характер относительного движения звеньев в кинематических парах в зависимости от изменения действующих на них сил на примере простейшего механизма первого класса первого порядка, конструктивно представляющего одно звено, вращающееся в подшипниках (рис. 7.9.1). Таким звеном является ротор с цапфами (концами вала, входящими в подшипники). При вращении неуравновешенного ротора на цапфы действуют силы $\bar{R}_A = \bar{Q}_A + \bar{P}_A$; $\bar{R}_B = \bar{Q}_B + \bar{P}_B$, которые являются переменными как по величине, так и по направлению.

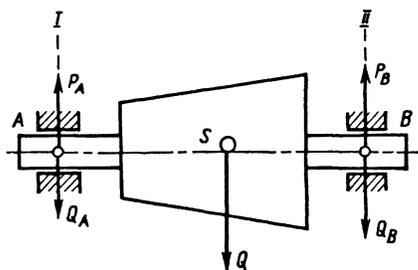


Рис. 7.9.1. Силы, действующие на цапфы неуравновешенного ротора

Условимся в дальнейшем неуравновешенность ротора оценивать в плоскости каждого подшипника величиной отношения между динамическими и статическими силами $E_A = P_A/Q_A$; $E_B = P_B/Q_B$, действующими на цапфу, и называть эти отношения коэффициентами дисбаланса.

В зависимости от коэффициентов дисбаланса можно различить три режима работы подшипников, характеризующих относительное движение звеньев в кинематической паре:

- 1) одностороннего износа подшипников;
- 2) периодических ударов;
- 3) одностороннего износа цапф.

При качественном исследовании режима работы подшипников можно ограничиться рассмотрением явлений только в одном подшипнике A и считать, что влияние на него другого подшипника B отсутствует.

7.9.2. Режимы работы подшипников ротора при различных коэффициентах дисбаланса

Режим одностороннего износа подшипников характеризуется неравенством $E_A < 1$. Для определенности примем $E_A = 0,5$ и построим при этом условии годографы сил \bar{P}_A и

\bar{R}_A . Годографом вектора называется траектория его конца при изменении его во времени. Так как вектор \bar{P}_A является постоянным по модулю и вращается вместе с ротором, то его годографом будет окружность, описанная из какого-либо центра O_1 радиусом, равным по модулю вектора \bar{P}_A (рис. 7.9.2).

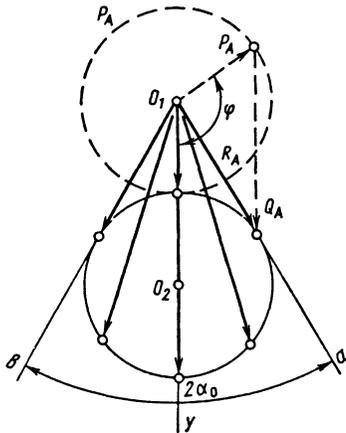


Рис. 7.9.2. Годографы сил, действующих на цапфы A при первом режиме работы подшипника

Пусть в некоторый момент времени t_1 вектор \bar{P}_A образует угол φ с осью O_1Y . Сложив вектор с вектором Q_A , постоянным по величине и направлению, получим вектор \bar{R}_A для данного момента времени t_1 . Если эту операцию сложения векторов \bar{P}_A и Q_A повторить для различных моментов времени, то можно получить геометрическое место концов вектора \bar{R}_A , т.е. годограф этого вектора. Очевидно, годографом силы \bar{R}_A будет также окружность, радиус которой равен модулю силы \bar{P}_A , а центр O_2 смещен относительно центра O_1 по линии действия вектора Q_A на модуль этого вектора. При постоянной угловой скорости ротора конец вектора \bar{R}_A движется по своему годографу с постоянной линейной скоростью

$$v_0 = \omega e, \quad (7.9.1)$$

где ω - угловая скорость ротора; e - отрезок, мм, измеряющий в некотором масштабе K_p , Н/мм, длину вектора \bar{P}_A .

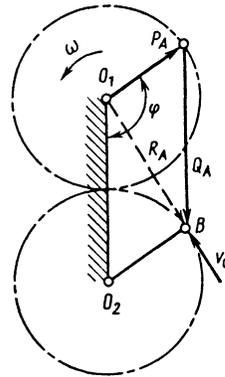


Рис. 7.9.3. Механизма параллелограмма, звенья которого движутся аналогично векторам сил, действующих на цапфу ротора при первом режиме

Это свойство годографа силы \bar{R}_A , справедливо при любом значении коэффициента дисбаланса E_A , отражает механизм параллелограмма, построенного на векторах \bar{P}_A и Q_A (рис. 7.9.3). Из только что отмеченного свойства годографа следует, что величина и направление вектора R_A изменяются периодически, причем частота этого изменения в минуту численного равна частоте вращения ротора. Отметим также, что вектор \bar{R}_A изменяется по величине в пределах $(Q_A - P_A) \leq R_A \leq (Q_A + P_A)$ и может иметь любое направление между лучами O_2a и O_1b угла $2\alpha_0$ (см. рис. 7.9.2).

Покажем теперь, что при первом режиме центр цапф совершает колебательное движение по дуге окружности радиусом δ , который равен половине зазора в подшипнике (рис. 7.9.4). Если на цапфу в положении 1 (рис. 7.9.5) действует некоторая сила \bar{R}_A , то она обязательно перейдет в положение 2, при котором контактная точка подшипника и цапфы окажется расположенной на линии действия силы \bar{R}_A . Таким образом, по направлению силы \bar{R}_A можно оценить положение контактной точки цапфы внутри подшипника.

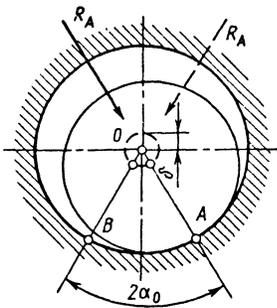


Рис. 7.9.4. Траектория центра цапфы и характер изнашивания подшипника при первом режиме работы подшипника

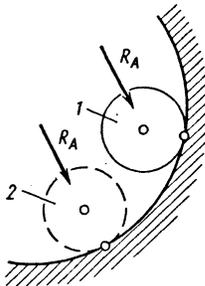


Рис. 7.9.5. Определение положения контактной точки цапфы

Проведем из центра O_1 подшипника (см. рис. 7.9.2) два луча параллельно касательным O_1a и O_1b к годографу силы \bar{R}_A и отметим точки A и B (см. рис. 7.9.4) пересечения этих лучей с окружностью подшипника. Очевидно, что дуга AB является геометрическим местом точек контакта цапфы и подшипника. Отсюда следует, что при первом режиме центр цапфы действительно совершает внутри подшипника колебательное движение с угловой амплитудой, равной приблизительно α_0 . Неточность связана с тем, что не рассматриваются силы инерции приведенной массы цапфы, благодаря которым амплитуда колебаний центра цапфы может несколько отличаться от величины α_0 . Не учитываются также силы трения в подшипнике, несомненно оказывающие влияние на движение цапфы в подшипнике. Таким образом, при первом режиме работы подшипника цапфа будет изнашиваться по всей окружности, а подшипник - только в пределах дуги AB , причем длина этой дуги $l_{AB} = 2r\alpha_0$ (где r - радиус подшипника) зависит от коэффициента дисбаланса.

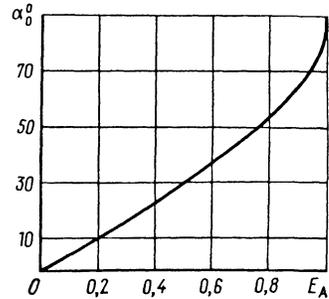


Рис. 7.9.6. Характер изменения амплитуды колебаний центра цапфы в зависимости от коэффициента дисбаланса

Из графика функции $\alpha_0 = f(E_A)$ (рис. 7.9.6) следует, что с увеличением коэффициента E_A возрастает также амплитуда колебаний центра цапфы, а следовательно, длина контактной дуги AB подшипника.

Режим периодических ударов в подшипниках. При этом режиме коэффициент дисбаланса в плоскости подшипника $E_A = 1$. Из годографа силы \bar{R}_A (рис. 7.9.7) следует, что сила \bar{R}_A изменяется по гармоническому закону:

$$R_A = 2P_A \cos 0,5\omega t,$$

где ω - угловая скорость ротора.

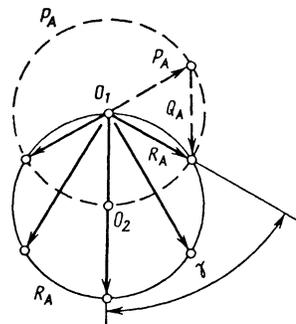


Рис. 7.9.7. Годографы сил, действующих на цапфу A при втором режиме работы подшипника

Если условится силу \bar{R}_A считать положительной, когда она прижимает цапфу к подшипнику (а в противном случае - отрица-

тельной), то на цапфу действует положительная сила \bar{R}_A только в том случае, когда угол β , определяющий положение центра цапфы внутри подшипника (рис. 7.9.8), удовлетворяет неравенствам: $0 \leq \beta \leq 90^\circ$; $270^\circ < \beta \leq 360^\circ$.

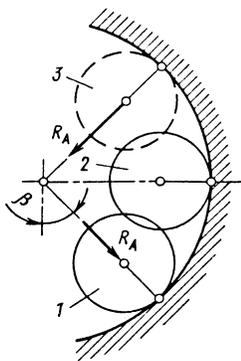


Рис. 7.9.8. Определение положения цапфы в момент ее отрыва от подшипника

Таким образом, сила \bar{R}_A останется положительной все время, пока центр цапфы находится ниже горизонтального диаметра подшипника (положение 1). Если центр цапфы поднимется над этим диаметром (положение 3), то на нее будет действовать отрицательная сила \bar{R}_A , направленная в сторону подшипника. Поэтому можно считать, что отрыв цапфы от подшипника происходит в тот момент, когда угол $\beta = 90^\circ$ (положение 2), т.е. в момент, когда центр цапфы находится на горизонтальном диаметре подшипника.

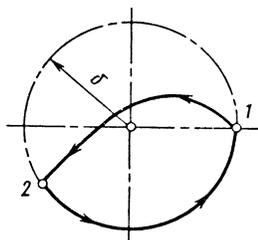


Рис. 7.9.9. Характер движения центра цапфы при втором режиме работы подшипника

Движение центра цапфы после ее отрыва от подшипника (точка 1, рис. 7.9.9) происходит по некоторой кривой внутри окружности

радиусом δ до тех пор, пока цапфа не ударится о подшипник (точка 2). После этого цапфа некоторое время скользит по подшипнику, но как только ее центр совпадает с горизонтальным диаметром, цапфа снова оторвется от подшипника в точке 1. Таким образом, при втором режиме работы подшипника происходят периодические удары цапфы о подшипник, причем частота этих ударов равна частоте вращения ротора. Последнее непосредственно следует из свойства годографа силы \bar{R}_A , кото-

рое заключается в том, что конец вектора \bar{R}_A движется по своему годографу с постоянной скоростью v_0 , и поэтому периодические изменения направления и величины вектора \bar{R}_A , а следовательно, периодические жесткие удары цапфы о подшипник происходят с частотой вращения ротора.

Жесткие удары недопустимы в машинах, так как силы инерции соударяющихся масс, а следовательно, силы давления в кинематических парах машины увеличиваются теоретически до бесконечности. Опыт показывает, что при втором режиме работы подшипников они разрушаются раньше, чем изнашиваются. условимся коэффициент дисбаланса, при котором возникают удары в подшипниках, называть критическим значением и обозначать E_k . Необходимо отметить, что удары в подшипниках возникают не только при условии $E_k = 1$, но при условии $E_A \approx 1$ существует некоторая область значений коэффициента дисбаланса E_k , при котором наступает второй режим работы подшипников.

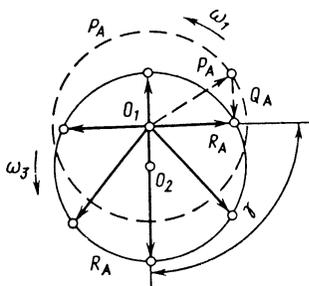


Рис. 7.9.10. Годографы сил, действующих на цапфу А при третьем режиме работы подшипников

Режим одностороннего износа цапф. Коэффициент дисбаланса в плоскости подшипника определяется неравенством $E_A > 1$. Из годографа силы \bar{R}_A (рис. 7.9.10), построенного при этом условии, видно, что конец вектора \bar{R}_A движется по своему годографу, так же как

и при первых двух режимах, с постоянной линейной скоростью определяемой равенством (7.9.1). На рис. 7.9.11 показано изменение относительной величины R_A/P_A при $P_A=1$.

Вектор \bar{R}_A вращается с некоторой переменной угловой скоростью

$$\omega_3 = \omega_1 \frac{r(a \cos \omega_1 t + r)}{a^2 + r^2 + 2ar \cos \omega_1 t}, \quad (7.9.2)$$

где r и a - отрезки, пропорциональные соответственно модулям векторов \bar{P}_A и \bar{Q}_A ; ω_1 - угловая скорость ротора.

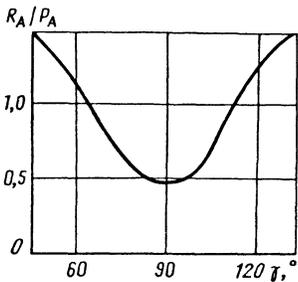


Рис. 7.9.11. Изменение силы \bar{R}_A в зависимости от ее направления при третьем режиме работы подшипников

перейдем к определению характера движения цапфы внутри подшипника под действием силы \bar{R}_A . Выше было отмечено, что вектор \bar{R}_A вращается со скоростью ω_3 и остается все время положительным (см. рис. 7.9.11), т.е. направленным от центра подшипника. В этом случае цапфа всегда прижата к подшипнику и может занимать внутри подшипника любое положение. Иначе, при третьем режиме работы подшипника центр цапфы движется в одном направлении по окружности радиусом δ , который равен половине зазора в подшипнике.

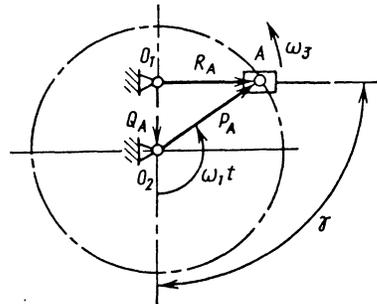


Рис. 7.9.13. Кулисный механизм, в котором точка A движется так же, как конец вектора \bar{R}_A при третьем режиме работы подшипника

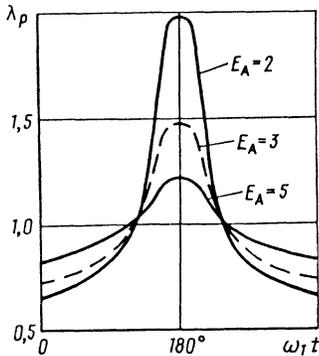


Рис. 7.9.12. Функция $\lambda_p = \omega_3/\omega_1$ при различных значениях коэффициента дисбаланса E_A

На рис. 7.9.12 показан график функции $\lambda_p = \omega_3/\omega_1$ при различных значениях коэффициента дисбаланса E_A . Формулу (7.9.2) можно получить другим путем, если векторы \bar{P}_A и \bar{R}_A рассматривать как звенья некоторого кулисного механизма (рис. 7.9.13). Не останавливаясь на подробностях этого вывода,

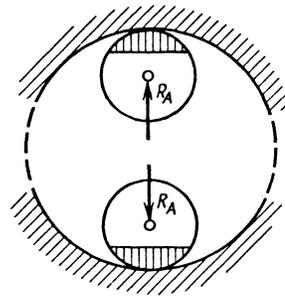


Рис. 7.9.14. Нижние и верхние положения цапфы внутри подшипника при третьем режиме его работы

Покажем теперь, что при таком движении цапфы она будет обращена к подшипнику одной своей стороной. Возьмем какие-либо два положения цапфы, например нижнее и верхнее (рис. 7.9.14), и заштрихуем ту часть цапфы, которой она обращена к подшипнику в нижнем положении. При переходе цапфы из нижнего положения в верхнее вектор \bar{R}_A поворачивается на 180° . Но из годографа силы

\bar{R}_A (см. рис. 7.9.10) видно, что при $\gamma = 0$ и $\gamma = 180^\circ$ векторы \bar{R}_A и \bar{P}_A совпадают по направлению. Тогда векторы \bar{R}_A и \bar{P}_A , а следовательно, ротор, относительно которого вектор \bar{P}_A неподвижен, одновременно повернутся на угол 180° при переходе цапфы из нижнего положения в верхнее; при этом цапфа снова окажется обращенной к подшипнику той же стороной.

Таким образом, при третьем режиме работы подшипников получается всегда односторонний износ цапфы и неравномерный износ подшипника по всей окружности. Кроме того, по мере износа цапфы увеличивается расстояние от центра массы ротора до оси вращения, вследствие чего возрастает сила \bar{R}_A , а это, в свою очередь, повышает интенсивность изнашивания подшипника и цапфы. Поэтому при третьем режиме происходит прогрессирующий износ цапфы и подшипника. Если учесть, что в этом случае на цапфу и подшипник действуют значительные неуравновешенные силы, превышающие статическое давление на подшипник, то этот режим получается менее благоприятным для работы подшипников, чем первый.

Третий режим работы подшипников можно допускать только в исключительных случаях, например для роторов с вертикально расположенной осью вращения и при отсутствии статических давлений на подшипник. При этом динамическая балансировка роторов должна проводиться с максимально возможной точностью.

7.9.3. Особенности работы подшипников ротора в космических аппаратах

Рассмотрим экстремальные режимы работы подшипников произвольного двухопорного ротора (см. рис. 7.9.1), установленного на орбитальном космическом аппарате (КА) многоразового использования, начиная от момента старта и кончая возвращением на Землю. Для численного решения задачи необходимо знать аналитические зависимости от времени сил \bar{Q}_A и \bar{Q}_B статического давления цапф на подшипник во время полета КА, а также дисбалансы \bar{D}_A и \bar{D}_B ротора в плоскостях I, II и силы давления на подшипники \bar{G}_A , \bar{G}_B от силы тяжести ротора до старта КА.

При отсутствии этих данных проведем качественное исследование задачи, приняв функцию (Q_A, t) такой, какой она показана на рис. 7.9.15:

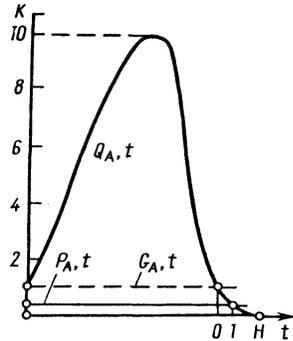


Рис. 7.9.15. Изменение во времени статических (Q_A, t, G_A, t) и динамических давлений (P_A, t) на подшипник A неуравновешенного ротора

$$\bar{Q}_A = K \bar{G}_A, \quad (7.9.3)$$

где \bar{G}_A — статическое давление на подшипник A от массы ротора (до старта КА); K — коэффициент перегрузки; по данным зарубежных литературных источников число K может быть равно 10.

Примем, что подшипники A и B ротора совершенно идентичны и по конструкции, и по нагрузке. Поэтому у них всегда будут одинаковые режимы работы и силу равенств:

$$\bar{G}_A = \bar{G}_B; \quad (7.9.4)$$

$$\bar{Q}_A = \bar{Q}_B; \quad (7.9.5)$$

$$\bar{P}_A = \bar{P}_B = \bar{D}_B \omega^2 \cdot 10^{-6}; \quad (7.9.6)$$

$$\bar{D}_A = \bar{D}_B, \quad (7.9.7)$$

где ω — частота вращения ротора, с^{-1} .

Работа подшипников от момента старта КА до выхода его в космос. При $t = 0$ происходит старт КА. В этот момент подшипники воспринимают статическое давление (7.9.4) от массы ротора и динамическое давление (7.9.6) от дисбалансов (7.9.7). После старта КА в любой момент времени t в интервале

$$0 \leq t < t_1 \quad (7.9.8)$$

подшипники ротора будут работать по первому режиму нагружения в связи с тем, что на цапфы A и B будут действовать силы (7.9.5) и (7.9.6), удовлетворяющие неравенству

$$0_A > P_A. \quad (7.9.9)$$

При первом режиме, наиболее благоприятном для работы любого подшипника, центр цапфы совершает в подшипнике некоторое колебательное движение (см. п. 7.1) Неравенство (7.9.9) обеспечивается в земных условиях динамической балансировкой ротора с точностью, установленной ГОСТ 22061-76.

При $t = t_1$ получается равенство сил статического и динамического давления:

$$Q_A = P_A. \quad (7.9.10)$$

Условие (7.9.10) создает второй режим работы подшипников, при котором возникают периодические удары цапф и подшипник. В результате образуется аварийная ситуация, при которой подшипники преждевременно выйдут из строя. В земных условиях этот режим исключается тем, что для каждого подшипника обеспечивается неравенство (7.9.9) динамической балансировкой ротора с заданной точностью. Однако балансировкой ротора нельзя исключить работу подшипников КА по второму режиму в момент $t = t_1$. Решение этой задачи требует использования других методов. При

$$t_1 < t \leq t_n \quad (7.9.11)$$

статическое давление на подшипники получается меньше динамического

$$P_A > Q_A. \quad (7.9.12)$$

Но неравенство (7.9.12) есть условие существования третьего режима работы подшипников неуравновешенного ротора, при котором происходит, как уже отмечалось, односторонний износ цапф и подшипников по всей окружности контакта.

В земных условиях третий режим работы исключается методом динамической балансировки ротора. Но в КА третий режим работы подшипников этим методом устранить нельзя. Последствия этого режима зависят от его продолжительности в соответствии с (7.9.12), а также значений остаточных дисбалансов \bar{D}_A и \bar{D}_B после динамической балансировки ротора в земных условиях.

Работа подшипников ротора после выхода КА в космос. При

$$t \geq t_n \quad (7.9.13)$$

КА окажется в состоянии невесомости. Статическое давление (7.9.5) на подшипники ротора становится равным нулю, а неуравновешенные силы (7.9.6) не меняются. Поэтому при условии (7.9.13) подшипники ротора продолжают работать по третьему режиму.

Если подшипники ротора неидентичны в отношении условий (7.9.4) - (7.9.7), то режимы их работы в космосе могут иметь весьма существенные особенности. Пусть, например, ротор имеет моментную неуравновешенность, которая характеризуется равенством

$$\bar{D}_A = -\bar{D}_B. \quad (7.9.14)$$

В состоянии невесомости ось ротора при условии (7.9.13) описывает в подшипниках линейчатую двухполосную коническую поверхность. При этом режиме возникают кромоочные контакты цапф и подшипников, в результате чего происходит развальцовывание подшипников со стороны их наружных торцовых поверхностей. Рассмотренный режим работы подшипников назовем четвертым (космическим) режимом. Режим развальцовывания подшипников в условиях невесомости может возникнуть также у динамически неуравновешенного ротора при любых значениях дисбалансов:

$$D_A > 0; \quad D_B > 0. \quad (7.9.15)$$

Действительно, ось динамически неуравновешенного ротора при условии (7.9.15) описывает в подшипниках линейчатую поверхность однополосного гиперолоида. Поэтому в подшипниках при этом режиме обязательно возникнут кромоочные контакты.

Рассмотренный режим работы подшипников динамически неуравновешенного ротора назовем пятым (космическим) режимом. Шестой (космический) режим работы подшипников ротора в состоянии его невесомости может возникнуть при условии

$$\bar{D}_A // \bar{D}_B, \quad (7.9.16)$$

характеризующем статическую неуравновешенность ротора. При условии (7.9.16) ось ротора описывает в подшипнике цилиндрическую поверхность, поэтому цапфы ротора касаются подшипников по линиям. Этот режим напоминает третий режим работы подшипников, наблюдаемый в земных условиях, но отличается от него отсутствием сил статического давления на подшипник.

Седьмой (космический) режим работы подшипников ротора получится при условии:

$$D_A \neq 0; \quad D_B = 0. \quad (7.9.17)$$

В этом случае цапфа в подшипнике A имеет линейный контакт, а подшипник B полностью разгружен.

Возможности устранения кромоочных контактов при четвертом и пятом космических режимах работы подшипников. Для устранения кромоочных контактов подшипники ротора КА

должны иметь специальную цилиндрико-коническую форму, обеспечивающую возможность вращения при различных режимах и отсутствие кромочных контактов при четвертом и пятом режимах. Кромочные контакты цапф в подшипниках при четвертом и пятом космических режимах можно устранить также другими средствами, например применением сферических самоустанавливающихся подшипников.

Особенности работы подшипников ротора при маневрировании КА и при возвращении его на землю. При маневрировании КА в космосе и, в частности, при выходе его на траекторию удаления, спуска или приземления на подшипники ротора будут действовать динамические силы \bar{P}_A, \bar{P}_B и статическое давление \bar{Q}_A, \bar{Q}_B . В зависимости от соотношения между этими силами в подшипниках A и B ротора могут возникать любые из рассмотренных выше режимов их работы (от первого до пятого). Только режим семь может не возникнуть в связи с тем, что силы \bar{Q}_A и \bar{Q}_B будут отличаться от нуля во время маневрирования КА. Рассмотренная теория режимов работы подшипников ротора в зависимости от соотношения между модулями сил статического и динамического давления, действующих на цапфы, может быть использована для анализа работы вращательных пар как плоских, так и пространственных рычажных механизмов. Очевидно, режимы работы вращательных пар в механизмах будут определять не только характер и интенсивность их изнашивания, но и ресурс и надежность всего механизма.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Артоболевский И. И. Теория механизмов и машин. М.: Наука, 1975. 638 с.
2. Баранов Г. Г. Курс теории механизмов и машин. М.: Машиностроение, 1967. 508 с.
3. Берестов Л. В. Полное динамическое уравновешивание механизма шарнирного четырехзвенника // Изв. вузов. Машиностроение. 1975. № 11. С. 62-65.
4. Бессонов А. П. Основы динамики механизмов с переменной массой звеньев. М.: Наука, 1967. 279 с.
5. Гаппов Т. Т. Особенности уравновешивания пространственных механизмов: Балансировка машин и приборов / Под ред. В. А. Щепетильникова. М.: Машиностроение, 1979. С. 243-251.
6. Горбунов Б. И., Гусев В. Г. Уравновешивание устройства шлифовальных станков. М.: Машиностроение, 1976. 167 с.
7. Гортинский В. В. Уравновешивание динамических нагрузок в кинематических па-

рах с помощью упругих связей // Сб. науч.-метод. статей по теории механизмов и машин. 1977. Вып. 6. С. 39-41.

8. Григорьев Е. А. Статическая динамика поршневых двигателей. М.: Машиностроение, 1978. 104 с.

9. Давыдов Я. С. Уравновешивание механизмов. М.: Речной флот, 1963. 127 с.

10. Дерягин Р. В. Вибрация лесопильных рам. Л.: Изд-во ЛГУ, 1986. 144 с.

11. Динамический синтез рычажных механизмов по заданному движению ведущих звеньев и по заданным реакциям в кинематических парах / В. И. Доронин, Ю. В. Дальшин, Н. М. Рачек, Ю. В. Курчатова // Механика машин. М.: Наука, 1979. Вып. 56. С. 150-170.

12. Еремеев Н. В. Механические устройства, регулирующие на ходу движение исполнительных органов машин // Механика машин. М.: Наука, 1973. Вып. 41. С. 108-114.

13. Кожвников С. Н., Климовский Б. М., Ткаченко А. С. Способы выравнивания нагрузок на приводном валу и уравновешивания сил инерции возвратно-поступательно перемещающихся масс главного привода станов холодной прокатки труб // Модернизация и автоматизация трубопрокатных станов. Металлургия, 1965. С. 76-93.

14. Лебедев П. А. Уравновешивание сил инерции пространственного четырехзвенного механизма // Докл. Третьего международного конгресса по теории механизмов и машин. Купари: Югославия. Сентябрь 13-20, 1971. Т. F. Разд. F-12. С. 161-174.

15. Левитский И. И. Теория механизмов и машин. М.: Наука, 1979. 576 с.

16. Николаевский Е. В., Петров Г. Н. Особенности уравновешивания механизмов качающихся шайб // Теория и практика балансировочной техники. М.: Машиностроение, 1973. С. 336-343.

17. Основы балансировочной техники: Уравновешивание жестких роторов и механизмов. В 2-х т. / Под ред. В. А. Щепетильникова. М.: Машиностроение, 1975. Т. 1. 527 с. Т. 2. 679 с.

18. Проектирование механизмов по заданным критериям качества // Сб. науч. тр. / Под ред. В. И. Дорониана. Хабаровск, 1988. 253 с.

19. Савелова А. А. Возможный вариант моментного уравновешивания кривошипно-коромыслового механизма // Тез. докл. Всес. науч.-техн. конферен. "Современные методы и средства уравновешивания машин и приборов". Волгоград: НТО Приборпром, 1979. 73 с.

20. Савелова А. А. Определение неуравновешенных сил и моментов, действующих на станину неуравновешенного многозвенного механизма. Балансировка машин и приборов

/ Под ред. В. А. Щепетильникова. М.: Машиностроение, 1979. С. 217-221.

21. Семенов М. В. Уравновешивание пространственных механизмов // Тр. семинара ТММ. М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1950. Т. 8. Вып. 32. С. 31-42.

22. Солодялов В. Я. Конструктивная уравновешенность аксиально-поршневых машин // Сб. науч.-метод. статей по теории механизмов и машин. 1990. Вып. 13. С. 10-14.

23. Солодялов В. Я. Основы уравновешивания пространственных механизмов // Современные методы и средства балансировки машин и приборов / Под общ. ред. В. А. Щепетильникова. М.: Машиностроение, 1985. С. 209-217.

24. Солодялов В. Я., Щепетильников В. А. Уравновешивание кривошипно-ползунных механизмов методом нуль-векторов // Вестник машиностроения. 1988. № 1. С. 35-36.

25. Тир К. В. Механика полиграфических автоматов. М.: Книга, 1965. 495 с.

26. Уравновешивание сил инерции силами упругости / П. А. Лебедев, Н. А. Тихонов, И. И. Вульфсон, Р. С. Хрусталева // Уравновешивание роторов и механизмов. М.: Машиностроение, 1978. С. 235-243.

27. Урба А. Л. Аналитическое исследование уравновешивания кривошипно-ползунного механизма в функциональных пространствах L_p // Тр. Литовский с.-х. академии: Механизация и автоматизация с.-х. производства. Каунас, 1978. С. 23-48.

28. Урба А. Л. Оптимальное уравновешивание механизмов в функциональных пространствах L_p корректирующими массами на ведущем валу. Балансировка машин и приборов / Под ред. В. А. Щепетильникова. М.: Машиностроение, 1979. С. 221-226.

29. Урба А. Л. Приближение функций тригонометрическими полиномами в пространствах L_p для наилучшего уравновешивания механизмов. Уравновешивание роторов и механизмов / Под ред. В. А. Щепетильникова. М.: Машиностроение, 1978. С. 220-224.

30. Федоров И. С. Причины вибраций швейных машин и способы их устранения на стенде: Балансировка машин и приборов / Под ред. В. А. Щепетильникова. М.: Машиностроение, 1979. С. 233-238.

31. Шитиков Б. В. Кривошипно-ползунный механизм // Тр. Казанского с.-х. института. Казань. 1968. Т. 1. Вып. 56. С. 51-56.

32. Щепетильников В. А. О режимах работы подшипников ротора в экстремальных условиях // Механизация и автоматизация производства. 1989. № 7. С. 30-32.

33. Щепетильников В. А., Солодялов В. Я. Совершенствование уравновешивания двухцилиндрового компрессора // Вестник машиностроения. 1987. № 3. С. 28-29.

34. Щепетильников В. А., Солодялов В. Я. Уравновешивание транспортного компрессора // Современные методы и средства балансировки машин и приборов / Под общ. ред. В. А. Щепетильникова. М.: Машиностроение, 1985. С. 198-206.

35. Berkof R. S., Lowen G. G. A New Method for Completely Force Balancing Simple Linkages // Transactions of the ASME, Journal of Engineering for Industry. 1969. Vol. 91. № 1. P. 53-60.

36. Berkof R. S., Lowen G. G. Theory of Shaping Moment Optimization of Force-Balanced For-Bar Linkages // Transactions of the ASME, Journal of Engineering for Industry. 1971. Vol. 93. № 1. P. 53-60.

37. Lowen G. G., Tepper F. R., Berkof R. S. The Quantitative Influence of Complete Force Balancing of the Force and Moments of Certain Families of Four-Bar Linkages // Mechanism and Machine Theory. Pergamon Press. Printed in Great Britain. 1974. Vol. 9. P. 299-323.

Глава 8

БАЛАНСИРОВКА В МАШИНОСТРОЕНИИ

8.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

При вращении тело стремится повернуться около одной из трех главных центральных осей инерции. Препятствующее этому вращению тело будет испытывать давление со стороны вращающегося тела.

Вращающееся тело принято называть ротором. Роторы связаны с неподвижными телами через опоры. Опорой обычно является цапфа ротора, но может быть и другая поверхность, например обод катания железнодорожной колесной пары. Как правило, опор у ротора две, но может быть и больше, например, у коленчатого вала двигателя внутреннего сгорания. Линия, проходящая через центры опор, - ось вращения. При проектировании машин конструктивно и технологически стремятся обеспечить совпадение главной центральной оси инерции (ГЦОИ) ротора с осью вращения.

Роторы редко изготавливают цельными. Большой частью роторы делают составными из нескольких деталей, собранных посредством винтов, заклепок, сварочных швов и других соединений. Часть поверхностей составных деталей, полученных литьем или ковкой, не подвергают обработке на станке. Но и станочная обработка выполняется с определенными погрешностями, превышающими требования

на точность совмещения ГЦОИ с осью вращения. Кроме того, материала деталей отличается неоднородностью. По этим причинам в роторе, хотя и изготовленном в соответствии с требованиями чертежа, ГЦОИ, как правило, не совпадает с осью вращения. Поскольку при вращении ротора центробежные силы оказываются неуравновешенными, ротор подвергают балансировке. Трудоемкость этой операции зависит от начального дисбаланса ротора.

Неуравновешенность ротора, т.е. наличие неуравновешенных центробежных сил, отрицательно сказывается на работе машины (механизма, прибора), вызывая вибрацию и дополнительные напряжения, достигающие при высоких частотах вращения опасных значений. Вибрация оказывает вредное физиологическое воздействие на человека, ухудшает технологические параметры машины (точность, производительность и качество работы), снижает долговечность машины. Особенно вредно дисбаланс проявляется при частотах вращения, близких к частотам резонанса. Поскольку идеальное уравнивание ротора практически невозможно, при проектировании машины рабочие частоты должны выбираться достаточно удаленными от зоны резонанса.

Если центробежные силы, действующие на вращающийся ротор, не вызывают его деформации на рабочих частотах вращения, то такой ротор является жестким. Если действие центробежных сил вызывает заметные деформации ротора на какой-либо рабочей частоте вращения, то такой ротор является гибким и его надо балансировать на специальном оборудовании по более сложной и трудоемкой методике, чем методика балансировки жесткого ротора. Среди жестких и гибких роторов имеются такие, которые можно отнести то к жестким, то к гибким в зависимости от условий работы, в том числе рабочих частот вращения. Примером жесткого ротора при всех проектируемых рабочих условиях является короткозамкнутый ротор асинхронного электродвигателя, а гибкого - ротор мощного генератора тока.

8.2. БАЛАНСИРОВКА ЖЕСТКОГО РОТОРА

При балансировке жесткого ротора используют свойства твердого тела: правило сложения сил и моментов или их разложения на составляющие. При всем разнообразии распределения неуравновешенных центробежных сил в жестком роторе они могут быть сведены к главному вектору сил и моменту.

Для исправления неуравновешенности в ротор вводят корректирующие грузы. В принципе для коррекции главного вектора требуется один груз, а для коррекции главного момента - два груза, размещенных вдоль оси вращения на некотором расстоянии один от

другого. В конструкции ротора должна быть обязательно предусмотрена возможность размещения на нем корректирующих грузов требуемой массы (условно отрицательной массы - удаление материала ротора).

Зона 3 масс ротора обычно недоступна для технологических операций. Поэтому в балансируемом роторе выбирают две плоскости (плоскости коррекции), в которые по правилам теоретической механики пересчитываются и главный вектор сил C , и главный момент M дисбаланса ротора (рис. 8.2.1). В плоскостях коррекции 1 и 2 устанавливаются корректирующие грузы (или удаляется материал) для уравнивания главного вектора и главного момента.

Следует иметь в виду, что в выбранных плоскостях не все места могут быть доступными для установки грузов. Так, в случае балансировки короткозамкнутого ротора асинхронного электродвигателя (рис. 8.2.2) требуется создать корректирующий вектор силы G_α по

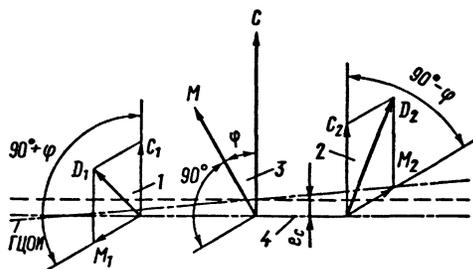


Рис. 8.2.1. Пересчет параметров дисбаланса в плоскости коррекции ротора

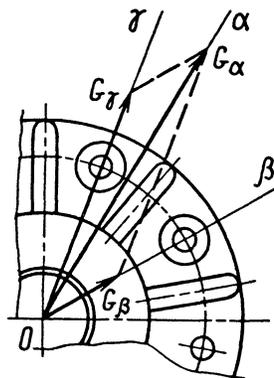


Рис. 8.2.2. Разложение вектора дисбаланса на составляющие проекции по осям коррекции ротора

направлению $O\alpha$. Можно создать векторы по ближайшим направлениям (осям) $O\beta$ и $O\gamma$. Соблюдая правила теоретической механики, создают векторы \vec{G}_β и \vec{G}_γ , эквивалентные (для твердого тела) вектору \vec{G}_α : $\vec{G}_\alpha = \vec{G}_\beta + \vec{G}_\gamma$.

Следует отметить, что в неотбалансированном роторе всегда присутствуют и главные векторы сил, и момент, причем коррекция главного момента наиболее трудоемка и требует более сложной техники. В тоже время имеется большой класс изделий, для удовлетворительной работы которых можно пренебречь главным моментом и скорректировать только главный вектор (автомобильные колеса, диски сцепления, маховики, гребные винты, шлифовальные круги и другие плоские роторы). Балансировка, ограничивающаяся уравновешиванием только главного вектора, называется статической. Главный вектор может быть обнаружен без вращения ротора при установке его на горизонтальные планки (ножи) или роликовые опоры. При установке на ножи ролики ротора массой m со смещенным с оси ротора центром масс на величину ε создается момент $M = \varepsilon mg$ и ротор поворачивается "тяжелым местом" вниз. Метод не обеспечивает требуемой точности балансировки и в настоящее время применяется только в простейших ремонтных мастерских.

В промышленности статическая балансировка проводится в динамическом режиме на балансировочных станках для статической балансировки, на которых балансируемый ротор приводится во вращение с частотой ω . При вращении ротора возникает центробежная сила $G = m\varepsilon\omega^2$. При достаточно большой частоте вращения ω можно получить ускорение $\varepsilon\omega^2$, которое во много раз больше ускорения g свободного падения, и этим обеспечить высокую точность измерения смещения центра масс.

Когда главным моментом пренебречь нельзя, применяют динамическую балансировку. В частном случае неуравновешенные центробежные силы ротора могут создавать только момент. При этом центр масс ротора расположен на оси Z (см. рис. 8.2.1) вращения ротора (ГЦОИ и ось Z вращения пересекаются). Однако создать балансировочный станок, реагирующий только на пару сил, практически невозможно, так как для этого требуется точное определение в каждом экземпляре ротора положения центра масс. Поэтому имеются станки для общего случая динамической неуравновешенности ротора, когда центр масс смещен

относительно оси вращения и ГЦОИ повернута относительно оси вращения. (оси перекрещиваются).

При балансировке рассматривают следующие виды неуравновешенности: статическую, когда центр масс смещен с оси вращения, но ГЦОИ параллельна оси вращения ротора; моментную, когда центр масс расположен на оси вращения и ГЦОИ повернута относительно оси вращения; динамическую, когда центр масс смещен относительно оси вращения и ГЦОИ повернута относительно оси вращения.

8.3. БАЛАНСИРОВОЧНЫЕ СТАНКИ

Станок для статической балансировки позволяет определить только главный вектор дисбаланса, станок для динамической балансировки жестких роторов - главные вектор и момент дисбаланса или их совокупное действие в двух произвольных плоскостях, перпендикулярных к оси ротора (см. рис. 8.2.1). Балансировочные станки для статической и динамической балансировки имеют колебательные системы, в которых центробежные силы преобразуются в эквивалентные электрические сигналы.

В опоры колебательной системы цапфами или на оправке, если ротор цапф не имеет, помещается балансируемый ротор и приводится во вращение. Колебательная система станка обладает некоторой массой (паразитная масса) и поддерживается в пространстве упругими связями. Вместе с массой ротора создается резонансная система, обладающая определенной собственной частотой. Если собственная частота системы выше частоты вращения ротора при балансировки, то такой режим работы станка называется дорезонансным. Если собственная частота системы меньше частоты вращения ротора при балансировке, то такой режим работы станка называется зарезонансным. Каждый режим имеет свои преимущества и недостатки и представляет собой предмет теории построения балансировочных станков.

Возникающие при вращении ротора центробежные силы преобразуются датчиками колебательной системы в электрические сигналы. Сигналы дисбаланса ротора поступают в электронную измерительную систему станка (аналоговую или цифровую). В результате обработки сигналов дисбаланса измерительная система выдает информацию о величине и месте установки корректирующих грузов или удаления материала в плоскостях коррекции ротора.

По специализации и области применения станки для балансировки жестких роторов подразделяют на станки общего назначения и

специальные, в том числе полуавтоматические и автоматические.

Балансировочный станок общего назначения определяет дисбаланс ротора произвольной конфигурации в заданном характеристике станка диапазоне его массово-геометрических параметров. Техническая характеристика станка общего назначения включает пределы изменения масс и геометрических размеров (диаметров и линейных размеров) роторов, которые могут быть отбалансированы на нем. Станки общего назначения выполняют статическую и динамическую балансировку. Для обеспечения балансировки всей номенклатуры роторов машиностроения станки одного вида балансировки объединяются в гаммы, которые содержат ряд моделей станков, например гамма станков из одиннадцати моделей для динамической балансировки роторов массой 0,01 кг ... 30 т. В пределах одной и той же гаммы станки общего назначения могут быть как резонансного, так и дорезонансного типа. Для расширения универсальности на станках определяют только дисбаланс ротора, т.е. эти станки являются чисто измерительными и не оснащены механизмами коррекции дисбаланса. Коррекция дисбаланса ротора осуществляется на отдельном оборудовании известными средствами (сверление, фрезерование, приварка грузов и др.). В связи с этим станки общего назначения менее производительны, чем специальные, и применяются в основном в ремонтном, мелкосерийном и частично в серийном производстве.

Специальный балансировочный станок определяет дисбаланс конкретного ротора или группы однотипных роторов с корректировкой масс. Специальные балансировочные станки представляют собой наиболее широкую и многообразную группу балансировочных станков. Большинство роторов машиностроения в серийном и массовом производстве требуют для балансировки создания специальных станков. Даже некоторые однотипные роторы, как, например, коленчатые валы двигателей автомобилей, в связи с многообразием их конструкций (коленчатые валы рядных, V-образных, четырех- и шестицилиндровых двигателей и т.д.) требуют для балансировки станков специальных моделей. Для балансировки таких роторов используют гамму специальных станков, например из трех моделей станков для балансировки двух- и трехшарнирных карданных валов автомобилей. Специальные станки могут быть резонансного и дорезонансного типов, для статической и динамической балансировки. Функции специальных станков могут быть ограничены только процессом измерения дисбаланса ротора.

Для повышения производительности балансировки специальные станки помимо из-

мерения дисбаланса могут выполнять следующие автоматизированные процессы: позиционирование ротора на измеренный угол дисбаланса; корректировку масс ротора на установленном угле коррекции. Позиционирование ротора представляет собой процесс установление ротора в угловое положение, соответствующее измеренному углу дисбаланса. В результате позиционирования ротор устанавливается на угол коррекции дисбаланса "тяжелым" ("легким") местом под инструмент корректировки масс. Для корректировки масс роторов наиболее широко применяют традиционные методы металлообработки (сверление, фрезерование, шлифование и т.д.), которые обеспечивают высокую производительность и возможность автоматизации процесса. В балансировочном автоматическом станке процессы измерения дисбалансов, позиционирования и корректировки масс ротора совмещены в пространстве на одной позиции (на одном и том же роторе), но разнесены по времени и выполняются последовательно.

Специальные станки для измерения дисбаланса ротора могут быть дополнены отдельными обрабатывающими станками для корректировки масс и транспортом для перемещения ротора с позиции измерения на позицию коррекции дисбаланса. Если требуемая точность балансировки ротора не может быть достигнута за один цикл, то позиций измерения и коррекции дисбаланса может быть несколько (например, черновая и чистовая), связанных общим транспортом непосредственно или через бункер-накопитель роторов. Оборудование такого типа представляет балансировочную линию или участок. Специальные балансировочные участки и линии могут быть дополнены станками для измерения и контроля остаточного дисбаланса (позиция контроля дисбаланса), средствами удаления отходов корректировки масс и др. При автоматизации всех процессов специальные балансировочные участки и линии являются автоматическими. В балансировочных участках и линиях процессы измерения дисбаланса и корректировки масс роторов разнесены в пространстве на разные позиции, но совмещены во времени для разных роторов, т.е. одновременно осуществляется корректировка масс ротора, ранее измеренного, и измерение дисбалансов нового ротора. Этим обеспечивается высокая производительность балансировки.

В рассматриваемых балансировочных станках совмещение ГЦОИ с осью вращения осуществляется корректировкой масс ротора (добавлением или удалением материала ротора).

Центровальные балансировочные станки позволяют совместить ГЦОИ с осью вращения, не корректируя распределение масс в роторе, а изменяя

положение оси вращения ротора относительно главной центральной оси инерции. В них ось вращения ротора задается так, чтобы она совпала с ГЦОИ. С этой целью колебательная система станка оборудована зажимным устройством для закрепления балансируемого ротора. Зажимное устройство предварительно отбалансировано. При установке и вращении балансируемого ротора с зажимным устройством возникает вибрация колебательной системы от неуравновешенности ротора. Положение ротора в зажимном устройстве меняют до достижения состояния, при котором вибрация снижается до заданного уровня. Ротор в этом положении фиксируется, и производится его центровка механизмами, встроенными в станок. Затем на отдельном оборудовании обрабатываются относительно центров опорные поверхности ротора.

Станок для статической центровки определяет координаты центра масс ротора, относительно которых осуществляется обработка его базовых поверхностей. С помощью станков для статической центровки может осуществляться, например, расточка базовых посадочных отверстий судовых и воздушных винтов по оси, проходящей через центр масс.

Станок для динамической центровки определяет координаты главной центральной оси инерции ротора по главному вектору и моменту дисбаланса или их совокупности в двух плоскостях коррекции ротора. На станках для динамической центровки по найденным двум точкам на главной центральной оси инерции проводят центровку ротора. Относительно центров осуществляется дальнейшая обработка поверхностей ротора. Например, по центрам на заготовке коленчатого вала обтачивают шейки и другие элементы. Требуемая точность совмещения осей (ГЦОИ и оси вращения) составляет микрометры и даже доли микрометров. Такой способ совмещения осей имеет высокую стоимость, сложный и применяется реже, чем обычная балансировка. Наиболее часто применяют центровку предварительно обработанной заготовки ротора для удержания начального дисбаланса в приемливых пределах. Но существует тип роторов, конструкции которых не допускают установок корректирующих грузов или съема материала (например, некоторые типы вентиляторов и турбин). Для них балансировка посредством центровки является единственно возможным способом.

В специальных, в том числе автоматических балансировочных станках и линиях процессы измерения дисбаланса и корректировки масс ротора совмещены либо в пространстве (на одном роторе последовательно), либо во времени (на разных роторах одновременно).

Станок для автоматической балансировки в процес-

се вращения ротора отличается тем, что процессы определения дисбаланса и корректировки масс совмещены во времени и в пространстве. На таких станках в процессе вращения ротора одновременно осуществляется измерение дисбаланса и его уменьшение автоматическим добавлением корректирующей массы в "легком месте" ротора либо удалением избыточной массы в "тяжелом месте" ротора. При этом корректирующие устройства, управляемые сигналами дисбаланса, осуществляют балансировку в момент прохождения перед ними соответствующего места на вращающемся роторе. В современных станках применяют электрофизические и электрохимические методы коррекции дисбаланса.

Электрофизическая корректировка масс включает: удаление избыточной массы ротора с помощью луча лазера; добавление корректирующей массы с помощью взрыва проволоки в магнитном поле и др. С помощью луча лазера, управляемого сигналами дисбаланса, осуществляется расплавление и испарение материала ротора при прохождении "тяжелого места" ротора перед лазерным источником. Съем материала может осуществляться за каждый оборот ротора или с определенной циклическостью. Взрыв металлических проволок осуществляется подачей на них высоковольтного напряжения, а расплавленные продукты взрыва фокусируются и направляются на "легкое место" ротора предварительно сфомированным магнитным полем.

Электрохимическая корректировка масс основана на принципе анодного растворения избыточного материала при вращении балансируемого ротора. Над плоскостью коррекции ротора установлен электрод, а в зазор между ними подается электролит. В момент прохождения под электродом "тяжелого места" ротора между электродом и ротором пропускается импульс электрического тока, замыкающегося через электролит. При этом за каждый оборот ротора под электродом осуществляется элементарный съем металла. Электрофизические и электрохимические методы балансировки обеспечивают высокую точность без участия оператора станка, но обладают более низкой производительностью, чем традиционные методы металлообработки.

Рассмотренное выше оборудование предназначено для балансировки жестких роторов, которые балансируются в двух произвольных плоскостях коррекции при частоте вращения меньше первой критической и у которых значения остаточного дисбаланса не превышают допустимые на всех частотах вращения вплоть до максимальной рабочей.

8.4. БАЛАНСИРОВКА ГИБКОГО РОТОРА

Балансировка гибкого ротора по сравнению с балансировкой жесткого ротора сложнее, поскольку вся совокупность распределен-

ных по объему ротора неуравновешенных центробежных сил не может быть сведена к главному вектору и моменту. В связи с этим плоскости коррекции не могут назначаться произвольно, число их более двух и зависит от гибкости ротора. Гибкий ротор, если не принять особых мер, при сбалансированности на одной частоте вращения может оказаться несбалансированным на другой частоте.

Механизм появления дисбаланса при изменении частоты вращения можно пояснить моделью (рис. 8.4.1). Пусть в каком-то сечении ротора, вращающегося с частотой ω_1 , имеется элемент массы m_i , удерживаемый упругостью с силой P_1 (например, пружиной). Масса m_i расположена на расстоянии ρ от оси O вращения ротора (очевидно, $P_1 = m_i \rho \omega_1^2$). В этом положении ротор полностью уравновешен с помощью корректирующей массы m_k , расположенной на расстоянии r_k от оси вращения. Упругая сила P_1 является внутренней силой, и поэтому условие уравновешенности ротора

$$m_i \rho \omega_1^2 = m_k r_k \omega_1^2, \text{ или } m_i \rho = m_k r_k.$$

Если изменить частоту вращения ω_1 на большую (или меньшую) ω_2 , то центробежная сила массы m_i возрастет (или уменьшится) и потребуются большее (меньшее) усилие со стороны пружины для удержания массы

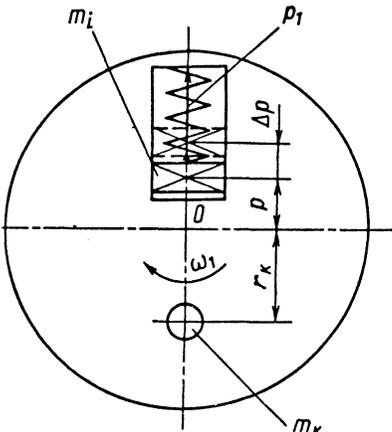


Рис. 8.4.1. Модель возникновения дисбаланса в гибком роторе при изменении частоты его вращения

m_i . В результате сдвига массы m_i на величину $\Delta \rho$ появится дисбаланс

$$m_i (\rho + \Delta \rho) \omega_2^2 - m_k r_k \omega_2^2 = \bar{D}_{ст} \omega_2^2$$

или

$$\bar{D}_{ст} = m_i (\rho + \Delta \rho) - m_k r_k.$$

По условию элемент m_i ротора был уравновешен, и поэтому $\bar{D}_{ст} = m_i \Delta \rho$. В натуральном роторе роль массы m_i исполняет масса элемента длины ротора, радиуса ρ - смещение центра масс элемента с оси вращения, а роль пружины - изгибная жесткость оси ротора.

Таким образом, если в роторе имеются элементы, изменяющие свое положение с изменением частоты вращения, то такой ротор может быть уравновешен только на какой-то одной частоте. Чтобы этого избежать, необходимо применять особые методы балансировки - балансировка по собственным формам изгиба.

Ротор, получивший по какой-либо причине поперечные колебания, совершает их (с частотой и по форме) в зависимости от массы единицы длины ротора и жесткости. Форм колебаний бесконечное множество. Практически достаточно ограничиться рассмотрением первых трех форм изгиба (рис. 8.4.2). Критическая частота каждой формы зависит от условий закрепления на концах ротора. Для решения задачи балансировки гибкого ротора необходимо рассмотреть два случая закрепления: концы ротора шарнирно оперты на абсолютно жесткие опоры; концы ротора свободны. Осуществить полностью эти условия практически невозможно, и они выполняются приближенно, что снижает точность расчетов и делает необходимым введение экспериментальных поправок для каждого типа ротора.

Дифференциальное уравнение свободных поперечных колебаний получается из рассмотрения равновесия элемента длины стержня

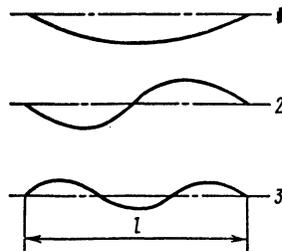


Рис. 8.4.2. Формы изгибных колебаний гибкого ротора

(ротора). Для однородного ротора, если пренебречь гироскопическим эффектом, дифференциальное уравнение имеет вид:

$$EJ \frac{\partial^4 y_{x'}}{\partial x^4} + m_0 \frac{\partial^2 y_{x'}}{\partial t^2} = 0,$$

где J - момент инерции ротора относительно его центра масс; m_0 - масса элемента длины ротора, кг/м; $y_{x'}$ - прогиб ротора на расстоянии x от начала координат в момент времени t .

Пусть ротор представляет собой линейную систему, совершающую гармоническое движение, тогда перемещение любой точки оси ротора

$$y_{x'} = y_x (A \cos \omega t + B \sin \omega t),$$

где y_x - функция, зависящая только от x ; ω - круговая частота колебаний.

Подставляя выражение для $y_{x'}$ в дифференциальное уравнение и учитывая, что оно должно выполняться в любой момент времени, получим

$$\frac{d^4 y_x}{dx^4} - \frac{\omega^2 m_0}{EJ} y_x = 0.$$

Если обозначить $\frac{\omega^2 m_0}{EJ} = K^4$, то общее

решение дифференциального уравнения

$$y_x = c_1 \sin Kx + c_2 \cos Kx + c_3 \operatorname{sh} Kx + c_4 \operatorname{ch} Kx$$

Постоянные интегрирования определяются из краевых условий. Для шарнирно опертого стержня прогибы и изгибающие моменты на концах ротора длиной l равны нулю: $(y_x)_{x=0} = 0$;

$$\left(\frac{d^2 y_x}{dx^2} \right)_{x=0} = 0; \quad (y_x)_{x=l} = 0;$$

$$\left(\frac{d^2 y_x}{dx^2} \right)_{x=l} = 0.$$

На основании этого $\sin Kl = 0$. Это частотное уравнение, которому удовлетворяет ряд собственных форм изгиба оси упругого стержня $Kl = \pi, 2\pi, 3\pi$ и т.д. На рис. 8.4.2 показаны эти формы (полусинусоида, синусоида, полуторная синусоида). Иных собственных форм однородный стержень принимать не может, но существовать одновременно эти формы могут. Раскрывая значения параметра K , получим

частоты для каждой собственной формы шарнирно опертого ротора:

$$\omega_1 = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}}; \quad \omega_2 = \frac{4\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}};$$

$$\omega_3 = \frac{9\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}}.$$

Для ротора со свободными концами изгибающие моменты и перерезывающие силы равны нулю при $x = 0$ и $x = l$:

$$\left(\frac{d^2 y_x}{dx^2} \right)_{x=0} = 0; \quad \left(\frac{d^3 y_x}{dx^3} \right)_{x=0} = 0;$$

$$\left(\frac{d^2 y_x}{dx^2} \right)_{x=l} = 0; \quad \left(\frac{d^3 y_x}{dx^3} \right)_{x=l} = 0.$$

Из этих условий получается частотное уравнение $\cos Kl \operatorname{ch} Kl = 1$. Первые три корня уравнения составляют 4,73; 7,85; 11,00. После раскрытия значения параметра K

$$\omega_1 = \frac{22,4}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}}; \quad \omega_2 = \frac{61,7}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}};$$

$$\omega_3 = \frac{121}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}}.$$

В этом случае также может иметь место одновременное присутствие различных форм колебаний.

Характеристики неоднородных роторов получают методом разбиения ротора на части, которые с должным приближением можно принять за однородные. Соответствующие вычисления выполняются с привлечением современных вычислительных средств для каждого типа ротора. В большинстве случаев применяют приближенные методы расчетов.

Балансировку гибкого ротора производят раздельно по собственным формам изгиба. Ее начинают при частоте вращения, при которой ротор представляет собой жесткое тело и амплитуда его изгибных колебаний составляет доли допуска на вибрацию данного типа ротора. При этом устраняют статический и моментный дисбаланс, соответственно закрепляя на концах ротора симметричные и кососимметричные грузы.

После выполнения балансировки ротора как жесткого он разгоняется до частоты вращения меньше первой критической. По вибрации опор определяется дисбаланс в средней части ротора. Этот дисбаланс корректируется тремя грузами (рис. 8.4.3): один груз расположен примерно в середине ротора, а два груза,

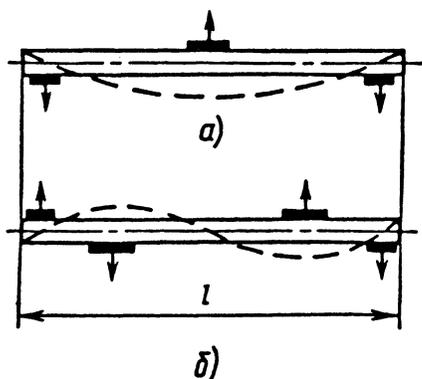


Рис. 8.4.3. Схема расстановки корректирующих масс для балансировки гибкого ротора

по массе равные первому, - близко к концам ротора. Этим устраняется прогиб ротора по первой форме изгибных колебаний и не нарушается балансировка ротора как жесткого.

Ротор, сбалансированный по первой форме, разгоняется до следующей частоты, при которой начинает проявляться вторая форма изгиба. Эта форма колебаний корректируется уже четырьмя грузами (рис. 8.4.3, б), что позволяет не нарушать предыдущие три балансировки. Затем ротор, если его гибкость столь высока, разгоняется до частоты, при которой проявляется третья форма изгиба. Эта форма колебаний "успокаивается" посредством пяти корректирующих грузов.

Балансировка гибких роторов массой до 450 т осуществляется на разгонно-балансировочных стендах, на которых определяют нагрузки в опорах ротора и изгиб его оси. Разгонно-балансировочные стенды размещают в специальных сооружениях блиндажного типа и оснащают средствами для транспортирования, изменения частоты вращения, динамической балансировки и контроля состояния гибкого ротора. Существенной частью разгонно-балансировочного стенда являются изотропные опоры с переменной жесткостью и подшипниками, обеспечивающими их шарнирность. Переменная жесткость опор позволяет проходить резонансные частоты и осуществлять измерение вибрации опор на всех подкритических частотах. Обеспечить жесткость опор, равной бесконечности или нулю, невозможно, но удастся добиться отношения жесткостей примерно 100, что достаточно для получения собственных частот, близких к приведенным выше для ротора с шарнирным закреплением концов и для ротора со свободными концами. Это отношение особенно важно для изгибных колебаний по первой форме, которая характеризуется наибольшей амплитудой.

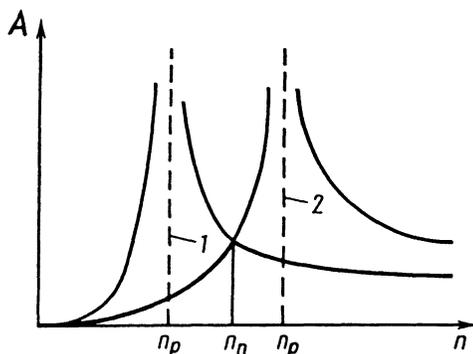


Рис. 8.4.4. Резонансные кривые изгибных колебаний ротора в зоне первой формы изгиба

На рис. 8.4.4 приведен типовой график зависимости амплитуды A вибрации неуравновешенного ротора по первой форме изгибных колебаний от частоты вращения n ротора для двух состояний опор: 1) "жесткая опора"; 2) "мягкая опора". Резонансные частоты заметно разнесены. Рассмотрим процесс торможения ротора, характеризующийся уменьшением частоты вращения от наибольшей до нуля. Сначала ротор тормозится в режиме 1 ("жесткая опора"). Когда частота вращения достигает n_n , осуществляется переход в режим 2 ("мягкая опора"), зона резонанса для "мягкой" опоры оказывается пройденной и ротор безопасно тормозится до нуля. При разгоне неуравновешенного ротора до частоты выше критической разгон начинают в режиме "мягкая опора". При скорости n_n опоры переключаются в режим "жесткая опора" и безопасно проходят резонансную зону режима "мягкая опора".

Выбор оборудования, необходимого для балансировки конкретного ротора, определяется рядом параметров, основные из которых следующие: вид балансировки ротора (статическая, динамическая или балансировка гибкого ротора); производительность; требуемая точность балансировки; массогеометрические характеристики и конструктивные особенности ротора; способ базирования ротора в рабочих условиях; точность изготовления и технология производства ротора.

8.5. ТОЧНОСТЬ БАЛАНСИРОВКИ

Одним из наиболее важных является вопрос установления требуемой точности балансировки ротора, т.е. нормирования допустимого остаточного дисбаланса ротора. Излишняя требовательность к точности балансировки усложняет технологию производства роторов и повышает стоимость операции. В то же время, снижение точности балансировки

ротора может привести к потере качества машины, механизма. Требования к точности балансировки должны соответствовать вибрационному уровню машины, для которой предназначен ротор.

При нормировании дисбаланса характеристикой допустимой остаточной неуравновешенности ротора служит удельный дисбаланс (мкм), представляющий отношение модуля главного вектора дисбаланса D_{CT} (г·мм) к массе m (кг) ротора: $e_{CT} = D_{CT} / m$.

Критерии для оценки допустимого остаточного дисбаланса приняты следующие: физиологическое воздействие вибраций на человека; динамическая прочность и общая долговечность деталей; долговечность подшипников и опор; резонансные явления в диапазоне рабочих частот. Эти критерии охватывают до 80 % конструкций различных роторных систем. Если какая-либо система не может быть охарактеризована по приведенным выше критериям, то необходимо проведение исследовательских или опытно-конструкторских работ.

8.5.1. Классы точности балансировки по ГОСТ 22061-76

Класс	$e_{CT} \omega \text{ max}$, мкм·рад/с, не более	Типы ротора и роторной системы по рекомендации международного стандарта
11	400	Узел коленчатого вала жестко установленного низкооборотного судового дизеля с нечетным числом цилиндров
10	1600	Узел коленчатого вала жестко установленного двухтактного двигателя большой мощности
9	630	Узел коленчатого вала жестко установленного четырехтактного двигателя большой мощности; узел коленчатого вала судового дизеля, установленного на виброизоляторах
8	250	Узел коленчатого вала жестко установленного высокооборотного четырехцилиндрового дизеля
7	100	Узел коленчатого вала высокооборотного дизеля с шестью (и более) цилиндрами; двигатели в сборе (бензиновые или дизеля) для легковых и грузовых автомобилей и локомотивов
6	40	Колеса легковых автомобилей, ободья колес, бандажи, приводные валы, тормозные барабаны автомобиля, колесные пары; узел коленчатого вала, установленного на виброизоляторах высокооборотного четырехтактного двигателя (бензинового или дизеля) с шестью (и более) цилиндрами; узел коленчатого вала двигателя для легкового и грузового автомобилей и локомотива
5	16	Приводные валы (валы судовых винтов, карданные валы) со специальными требованиями; части дробилок; части сельскохозяйственных машин; отдельные части двигателей (бензиновых или дизелей) легковых автомобилей, грузовиков и локомотивов; узел коленчатого вала двигателя с шестью (и более) цилиндрами со специальными требованиями
4	6,3	Части технологического оборудования; главные редукторы турбин торговых судов; барабаны центрифуг; вентиляторы; роторы авиационных газотурбинных двигателей в сборе; маховики; крыльчатки центробежных насосов; части станков и машин общего назначения; роторы обычных электродвигателей; отдельные детали двигателей со специальными требованиями
3	2,5	Газовые и паровые турбины, включая главные турбины торговых судов; турбогенераторы с жесткими роторами; турбокомпрессоры; приводы металлообрабатывающих станков; роторы средних и крупных электродвигателей со специальными требованиями; роторы небольших электродвигателей; турбонасосы
2	1,0	Приводы магнитофонов и проигрывателей; приводы шлифовальных станков; роторы небольших электродвигателей специального назначения
1	0,4	Шпиндели, шлифовальные круги и роторы электродвигателей прецизионных шлифовальных станков; гироскопы

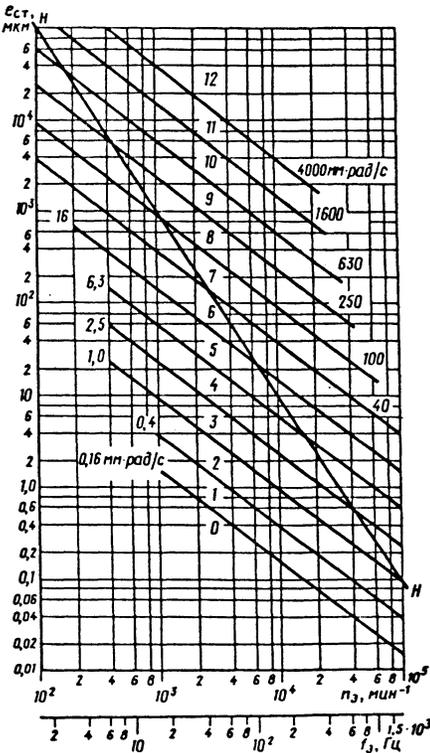


Рис. 8.5.1. Система классов точности балансировки по ГОСТ 22061-76

В табл. 8.5.1 приведены классы точности балансировки, предусмотренные ГОСТ 22061-76. Как показано на рис. 8.5.1, роторы с горизонтальной осью вращения, попадающие в область выше линии HN , создают на опорах динамические нагрузки, превышающие статические нагрузки от веса ротора. Опыт проектирования, изготовления, эксплуатации роторных систем и материалы международного стандарта позволяют предложить предварительные рекомендации, связывающие различные типы агрегатов, машин и механизмов с классами точности их балансировки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. ГОСТ 19534-74. Балансировка вращающихся тел. Термины. Стандарты.
2. ГОСТ 22061-76. Система классов точности балансировки.
3. ГОСТ 20076-89. Станки балансировочные. Основные параметры и размеры. Нормы точности.
4. Левит М. Е., Рыженков В. М. Балансировка деталей и узлов. М.: Машиностроение, 1986. 128 с.

5. Справочник балансировщика. М.: Машиностроение, 1989. 160 с.

Глава 9

ПРИВОДЫ МАШИН

9.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ. ЭЛЕМЕНТЫ ПРИВОДОВ

Привод предназначен для преобразования подводимой к нему первичной энергии в механическую работу исполнительных органов машины, связанных с выходными звеньями привода. По виду первичной энергии различают приводы электрические, гидравлические, пневматические, паровые, ветряные, водяные и др. В общем машиностроении находят применение, главным образом, приводы первых трех видов, которые и рассматриваются ниже.

По способу распределения потоков вторичной (механической) энергии можно разделить приводы на три основных типа: групповой, индивидуальный и взаимосвязанный. Групповой привод обеспечивает движение от одного двигательного устройства группы исполнительных органов или нескольких рабочих машин через систему передаточных механизмов (трансмиссий). Ввиду сложности последних в большинстве случаев вместо группового привода применяют индивидуальный, в котором каждое рабочее движение выполняется отдельным двигательным устройством. Это объясняется преимуществом индивидуального привода с точки зрения больших возможностей по реализации оптимальных режимов движения каждого исполнительного органа независимо от остальных.

Во взаимосвязанном приводе несколько (два или более) двигательных устройств обеспечивают движение одного или взаимосвязанное движение нескольких исполнительных органов машины. При наличии механических связей между отдельными двигательными устройствами привод является многодвигательным. Он находит применение, например, в цепных конвейерах, мощных поворотных механизмах (платформ экскаваторов, винтовых прессах и др.), поскольку позволяет более равномерно распределять статические и динамические нагрузки, уменьшить мощность единичного агрегата. Известны также многодвигательные гидроприводы, например, подъемных устройств, в которых вследствие громоздкости и большой массы поднимаемого объекта рациональнее использовать несколько параллельно работающих гидроцилиндров.

В случаях, когда взаимосвязанный привод должен выдерживать определенные соотношения скоростей рабочих органов, не име-

ющих механических связей между собой, используют специальные схемы взаимодействия двигательных устройств по потокам первичной энергии. Такая схема электропривода называется схемой электрического вала; известны гидравлические схемы, функционально аналогичные электрическому валу.

По способу передачи движения от двигательного устройства к исполнительному органу машины различают приводы прямого действия (безредукторные, direct drive) и с передаточными механизмами. По степени управляемости можно выделить следующие приводы: нерегулируемые (работающие на одной рабочей скорости); регулируемые (способные реализовать движения на разных скоростях); программно-управляемые; следящие (автоматически обрабатывающие перемещение рабочего органа машины с определенной точностью в соответствии с изменением задающего сигнала); адаптивные (автоматически меняющие структуру и параметры системы управления в целях поддержания оптимального закона движения при изменяющихся непредсказуемым образом условиях работы машины). По уровню автоматизации управления различают приводы: неавтоматизированные, автоматизированные (обеспечивается автоматическое регулирование параметров) и автоматические (с автоматическим выбором управляющего взаимодействия).

Привод состоит из двигательного устройства (двигателя), управляющего (или распределительного) органа, называемого в дальнейшем распределителем, и системы управления (рис. 9.1.1).

Двигатель (электрический, гидравлический, пневматический и др.) является преобразователем первичной энергии в механическую, используемую в машине для совершения полезной работы. По виду движения выходного

звена различают двигатели вращательного, поворотного и линейного движения. Наиболее распространенными типами двигателей вращательного движения являются электрический двигатель переменного (асинхронный, синхронный) и постоянного тока, гидро- и пневмомоторы, типами двигателей линейного движения - гидро- и пневмоцилиндры; поворотного движения - шибберные гидро- и пневмодвигатели (рис. 9.1.2).

Распределитель управляет потоками первичной энергии, подводимой к двигателю и отводимой от него, и вместе с тем является связующим звеном между управляющим (информационным) и силовым контурами привода, так как именно в распределителе относительно слабые сигналы, генерируемые

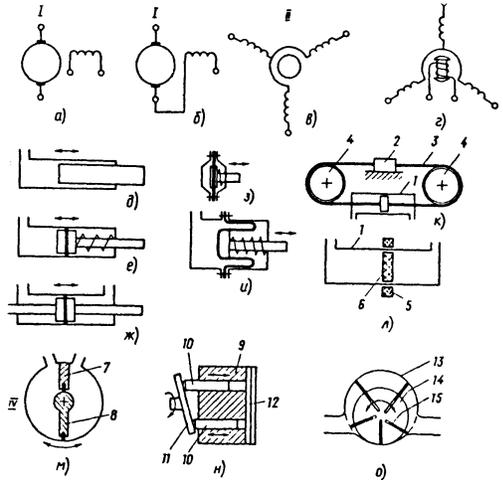


Рис. 9.1.2. Принципиальные схемы двигателей:

- I - постоянного тока; II - переменного тока;
- III - гидравлические и пневматические линейного движения; IV - то же, вращательного движения;
- a - независимого возбуждения; б - последовательного возбуждения; в - асинхронного; г - синхронного;
- д - плунжерного типа; е - поршневого одностороннего; ж - двухпоршневого двустороннего;
- з - с плоской мембраной; и - с мембраной с перекатывающимся гофром; к - бесштокового с ленточным или тросовым механизмом;
- л - бесштокового с постоянными магнитами;
- м - с поворотной заслонкой; н - с наклонной шайбой;
- о - пластинчатого пневмо- или гидромотора;
- 1 - рабочий цилиндр; 2 - каретка; 3 - лента или трос; 4 - шкивы; 5 - кольцевой постоянный магнит, скользящий по внешним направляющим корпусу;
- 6 - постоянный магнит, встроенный в поршень;
- 7 - неподвижная перегородка; 8 - поворотная заслонка - шиббер, сидящая на выходном валу;
- 9 - блок цилиндров; 10 - плунжеры; 11 - наклонная шайба с выходным валом; 12 - распределительные пластины; 13 - статор; 14 - ротор; 15 - пластины, расположенные в пазах ротора

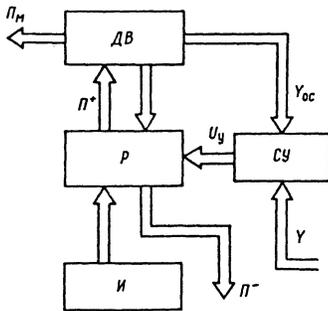


Рис. 9.1.1. Схема потоков энергии в приводе:

- И - источник энергии; ДВ - двигатель;
- Р - распределитель; СУ - система управления;
- P+ - энергия, подводимая к двигателю;
- P- - энергия, отводимая от двигателя (теряемая);
- P_м - часть первичной энергии, преобразованная в механическую работу; Y_{оц} - задающий сигнал;
- Y_{оц} - сигнал обратной связи; U_у - сигнал управления

системой управления (в том числе сигналы ручного управления), усиливаются и преобразуются в мощные управляющие воздействия на двигателе, изменяющие его движущую силу или момент, а также скорость в требуемом направлении.

Полезно используемая двигателем часть энергии $\Delta P = P^+ - P^-$ (где P^+ - энергия, подводимая к двигателю, P^- - отводимая от двигателя (теряемая) часть энергии). Для изменения разности ΔP можно изменять величины P^+ , P^- (каждую отдельно или одновременно). Наиболее экономичный способ управления двигателем - изменение P^+ при сохранении P^- на постоянном минимальном уровне. В этом случае от источника энергии отбирается ее столько, сколько необходимо в каждый данный момент времени для обеспечения заданного закона движения двигателя, т.е. для поддержания требуемых скорости и движущей силы (момента).

Однако на практике по различным причинам приходится использовать и менее экономичные способы управления потоками энергии. Например, электроприводом с двигателем постоянного тока независимого возбуждения, можно управлять изменением: 1) тока возбуждения (магнитного потока двигателя); 2) сопротивления цепи якоря; 3) напряжения, подводимого к цепи якоря. Первый и третий способы более экономичны, так как в этих случаях управляющие воздействия на двигателе изменяются, главным образом, в результате изменения P^+ . При втором способе, наоборот, основную роль в изменении ΔP играет P^- , причем, чем значительнее уменьшение ΔP , тем большая часть энергии рассеивается в виде теплоты в устройстве изменения сопротивления цепи якоря.

Наиболее экономичным способом регулирования ΔP в приводах с двигателями переменного тока является увеличение или уменьшение величины P^+ за счет изменения частоты напряжения (частотное регулирование).

В гидроприводе с дроссельным управлением от источника энергии (насосной станции) поступает поток энергии в объемах, превышающих необходимое ее количество; поэтому часть этой энергии переводится в тепло дросселированием потоков жидкости в каналах управляющих устройств. Таким путем уменьшается полезно используемый перепад давлений на рабочем органе двигателя и его движущее усилие или момент приводится в соответствие с заданным. Значительно более эффективны системы объемного управления гидроприводом, в которых изменение управ-

ляющего воздействия достигается, главным образом, за счет изменения энергии P^+ , подводимой к двигателю от источника. Однако системы объемного управления обладают худшими динамическими свойствами, имеют более высокую стоимость, что заставляет в некоторых случаях мириться с повышенными потерями в системах с дроссельным управлением.

Принципиальные схемы, иллюстрирующие принципы действия некоторых распределительных устройств, показаны на рис. 9.1.3.

Система управления приводом генерирует управляющие сигналы в соответствии с заданными в ней алгоритмами и информацией, поступающей от датчиков текущего состояния привода (обратной связи, $Y_{o.c}$) и от задающего устройства (\bar{Y}), которые формируют закон движения привода согласно требованиям технологического процесса. Если технологический цикл состоит из нескольких этапов, причем на каждом из них рабочий орган должен двигаться по своему закону, то система дополняется более высоким уровнем, управляющим переходами от одного этапа к другому с соответствующим изменением задающего

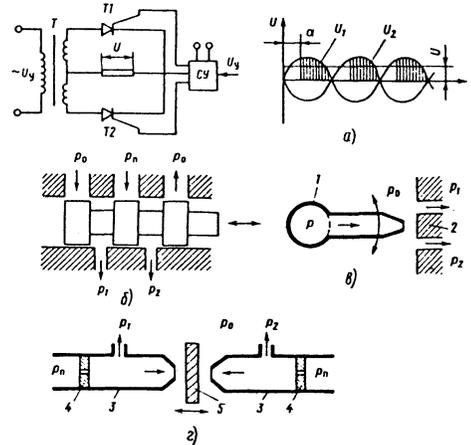


Рис. 9.1.3. Схемы распределителей:

- a* - управляемого тиристорного преобразователя;
- б* - золотничкового преобразователя; *в* - типа "струйная труба"; *г* - типа "согло-заслонка";
- 1 - струйная труба; 2 - корпус с приемными каналами; 3 - сопло; 4 - входной дроссель;
- 5 - заслонка; Т - трансформатор;
- T1, T2 - транзисторы; СУ - система управления;
- U_y - входной управляющий сигнал;
- U - выпрямленное напряжение;
- U_1, U_2 - фазные напряжения на входе;
- α - угол запаздывания открытия транзисторов, задаваемый сигналом U_y ; p_1 - давление питания;
- p_0 - давление окружающей среды; p_1, p_2 - давления в рабочих каналах, ведущих к плоскостям двигателя

сигнала. На этом или более высоком уровне может быть организовано управление последовательностью движений многих рабочих органов (и соответственно приводов) сложного технологического оборудования. Системы высоких уровней по принципу действия обычно дискретные (цифровые, реализуемые на базе ЭВМ), решение о переходе к каждому следующему этапу цикла принимается на основании анализа логических условий и всего объема информации о ходе процесса, состоянии рабочих органов, инструмента, удовлетворении ограничений и т.д.

При относительно небольшом числе этапов, простой структуре технологического цикла и простых способах контроля за ходом процесса (например, с помощью конечных переключателей, отмечающих достижения рабочими органами заданных положений) для целей управления циклом могут быть применены универсальные перепрограммируемые электронные командоаппараты.

Система управления нижнего уровня поддерживает требуемую скорость, движущую силу, заданный закон движения привода; обеспечивает остановку рабочего органа в заданных точках и выполняет другие задачи, относящиеся непосредственно к управлению движением. Для решения указанных задач используются системы с различными способами управления потоками энергии: непрерывным (аналоговым), импульсным, релейным. При непрерывном управлении сигналы, поступающие от системы управления на распределитель, при работе привода изменяются непрерывно. Соответственно непрерывно изменяется состояние распределителя, а также интенсивность потоков энергии, поступающей от распределителя к двигателю.

В приводах с импульсным управлением сигнал управления подается в виде последовательности импульсов, модулируемых (изменяемых) по ширине, амплитуде или частоте. Каждый импульс изменяет состояние распределителя скачком, что приводит к появлению импульсных управляющих воздействий на двигатель. Например, при широтно-импульсной модуляции импульсы e подаются с постоянной периодичностью, но имеют различную длину, в результате чего распределитель находится некоторую часть периода в открытом, а остальную часть периода в закрытом состоянии (рис. 9.1.4). Соотношение между длительностями указанных частей периода определяется системой управления в результате обработки текущей информации (рис. 9.1.4, а). Чем меньшую часть цикла распределитель находится в открытом состоянии, тем меньше будет средняя интенсивность пропускаемого распределителем потока первичной энергии. Пульсация потока энергии в принципе может вызвать и пульсирующее движение привода.

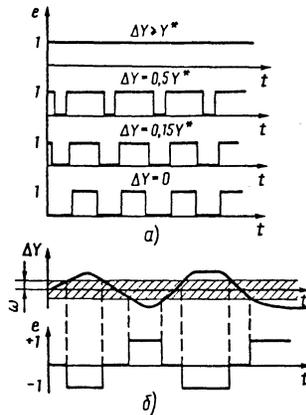


Рис. 9.1.4. Принцип действия дискретных систем управления приводом:

а - широтно-импульсный ($\Delta Y = Y \cdot Y^*$ - пороговое значение ΔY); б - релейной ($e = +1$ при $\Delta Y < -\epsilon$ и $e = -1$ при $\Delta Y > \epsilon$, ϵ - порог чувствительности)

Однако проявление пульсаций на двигателе сводится к минимуму, если он достаточно инерционен, т.е. не способен заметно реагировать на каждый кратковременный импульс отдельно.

При релейном управлении сигналы управления e и соответственно состояние распределителя изменяются скачком каждый раз, когда рассогласование между задающим сигналом (\bar{Y}) и сигналом обратной связи Y_{oc} достигает некоторого достаточно малого порогового значения (рис. 9.1.4, б).

Как при импульсном, так и при релейном управлении двигатель, обладающий фильтрующими свойствами вследствие своей инерционности, реагирует только на всю последовательность дискретных сигналов, которую в принципе можно заменить эквивалентным (по реакции двигателя) непрерывным (аналоговым) сигналом. Предпочтение дискретному управлению часто отдают по причине простоты дискретных распределителей и стыковки их с цифровыми управляющими системами.

9.2. УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ ПРИВОДОВ

В общем случае на динамику привода оказывают влияние динамические свойства всех его элементов (двигателя, передаточного механизма, распределителя, системы управления), а также алгоритм работы системы управления. Но в первом приближении можно принять, что скорость протекания процессов в распределителе и тем более в элементах системы управления значительно выше, чем в двигателе, который определяет в основном харак-

тер обработки приводом подаваемых на его управляющий вход сигналов от системы управления. Искажение закона движения исполнительного органа машины вследствие упругостей звеньев и наличия зазоров в кинематических парах передаточного механизма также может быть учтено на последующих этапах динамических исследований и использованием уточненных моделей привода.

С учетом принятых допущений динамические свойства двигателя могут быть представлены зависимостью, описывающей скорость изменения развиваемой двигателем движущей силы F_d или движущего момента M_d :

$$\begin{aligned} \dot{F}_d &= C_x \left(\Pi^+ - \Pi^- - \dot{x} \right); \\ M_d &= C_\phi \left(\Pi^+ - \Pi^- - \dot{\phi} \right), \end{aligned} \quad (9.2.1)$$

где C_x , C_ϕ - коэффициент жесткости двигателя или просто жесткость двигателя (не следует путать с жесткостью статической характеристики двигателя, рассматриваемой ниже); в общем случае C_x или C_ϕ являются переменными величинами, как, например, жесткость гидро- или пневмоцилиндра является функцией в том числе положения поршня, от которого зависит длина столба рабочего тела x и давление p в полостях; \dot{x} , $\dot{\phi}$ - линейная скорость и частота вращения выходного звена двигателя. Величины Π^+ и Π^- являются переменными; их физический смысл будет ясен из дальнейшего.

Общие выражения для C_x , C_ϕ , Π^+ , и Π^- (табл. 9.2.1) получены для электропривода с двигателями постоянного тока (независимого и последовательного возбуждения), асинхронного и синхронного двигателей переменного тока, гидропривода объемного и дроссельного управления (вращательного и линейного движения), пневмопровода дроссельного управления.

Для гидравлических и пневматических двигателей двустороннего действия (с двумя рабочими полостями, расположенными по разные стороны поршня, лопасти) движущая сила (или момент)

$$F_d = F_{d1} - F_{d2}, \quad (9.2.2)$$

где F_{d1} и F_{d2} - движущие силы, создаваемые рабочим телом в результате давления на рабочий элемент двигателя с разных сторон.

В этом случае вместо уравнения (9.2.1) имеем

$$\dot{F}_d = \dot{F}_{d1} - \dot{F}_{d2};$$

$$\dot{F}_{d1,2} = C_{x1,2} \left(\Pi_{1,2}^+ - \Pi_{1,2}^- \pm \dot{x} \right). \quad (9.2.3)$$

Для двигателей вращательного движения записываются аналогичные выражения относительно моментов.

Поскольку каждая из составляющих F_{d1} и F_{d2} представляется своим уравнением вида (9.2.1), то в общем случае динамика двустороннего привода описывается системой уравнений, имеющей порядок на единицу выше. Но при симметрии полостей и некоторых других допущениях повышения порядка уравнений можно избежать. Условиями симметрии полостей являются: $C_{x1} = C_{x2}$, $\Pi_1^+ = \Pi_2^-$ и $\Pi_1^- = \Pi_2^+$. Например, условие $C_{x1} = C_{x2}$ для гидропривода выполняется, если поршень гидроцилиндра находится вблизи среднего положения; для пневмоцилиндра необходимо, кроме того, чтобы в обеих полостях было приблизительно одинаковое давление. Реализация условий $\Pi_1^+ = \Pi_2^-$ и $\Pi_2^+ = \Pi_1^-$ требует определенной симметрии распределительных устройств.

9.3. СТАТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРИВОДОВ

Условие сохранения постоянства движущей силы двигателя имеет вид $\dot{F}_d = 0$, что согласно (9.2.1) приводит к

$$\Pi^+ - \Pi^- - \dot{x} = 0. \quad (9.3.1)$$

Если, кроме того, разность $E = \Delta\Pi = \Pi^+ - \Pi^-$ между потоками подводимой и отводимой энергии также постоянная ($E = E_y$), то двигатель должен двигаться с постоянной (установившейся) скоростью

$$\dot{x}_y = \Pi_y^+ - \Pi_y^- = \Delta\Pi_y = E_y. \quad (9.3.2)$$

Отсюда следует, что E_y характеризует мощность привода, приходящуюся на единицу развиваемой им движущей силы F_d . В частном случае, когда $\Pi_y^+ = \Pi_y^-$ и, следовательно, $E_y = 0$, $\dot{x}_y = 0$, т.е. двигатель находится в покое.

Разность E_y и определяемая ею установившаяся скорость зависят от двух основных факторов. Первый - это параметр управления e (см. табл. 9.2.1), изменением которого производится перераспределение потоков энергии

9.2.1. Выражения для членов уравнений, описывающих динамику приводов

Привод	Источник энергии, тип двигателя	C_x, C_ϕ	Π^+	Π^-	K_F, K_M	K_e
Электрический	Асинхронный двигатель переменного тока	$2M_k p_n$	ω_0	$\frac{3i_{\Pi}^2 R_{\Pi}}{M}$	$\frac{\omega_0^2 k}{2M_k}$	-
	Двигатель постоянного тока независимого возбуждения	$\frac{c^2}{L_{\text{я}}}$	$\frac{U}{c}$	$\frac{R_{\text{я}} i_{\text{я}}}{c}$	$\frac{R_{\text{я}}}{c^2}$	$\frac{U_{\text{max}}}{c}$
	Двигатель постоянного тока последовательного возбуждения	$\frac{k^2 \alpha_1^2 i_{\text{я}}^2}{L_{\text{я}}}$ $\frac{k^2 (\Phi_0 + \alpha_2 i_{\text{я}})^2}{L_{\text{я}}}$	$\frac{U}{k \alpha_1 i_{\text{я}}}$ $\frac{U}{k (\Phi_0 + \alpha_2 i_{\text{я}})}$	$\frac{R_{\text{я}}}{k \alpha_1 i_{\text{я}}}$ $\frac{R_{\text{я}} i_{\text{я}}}{k (\Phi_0 + \alpha_2 i_{\text{я}})}$		$\frac{U_{\text{max}}}{k \alpha_1 i_{\text{я}}}$ $\frac{U_{\text{max}}}{k (\Phi_0 + \alpha_2 i_{\text{я}})}$
Гидравлический с объемным управлением	Регулируемый насос и гидроцилиндр	$\frac{\omega S}{x}$	$\frac{w_H \omega_H e_H}{S}$	$\frac{L_1 \Delta p + L_2 p}{S}$	$\frac{L_2}{S^2}$	$\frac{w_H \omega_H}{S}$
	Регулируемый насос и нерегулируемый гидромотор	$\frac{\omega w_M^2}{V_{\Sigma}}$	$\frac{w_H \omega_H e_H}{w_M}$	$\frac{L_1 \Delta p + L_2 p}{w_M}$	$\frac{L_{\Sigma}}{w_M^2}$	$\frac{w_H \omega_H}{w_M}$
	Источник постоянного давления и расхода и регулируемый гидромотор	-	$\frac{Q_M}{w_M e_M}$	-	-	$\frac{Q_M}{w_M e_{\text{min}}}$
Гидравлический с дроссельным управлением	Нерегулируемый насос и двусторонний гидроцилиндр	$\frac{2\omega S}{x}$	$\frac{Q^+}{S}$	$\frac{Q^-}{S}$	$\frac{\dot{x}_{\text{max}} \beta}{2p_H S (1 - \chi)}$	$\frac{Q_{\text{max}}^+}{S}$
	Нерегулируемый насос и нерегулируемый гидромотор	$\frac{2\omega w_M^2}{V_{\Sigma}}$	$\frac{Q^+}{w_M}$	$\frac{Q^-}{w_M}$	$\frac{\omega_{\text{max}} \beta}{2p_H w_M (1 - \chi)}$	$\frac{Q_{\text{max}}^+}{w_M}$

Привод	Источник энергии, тип двигателя	C_x, C_Φ	Π^+	Π^-	K_F, K_M	K_e
Пневматический с дроссельным управлением	Промышленная пневмосеть и двусторонний пневмоцилиндр с массовой нагрузкой	$\frac{2pS}{x}$	$\frac{G^+ RT}{pS}$	$\frac{G^- RT}{pS}$	$\frac{\dot{x}_{\max} \beta K_\Phi}{2Sp}$	$\frac{G_{\max}^+ RT}{pS}$

Примечание:

M_k, p_n - соответственно момент и число пар полюсов асинхронного электродвигателя; ω_0 - частота вращения асинхронного электродвигателя на холостом ходу;

i_n и R_n - приведенные соответственно сила фазного тока и активное сопротивление цепи ротора асинхронного двигателя;

s_k - критическое скольжение асинхронного двигателя;

c - постоянная электродвигателя постоянного тока независимого возбуждения;

$c=k\Phi$, k - конструктивный параметр электродвигателя;

Φ - поток возбуждения;

$R_{я}$ и $L_{я}$ - соответственно сопротивление и индуктивность якорной цепи двигателя постоянного тока;

U - напряжение электродвигателя постоянного тока;

α_1, α_2 - коэффициенты линеаризации зависимости потока возбуждения от тока якоря для электродвигателя постоянного тока последовательного возбуждения;

S - площадь поршня гидро- или пневмоцилиндра;

p - давление в полости гидро- или пневмодвигателя;

x - приведенная (с учетом дополнительных объемов) длина столба рабочего тела (жидкости или сжатого воздуха) в полости двигателя;

ε - коэффициент упругости жидкости; w_n и w_m - характерный объем соответственно гидронасоса и гидромотора; $w = 0,5 V_p / \pi$;

V_p - изменение объема рабочих камер насоса или мотора за один оборот ротора при настройке на максимальный расход (подачу); e - параметр управления;

$e = 0 \dots 1$; V_Σ - суммарный объем жидкости, заполняющей каналы и линии, а также полости гидродвигателя, находящиеся под давлением;

$L_{1,2}$ - характеристики утечек и перетечек в гидроагрегатах;

Q_m - расход жидкости, поступающей в гидромотор; Q^\pm - объемный расход жидкости, поступающей в полость гидродвигателя и вытекающей из нее;

G^\pm - массовый расход воздуха, втекающего в полость пневмодвигателя и вытекающего из нее;

R - газовая постоянная; T - температура воздуха; ω_n - частота вращения вала насоса;

β - жесткость статической характеристики двигателя;

χ - безразмерная относительная нагрузка.

и их интенсивности. Он может характеризовать: изменение напряжения электроснабжения двигателя постоянного тока, сопротивление цепи его якоря, потока возбуждения; угол наклона шайбы аксиально-поршневого насоса гидропривода с регулируемым насосом, положение золотника дроселирующего гидро- или пневмораспределителя и т.д. В общем случае параметров управления может быть несколько. В дальнейшем под параметром e понимается безразмерная величина, выражающая значение регулируемого параметра в долях от его номинального или максимального значения.

Второй фактор, влияющий на E_y , - это развиваемая двигателем движущая сила $F_{ду}$. Как правило двигатели всех типов обладают свойством уменьшать установившуюся скорость с ростом движущей силы, т.е. нагрузки на двигателе, при условии $e = \text{const}$. Например, в двигателе постоянного тока с независимым возбуждением создаваемый им движущий момент $M_{ду}$ пропорционален силе тока в якорной цепи. Но рост силы тока сопровождается увеличением разности напряжений, идущей на покрытие потерь в якоре ($i_a R_a$), что при постоянном напряжении электроснабжения приводит к падению частоты вращения. В гидро- или пневмодвигателе при постоянных открытиях каналов, связывающих полость с источником питания и сливом (выпуском в атмосферу), с ростом $F_{ду}$ должно возрастать давление в полости и, следовательно, уменьшаться перепад давлений на входе и увеличиваться перепад давлений на выходе. Это означает уменьшение интенсивности подвода энергии и увеличение интенсивности ее отвода, т.е. уменьшение E_y и согласно (9.3.2) скорости \dot{x}_y .

Таким образом, в общем случае установившаяся скорость \dot{x}_y двигателя является функцией e_y и $F_{ду}$:

$$\dot{x}_y = \dot{x}_y(e_y, F_{ду}). \quad (9.3.3)$$

В некоторых случаях скорость \dot{x}_y мало зависит от $F_{ду}$ (для слабо нагруженного пневмодвигателя) или совершенно не меняется с увеличением нагрузки (для синхронного двигателя переменного тока).

Зависимость вида (9.3.3) называют статической (механической) характеристикой двигателя (привода). Ее широко используют для решения многих задач анализа и синтеза приводов на первых этапах проектирования, когда характер переходных процессов еще можно не учитывать. Основным параметром статической характеристики двигателя является угол ее

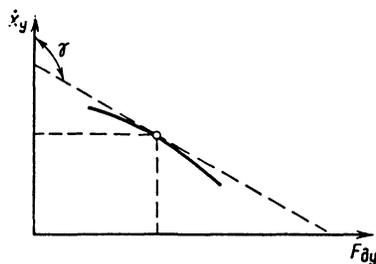


Рис. 9.3.1. Статическая характеристика двигателя

наклона по отношению к оси \dot{x}_y или $F_{ду}$ (рис. 9.3.1). Тангенс угла наклона касательной, проведенной в рабочей точке характеристики, к оси \dot{x}_y является жесткостью статической характеристики двигателя

$$\beta = \text{tgy} = \partial F_{ду} / \partial \dot{x}_y. \quad (9.3.4)$$

Поскольку в рабочей зоне статической характеристики обычно имеет место падение скорости \dot{x}_y с ростом $F_{ду}$, то γ и $\beta < 0$, что при технологической нагрузке, зависящей от скорости, способствует устойчивости движения. Например, увеличение нагрузки, сопровождаемое падением скорости, приводит к росту движущей силы и переходу двигателя в новый установившийся режим движения на пониженной скорости \dot{x}_y при увеличенном усилии $F_{ду}$. Из выражения (9.3.4), записанного в виде

$$\Delta F_{ду} = \beta \Delta \dot{x}_y, \quad (9.3.5)$$

следует, что параметр β (с учетом $\beta < 0$) характеризует интенсивность изменения $F_{ду}$ на единицу изменения \dot{x}_y , т.е. β является показателем внутреннего демпфирования двигателя.

Величина $1/\beta$, обратная жесткости статической характеристики, называется ее крутизной.

9.4. ПРИМЕРЫ СТАТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПРИВОДОВ РАЗНЫХ ТИПОВ

Асинхронный электродвигатель. Принцип действия асинхронного электродвигателя (см. рис. 9.1.2, в) основан на воздействии вращающегося магнитного поля обмоток статора на короткозамкнутые витки обмотки ротора. Вращающееся поле индуцирует токи в этих витках и заставляет их вращаться вместе с ротором с асинхронной скоростью, меньшей скорости вращения поля. С уменьшением относительной скорости убывают ЭДС и сила

тока в обмотках ротора, т.е. создаваемый ротором вращающий момент. Отставание ротора от вращающегося поля статора характеризуется скольжением $s = (\omega_0 - \omega) / \omega_0$ (где ω_0 , ω - частоты вращения электрического поля соответственно статора и ротора). С увеличением механической нагрузки на выходном валу скольжение возрастает, что вызывает рост ЭДС и силы тока в обмотках ротора, увеличение вращающего момента и, следовательно, восстановление динамического равновесия в системе двигатель - нагрузка.

Выражения для Π^+ и Π^- , характеризующие асинхронный электродвигатель (см. табл. 9.2.1), следуют непосредственно из баланса мощности ротора

$$P^+ - P^- - P_M = 0,$$

где $P^+ = M\omega_0$ - мощность, переданная от статора ротору вращающимся электрическим полем; M - вращающий момент ротора; $\omega_0 = 2\pi f_0 / p_n$ - частота вращения электрического поля статора; f_0 - частота тока; p_n - число пар полюсов; $P_M = M\omega$ - электрическая мощность, преобразованная в механическую; P^- - электрические потери в обмотке ротора.

Если заменить $P^- = 3i_{\Pi}^2 R_{\Pi}$ (где i_{Π} - приведенный фазный ток ротора, R_{Π} - приведенное сопротивление его цепи), а также выразить i_{Π} через фазное напряжение и полное сопротивление цепи ротора, то после некоторых преобразований можно получить следующее выражение для статической характеристики асинхронного двигателя, которую принято представлять в виде функции момента M от скольжения s (индекс "у" опускается):

$$M = \frac{2M_k(1 + as_k)}{s/s_k + s_k/s + 2as_k}, \quad (9.4.1)$$

где a - отношение активных сопротивлений цепей статора и ротора.

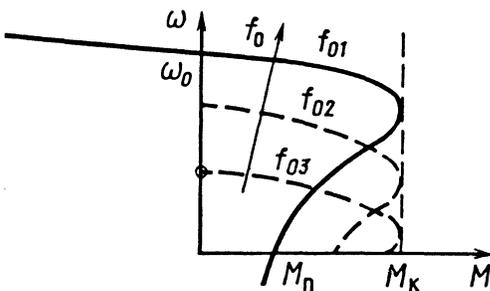


Рис. 9.4.1. Статические характеристики асинхронного двигателя

На рис. 9.4.1 сплошной линией показана статическая характеристика асинхронного двигателя в обычных координатах ωM . Асинхронный электродвигатель имеет пониженный пусковой момент M_{Π} , а максимальному моменту M_k соответствует критическое скольжение s_k . Переход за этот предел приводит к нарушению устойчивости движения (жесткость характеристики становится положительной).

Если в формуле (9.4.1) пренебречь величиной a и ограничить рассматриваемую область характеристики величиной $s_k/s < 0,35 \dots 0,40$ (что позволит пренебречь s/s_k по сравнению с s_k/s), то формула (9.4.1) принимает вид: $M = 2M_k s / s_k$. Ее можно также представить в виде

$$\omega = \omega_0 \left(1 - \frac{s_k M}{2M_k} \right). \quad (9.4.2)$$

Практически единственным эффективным способом регулирования частоты вращения асинхронного двигателя является частотное регулирование - изменение частоты тока f_0 . Но изменение f_0 обязательно должно сопровождаться изменением напряжения электроснабжения, определяемого некоторым дополнительным условием. Чаще всего в качестве такого условия выбирают сохранение на одном и том же уровне перегрузочной способности двигателя, измеряемой соотношением между M_k и номинальным моментом M_{Π} . В этом случае при постоянном моменте нагрузки напряжение должно меняться пропорционально частоте f_0 электрического поля. На рис. 9.4.1 штриховыми линиями показано несколько статических характеристик двигателя, полученных в результате уменьшения f_0 с учетом отмеченного выше условия изменения напряжения электроснабжения.

Синхронный электродвигатель. Синхронный электродвигатель имеет такой же статор с трехфазной обмоткой, как и асинхронный, создающий вращающееся магнитное поле (см. рис. 9.1.2, з). Однако в отличие от асинхронного двигателя, ротор синхронного двигателя несет электромагниты, к которым подводится постоянный ток, или постоянные магниты и вращается с синхронной скоростью ω_0 и независимо от нагрузочного момента. Поэтому статическая характеристика синхронного электродвигателя представляет собой прямую (сплошная линия), параллельную оси абсцисс (рис. 9.4.2, а), т.е. во всех точках характеристики ее жесткость равна бесконечности.

Но из этого следует, что мгновенные значения частоты вращения ротора не отличаются от синхронной частоты вращения ω_0 ,

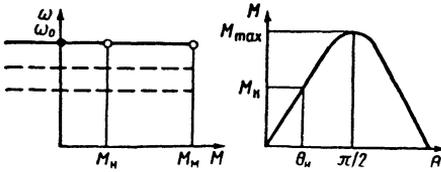


Рис. 9.4.2. Характеристики синхронного двигателя:
a - статическая; *б* - изменение момента *M* в зависимости от угла θ между векторами напряжения сети и ЭДС статора

например, в периоды увеличения или уменьшения нагрузочных моментов. В эти периоды изменяется угол θ (между векторами напряжения сети и ЭДС статора, определяемой потоком возбуждения) вместе с изменением момента *M*. Зависимость *M* и θ для двигателя с невнуполосным ротором описывается выражением $M = M_{\max} \sin \theta$ (рис. 9.4.2, б), т.е. максимальный момент M_{\max} достигается при $\theta = \pi/2$. Отношение M_{\max} к номинальному моменту M_n - перегрузочная способность двигателя $\lambda = M_{\max} / M_n$.

Номинальному моменту M_n соответствует номинальный угол θ_n , обычно $\theta_n = 25 \dots 30^\circ$, а $\lambda = 2 \dots 3$. При $\theta > \theta_k$ двигатель теряет устойчивость (выходит из синхронизма). Это свойство синхронного двигателя является следствием упругой связи статора и ротора через "магнитную пружину". Изменение угла θ сопровождается переходом электромагнитной энергии в механическую и обратно. Поэтому синхронный двигатель в переходных процессах ведет себя при малых изменениях θ так же, как система, в которой движущий момент передается исполнительному органу через механическую пружину.

При регулировании частоты вращения синхронного двигателя получается семейство статических характеристик (штриховые прямые, рис. 9.4.2, а), каждая из которых проходит через свою точку ω_0 параллельно оси *M*.

Аналогом электрического синхронного двигателя можно считать пневмомеханический двигатель, состоящий из волновой зубчатой передачи и пневматического волнообразователя (например, выполненного в виде радиально расположенных пневмоцилиндров). Такой двигатель работает на частоте вращения, пропорциональной частоте вращения вектора силы, создаваемого волнообразователем. Развиваемый двигателем момент до определенного предела не зависит от частоты вращения вектора силы, т.е. его статическая характеристика является прямой, параллельной оси *M*. И, наконец, в переходных процессах также могут иметь место отклонения *M* от его номиналь-

ного значения, сопровождаемые изменением угла отставания главной оси эллипса деформации гибкого колеса от вектора силы, создаваемой волнообразователем. Вместо пневматического волнообразователя могут использоваться и другие (гидравлические, электрические и пр.).

Электродвигатель постоянного тока. Для электродвигателя постоянного тока с независимым возбуждением (рис. 9.1.2, а) уравнение статической характеристики (9.3.1) с учетом выражений для Π^+ и Π^- , приведенных в табл. 9.2.1, можно представить в виде:

$$U / c - R_{я} i_{я} / c - \phi = 0.$$

Если заменить $i_{я}$ на *M* согласно $M = c i_{я}$ и ввести обозначение $\phi = \omega$, то

$$\omega = \omega_0 (1 - M / M_{кз}) \quad (9.4.3)$$

где $\omega_0 = u/c$ - скорость идеального холостого хода электродвигателя (при $i_{я} = 0$ и $M = 0$), $M_{кз} = cu/R_{я}$ - пусковой момент двигателя (короткого замыкания), т.е. при $\omega = 0$.

Управлять двигателем постоянного тока независимого возбуждения можно изменением: напряжения *U* электроснабжения, сопротивления цепи якоря $R_{я}$ и потока возбуждения Φ . Последний входит в качестве множителя в выражение для $c = k\Phi$ (где *k* - конструктивный параметр двигателя). Семейство статических характеристик (рис. 9.4.3) получается для различных способов управления двигателем

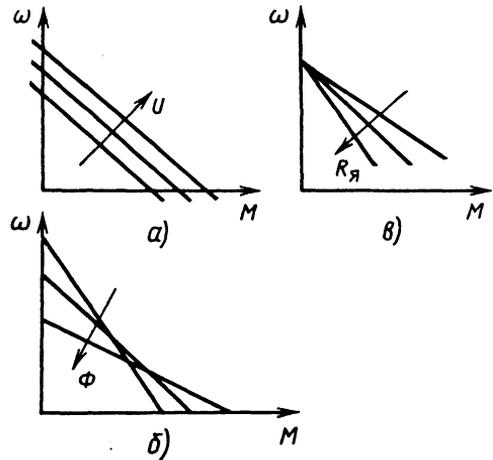


Рис. 9.4.3. Статические характеристики двигателя постоянного тока независимого возбуждения при различных способах управления:
a - изменением напряжения *U*;
б - изменением сопротивления $R_{я}$ цепи якоря;
в - изменением потока возбуждения Φ

этого типа при изменении соответствующего регулирующего параметра.

Статические характеристики, показанные на рис. 9.4.3, могут быть отнесены и к вентильному электродвигателю, который состоит из электродвигателя переменного тока, по конструкции аналогичного синхронному, и вентильного коммутатора - преобразователя частоты, управляемого в функции положения ротора или магнитного потока двигателя. Вентильный коммутатор функционально заменяет щетки и вращающийся коллектор, характерные для двигателя постоянного тока.

Выражение (9.4.3) можно распространить и на электродвигатель постоянного тока последовательного возбуждения (см. рис. 9.1.2, б), но при этом необходимо учесть, что параметр $c = k\Phi$ в этом случае зависит от силы тока в якоре. Характер зависимости Φ от i_a достаточно сложен, ее получают обычно опытным путем для двигателей каждой серии. Если опытную кривую $\Phi(i_a)$ заменить приближенной кусочно-линейной функцией, состоящей из двух участков, то для первого участка, когда магнитная система далека от насыщения, $\Phi = \alpha_1 i_a$, причем коэффициент α_1 относительно велик. На втором участке $\Phi = \Phi_0 + \alpha_2 i_a$ (где $\alpha_2 < \alpha_1$). В результате для первого участка

$$\omega = U / c_1 - \left(R_a / c_1^2 \right) M; \quad (9.4.4)$$

для второго участка

$$\omega = U / c_2 - \left(R_a / c_2^2 \right) M, \quad (9.4.5)$$

где

$$c_1 = (\alpha_1 k M)^{0.5}; \quad c_2 = 0,5 k \Phi_0 \left[1 + (1 + \xi M)^{0.5} \right];$$

$$\xi = 4\alpha_2 / (k\Phi_0^2).$$

Кривые, построенные по выражениям (9.4.4) и (9.4.5), имеют вид гипербол (рис. 9.4.4). На первом участке гиперболы идут более круто (характеристики имеют малую жесткость), а на втором - крутизна уменьшается, жесткость возрастает, и по мере приближения магнитной системы к насыщению гиперболы постепенно переходят в прямые линии, аналогичные характеристикам двигателя с независимым возбуждением. Гиперболический характер статических характеристик свидетельствует о том, что двигатель почти на всех режимах может использовать мощность, близкую к номинальной.

Параметрами управления двигателя с последовательным возбуждением могут быть: сопротивление цепи якоря, ток возбуждения и подводимое к двигателю напряжение.

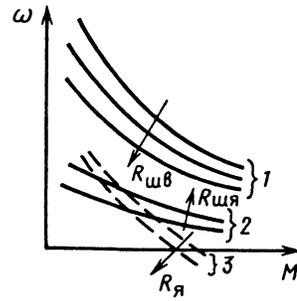


Рис. 9.4.4. Статические характеристики двигателя постоянного тока последовательного возбуждения при различных способах управления:

- 1 - изменением сопротивления $R_{шв}$ (шунтированием обмотки возбуждения); 2 - изменением сопротивления $R_{я}$ (шунтированием обмотки якоря); 3 - изменением сопротивления R_a цепи якоря

Гидропривод с объемным управлением.

Элементами привода этого типа могут быть регулируемый насос и нерегулируемый двигатель (гидроцилиндр, гидромотор), нерегулируемый насос и нерегулируемый двигатель (гидроцилиндр, гидромотор), нерегулируемый насос и регулируемый гидромотор или оба регулируемых гидроагрегата. Для гидропривода с регулируемым насосом и гидроцилиндром уравнение статической характеристики (9.3.1) с учетом выражений из табл. 9.2.1

$$\frac{w_n \omega_n e_n}{S} - \left(\frac{L_1 \Delta p}{S} + \frac{L_2 p}{S} \right) - \dot{x} = 0,$$

где p и Δp - соответственно установившееся давление в напорной полости гидроцилиндра и установившийся перепад давлений на поршне.

Учитывая, что $F_d = \Delta p S$, получим:

$$\dot{x} = \frac{w_n \omega_n e_n}{S} - \frac{L_2 p}{S} - \frac{L_1 F_d}{S^2}, \quad (9.4.6)$$

где S - эффективная площадь поршня.

Второй член правой части выражения (9.4.6) характеризует зону нечувствительности двигателя - подачу насоса, которая идет целиком на покрытие утечек. Этой подаче соответствует параметр управления $e_{ут}$: при $e_n \leq e_{ут}$ двигатель остается в покое.

При полном отсутствии объемных потерь (утечек и перетечек) статическими характеристиками привода являются прямые линии. Одна из них, соответствующая $e_n = 1$, характеризует максимально достижимую скорость двигателя (штриховая линия, рис. 9.4.5). При наличии объемных потерь прямые линии наклонены на угол, определяемый величиной потерь; кроме того, уменьшается предельно достижи-

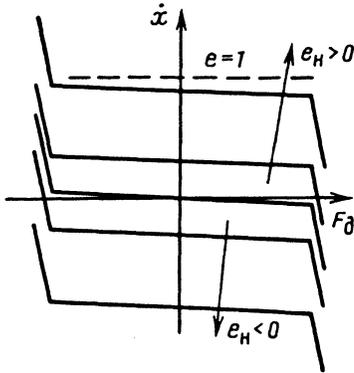


Рис. 9.4.5. Статические характеристики гидропривода с объемным управлением (с регулируемым гидронасосом)

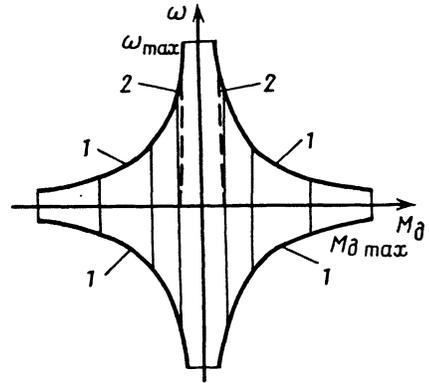


Рис. 9.4.6. Статические характеристики гидропривода с объемным управлением (с регулируемым гидромотором и постоянными давлением и расходом в напорной линии)

мая скорость (сплошные линии, рис. 9.4.5). Когда движущая сила достигает предельного значения, при котором срабатывает предохранительный клапан, ограничивающий давление в напорной линии гидроцилиндра, объемные потери резко возрастают, а следовательно, увеличивается угол наклона статической характеристики.

При отрицательных движущих силах, т.е. когда поршень движется под действием внешней силы, наблюдается некоторое увеличение скорости двигателя по сравнению с ее максимальным значением при $F=0$, поскольку внешняя сила приводит к росту давления в сливной полости и снижению давления в напорной. Когда давление в сливной полости превышает предел настройки сливного клапана, последний открывается, противодействие резко падает, а скорость значительно возрастает.

Уравнение (9.4.6) можно распространить на привод, в котором вместо гидроцилиндра двигателем служит нерегулируемый гидромотор. Для этого следует вместо площади S поршня ввести характерный объем w_M гидромотора. Для гидропривода с регулируемым гидромотором, в напорной линии которого давление и расход (p_H, Q_M) постоянны, $\Pi=0$ и $\Pi^+=Q_M/(w_M e_M)$ и уравнение статической характеристики

$$\omega = Q_M / (w_M e_M) \quad (9.4.7)$$

Кроме того, следует учесть зависимость между движущим моментом M , давлением p_H и параметром управления e_M , а также условие постоянства потребляемой двигателем мощности:

$$M = w_M p_H e_M; \quad Q_M p_H = M \omega = \text{const.} \quad (9.4.8)$$

Таким образом, получены статические характеристики привода $\omega(M)$ (рис. 9.4.6), которые представляют собой семейство прямых, параллельных оси ординат, каждая из которых ограничена точкой, лежащей на кривой постоянной мощности. Кроме того, существуют ограничения по осям ординат и абсцисс: предельные частоты вращения ω_{\max} , соответствующие некоторому предельному значению параметра управления гидромотора $e_{\max} = 0,06 \dots 0,1$; предельный движущий момент $M_{\max} = w_M p_H e_{\max}$.

Гидропривод с дроссельным управлением. Статические характеристики гидропривода этого типа представляются двумя уравнениями вида (9.3.1) для рабочих полостей двигателя. Подставив в эти уравнения выражения для Π^+ и Π^- (см. табл. 9.2.1), например для двигателя типа гидроцилиндр, и пренебрегая объемными потерями (утечками и перетечками), а также полагая $S_1 = S_2 = S$, получим:

$$Q_1^+ / S - Q_1^- / S - \dot{x} = 0; \quad (9.4.9)$$

$$Q_2^+ / S - Q_2^- / S - \dot{x} = 0.$$

Если дросселирующие щели всех клапанов одинаковы и перекрытия их кромками золотника, находящегося в среднем положении, равны нулю, то левая полость гидроцилиндра при смещении золотника в соответствующую сторону сообщается только с напорной линией насоса и для нее $Q_1^- = 0$ (рис. 9.4.7). В это же время правая полость гидроцилиндра сообщается только со сливом и для нее $Q_2^+ = 0$. Отсюда

$$Q_1^+ / S = Q_2^- / S = \dot{x}. \quad (9.4.10)$$

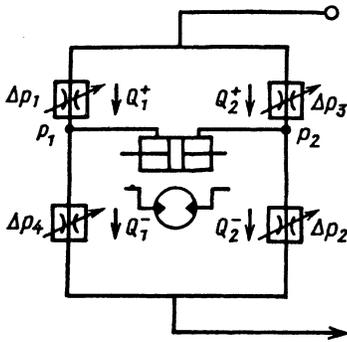


Рис. 9.4.7. Схема гидропривода с дроссельным управлением

К полученному равенству следует добавить: уравнение баланса давления по участкам гидролинии; зависимости между объемными расходами в щелях золотника и перепадами давлений на них. Уравнение баланса давления

$$p_H = \Delta p_1 + \Delta p + \Delta p_2,$$

где $\Delta p = p_1 - p_2$ - перепад давлений на поршне.

В рассматриваемом случае симметричных щелей и нулевых перекрытий золотника перепад давлений в щелях $\Delta p_1 = \Delta p_2 = \Delta p_{щ}$. Поэтому из уравнения баланса давления

$$\Delta p_{щ} = 0,5(p_H - \Delta p). \quad (9.4.11)$$

Уравнение связи расхода жидкости с перепадом давлений в щели

$$Q = e\alpha(\Delta p_{щ} \operatorname{sgne})^{0,5}, \quad (9.4.12)$$

где $e = z/z_{\max}$; z - смещение золотника от среднего положения; z_{\max} - значение, при котором щель открывается полностью; α - проводимость щели; $\alpha = z_{\max} b \mu (2/\rho)^{0,5}$; b - ширина щели; μ - коэффициент расхода; ρ - плотность рабочей жидкости.

Из (9.4.10) - (9.4.12) с учетом условия $F = S\Delta p$ получается выражение для статических характеристик гидропривода с дроссельным управлением

$$\dot{x} = Q / S = \left[(e\alpha) (S\sqrt{2}) \right] \left(p_H - (F / S) \operatorname{sgn} e \right)^{0,5} \quad (9.4.13)$$

Как следует из выражения (9.4.13), статические характеристики представляют собой семейство парабол с вершинами в точках A и A' (рис. 9.4.8). Точки B и B' , в которых $F_d = S\Delta p = 0$, определяют максимальные скорости \dot{x}_{\max} привода. По мере увеличения

F_d скорость падает, причем нарастающим темпом, т.е. с ростом F_d жесткость статической характеристики уменьшается.

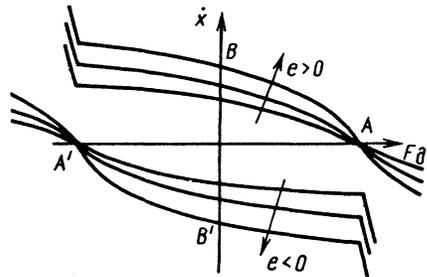


Рис. 9.4.8. Статические характеристики гидропривода с дроссельным управлением

При изменении направления действия силы сопротивления (когда последняя способствует движению поршня) движущая сила также меняет знак, что приводит к уменьшению давления в напорной полости и увеличению давления в сливной полости. Это означает рост перепадов давлений в щелях золотника, что приводит к увеличению скорости двигателя, сохраняющей свое прежнее направление.

Когда давление в сливной полости достигает давления настройки ограничительного клапана, последний открывается, что приводит к резкому увеличению проходного сечения, сообщающего эту полость со сливной линией. В результате дальнейшее повышение внешней движущей силы начинает приводить к резкому возрастанию скорости поршня. Предел возрастания скорости определяется нарушением нормальных условий работы двигателя, например появлением разряжения в напорной полости ввиду недостаточности подачи насоса для покрытия потребностей в заполнении быстро возрастающего объема полости.

Если гидроцилиндр перегрузить, то направление скорости изменится на обратное и начинается движение под действием внешней силы. При этом жидкость из напорной линии должна отводиться обратно в бак или аккумулятор.

Пневматический привод с дроссельным управлением. Для пневмопривода с поршневым двигателем равенства (9.4.9) с учетом соответствующих выражений из табл. 9.2.1 записываются в виде:

$$\frac{G_1^+ RT}{p_1 S} - \frac{G_1^- RT}{p_1 S} - \dot{x} = 0;$$

$$\frac{G_2^+ RT}{p_2 S} - \frac{G_2^- RT}{p_2 S} + \dot{x} = 0. \quad (9.4.14)$$

К ним добавляются уравнения баланса давления

$$p_1 S - p_2 S = F_d \quad (9.4.15)$$

и связи расходов $G_1^+ \dots G_2^-$ с давлением на входе и выходе соответствующей щели распределителя.

В отличие от гидропривода источник питания пневмопривода в первом приближении может рассматриваться как источник неограниченной мощности. Поэтому выражения для расходов сжатого воздуха через щели распределителя могут быть записаны независимо одно от другого. Для каждой щели массовый расход G_i связан с давлением на входе $p_{вх}$ и давлением на выходе $p_{вых}$ соотношением

$$G_i = e G_{i \max} \varphi(q), \quad (9.4.16)$$

где $q = p_{вых} / p_{вх}$; $\varphi(q)$ - расходная функция;

$$\varphi(q) = \left[1 - \left(\frac{q-b}{1-b} \right)^2 \right]^{0,5} \quad \text{при } q > b, \quad \varphi(q) = 1 \quad \text{при } q \leq b;$$

b - критическое отношение $p_{вых} / p_{вх}$, определяющее границу надкритического (независимо от q) и подкритического (зависимого от q) течений воздуха через щель; $G_{i \max} = \bar{\alpha} p_{вх}$ - максимальный расход через щель при ее полном открытии ($e=1$) и при $\varphi(q)=1$; $\bar{\alpha}$ - проводимость щели, определяемая, как правило, экспериментально.

В качестве приближенного можно пользоваться выражением

$$G_i = e \bar{G}_{i \max} \bar{\varphi}(q),$$

где $\bar{G}_{i \max} = \bar{\alpha} p_{вх}$; $\bar{\varphi}(q) = 2[q(1-q)]^{0,5}$ при $q > 0,5$; $\bar{\varphi}(q) = 1$ при $q \leq 0,5$.

Выражение для $\bar{\varphi}(q)$ получено в предположении $b=0,5$. Проводимость щели для адиабатического течения воздуха через щель

$$\bar{\alpha} = 2,38 \cdot 10^{-3} f_3,$$

где $f_3 = \mu f$; f - геометрическая площадь проходного сечения полностью открытой щели.

Статические характеристики пневмопривода с дроссельным управлением, построенные по зависимостям (9.4.14) - (9.4.16), при одинаковых значениях f_3 для подводящей и выпускной щелей показаны сплошными линиями на рис. 9.4.9. По виду они близки к характеристикам гидропривода с дроссельным управлением. отличие состоит в том, что при изменении знака движущей силы F_d скорость \dot{x} сохраняет постоянное значение вследствие

надкритического режима течения в выпускном канале полости противодействия, который наступает в результате повышения уровня давления в этой полости и при котором скорость потока не зависит от давления.

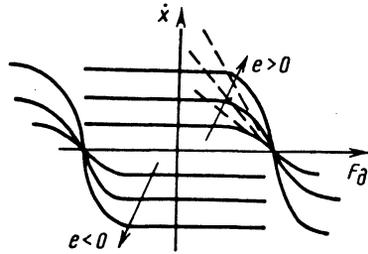


Рис. 9.4.9. Статические характеристики пневмопривода с дроссельным управлением

При сильной перегрузке двигателя скорость меняет знак и начинается движение поршня с вытеснением сжатого воздуха из рабочей полости обратно в магистраль. В это же время давление в полости противодействия практически выравнивается с атмосферным. Пока давление в рабочей полости лишь незначительно превышает магистральное, режим выхода воздуха из этой полости в магистраль подкритический, а скорость относительно мала. По мере увеличения активной силы сопротивления, вызывающей движение поршня в обратном направлении, и поджатия воздуха растет скорость потока и поршня. При некотором давлении, когда скорость потока достигает критической, она перестает изменяться с дальнейшим увеличением $|F_d|$.

На рис. 9.4.9 штриховыми прямыми показаны статические характеристики привода с пневмоцилиндром, у которого проходное сечение щели, сообщающей рабочую полость с магистралью, значительно меньше проходного сечения выпускной щели ($f_3^+ \ll f_3^-$). В

этом случае противодействие в выпускной полости практически отсутствует и пневмоцилиндр работает как односторонний. Результатом является значительное повышение скоростей и отсутствие их критических значений в связи с отсутствием противодействия, т.е. характеристики приближаются по форме к наклонным прямым для всего диапазона изменения нагрузок.

Характеристики привода с пластинчатым пневмомотором (см. рис. 9.1.2, о) по виду близки к статическим характеристикам привода с пневмоцилиндром. Отличие состоит в том, что в выражении (9.4.14) следует подставлять вместо площади S поршня характерный объем пневмомотора

$$w_{п.м} = Cr 2l_z,$$

где $C(r, z, e_3)$ - функция числа пластин z , установленных на роторе, радиуса r внутренней поверхности статора и эксцентриситета e_3 ротора; l - ширина пластины.

9.5. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ПРИВОДАХ

Изменение движущей силы или движущего момента двигателя. Необходимый переходной процесс в приводе вызывается целенаправленным нарушением баланса между подводом и отводом энергии, который определяется в установившемся состоянии равенством

$$E_0 = \Pi_{0y}^+ - \Pi_{0y}^- = 0, \text{ если двигатель нахо-}$$

дился в покое, или $E_0 = \Pi_{0y}^+ - \Pi_{0y}^- = \dot{x}_y$,

если имело место движение с установившейся скоростью \dot{x}_y . Отклонения от исходного установившегося состояния вызывается изменением как Π^+ , так и Π^- , т.е. управляющее воздействие на двигателе

$$\Delta E = \Delta \Pi^+ - \Delta \Pi^- = E - E_0. \quad (9.5.1)$$

Оно реализуется через изменение управляющего параметра ΔE по командам системы управления. Управляющее воздействие обрабатывается двигателем как изменение движущей силы согласно соотношениям (9.2.1) и (9.5.1). Из этих соотношений следует, что сила F_d изменяется с определенным запаздыванием по отношению к изменению ΔE . Запаздывание зависит от свойств двигателя, а также от свойств всей динамической системы. Мерой инерционности собственно двигателя, как преобразователя энергии, можно считать величину \dot{F}_d , характеризующую темп нарастания движущей силы как реакции на изменение управляющего воздействия ΔE . Чем больше \dot{F}_d , тем с меньшим запаздыванием F_d следует за изменением E .

Если не учитывать влияние на F_d изменения скорости двигателя \dot{x} , например, считать, что двигатель находится в покое, то из (9.2.1) и (9.5.1) следует $\dot{F}_d = C_x \Delta E$, т.е. \dot{F}_d зависит от жесткости C_x двигателя и управляющего воздействия ΔE . Причем при увеличении как C_x , так и ΔE темп изменения движущей силы возрастает. Поэтому двигатель большей жесткости C_x должен при прочих равных условиях отрабатывать управляющее воздействие быстрее. Действительно, гидропривод, у которого величина C_x высока, менее

инерционен, чем пневмопривод, характеризующийся значительно меньшими C_x .

Из условия $\dot{F}_d = C_x \Delta E$ также следует, что малую величину C_x можно в принципе компенсировать соответствующим увеличением ΔE , т.е. интенсификацией управляющего воздействия. В реальных условиях для увеличения ΔE необходимы распределительные устройства, способные управлять потоками энергии большой интенсивности; должны быть приняты меры по предотвращению потери устойчивости системы и т.п. Однако все эти проблемы в принципе разрешимы, что свидетельствует о целесообразности рассмотрения альтернативных вариантов при выборе типа привода.

Характеристики инерционности привода. Для полного описания переходного процесса в приводе уравнение изменения движущей силы F_d двигателя должно быть дополнено уравнением движения исполнительного органа привода. В простейшем случае получаем следующую систему уравнений относительно выходного звена двигателя:

$$m\ddot{x} = F_d - c_v \dot{x} - F_c;$$

$$\dot{F}_d = c_x (\Pi^+ - \Pi^- - \dot{x}), \quad (9.5.2)$$

где m - приведенная к выходному звену двигателя масса подвижных частей, принимаемая постоянной; c_v - коэффициент вязкого трения; F_c - сила сопротивления, также приведенная к выходному звену двигателя.

Представим систему (9.5.2) в безразмерном виде с помощью следующей замены переменных, принимаемых за базовые:

$$t = t^* \tau; \quad x = x^* \xi; \quad F_d = F_d^* \chi_d, \quad (9.5.3)$$

где τ , ξ и χ_d - безразмерные соответственно время, перемещение рабочего органа двигателя и развиваемая им движущая сила; t^* , x^* , F_d^* - масштабы измерений безразмерных переменных.

С учетом соотношений (9.5.3) переменные, производные от базовых, связаны с их безразмерными аналогами следующими выражениями:

$$\dot{x} = \dot{x}^* \xi; \quad \Pi = \Pi^* \varepsilon; \quad \dot{F}_d = F_d^* \dot{\chi}_d; \quad C_x = C_x^* v_x, \quad (9.5.4)$$

$$\text{где } \dot{x}^* = \Pi^* = x^* / t^*; \quad \dot{F}_d^* = F_d^* / t^*; \quad C_x^* = F_d^* / x^*.$$

Подстановка соотношений (9.5.3) и (9.5.4) в систему уравнений (9.5.2) приводит к

$$N^2 \ddot{\xi} = \chi_d - v_v \dot{\xi} - \chi_c; \quad \dot{\chi}_d = v_x (\varepsilon^+ - \varepsilon^- - \dot{\xi}), \quad (9.5.5)$$

где

$$N^2 = mx^* / (t^* F^*); \quad v_v = x^* / (t^* F^*); \quad \chi_c = F_c / F_d^*. \quad (9.5.6)$$

Выражение для N (безразмерной массы) можно представить в виде

$$N = t_m / t^*. \quad (9.5.7)$$

Здесь

$$t_m = (mx^* / F^*)^{0,5} \quad (9.5.8)$$

- время перемещения массы m на расстояние $0,5x^*$ с постоянным ускорением $a = F_d^* / m$, создаваемым движущей силой двигателя $F_d = F_d^*$.

Если положить $F_d^* = F_{d \max}$, то t_m будет характеризовать предельные возможности привода по быстрдействию, оцениваемые по времени равноускоренного перемещения на расстояние $0,5x^*$.

Вторая постоянная времени t^* (масштаб измерения безразмерного времени) определяется как минимальное время нарастания движущей силы двигателя F_d от нуля до $F_d = F_{d \max}$. Как следует из приведенного выше выражения $\dot{F}_d = c_x \Delta E$, максимальная скорость нарастания движущей силы $\dot{F}_{d \max} = c_{x \max} \Delta E_{\max}$. Но $\Delta E_{\max} = \Delta \Pi_{\max}^* (\Delta \Pi_{\min}^* = 0)$. Полагая также $c_{x \max} = c_x^* = F_d^* / x^*$, получим:

$$t^* = F_d / \dot{F}_{d \max} = \dot{x} / \Delta \Pi_{\max}^* = x^* / \dot{x}^*, \quad (9.5.9)$$

где x^* - характерный (например, максимальный) ход рабочего органа двигателя; $\dot{x}^* = \Delta \Pi_{\max}^*$ - характерная скорость двигателя и соответствующая ей величина $\Delta \Pi^+$.

Например, для привода с электродвигателем постоянного тока независимого возбуждения можно принимать $\Delta \Pi_{\max}^+ = \dot{x}^* = U_{\max} / C$, для пневмопривода $\Delta \Pi_{\max}^+ = G_{\max}^+ RT / (pS)$, для гидропривода с дроссельным управлением и двигателем-гидроцилиндром $\Delta \Pi_{\max}^+ = Q_{\max}^+ / S$ и т. д. (см. табл. 9.2.1).

Как показали исследования, безразмерный параметр N , представляющий безразмерную массу, является одним из основных факторов, который определяет качество переходного процесса при отработке приводом управляющих сигналов. При больших N , когда $t_m \gg t^*$, переходные процессы внутри двигателя (изменение движущей силы F_d) протекают относительно быстро, но движение выходного звена отстает ввиду сравнительно высокой инерционности механической части системы. При отработке ступенчатого управляющего сигнала большой амплитуды движение такого привода будет происходить по закону, близкому к равноускоренному движению. Наоборот, при малых $N (t_m \ll t^*)$ механическая часть системы уже не играет определяющей роли и закон движения привода определяется практически внутренними процессами двигателя, характером изменения его движущей силы согласно сигналам управления.

Можно указать некоторые граничные значения параметра N , отделяющие приводы первого типа от вторых, плохо управляемых от хорошо управляемых. При чисто инерционной нагрузке граничные значения $N = N_{гр}$ лежат в области значений около 1...2 (с уточнениями, зависящими от типа привода и выбранных характерных величин $\dot{x}^* = \Delta \Pi_{\max}^+$ и x^*). При действии кроме инерционных сил силовых нагрузок F_c при вычислении t_m или N в соответствующие формулы подставляется величина $F^* = F_{\max}^* - F_c$, которая меньше F_{\max}^* и представляет теперь только часть движущей силы двигателя, используемую на создание движения. Соответственно величины t_m и N возрастают. Что касается t^* , то в приводе с силовой нагрузкой скорость \dot{x}^* может быть меньше, но если перегрузки нет, то это уменьшение незначительно. Таким образом, чем большую силовую нагрузку преодолевает двигатель, тем он инерционнее и труднее поддается управляющему воздействию.

Поскольку оценка управляемости привода по параметру N является качественной, она теряет смысл, если частота сигналов управления выше определяемой рабочим диапазоном.

В этих условиях привод становится плохо управляемым при любых N . При $t_M < t^*$ рабочий диапазон частот сигналов управления ограничен сверху возможностями двигателя, определяемыми величиной t^* , которая выполняет роль его постоянной времени. Поэтому увеличение t^* , которое приводит к уменьшению N , т.е. к улучшению управляемости привода, одновременно сопровождается снижением рабочих частот.

9.6. ЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА

Для малых отклонений переменных от их установившихся значений система уравнений (9.5.2) может быть представлена в более простом виде, если учесть, что управляющее воздействие является, как и установившаяся скорость [см. (9.3.3)], функцией e и F_d :

$$\Delta E = \Delta E(\Delta e, \Delta F_d). \quad (9.6.1)$$

В линейном приближении из (9.6.1) следует:

$$\Delta E = \Delta E_e - \Delta E_F; \quad \Delta E_e = K_e \Delta e; \quad \Delta E_F = K_F \Delta F; \quad (9.6.2)$$

$$K_e = \left(\frac{\partial(\Delta E)}{\partial(\Delta e)} \right)_0; \quad K_F = \left(\frac{\partial(\Delta E)}{\partial(\Delta F)} \right)_0.$$

Коэффициенты K_e и K_F характеризуют чувствительность управляющего воздействия ΔE к изменениям соответственно Δe и ΔF_d (или ΔM для двигателя вращательного движения, причем в этом случае вместо K_F пользуются K_M) в рабочей точке (F_0, \dot{x}_0) . С учетом (9.6.1) и (9.6.2) система уравнений (9.5.2) может быть представлена в виде $(\Delta F_c = 0)$; знак Δ далее опускается):

$$m\ddot{x} = F_d - c_v \dot{x};$$

$$\dot{F}_d = C_x (K_e e - K_F F_d - \dot{x}). \quad (9.6.3)$$

Последнее выражение для установившегося движения $(\dot{F}_d = 0)$

$K_e e_y - K_F F_{ду} - \dot{x}_y = 0$ представляет линейное приближение статической характеристики привода (9.3.3) на участке, близком к рабочей точке. Из него следует, что $K_e = \partial \dot{x}_y / \partial e_y$ характеризует изменение установившейся скорости двигателя на единицу изменения параметра управления e_y , а $K_F = \partial \dot{x}_y / \partial F_{ду}$ - изменение той же скорости, которое приво-

дится на единицу изменения $F_{ду}$. Согласно (9.3.5) получается, что K_F совпадает с крутизной статической характеристики, а величина, обратная K_F , - с жесткостью этой характеристики:

$$K_F = 1/\beta; \quad 1/K_F = \beta. \quad (9.6.4)$$

Общее выражение

$$K_e = \dot{x}_{e \max}, \quad (9.6.5)$$

где $\dot{x}_{e \max}$ - максимальная скорость, которую теоретически может развить ненагруженный двигатель при изменении параметра управления $\Delta e = 1$ и при полном использовании всей подводимой к двигателю энергии на совершенные движения.

Для двигателя постоянного тока независимого возбуждения - это скорость идеального холостого хода, определяемая соотношением U_{\max}/c , для гидропривода - скорость, развиваемая исполнительным органом при полном открытии каналов в распределителе, полном использовании давления питания и отсутствии силы сопротивления. Например, для привода с нерегулируемым насосом и дроссельным управлением $\dot{x}_{\max} = Q_{\max} / S$ (см. табл. 9.2.1).

Выражения для K_F или K_M приведены в табл. 9.2.1. Отсутствие выражений для K_F или K_M для некоторых типов приводов объясняется невозможностью представления их в явном виде. Выражения для K_e , относящиеся к гидроприводу с дроссельным управлением, получены в предположении нулевых перекрытий золотника и отсутствия зазоров и, следовательно, объемных потерь (утечек). Влияние последних должно проявиться в том, что в области малых смещений золотника значения K_e окажутся меньше определяемых по выражениям табл. 9.2.1.

Учитывая, что E имеет размерность скорости, введем дополнительно к (9.6.2) следующие обозначения:

$$E_e = K_e e = \dot{x}_e; \quad E_F = K_F F = \dot{x}_F; \\ E = E_e - E_F = \dot{x}_e - \dot{x}_F = \dot{x}_c. \quad (9.6.6)$$

Тогда второе уравнение системы (9.6.3)

$$\dot{F}_d = C_x (\dot{x}_c - \dot{x}). \quad (9.6.7)$$

Из соотношений (9.6.6) следует, что управляющее воздействие E может характеризоваться скоростью \dot{x}_c , приведенной к выходному звену двигателя. При этом ее часть \dot{x}_e в точности соответствует изменению параметра управления e , а \dot{x}_F представляет искажение по скоро-

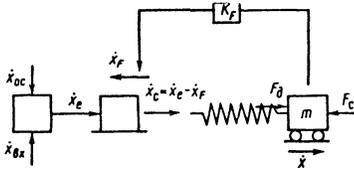


Рис. 9.6.1. Пружинно-массовая модель привода

сти, вызываемое обратным влиянием со стороны изменяющейся движущей силы на интенсивность подвода энергии к двигателю.

Процесс, описываемый уравнением (9.6.7), можно трактовать как изменение деформации пружины жесткостью C_x , левый конец которой (рис. 9.6.1) перемещается со скоростью \dot{x}_c , равной разности скоростей \dot{x}_e и \dot{x}_F , а правый - со скоростью выходного звена двигателя. Для завершения построения упругомассовой модели привода правый конец пружины следует нагрузить приведенной массой m , ввести блок управления, задающий управляющее воздействие на двигатель в виде \dot{x}_e и отметить обратное воздействие со стороны двигателя \dot{x}_F , суммируемое с \dot{x}_e . Изменение движущей силы в такой модели представляется изменением усилия деформации пружины вследствие несовпадения скоростей \dot{x}_c и \dot{x} как по величине, так и по направлению в общем случае. Знак отклонения Δ здесь опущен, но все переменные в данной модели измеряются в отклонениях от начального установившегося состояния, в котором $\dot{x}_c = \dot{x}_e - \dot{x}_F = 0$ или $\dot{x}_c = \dot{x}_e - \dot{x}_F = \dot{x}$.

Из уравнения для \dot{F}_d системы (9.6.3), которое при условии $\dot{x} = 0$ может быть представлено в виде

$$t_{дв} \dot{F}_d + F_d = K_{дв} e, \quad (9.6.8)$$

следуют выражения для постоянной времени двигателя

$$t_{дв} = (K_F C_x)^{-1} \quad (9.6.9)$$

и коэффициента усиления

$$K_{дв} = K_e / K_F, \quad (9.6.10)$$

характеризующего изменение движущей силы оставленного двигателя на единицу изменения параметра управления e .

Систему уравнений (9.6.3) при $c_v = 0$ можно заменить одним уравнением второго порядка относительно скорости $\dot{x} = y$:

$$T_0^2 \ddot{y} + T_M \dot{y} + y = K_e e \quad (9.6.11)$$

или

$$T_0^2 \ddot{y} + 2\zeta T_0 \dot{y} + y = K_e e. \quad (9.6.12)$$

Здесь постоянная времени T_0 определяет период собственных колебаний массы m на пружине жесткостью C_x :

$$T_0 = (m / C_x)^{0.5}, \quad (9.6.13)$$

а механическая постоянная времени привода - его динамику в условиях $C_x \rightarrow \infty$, т.е. когда T_0 и $T_{дв}$ стремятся к нулю:

$$T_M = K_F m. \quad (9.6.14)$$

С учетом зависимостей (9.6.9) и (9.6.14) можно получить зависимость

$$T_0 = (T_{дв} T_M)^{0.5}.$$

Входящий в уравнение (9.6.12) коэффициент ζ , определяющий демпфирующие свойства привода,

$$\zeta = 0,5 K_F (C_x m)^{0.5} = 0,5 T_M T_0^{-1} = 0,5 T_M^{0.5} T_{дв}^{-0.5} \quad (9.6.15)$$

называют коэффициентом относительного затухания. При $\zeta < 1$ переходные процессы в приводе носят колебательный характер, при $\zeta > 1$ - экспоненциальный. Однако обычно привод обладает относительно слабыми демпфирующими свойствами, т.е. характеризующие его значения ζ намного меньше единицы. Поэтому для повышения пределов устойчивости привода приходится прибегать к специальным средствам, например вводить дополнительные обратные связи, дающие эффект, аналогичный увеличению ζ .

Рассмотрим два крайних случая, встречающиеся на практике: 1) масса подвижных частей, приведенных к выходному звену двигателя, относительно мала ($m \rightarrow 0$); 2) эта масса достаточно велика. Воспользуемся для оценки величиной N [см. (9.5.7)]. Тогда к первому случаю могут быть отнесены все приводы, которые характеризуются значениями $N < 0,1$, а к второму - приводы, для которых $N > 5$ (как уже отмечалось выше, для получения более точных оценок следует рассмотреть конкретный тип привода с учетом принятых масштабов измерения безразмерных переменных).

В первом случае (при $m = 0$) из уравнения (9.6.11) непосредственно $T_0 = T_M = 0$, $y = \dot{x} = K_e$ или всякое изменение параметра e мгновенно отрабатывается приводом в виде соответствующего ему изменения скорости, причем движущая сила остается постоянной. Если в приводе с нулевой массой подвижных

частей изменить силу сопротивления, то двигатель отреагирует на это изменение в соответствии с его статической характеристикой, и если сила сопротивления изменится скачком, то и скачком изменится скорость.

При высокой инерционной нагрузке (большой массе), когда в левой части уравнения (9.6.11) можно пренебречь отношением u/T_M , с учетом $T_0 = (T_{дв} T_M)^{0,5}$.

$$T_{дв} \dot{z} + z = (K_e / T_M) e, \quad (9.6.16)$$

где $z = \dot{y} = \ddot{x}$.

Таким образом, в случае больших подвижных масс переходный процесс в приводе описывается одним уравнением первого порядка относительно ускорения. Оно может быть представлено не относительно ускорения, а относительно движущей силы. Для этого следует подставить $z = F_{дв}/m$ и тогда

$$T_{дв} \dot{F}_{дв} + F_{дв} = K_{дв} e.$$

9.7. УПРАВЛЕНИЕ ПРИВОДАМИ

Управление приводом осуществляется через изменение параметра e по командам, вырабатываемым в специальном блоке системы управления (регуляторе). Алгоритм функционирования регулятора выбран в зависимости от поставленной задачи управления, а также статических и динамических свойств системы привод - ведомый механизм. В общем случае приходится учитывать статические и динамические свойства самого регулятора и других элементов системы управления. Подробно все проблемы, связанные с построением регулятора, выбором его структуры и параметров, рассматриваются в специальной литературе по автоматическому регулированию и управлению. Здесь же приведены лишь относительно простые примеры, иллюстрирующие применение элементов теории управления и регулирования на базе полученных ранее общих моделей приводов для построения регуляторов скорости и положения.

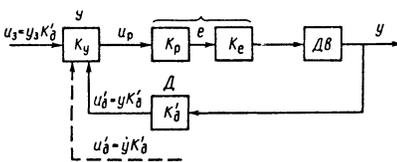


Рис. 9.7.1. Структурная схема системы управления с параллельными обратными связями

Управление скоростью. Простейший регулятор скорости привода - это пропорциональный регулятор, который изменяет параметр e пропорционально рассогласованию между заданным y_3 и текущим y значениями скорости. Чем рассогласование больше, тем больше управляющее воздействие на двигатель, направленное в зависимости от знака рассогласования в сторону разгона или торможения его выходного звена. Закон функционирования такого регулятора описывается простым соотношением

$$e = K' (y_3 - y), \quad (9.7.1)$$

где K' - коэффициент передачи контура, состоящего из датчика D скорости, электронного усилителя U и распределителя (усилителя мощности) P с коэффициентами передачи соответственно $K'_д$, K_y и K_p (рис. 9.7.1).

Последний коэффициент характеризует изменение параметра управления в зависимости от электрического сигнала, поступающего на вход P . Эту зависимость называют статической характеристикой P ; она обычно имеет вид ломаной линии, состоящей из линейной (рабочего) участка с углом наклона $\gamma = \text{arctg} K_p$, переходящего в горизонтальную линию, которая отражает границу возможностей распределителя (состояние насыщения), достигаемую при $e=1$, что соответствует полному открытию каналов гидро- или пневмораспределителя, минимальному углу запаздывания открывания электрических вентильных преобразователей и т.п. (рис. 9.7.2). Из рис. 9.7.1 следует:

$$K' = K'_д K_y K_p. \quad (9.7.2)$$

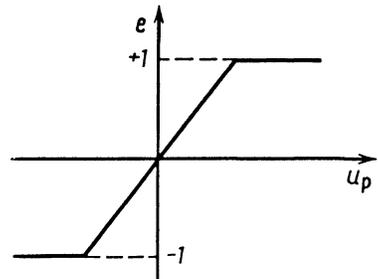


Рис. 9.7.2. Статическая характеристика распределителя

Подстановка e и K' из (9.7.1) и (9.7.2) в правую часть уравнения (9.6.12) приводит к

$$T_0^2 \ddot{y} + 2T_0 \zeta \dot{y} + (1 + K)y = K' y_3 \quad (9.7.3)$$

или при учете члена $c_v y$ в исходном уравнении (9.6.3)

$$T_0^2 \ddot{y} + 2T_0 \zeta \dot{y} + (1 + K_{ск} + K_F c_v) y = K y_3. \quad (9.7.4)$$

Входящий в эти уравнения коэффициент усиления контура управления по скорости

$$K = K_e K'_{ск} \quad (9.7.5)$$

является безразмерной величиной и характеризует интенсивность управляющего воздействия на двигателе, приходящуюся на единицу рассогласования $y_3 - y$. С учетом (9.6.6) $K = \dot{x}_e / \Delta y$.

Уравнения (9.7.3) и (9.7.4) можно использовать для анализа переходного процесса в приводе при отработке регулятором заданного закона изменения скорости $y_3(t)$ при отсутствии возмущений (помех). Для учета последних в правую часть уравнений следует ввести члены вида $f(t)$, характеризующие возмущения: изменения сил сопротивления, параметров системы, параметров источника питания и др. В частном случае, когда система работает в режиме стабилизации скорости, т.е. $y_3 = 0$, ее оценивают по реакции на действие только возмущающих факторов $f(t)$.

Условием устойчивости системы, описываемой уравнением второго порядка (9.7.3) или (9.7.4), является, как известно, положительность коэффициентов членов правой части. При правильном включении регулятора в систему эти условия выполняются автоматически, т.е. в принципе приведенные выше уравнения представляют устойчивую систему. Но при этом еще не исключено нарушение других условий, вытекающих из требований практики, например, переходный процесс может оказаться сильно колебательным (слабо демпфированным). Из анализа полученных уравнений следует, что росту колебательности системы способствует увеличение коэффициента K , одновременно влияющего на точность регулирования скорости. Последнее видно из рассмотрения статической точности системы - соотношения между y_3 и y_y - установившейся скоростью после отработки y_3 . Это соотношение имеет вид: $y_y = [K / (1 + K)] y_3$, откуда непосредственно следует, что с ростом K значения y_y и y_3 сближаются.

Для улучшения качества регулирования скорости, снижения колебательности переходного процесса могут быть использованы обратные связи по ускорению или движущей силе привода. В системе с параллельными связями по скорости и ускорению выражение для параметра e имеет вид

$e = K'(y_3 - y) - K'_y \dot{y}$. После подстановки его в правую часть уравнения (9.6.12) и простых преобразований

$$T_0^2 \ddot{y} + (2\zeta T_0 + K_y) \dot{y} + (1 + K) y = K y_3. \quad (9.7.6)$$

Из этого уравнения видно, что с введением $K'_y = K_e K'_y$ возрастает коэффициент при \dot{y} , который характеризует демпфирующие свойства системы. Рост K_y оказывает на нее воздействие, аналогичное увеличению ζ . Тот же эффект достигается при введении обратной связи не по ускорению, а по движущей силе.

Как следует из сопоставления уравнений (9.7.3) и (9.7.6), введение обратной связи по ускорению не влияет на статическую точность системы - рассогласование между y_y и y_3 по-прежнему определяется только K . Существенному повышению статической точности системы регулирования скорости может способствовать введение еще одной дополнительной обратной связи - по интегралу по времени от рассогласования $y_3 - y$. Соответствующее уравнение процесса регулирования можно получить, добавив в выражение для e еще один член вида $K'_n \int (y_3 - y) dt$. При этом порядок уравнения повышается до третьего, статическая ошибка сводится к нулю, но возникает проблема устойчивости такой системы.

Управление положением (углом поворота) выходного звена. Приводы с такими системами управления называют позиционными. Они достаточно широко применяются во всех тех случаях, когда возникает необходимость вывести и остановить объект в заданной точке и с заданной точностью. Подобно рассмотренному ранее пропорциональному регулятору скорости, простейшим регулятором положения выходного звена привода будет регулятор, для которого

$$e = K'_n (x_3 - x), \quad (9.7.7)$$

где x_3 и x - соответственно заданное и текущее положения исполнительного органа двигателя.

Подстановка выражения (9.7.7) для e в уравнение (9.6.12) с заменой $y = \dot{x}$ приводит к

$$T_0^2 \ddot{x} + 2\zeta T_0 \dot{x} + \dot{x} + K_n x = K_n x_3, \quad (9.7.8)$$

где $K_n = K_e K'_n$.

В отличие от уравнения (9.7.2), описывающего процесс регулирования скорости, в данном случае пропорциональный регулятор теоретически обеспечивает выполнение усло-

вия $x_y = x_3$ независимо от величины K_{Π} . Однако на практике ошибка всегда может иметь место, которая в общем случае возрастает с уменьшением K_{Π} . Причиной ее появления - ряд факторов, неучтенных при получении уравнения (9.7.8), в частности сил сопротивления (включая и трения), которые могут меняться по сложным законам, влияние динамических и статических свойств распределительных устройств и т.д.

С другой стороны, возможности увеличения K_{Π} ограничены в числе прочих и условиями устойчивости системы регулирования, которые в данном случае (для системы третьего порядка) записываются в виде

$$K_{\Pi} < 2\zeta / T_0. \tag{9.7.9}$$

При введении дополнительной обратной связи по скорости границы возможного увеличения K_{Π} возрастают, поскольку

$$e = K'_{\Pi} (x_3 - x) - K\dot{x};$$

$$T_0^2 \ddot{x} + 2\zeta T_0 \dot{x} + (1 + K)x + K_{\Pi} x = K_{\Pi} x_3;$$

$$K_{\Pi} < (2\zeta / T_0)(1 + K), \tag{9.7.10}$$

где $K = K_e K'$.

Сопоставление условий устойчивости (9.7.9) и (9.7.10) показывает, что значение K_{Π} в последнем случае может быть выбрано в $(1+K)$ раз больше, чем в первом.

Подобно рассмотренной выше системе управления скоростью привода, введение еще одной обратной связи по ускорению приводит к дальнейшему улучшению динамики и точности позиционного привода за счет повышения демпфирующих свойств и расширения пределов возможного увеличения K_{Π} :

$$e = K'_{\Pi} (x_3 - x) - K\dot{x} - K_y \ddot{x};$$

$$T_0^2 \ddot{x} + (2\zeta T_0 + K_y)\dot{x} + (1 + K)x + K_{\Pi} x = K_{\Pi} x_3;$$

$$K_{\Pi} < \left(\frac{2\zeta}{T_0} + \frac{K_y}{T_0^2} \right) (1 + K). \tag{9.7.11}$$

Рассмотренные уравнения динамики переходного процесса позиционного привода (9.7.8), (9.7.10) и (9.7.11) описывают этот процесс в линейном приближении, т.е. при относительно малых отклонениях переменных от их установившихся значений. Однако на практике позиционный привод чаще всего обрабатывает большие перемещения или углы поворота, когда на начальных этапах движения

разность $x_3 - x$ достаточно велика и выражение $e = K'_{\Pi} (x_3 - x)$ формально превышает единицу (или другой верхний предел). Это означает, что распределительное устройство находится в состоянии насыщения ($e = 1$, см. рис. 9.7.2), причем это состояние сохраняется пока $x_3 - x$ не станет меньше некоторого критического значения Δx^* , т.е. $x > x^*$ (где x^* значение x соответствующее Δx^*). На этапе движения, когда распределительное устройство находится в состоянии насыщения, переходный процесс в позиционном приводе описывается уравнением

$$T_0^2 \ddot{x} + 2\zeta \dot{x} + \dot{x} = K'_{\Pi} x^*, \tag{9.7.12}$$

а после прохождения точки $x = x^*$ начинается активная работа регулятора и процесс протекает согласно уравнению (9.7.8). Такое же деление процесса позиционирования на две фазы имеет место и в случае наличия дополнительных обратных связей по скорости и ускорению. Однако переход от одной фазы к другой протекает в этих условиях в момент времени, когда выполняется равенство

$$e = K'_{\Pi} (x_3 - x^*) - K\dot{x}^* - K_y \ddot{x}^* = 1,$$

где x^* , \dot{x}^* и \ddot{x}^* - критические значения x , \dot{x} и \ddot{x} , набору которых соответствует $e=1$.

В принципе возможны многократные переходы от одной фазы движения к другой, от движения в режиме насыщения распределительного устройства в режим активной работы регулятора, и обратно, причем наборы значений x^* , \dot{x}^* и \ddot{x}^* , приводящих к $e=1$, могут быть различными.

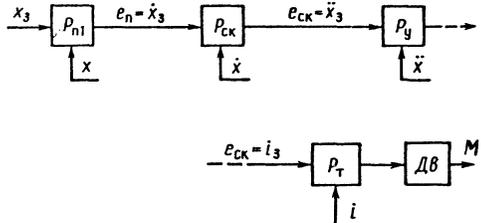


Рис. 9.7.3. Структурная схема системы управления с последовательными обратными связями

Система управления позиционным приводом с последовательными обратными связями по положению, скорости и ускорению. Такая система называется системой подчиненного регулирования (рис. 9.7.3). Здесь P_{Π} , $P_{ск}$, и P_y - пропорциональные регуляторы по поло-

жению, скорости и ускорению, функционирующие согласно

$$e_{\Pi} = K'_{\Pi}(x_3 - x) = \dot{x}_3;$$

$$e_{\text{СК}} = K'(\dot{x}_3 - \dot{x}) = \ddot{x}_3;$$

$$e_y = K'_y(\ddot{x}_3 - \ddot{x}),$$

(9.7.13)

где $K_{\Pi} = K_{\text{дл}}K_{\text{уп}}$; $K = K_{\text{д}}K_y$; $K_y = K_{\text{д.у}}K_{\text{у.у}}$; $K_{\text{д}}$ - коэффициенты передачи соответствующих датчиков; K_y - коэффициенты усиления регуляторов.

Роль задающего сигнала для $P_{\text{СК}}$ играет сигнал с выхода P_{Π} , а для P_y - сигнал с выхода $P_{\text{СК}}$.

Схема подчиненного регулирования широко используется в первую очередь в позиционных электроприводах. Ее преимуществом является автоматизация процесса отработки больших перемещений или углов поворота выходного звена двигателя, сочетающаяся с простотой настройки предельных скорости и ускорения. В целях упрощения схемы управления позиционным электродвигателем обычно вместо регулятора ускорения применяют регулятор тока якоря, который относительно просто измеряется и является в определенных условиях близким аналогом ускорения.

Схема подчиненного регулирования работает следующим образом. Когда в начальный момент разность $x_3 - x$ достаточно велика, P_{Π} сразу входит в состояние насыщения и с его выхода выдается сигнал, соответствующий $e_{\Pi} = 1$. Поскольку в начальный момент скорость двигателя также мала, то разность $\dot{x}_3 - \dot{x}$ превышает критическое значение и с выхода $P_{\text{СК}}$ подается сигнал $e_{\text{СК}} = 1$, соответствующий i_3 (где i_3 - задающий сигнал тока в якоре). В результате регулятор тока поддерживает его текущее значение на уровне i_3 , обеспечивая разгон двигателя с постоянным (при постоянной нагрузке) ускорением.

Когда скорость двигателя приблизится к \dot{x}_3 , параметр управления $e_{\text{СК}}$ уменьшится и будет находиться вблизи значений, обеспечивающих изменения i таким образом, чтобы скорость оставалась близкой к \dot{x}_3 при всех возможных возмущениях в системе. При подходе к точке $x = x_3$ начнет выходить из состояния насыщения P_{Π} , в соответствии с уменьшением e_{Π} начнет падать \dot{x}_3 и скорость двигателя. В результате вся система переходит в режим активного позиционирования, когда работают все регуляторы, вплоть до остановки двигателя в заданной точке.

В реальных условиях часто приходится применять регуляторы более сложной структуры, чем рассмотренные выше пропорциональные регуляторы. Однако принцип действия подчиненной системы управления при этом сохраняется тем же.

9.8. СРАВНЕНИЕ ПРИВодОВ РАЗНЫХ ТИПОВ

Различают случаи, когда выбор типов привода жестко predetermined каким-либо одним или несколькими решающими факторами и когда остается возможность анализировать и сопоставлять различные альтернативные варианты. И в том, и в другом случае на первых этапах принятия решений целесообразно обратиться к данным табл. 9.8.1, в которой приведены группа факторов, характеризующих приводы различных типов, в виде сравнительных оценок (+1 - наилучшая; 0 - средняя; -1 - наихудшая). Удельный показатель мощности W или движущей силы (вращающего момента), приходящей на единицу массы двигателя, - это характеристика массы и габаритов двигателя. Предел повышения W ограничен физическими свойствами двигателя. Для гидро- или пневмодвигателя величина определяется в основном давлением рабочей жидкости. В гидроприводах оно доходит обычно до 15 МПа, реже до 100 МПа, но может быть и выше этих пределов. Давление сжатого воздуха редко достигает 1 МПа и обычно не превышает 0,5...0,6 МПа. Лучшие значения W для гидро- и пневмоприводов (по сравнению с электроприводами) объясняются тем, что для превращения энергии рабочей жидкости в механическую работу достаточно образовать герметичную камеру (или несколько таких камер) с подвижной стенкой (поршнем, лопаткой, зубом шестерни и т.п.), перемещающейся под действием давления в камере и передающей движение на выходной орган двигателя.

Вращающий момент в электродвигателе - результат сложного взаимодействия электрических и магнитных полей, создаваемых обмотками и массивными сердечниками, которые оказываются заметно более тяжелыми и громоздкими по сравнению с рабочими камерами гидро- и пневмодвигателей. Поэтому для обычных электродвигателей значения W много ниже, чем для пневмо- или гидродвигателей. Переходом на редкоземельные магнитные материалы удается поднять показатель W электродвигателя до уровня, соответствующего гидродвигателю низкого давления. Дальнейшее повышение показателя W электродвигателей связано с использованием эффекта сверхпроводимости (в будущем).

9.8.1. Качественные сравнительные оценки приводов различных типов

Показатель	Привод		
	элект- рический	гидрав- лический	пневма- тический
Удельная мощность W , кВт/кг, или удельная движущая сила (момент), Н/кг	-1	+1	0
Эффектив- ность (КПД)	+1	0	-1
Первоначаль- ная сто- имость	-1	0	+1
Быстродейст- вие	-1	0	+1
Надежность	0	-1	+1
Пожаро-, взрывобезо- пасность	0	-1	+1
Удобство обслужива- ния	+1	-1	0
Ремонтпри- годность	0	-1	+1
Тепловой режим	-1	0	+1
Воздействие на окружаю- щую среду	+1	0	-1
Стыкуемость с цифровы- ми система- ми управле- ния	+1	0	-1
Управляе- мость	+1	0	-1
Точность (повторяе- мость)	+1	0	-1

оценок по W по приводам различных типов сохраняется, но значения W изменяются. Так, для приводов мощностью до нескольких кило-
ватт характерны следующие значения W : с электрическими двигателями 0,003...0,06 кВт/кг; с гидродвигателями 0,05...0,6 кВт/кг; с пневмодвигателями 0, 0,3...0,1 кВт/кг.

По экономичности (КПД) электропривод занимает лидирующее положение, поскольку в нем отсутствует двойное преобразование энергии, как в гидро- или пневмоприводе, где электрическая энергия сначала преобразуется в насосном агрегате или компрессоре. Кроме того, методы управления электроприводом отличаются большей экономичностью.

Наиболее часто используемый метод управления гидро- или пневмоприводом - это дросселирование потоков рабочего тела. При этом методе уменьшение движущей силы двигателя и его скорости достигается уменьшением проходных сечений каналов. Вызываемое дросселированием снижение давления перед двигателем и повышение давления за ним связано с перепадом части энергии, получаемой от источника, в теплоту, а также с дополнительными затратами энергии на преодоление повышенного противодействия.

Более эффективными являются другие методы, исключаящие дросселирование потоков рабочего тела полностью или частично. К ним относятся понижение давления питания до уровня, определяемого в каждый момент нагрузкой потребителя; переходом на объемное управление, когда насос подает ровно столько рабочей жидкости, сколько необходимо для получения заданного движения. Однако объемные системы регулирования более инерционны, чем дроссельные, и поэтому последние продолжают широко применяться.

Объемное управление пневмоприводом практически не нашло применения, хотя известны единичные примеры, когда движение пневмодвигателя регулируется подачей воздуха в рабочую полость и удалением его из этой полости мерными порциями.

При управлении электродвигателями в настоящее время редко используются методы, связанные с переводом части энергии источ-

9.8.2. Значения удельной мощности и эффективности вращательных двигателей различных типов

Показатель	Привод		
	электри- ческий	гидравли- ческий	пневма- тический
Удельная мощность W , кВт/кг	0,02...0,2	0,5...1,0	0,3...0,4
КПД	0,7...0,9	0,7...0,8	0,05...0,2

Численные значения W и КПД вращательных двигателей различных типов (без учета редуктора) представлены в табл. 9.8.2. При учете редукторов распределение сравнительных

ника питания в теплоту. Кроме того, электрическая энергия может быть относительно просто возвращена обратно в сеть, если двигатель работает в режиме торможения или движется под действием внешней нагрузки. В последнее время разработаны и находят применение гидросистемы, где несколько исполнительных органов работают от общей закольцованной напорной линии, в которой поддерживается постоянное давление. В таких системах централизованного питания могут быть реализованы и режимы с рекуперацией энергии.

Дополнительный источник потерь энергии в пневмоприводах - неполное расширение сжатого воздуха в рабочих камерах двигателя, в результате чего не используется часть содержащейся в сжатом воздухе энергии, которая уносится с выпускным потоком. Для уменьшения этих потерь следует совершенствовать законы распределения потоков сжатого воздуха в двигателе, например прекращать его подачу из магистралей задолго до окончания хода рабочего органа. Однако это связано с усложнением алгоритма управления приводом, а также с определенным изменением его динамических характеристик.

Общим видом потерь для гидро- и пневмоприводов являются утечки рабочего тела через неплотности различного вида, в том числе и через уплотнительные элементы поршня, штока, вала и т.п. Уровень их в значительной степени определяется техническим состоянием системы и ее обслуживанием. Следует также обратить особое внимание на относительно большие утечки в пневматических производственных сетях из-за дефектов в трубопроводах, аппаратуре, соединениях. Потери воздуха из сети нередко составляют до 25...30% производительности компрессорной станции. Предотвращение их может привести к значительной экономии затрат электроэнергии на производстве.

Преимущество гидро- и пневмоприводов линейного движения состоит в том, что такое движение наиболее просто реализуется на базе рабочего цилиндра. При этом достигаются точности позиционирования для гидроприводов до $\pm 0,01$ мм, для пневмоприводов до $\pm 0,1$ мм. Для получения более высокой точности и стабильности движений рабочих органов, например в приводах станков, предпочтение отдается вращательным электроприводам с точными шариковинтовыми передачами. Реже применяют чисто линейные электродвигатели ("электроцилиндры"), представляющие собой развернутые на плоскости электромоторы различного принципа действия. Их использование в общем машиностроении сдерживается относительно высокой стоимостью и невысокими значениями показателя W . Вращательное движение в подавляющей массе случаев реализуется с помощью электропривода, если

не действуют какие-либо из факторов, отмеченных в табл. 9.8.1.

Пневмопривод полагается наиболее быстродействующим из всех типов приводов. Для линейного привода обычной считается скорость 1..2 м/с, сравнительно легко может быть получена скоростью до 5 м/с, если только не возникает проблем с организацией больших проходных сечений в коммуникациях для подвода и отвода воздуха, со стойкостью уплотнений на больших скоростях.

Номинальные частоты вращения вращательных пневмоприводов измеряются тысячами и десятками тысяч оборотов в минуту; такие приводы как турбинные или типа "сегнерово колесо" достигают сотни тысяч оборотов в минуту. При этом значительно увеличивается показатель W двигателя, но возникает проблема с редуктором, который в этих случаях должен иметь большое передаточное отношение.

Для линейных гидроприводов характерны скорости 0,5 м/с. Также сравнительно тихходными являются и гидравлические вращательные приводы, но они часто используются как приводы безредукторные прямого действия. Высокие значения W для гидродвигателей обуславливают небольшие габариты и массу. Предел повышения скорости гидропривода ограничен не только проходными сечениями каналов, но и подачей (а также давлением) источника питания (насосной станции). Если гидропривод работает в прерывистом режиме с чередующимися периодами движения и выстоя, то повысить его скорость при неизменном источнике питания можно установкой гидропневматического аккумулятора. В этом случае предельная скорость определяется суммарной подачей рабочей жидкости от насоса и из аккумулятора, причем последний должен быть снова подзаряжен за период выстоя гидропривода.

Динамические качества привода как элемента системы управления оценивают не просто по его предельной скорости, а по качеству отработки им команд управления. От приводов с позиционным управлением требуется, чтобы рабочий орган переместился на заданный ход с заданной точностью за заданное время при отсутствии колебаний во время переходного процесса. Привод с контурным управлением должен с заданной точностью и за заданное время воспроизвести требуемую траекторию. Динамические и точностные показатели привода удобно оценивать по частотным характеристикам, показывающим, с каким искажением воспроизводит привод синусоидальные управляющие сигналы в зависимости от их частоты, а в случае нелинейных систем - и от амплитуды.

При отсутствии особых ограничений на выбор типа привода все решают требования к

его динамике и точности. Применительно к собственно двигателю эти качества во многом зависят от постоянных времени t_M и t^* . Из внешнего сходства уравнений динамики приводов различных типов следует, что каждую из задач можно принципиально решить на основе привода любого типа: достаточно лишь обеспечить необходимые значения t_M и t^* . Однако на практике могут возникнуть трудности, вытекающие из фундаментальных свойств приводов.

1. Двигатели различных типов могут значительно отличаться один от другого по жесткостным характеристикам (по податливости). Например, гидроцилиндр меньше поддается действию внешней силы, чем пневмоцилиндр, поскольку сжимаемость жидкости меньше, чем воздуха. Жесткость двигателя можно увеличить искусственно введением управления с обратной связью по положению рабочего органа, в результате чего интенсифицируется изменение движущей силы как противодействие нагрузке. Это свойство двигателя быстро реагировать на силовые возмущения можно измерять величиной $\dot{F}_{d \max} = C_x \Delta E$. Чем больше $\dot{F}_{d \max}$, тем быстрее изменяется F_d при силовом возмущении (а также при обработке сигналов управления). В двигателях с меньшими значениями коэффициентов жесткости C_x можно обеспечить высокую скорость реакции $F_{d \max}$ интенсификацией энергетических потоков ΔE : за счет увеличения пропускной способности распределительных устройств и общего коэффициента усиления в контуре обратной связи. Первое имеет пределом конструктивные особенности распределителей и их динамические возможности. Рост же коэффициентов обратной связи может привести к потере устойчивости системы привода. По мере совершенствования конструкций распределителей, повышения их быстродействия и с переходом на системы управления, базирующиеся на современных технических и теоретических достижениях, границы допустимой интенсификации ΔE расширяются, о чем свидетельствует, например, создание общепромышленного позиционного пневмопривода с точностью обработки позиции не менее $\pm 0,1$ мм.

2. Одним из условий хорошей управляемости привода является условие $N < N_{гр}$, которое ограничивает постоянную времени t_M относительно постоянной времени t^* двигателя. В приводах с двигателями прямого действия (например, в гидро- или пневмоцилиндрах) инерционная нагрузка определяется в основном приведенной к рабочему органу двигателя массой ведомого механизма. Поэтому требуемое ограничение t_M реализуется выбором па-

раметров двигателя из условия получения необходимой движущей силы. В редукторных приводах предел уменьшения t_M может быть определен собственными свойствами двигателя данного типа. Например, если основную часть инерционной нагрузки составляет момент инерции ротора двигателя, то переходом на двигатель большей мощности не всегда удается понизить значение t_M , поскольку вместе с ростом мощности возрастает и момент инерции ротора.

3. Условие $N < N_{гр}$, ограничивающее N , одновременно означает и ухудшение демпфирующих свойств собственно двигателя. Поэтому в приводах с малыми значениями N приходится решать задачу искусственного повышения демпфирующих свойств с помощью выбора системы управления определенной структуры и параметров.

Глава 10

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ МЕХАНИЗМОВ

10.1. ЗАДАЧИ, РЕШАЕМЫЕ С ПОМОЩЬЮ МЕХАНИЗМОВ

Механизмы используют в приводах, передачах от привода к исполнительному устройству, исполнительных устройствах, системах управления, устройствах взаимосвязи и ориентации агрегатов и машин относительно других объектов. Границы между приводом, передачей и исполнительным устройством условны. Передачу частично или полностью относят к приводу либо к исполнительному устройству. Например, к приводу относят только входное звено механизма, на которое воздействует электромагнитное поле, или рабочее тело (газ, жидкость и т.п.), либо входное звено в совокупности с другими сопряженными с ним звеньями. Исполнительным устройством считают выходное звено механизма или выходное звено в сочетании с другими, связанными с ним, звеньями.

Механизмы, непосредственно соединенные с приводом или относящиеся к приводу, решают задачу преобразования движения из одного его вида в другой вид. Наиболее характерно преобразование возвратно-поступательного движения во вращательное, прерывистого движения в непрерывное, неравномерного в равномерное, и наоборот.

В автономных передачах наибольшее число решаемых задач:

реализация взаимосвязи и передачи механического движения между звеньями, размещенными на некотором расстоянии одно от другого или ориентированными определенным

образом (при пересечении или перекрещивании осей, плоскостей движения звеньев и др.); преобразование параметров одного движения (уменьшение частоты вращения и увеличение вращающего момента, получение нескольких скоростей, плавное изменение скорости и т.п.);

преобразование нагрузочной характеристики в соответствии с характеристикой привода и обеспечение работы привода в оптимальном режиме при различных заданных режимах нагружения исполнительного устройства;

периодическое соединение и разъединение, торможение и остановка звеньев, уменьшение неравномерности движения, колебаний нагрузок и предохранение звеньев кинематической цепи от перегрузок и разрушения;

разделение и суммирование движений (разветвленные, разветвленно-замкнутые и замкнутые кинематические цепи).

Исполнительные устройства механизмов выполняют: манипулирование выходного звена в плоскости или пространстве; захватывание, зажатие, разжатие, прижатие звена или обрабатываемого объекта, приспособливание элементов исполнительного устройства к форме, массе захватываемого объекта или другим внешним, по отношению к этим элементам, воздействиям; согласование во времени и (или) в пространстве движения и ориентации выходных звеньев.

В системах управления механизмами решаются следующие задачи:

формирование (получение), передача, преобразование (усиление) сигнала управления объекту управления;

осуществление обратной связи объекта управления с системой передачи и преобразования сигнала управления.

В устройствах взаимосвязи и ориентации агрегатов и машин относительно других объектов решаются следующие задачи:

согласование движений и (или) ориентации агрегатов и связанного с ним объекта, получение заданного относительного движения и (или) заданной относительной ориентации;

приспособливание элементов взаимосвязи агрегата и объекта к форме объекта (равномерное или определенное нагружение элементов взаимосвязи и конструкции объекта);

периодическое изменение (увеличение) поверхности опирания агрегата на связанный с ним объект (например, использование выносных опор);

снятие ударных нагрузок, виброизоляция, предохранение от перегрузок.

Как правило, ряд функциональных задач решается одновременно в одном механизме. В то же время одну и ту же задачу можно решить различными средствами, используя раз-

личные механизмы. При выборе схемы механизма руководствуются соотношением его качественных показателей: КПД, габаритных размеров и массы, стоимости изготовления.

Точность воспроизведения заданной функции и быстродействие относятся к характеристикам средства решения задачи. Если, например, механизм не позволяет воспроизвести функцию с заданной точностью, это означает, что он вообще не способен решить данную функциональную задачу. То же самое относится к допустимому уровню вибрации, шума и других показателей, определяемых эргономическими и экологическими требованиями. Некоторые из этих характеристик могут перейти в разряд качественных показателей в конкретной ситуации сравнения механизмов, равноценных по другим показателям и характеристикам.

Возможность решения той или иной задачи зависит от структуры механизма, его кинематической схемы, параметров схемы и конструктивных исполнений звеньев и кинематических пар. С учетом решаемых задач все механизмы могут быть разделены на три группы: передаточные; манипулирующие; зажимные и деформирующие. В любом механизме имеется хотя бы одна кинематическая пара, относительное движение звеньев которой задано. Имеется также одно или несколько выходных звеньев, для осуществления движений которых предназначен механизм. В передаточных механизмах получают движение выходных звеньев, образующих со стойкой и (или) между собой кинематические пары. В манипулирующих механизмах получают движение выходных звеньев, образующих кинематические пары только с подвижными звеньями, которые не являются выходными. Зажимные и деформирующие механизмы предназначены для перемещения выходных звеньев к зажимаемому (или растягиваемому) объекту и оказанию на него силового воздействия при отсутствии перемещений либо при незначительных перемещениях, обусловленных, например, деформированием зажимаемого объекта.

Основой функционирования передаточных и манипулирующих механизмов является движение выходных звеньев, а зажимных механизмов - давление без относительного перемещения.

По характеру обеспечения устойчивого функционирования различают следующие механизмы: статически существующие, относительное движение звеньев которых не зависит от ускорения и скорости их движения; динамически существующие, определенность относительного движения которых обусловлена инерцией, упругостью, периодическими ударами и (или) трением звеньев. Статически существующие механизмы характеризуются числом степеней свободы, равным числу зада-

ваемых параметров движения или обычно числу входных звеньев. В динамически существующих механизмах число степеней свободы больше числа задаваемых параметров движения.

10.2. ПЕРЕДАТОЧНЫЕ МЕХАНИЗМЫ

10.2.1. Механизмы циклического движения

Преобразовать вращательное движение в циклическое (например, в возвратно-поступательное) движение или, наоборот, циклическое поступательное движение во вращательное в простейшем исполнении можно с помощью кривошипно-ползунного, кривошипно-кулисного, плоского, пространственного рычажного, плоского или пространственного кулачкового механизмов. Характерно, что один и тот же механизм при инверсии входного и выходного звеньев позволяет преобразовывать движение в обратном направлении.

Наиболее распространенная задача преобразования возвратно-поступательного движения во вращательное решается обычно в кривошипно-ползунном плоском механизме.

В радиально-поршневом гидромоторе в корпусе 1 размещены симметрично несколько цилиндров (рис. 10.2.1). В цилиндрах под действием жидкости перемещаются поршни 2, которые через шатуны 3 воздействуют на эксцентриковый (кривошипный) вал 4, являющийся выходным звеном. Жидкость под давлением подается в цилиндры поочередно через гидрораспределитель 5, вращающийся вместе с выходным звеном.

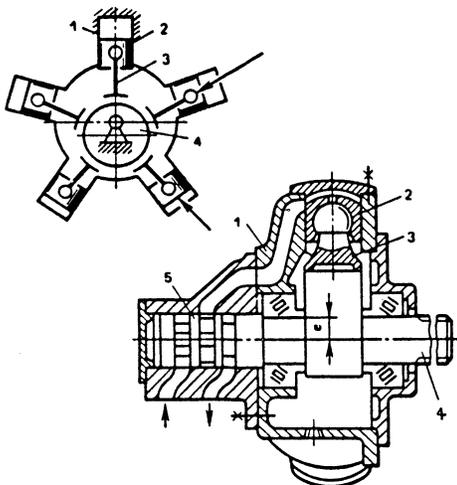


Рис. 10.2.1. Кривошипно-ползунный механизм в радиально-поршневом гидромоторе

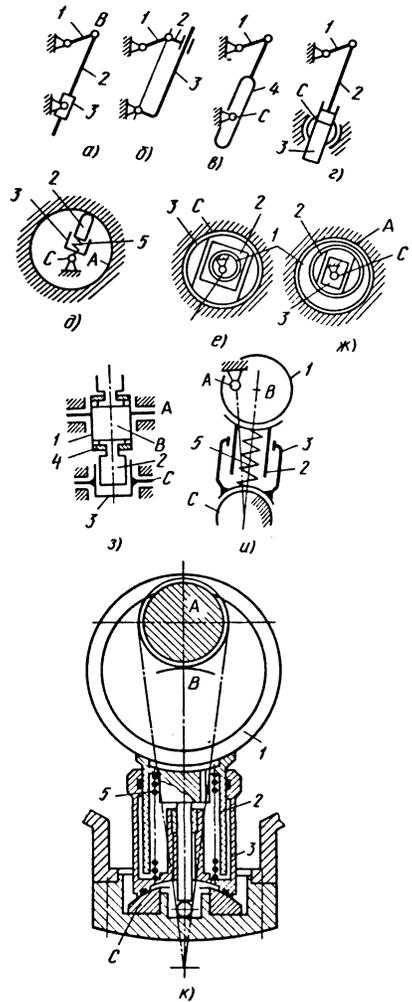


Рис. 10.2.2. Кривошипно-кулисные механизмы

Кривошипно-ползунный механизм может быть превращен в кривошипно-кулисный, если, не меняя структуры механизма, выполнить неподвижным шатун и обеспечить возможность движения стойки. Кривошипно-кулисный механизм, так же как и любой другой механизм, может иметь много вариантов исполнения, характеризующихся различными качественными показателями (рис. 10.2.2). Для получения вариантов исполнения механизмов используют совмещение функций звеньев, выполнение элементов шарниров и других кинематических пар большими по размерам, чем размеры звеньев, замену охватываемых элементов охватываемыми, размещение одних звеньев и элементов кинематических пар внутри других элементов кинематических пар,

замену одних звеньев и кинематических пар другими звеньями и парами с теми же функциональными признаками.

В кривошипно-кулисном механизме могут быть:

кулиса 3 охватывающая, ползун 2 охватываемый (рис. 10.2.2, а);

кулиса 3 охватываемая, ползун 2 охватывающий (рис. 10.2.2, б);

кулиса и ползун, совмещенные в звене 4, взаимодействующем с элементом шарнира С (рис. 10.2.2, в);

ползун и кулиса, выполненные в виде поршня 2 и цилиндра 3, размещенного внутри шарнира С (рис. 10.2.2, е);

функции кривошипа и шарнира А, совмещенные в элементе шарнира А, охватывающем все остальные детали (рис. 10.2.2, д). Центр кривизны поверхности А смещен по отношению к центру шарнира С. Ползун 2 с поверхностью А образуют высшую кинематическую пару с силовым замыканием пружины 5. Кривошипно-кулисный механизм такого типа широко используется в гидромашинах;

кривошип 1, выполненный в виде эксцентрика и помещенный внутрь ползуна 2, который находится внутри кулисы 3 (рис. 10.2.2, е). Все звенья вместе помещены внутрь шарнира С;

кулиса 3, размещенная в ползуне 2, который находится внутри кривошипа 1, выполненного в виде эксцентрика (рис. 10.2.2, ж). Все звенья размещены внутри шарнира А.

Конструкция, являющаяся разновидностью двух последних вариантов, имеет большую жесткость при ведущей кулисе, но более низкий КПД ввиду больших углов давления и скоростей скольжения, обусловленных соотношением размеров, по сравнению с рассмотренными выше.

В радиально-поршневом гидромоторе (рис. 10.2.2, з) опора С выполнена в виде цилиндрической вращательной пары. Эксцентрик вал 1 взаимодействует с поршнями 2, которые прижимаются к нему кольцом С, осуществляющим геометрическое замыкание.

Кулиса 3 (рис. 10.2.2, и, к) кривошипно-кулисного механизма опирается на сферическую поверхность С, расположенную в корпусе, а поршень 2 взаимодействует со сферической поверхностью В эксцентрикового вала (кривошипа) 1. Поршень и кулиса образуют рабочую камеру, в которую поступает жидкость. Поршень и кулиса прижаты к сферическим поверхностям пружины 5.

Кулисный четырехзвенный (рис. 10.2.3, е) и кривошипно-ползунный механизмы (рис. 10.2.3, д) нашли применение в аксиально-поршневом гидромоторе (рис. 10.2.3, а). Гидромотор имеет блок цилиндров 3, наклонный по отношению к оси выходного звена (рис. 10.2.3, а - е), или диск, наклонный по отно-

шению к оси блока цилиндров (рис. 10.2.3, д). Гидромотор работает в первом случае благодаря наличию угла между осью блока цилиндров 3 и осью выходного звена 6, а во втором - благодаря связи или контакту поршней 4 с плоским торцом диска 9.

Жидкость под давлением через гидрораспределитель 2 подается в рабочую полость и давит на поршень 4. Поршень через шатун 5 взаимодействует с диском 7, закрепленным на выходном звене 6, и приводит его во вращение. Сила давления \bar{F} от поршня на торцовую поверхность диска направлена под углом α к этой поверхности (рис. 10.2.3, в). Вращающий момент возникает благодаря действию окружной составляющей силы \bar{F} на плече h . Вращающий момент $M = Fh \sin \alpha$.

Блок цилиндров 3 опирается на сферическую пяту 1 и центрируется посредством шаровой опоры 8. В цилиндры жидкость подается поочередно благодаря вращению блока 3 относительно гидрораспределителя 2. Блок приводится во вращение под действием диска 7 на шатун 5, а шатуна - на поршень 4 (рис. 10.2.3, б) и далее на блок цилиндров. Блок цилиндров неподвижен и расположен соосно с выходным звеном - кривошипом с пересекающимися осями элементов шарниров.

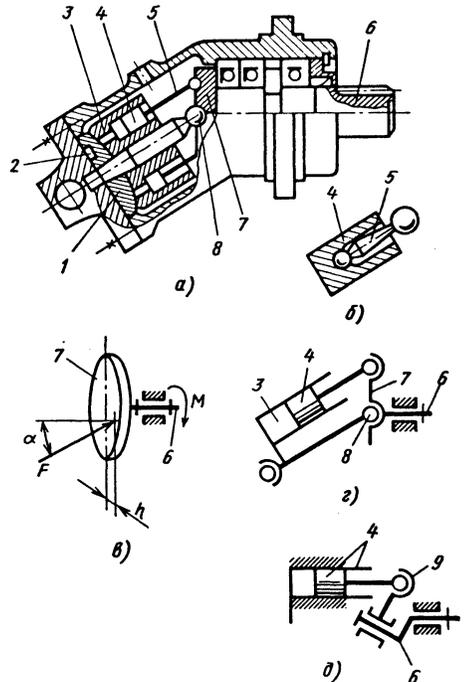


Рис. 10.2.3. Четырехзвенные рычажные механизмы в аксиально-поршневом гидромоторе

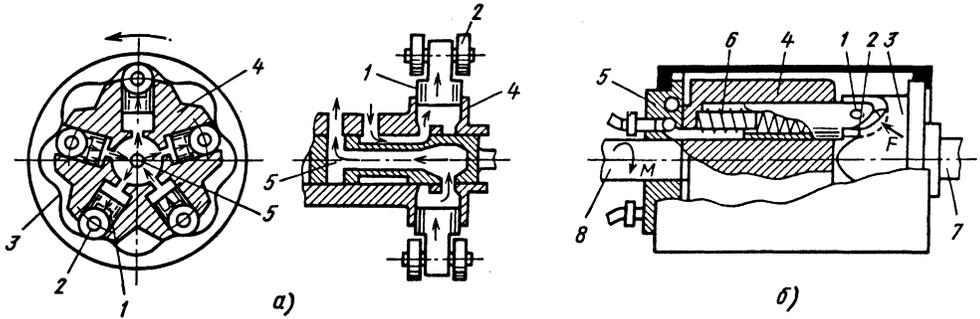


Рис. 10.2.4. Кулачковый механизм в гидромоторе:
а - радиально-поршневом; б - аксиально-поршневом

Из кулачковых механизмов, используемых для преобразования циклического поступательного движения во вращательное, интерес представляют дифференциальные механизмы, которые применяют, в частности, в гидромоторах (рис. 10.2.4). Они имеют многократно повторенный кулачок 3 и взаимодействующие с ним толкатели 2, число которых отличается от числа циклов изменения профиля кулачка. При этом важно, чтобы числа выступов и роликов были четными и нечетными, или наоборот, что позволяет находиться выступам и пазам одновременно в разных фазах взаимодействия и иметь различные углы давления.

Толкатели-поршни 1 с роликами 2 приводятся в движение гидроцилиндрами, размещенными в блоке 4. Ролики контактируют с кулачком 3. Число роликов, например, меньше числа выступов на кулачке. При последовательном изменении давления в цилиндрах можно заставить непрерывно вращаться кулачок под действием боковой составляющей силы в точке контакта роликов и кулачка. При полном цикле последовательного перемещения всех толкателей кулачок повернется на угловой шаг между двумя выступами. В радиально-поршневом гидромоторе (рис. 10.2.4, а) у поверхности кулачка восемь выступов, восемь впадин и пять толкателей. Выходным звеном может быть кулачок 2 или блок цилиндров 4. С кулачком жестко соединен гидрораспределитель 5. За один оборот кулачка каждый из поршней 1 совершает по восемь циклов возвратно-поступательного движения. Число циклов не зависит от числа поршней. Такое решение обеспечивает развитие значительных моментов при невысокой частоте вращения выходного звена. Работа гидромотора характеризуется некоторой неравномерностью хода, обусловленной пульсацией подачи жидкости.

В аксиально-поршневом гидромоторе (рис. 10.2.4, б) поршни 1 взаимодействуют с цилиндрическим кулачком 3 через ролики 2.

Реакция \bar{F} со стороны кулачка направлена по нормали к взаимодействующим поверхностям. Наличие вращательного момента, уравнивающего момент M , обусловлено окружной составляющей реакции \bar{F} , расположенной на некотором расстоянии от оси выходного звена. Поршни прижаты к кулачку посредством пружин 6. Гидрораспределитель 5 соединен с кулачком. Выходным может быть звено 8, соединенное с блоком цилиндров 4, или звено 7, соединенное с кулачком.

Одной из решаемых задач с помощью передаточных механизмов циклического движения является получение в процессе цикла движения длительной остановки выходного звена (рис. 10.2.5). Приближенный выстой характеризуется в допустимых пределах незначительными перемещениями выходного звена (рис. 10.2.5, а). Для этой цели приближенный круговой направляющий кривошипно-коромысловый механизм $ABCDE$ соединен

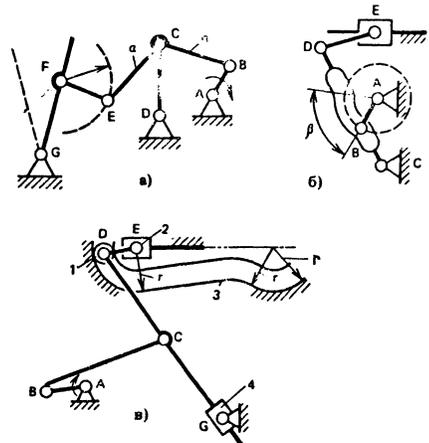


Рис. 10.2.5. Передаточные механизмы, характеризуемые выстоями выходного звена

венном FE с коромыслом FG . На определенной участке точка E описывает траекторию, близкую к дуге радиусом FE . Это приводит к тому, что точка F продолжительное время (около $1/2$ цикла) практически остается неподвижной, а следовательно, неподвижно звено FG . Чтобы механизм действовал, он должен иметь следующие параметры: $AG=2,36a$; $DG=1,66a$; $FG=0,80a$; $EF=0,66a$; $AD=0,76a$; $AB=0,30a$; угол $BCE=114^0$.

Аналогично могут быть получены механизмы, приближенно и точно воспроизводящие выстой. Для этого присоединяют дополнительные звенья к приближенным или точным направляющим механизмам. К прямолинейному направляющему механизму присоединяют дополнительные звенья посредством поступательной пары. Довольно просто осуществить выстой в кулачковых механизмах и механизмах с криволинейной кулисой. Для этого достаточно, например, иметь участок профиля кулачка или кулисы постоянной кривизны. Так, кулиса DC (рис. 10.2.5, б) имеет участок профиля постоянной кривизны, соответствующий углу β поворота кривошипа AB . Ползун E имеет выстой в левом крайнем положении.

В механизме с двумя точными выстоями в начале и в конце хода ползуна 2 (рис. 10.2.5, в) использован неподвижный кулачок 3 с двумя участками постоянной кривизны радиусом r . На этих участках ролик 1 обкатывается по дуге окружности, а звено DE поворачивается вокруг точки E , которая остается неподвижной. Движение точки D сообщается звеном DC , перемещаемым в кулисе 4. Качательное движение звену DC сообщается через шатун BC от входного звена - кривошипа AB .

Циклические механизмы, осуществляющие движение с остановкой, применяются в частности в станках-автоматах и автоматических линиях.

10.2.2. Механизмы прерывистого движения

С помощью механизмов прерывистого движения решаются следующие задачи:

- преобразования непрерывного вращательного движения или возвратно-поступательного в однонаправленное прерывистое поступательное движение - шаговое перемещение (подачу);

- преобразования циклического возвратно-поступательного движения в однонаправленное поступательное или вращательное шаговое перемещение с фиксированными точными остановками;

- получения однонаправленного практически непрерывного движения в результате

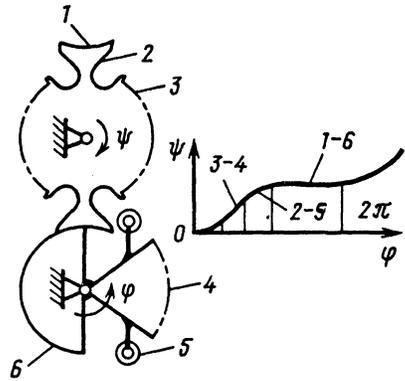


Рис. 10.2.6. Зубчато-мальтийский механизм

- преобразования импульсных воздействий на входное звено (вибродвигатели);

- преобразования непрерывного вращательного движения в колебательное движение (вибровозбудители);

- получения импульсных воздействий со стороны выходного звена при непрерывном движении входного звена (ударно-вибрационные машины).

Широко распространено преобразование непрерывного вращения в прерывистое с помощью мальтийских и комбинированных механизмов (рис. 10.2.6). Зубчато-мальтийский механизм обеспечивает плавное движение с остановками (рис. 10.2.6). Входное звено поворачивается в направлении φ , а выходное звено - в направлении ψ . На каждом из звеньев закреплены элементы стопорного устройства мальтийского и зубчатого механизмов. Цикл движения происходит в такой последовательности: зацепляются зубчатые секторы 4 и 3; взаимодействует ролик 5 с пазом 2; взаимодействует поверхности 6 и 1 стопорного устройства.

Этой последовательности соответствует изменение угла ψ в зависимости от угла φ (участки взаимодействия звеньев 3 - 4, 2 - 5 и 1 - 6). Применяют зубчато-мальтийский механизм в роторных линиях.

Механизм А. Ш. Колискора (рис. 10.2.7) предназначен для преобразования вращения звена в шаговое поступательное движение выходного звена - толкателя 3. Вал 1, установленный в опорах, непрерывно вращается в направлении ω_1 , наматывая ленту 2. За каждый оборот вала толкатель 3, прижатый к ленте, смещается в направлении v_3 на толщину ленты δ . При направлениях угловой скорости ω_1 , вращающего момента M_1 и силы сопротивления F_c , показанных на рис. 10.2.7, осуществляется самонапряжение ленты и ее слои плотно накладываются один на другой. При

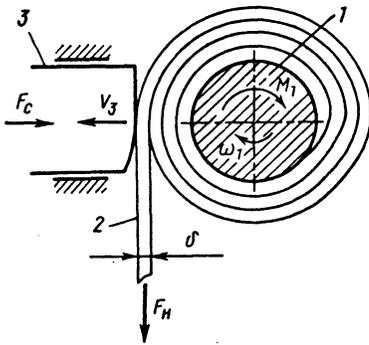


Рис. 10.2.7. Шаговый кулачковый механизм с изменением радиуса кулачка

реверсировании движения (направления ω_1) и сохранении направления действия момента M_1 и силы F_c требуется сила натяжения F_H ленты, достаточная, чтобы преодолеть силу трения и момент сопротивления M_1 .

Механизм обеспечивает точную шаговую подачу звена 3, имеет высокую жесткость, используется, в частности, в станках для корректирующего движения с шагом 0,01 мм за один оборот. В механизме передача движения возможна только от звена 1 к звену 3 при ведущем звене 1. Придание звену 3 функции ведущего звена невозможно, поскольку в этом случае имеет место самоторможение.

В механизме шагового перемещения выходного звена на одну и ту же величину и в одну и ту же сторону и стопорения выходного звена во время его остановки (рис. 10.2.8) ползун 6 связан с помощью параллелограмма $BCDE$ с поступательно перемещаемым стержнем 2. В показанном на рисунке положении стержень движется строго вертикально благодаря соединению звена BE с кареткой 3, удерживаемой в данном положении фиксатором 7. Каретка 3 соединена со звеньями па-

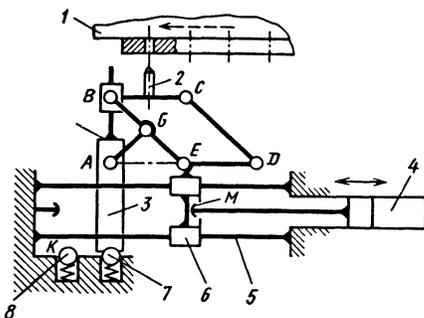


Рис. 10.2.8. Механизм шагового ливнейного перемещения с фиксированным выступом

раллелограмма поступательной парой B и звеном AG . При соблюдении условия $AG=BG=GE$ каретка 3 может перемещаться поступательно вдоль направляющих 5, не контактируя с ними. При движении ползуна 6 влево стержень 2 входит в отверстие выходного звена 1 до упора, затем усилие передается каретке 3, преодолевается сопротивление фиксатора 7 и все подвижные звенья как одно целое перемещаются влево до контакта каретки 3 с упором K . При этом звено 1 перемещается ровно на один шаг.

Затем гидроцилиндр начинает двигаться вправо. Каретка 3 удерживается фиксатором 8, а ползун 6, перемещаясь вправо по кулисе 5, воздействует на стержень 2 через параллелограмм $BCDE$, выдерживает его из отверстия. Звено BC перемещается вниз до упора L , после чего преодолевается сопротивление фиксатора 8 и каретка 3 перемещается в положение, определенное срабатыванием фиксатора 7. Далее движение поршня гидроцилиндра реверсируется, и цикл повторяется. Чтобы исключить необходимость точной остановки поршня гидроцилиндра 4, связь его штока с ползуном 6 в паре M целесообразно выполнить упругой.

В данном устройстве использован поступательно-прямолинейный направляющий механизм, который имеет два режима воспроизведения взаимно перпендикулярного перемещения при следующих сочетаниях функций звеньев:

входное звено 6, стойка BC и выходное звено 3;

входное звено 6, стойка 3 и выходное звено BC .

В шаговом механизме для поворота выходного звена (звездочки 2) и стопорения его в определенном положении при возвратно-поступательном движении входного звена (ползуна 1) при движении ползуна вправо (рис. 10.2.9, a) звено 2 поворачивается под действием силы F_k , отклоняющейся от нормали NN на угол ρ , но создающей момент $F_k h$, обеспечивающий поворот в направлении стрелки. Стопор 3 препятствует случайному повороту звездочки в другую сторону. На рис. 10.2.9, b звено 2 зажато клином ползуна 1. На рис. 10.2.9, $в$ при движении ползуна влево звездочка поворачивается под действием упора K , пока грань C не займет горизонтальное положение, тогда упор K свободно проходит под гранью благодаря наличию зазора δ , стопор 3 в процессе поворота утопится, а затем займет положение, показанное на рис. 10.2.9, a .

Разновидностью механизмов прерывистого движения являются устройства, преобра-

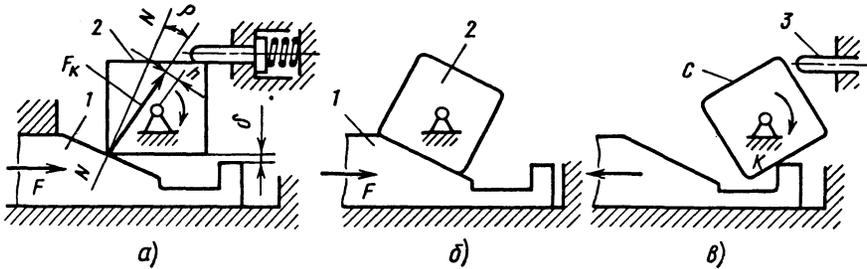


Рис. 10.2.9. Механизм шагового поворота со стопорением выходного звена

зующие механические колебания (вибрацию) в однонаправленное движение выходного звена (рис. 10.2.10). Механические колебания получают с помощью вибровозбудителей: гидравлических устройств, электромагнитов, вращающихся неуравновешенных грузов и др. Они преобразуются в однонаправленное поступательное или вращательное движение, например, с помощью механизмов свободного хода. В настоящее время имеются механизмы свободного хода, основанные на более тонких явлениях различия трения, бесконтактного магнитного взаимодействия и др. Но принципиальная схема устройств у них аналогична приведенной на рис. 10.2.10.

Звенья 2 и 4, установленные в механизмах свободного хода соответственно 1 и 5, связаны между собой поступательной парой и пружиной 3. Механизмы свободного хода 1 и 5 позволяют двигаться звеньям только вправо. Звеньям 2 и 4 задается относительное колебательное движение с помощью устройства D. В период относительного сближения звеньев звено 4 удерживается механизмом свободного хода 5, а звено 2 свободно движется вправо. В период относительного удаления звеньев звено 2 удерживается механизмом свободного хода 1, а звено 4 движется вправо, преодолевая силу сопротивления \bar{F}_c . Повторные колебания приводят к прерывистому однонаправленному движению звена 4 вправо. Такие устройства применяют в прессах, домкратах, механизмах подачи заготовок и др.

Одну из особых групп рассматриваемой разновидности механизмов прерывистого движения представляют вибродвигатели - устройства, преобразующие высококачественные пространственные колебания деформируемых

тел в направленное (в ряде случаев практически непрерывное) движение выходного звена. Одним из новых и прогрессивных решений вибродвигателей является использование для получения высокочастотных колебаний обратного пьезоэлектрического эффекта - появления механических деформаций под действием электрического поля [2].

В качестве вибровозбудителей используют пластины, кольца и другие детали, выполненные из специальных материалов - пьезоэлектриков. Например, показанный на рис. 10.2.11, а вибровозбудитель в виде пластины составлен из элементов 1 - 4, в которых подсоединены электроды. В пластине могут быть возбуждены продольные колебания при подаче на электроды C тока высокой частоты (элементы 1 и 3 одновременно удлиняются или укорачиваются вдоль оси x) и изгибные колебания при подаче тока на электроды A и B (элементы 2 и 4 поочередно укорачиваются или удлиняются).

Пластина 5 (рис. 10.2.11, б) контактирует с ротором 6 в точке D. При этом точка D пластины вследствие продольных и изгибных колебаний движется по эллипсу. При совпадении увеличения прижатия и удлинения пластины ротор проворачивается, при укорачивании пластины в момент отсутствия или уменьшения прижатия ротор стоит на месте. Необходимое начальное прижатие обеспечивает пружина 7. Многократные импульсы приводят к непрерывному вращению ротора. Аналогично можно получить поступательное движение, если ввести во взаимодействие с пластиной ползун.

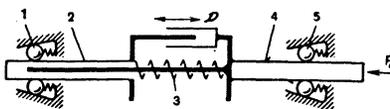


Рис. 10.2.10. Механизм преобразования колебаний в одностороннее прерывистое движение

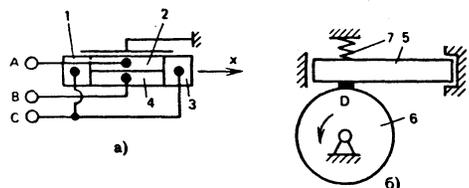


Рис. 10.2.11. Вибродвигатель на основе вибровозбудителя, выполненного из пьезоэлектрика

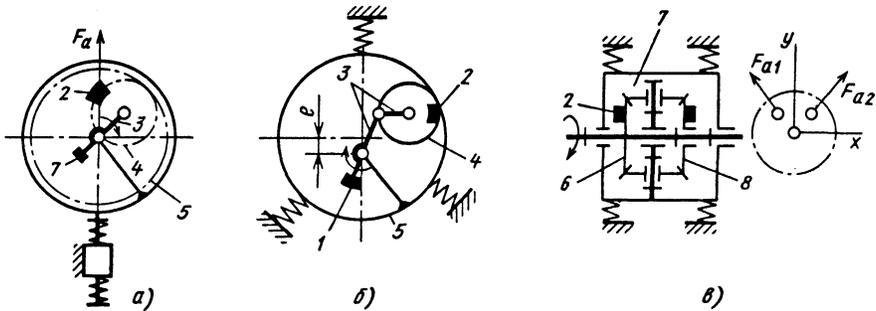


Рис. 10.2.12. Механические вибровозбудители

Пьезоэлектрический эффект используют также для управления связью элементов кинематической пары в зоне контакта при ее внешнем нагружении. Радиальные и касательные колебания приводят к изменению коэффициента трения и обеспечивают, например, движение в заданном направлении при произвольном действии внешних сил. Такие кинематические пары называют виброопорами. Вибродвигатели позволяют осуществлять перемещения с высокой точностью, но при небольших силах.

Разновидностью механизмов прерывистого движения являются устройства, преобразующие однонаправленное вращение в механические колебания (вибрации) выходного звена. Возможны два способа возбуждения колебаний: кинематический с использованием любого механизма, преобразующего непрерывное движение в качательное или возвратно-поступательное (рис. 10.2.12, а); силовой — получаемый за счет колебательного или вращательного движения инерционного элемента. Механизмы, реализующие второй способ, — это динамически существующие механизмы. В неработающем состоянии в них либо отсутствует замыкание звеньев в кинематических парах (рис. 10.2.12, б, в), либо имеется лишняя степень свободы, поэтому положение звеньев, характер их движения зависят от задаваемой частоты вращения входного звена.

На рис. 10.2.12 приведены вибровозбудители с инерционным элементом, который обычно выполнен в виде дебаланса, бегунка или другого устройства [5]. Упругие элементы соединяют вибровозбудитель со стойкой или представляют собой среду, в которую помещен вибровозбудитель. В качестве такой среды может быть, например, уплотняемая бетонная смесь. Используют вибровозбудители также для уплотнения грунта, для выбивки отливок из опок, при испытании конструкций приборов и аппаратов на виброустойчивость и т.п.

В механизме, показанном на рис. 10.2.12, а, дебаланс 2 движется по прямой линии и обеспечивает строго направленные

вибрации вдоль линии действия силы \bar{F}_a . Для этой цели может быть использован любой механизм с возвратно-поступательным движением дебаланса 2. В данном примере — это планетарный механизм, у которого сателлит 4 имеет в 2 раза меньшее число зубьев, чем колесо 5. Водило 3 и сателлит уравновешены противовесом 1.

В схеме, показанной на рис. 10.2.12, б, использован плоский несоосный планетарный механизм. Смещение оси вращения водила 3 на величину e приводит к тому, что сателлит 4 с дебалансом 2, прижимаясь к поверхности колеса 5, то приближается, то удаляется от оси вращения водила. При этом соответственно изменяется возмущающая сила. В процессе обкатывания сателлит будет вращаться неравномерно, соответственно изменяется и высокая частота колебаний вибровозбудителя. В вибровозбудителе с направленными колебаниями (рис. 10.2.12, в) силы инерции действуют в параллельных плоскостях. Центральные колеса 6 и 8 взаимодействуют через промежуточные колеса 7 и вращаются с одинаковой частотой, но в разные стороны. Силы инерции \bar{F}_{a1} и \bar{F}_{a2} направлены таким образом, что их вертикальные составляющие суммируются и получается одна вертикальная возмущающая сила, а горизонтальные составляющие образуют переменный вращающий момент вокруг оси y .

К механизмам, функционирование которых обусловлено динамическими явлениями, относятся передаточные устройства ударно-вибрационных машин. В них каждый цикл колебательного движения рабочего звена сопровождается ударом о другие элементы машины (рис. 10.2.13) или обрабатываемую среду (рис. 10.2.14). Ударное взаимодействие обеспечивает возвратное движение рабочего звена и повторяемость процесса; кроме того, повторяемые удары приводят к прерывистому одно-

направленному движению выходного звена (закручивание гайки, погружение свай и др.) или обеспечивают прерывистую обработку поверхности, а также другие технологические операции.

Принцип действия ударно-вибрационной машины в качестве гайковерта следующий (рис. 10.2.13). На ведущем звене выполнены винтовые пазы 5, в которых размещены шарики 4, взаимодействующие с ползуном 3. При повороте звена один из шариков, перемещаясь по винтовому пазу увлекает ползун вправо. Пружина 6 при этом сжимается до тех пор, пока выступ *B* ползуна не выйдет из соприкосновения с выступом *A* выходного звена 2. Под действием силы упругости пружины 6 ползун *B* перемещается влево и одновременно поворачивается вокруг оси вследствие движения шарика 4 по винтовому пазу. Движение выступа *B* происходит примерно по траекто-

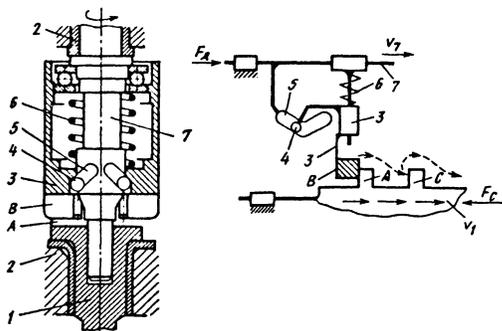


Рис. 10.2.13. Ударно-вибрационная машина, используемая в качестве гайковерта

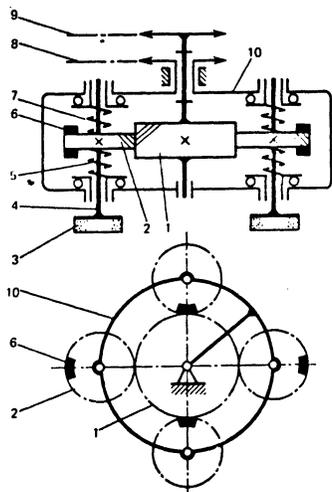


Рис. 10.2.14. Ударно-вибрационная машина в шлифовальном станке

рии, показанной на рис. 10.2.13 до соударения выступов *B* и *C*. Затем цикл повторяется. На рис. 10.2.13 F_d , F_c - соответственно движущая сила и сила сопротивления; v_7 и v_1 - окружная скорость соответственно звена 7 и прерывистого движения звена 1. Периодические удары обеспечивают необходимую степень затяжки винтового соединения при существенно меньшей мощности привода.

Получить заданное движение выступа таким, чтобы не было соударений других звеньев или нерабочих поверхностей выступов (например, торцовых), можно только при определенных параметрах механизма. В отличие от большинства механизмов, в которых соотношение параметров движения входного и выходного звеньев зависит в основном от геометрии звеньев и кинематических пар, первостепенное значение имеют массы звеньев, упругие свойства пружины, соотношение движущих сил и сил сопротивления.

Ударно-вибрационная машина с несколькими исполнительными устройствами, совершаемыми сложное движение, предназначена для осуществления технологического процесса (рис. 10.2.14). Механизм использован, в частности, для привода шлифовальных кругов 3, совершающих планетарное движение. Водило 10 приводится во вращение с помощью передачи 8. Центральное колесо 1 неподвижно либо ему сообщается дополнительное вращение с помощью передачи 9. На спутниках 2 грузы 6 установлены так, что радиальные составляющие сил инерции, получаемых при вращении водила, взаимноуравновешиваются и центральный подшипник водила не нагружается силами инерции.

Вращение водила приводит к обкатыванию спутников 2 по центральному колесу 1. При повороте спутников линия действия сил инерции смещается относительно полюса зацепления пары колес 2 и 1. Это приводит к возникновению переменных по величине и направлению сил в зацеплении и моментов сил на звеньях 1 и 2 при наличии моментов сопротивления. Колеса 2 и 1 косозубые. Поэтому осевая составляющая силы приводит к колебаниям спутника 2 вместе с закрепленным на валу 4 шлифовальным кругом 3. Шлифовальный круг ударяется об обрабатываемую поверхность, вращаясь, снимает частицы материала и движется вверх. Затем цикл повторяется. Поскольку спутник поджат пружинами 7 и 5, то обеспечивается плавный характер осевых движений.

Все осевые составляющие сил, действующих на центральное колесо, а также сил, действующих на водило, взаимно уравновешены. Вращением центрального колеса 1 регулируют параметры движения выходных звеньев.

К механизмам прерывистого движения относятся преобразователи механических ко-

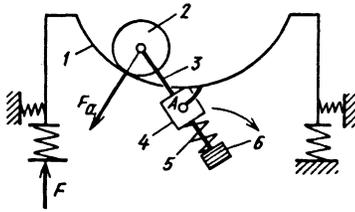


Рис. 10.2.15. Маятниковый виброгаситель

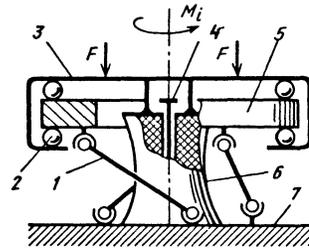
лебаний одного звена в механические колебания другого звена или относительные колебания звеньев в кинематической паре. Такие механизмы в основном используют для гашения или поглощения колебаний. Неотъемлемыми компонентами таких устройств являются упругие и инерционные элементы и (или) пары трения. Конструктивным приемом гашения колебаний практически без поглощения энергии является присоединение к колеблющемуся звену через кинематическую пару и (или) упругий элемент дополнительного звена (рис. 10.2.15). Подвеска этого звена и его масса выбираются такими, чтобы звено совершало колебания с частотой, подстраиваемой к частоте возбуждения, а его реакция в кинематической паре препятствовала колебанию объекта.

Маятниковый виброгаситель предназначен для уменьшения амплитуды поперечных колебаний платформы транспортного средства вследствие упругого присоединения к ней качающегося груза. Криволинейная направляющая 1 прикреплена к платформе транспортного средства. Груз 2 выполнен в виде катка, шарнирно соединен со звеном 3, которое перемещается в кулисе 4. Кулиса 4 шарнирно соединена с платформой в точке А. Груз 2 прижат к направляющей пружиной 5. На конце звена 3 установлен противовес 6. При раскачивании платформы точка А перемещается в направлении штриховой стрелки, груз 2 стремится сохранить свое положение в пространстве и катится по направляющей. При увеличении частоты колебаний максимальное сжатие пружины возрастает, а реакция \bar{F}_a катка 2 на направляющую увеличивается и препятствует в какой-то мере возбуждающему воздействию \bar{F} . Реакция \bar{F}_a направлена навстречу скорости перемещений точек платформы и стремится прижать платформу к дорожному полотну. Маятниковый виброгаситель за счет перемещения и подъема груза и сжатия аккумулирует энергию при удалении платформы от среднего положения и возвращает ее при приближении платформы к среднему положению. При этом амплитуда колебаний уменьшается.

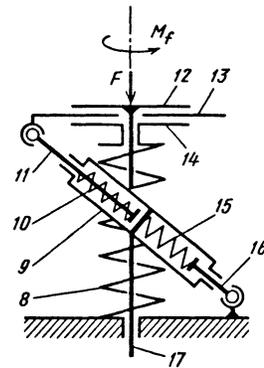
Виброизоляторы преобразуют возвратно-поступательное движение входного звена в

колебательное винтовое движение выходных звеньев (рис. 10.2.16). Виброизолятор, показанный на рис. 10.2.16, а имеет упругий элемент 6 между станиной 3 и основанием 7. От боковых перемещений станина и основание зафиксированы направляющим стержнем 4. В станине установлен маховик 5 на шариковых опорах 2. Маховик соединен с основанием наклонными звеньями 1, оси которых образуют поверхность двуполостного гиперболоида. При цикле сжатия элемента 6 под действием сил \bar{F} маховик раскручивается в одну сторону, преодолевая при этом момент сил инерции M_b , при цикле расслабления элемента 6 его вращение реверсируется. При этом амплитуда колебаний и виброускорения перемещений станины уменьшаются. Часть энергии поглощается элементом 6 и теряется при трении в опорах маховика и шарнирах звеньев.

На рис. 10.2.16, б показан виброизолятор в виде связанных между собой пружины 8, смягчающей удары, и фрикционного устройства в виде дискового тормоза (звенья 12 - 14), гасящего колебания. Под действием силы удара \bar{F} ползун 17 перемещается в направляющей, пружина 8 сжимается, и, поскольку сама пружина почти не поглощает энергию, начи-



а)



б)

Рис. 10.2.16. Виброизоляторы

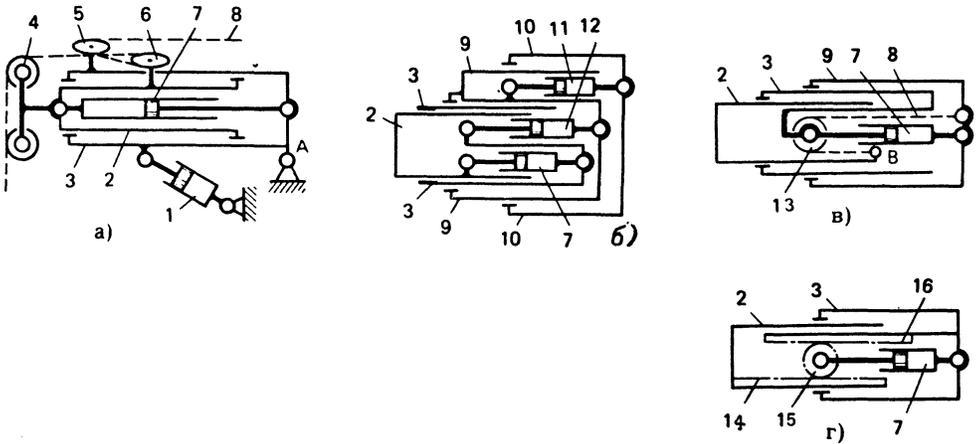


Рис. 10.2.17. Механизмы в телескопических стрелах

нается колебательный процесс. Но при этом упругая тяга, составленная из звеньев 11, 9 и 16, заставляет поворачиваться диск 13, зажатый с обеих сторон дисками 14 и 12. За счет момента трения M_f между дисками энергия колебаний переходит в теплоту. Тяга характеризуется упругостью в обоих направлениях движения. При этом если ползун 17 движется вниз, то сжимается пружина 15, если он движется вверх, то сжимается пружина 10.

10.2.3. Механизмы преобразования параметров поступательного движения

Наиболее распространенной задачей преобразования параметров поступательного движения является увеличение хода выходного звена по сравнению с ходом используемых механизмов, например, когда бывает недостаточно хода используемых гидроцилиндров. Механизмы поступательного движения с увеличенным ходом широко используют для привода телескопических стрел грузоподъемных кранов. В двухсекционной стреле (рис. 10.2.17, а) секция 3 шарнирно установлена на раме машины. Стрела поднимается (поворачивается относительно шарнира А) гидроцилиндром 1. Секция 2 перемещается относительно секции 3 гидроцилиндром 7. Чтобы крюк, подвешенный к канату 8, не поднимался, а опускался относительно головки 4 стрелы при движении секций, применена специальная запасовка каната. На секциях установлены блоки 5 и 6, огибаемые канатом 8.

В четырехсекционной стреле (рис. 10.2.17, б) секция 2 выдвигается из секции 3 гидроцилиндром 7, секция 3 из секции 9 - гидроцилиндром 12, а секция 9 из секции 10 - гидроцилиндром 11. В трехсекционной стреле (рис. 10.2.17, в) секции 2 и 3 выдвигаются

одновременно одним гидроцилиндром 7. Секция 3 перемещается непосредственно штоком гидроцилиндра. Секция 2 связана с секцией 3 канатом 8, огибающим блок 13, установленный на секции 3. Такая связь при перемещении блока 13 обеспечивает удвоенное перемещение конца каната В. В двухсекционной стреле (рис. 10.2.17, г) секция 2 выдвигается гидроцилиндром 7. Особенность устройства - использование реечного механизма. Рейка 14 закреплена на секции 2, а рейка 16 - на секции 3. Шестерня 15, перекатываясь по рейке 16, перемещает рейку 14, а следовательно, секцию 2 в 2 раза быстрее, чем движется шток гидроцилиндра 7.

10.2.4. Механизмы преобразования поступательного движения во вращательное и вращательного в поступательное

Наряду с традиционными решениями преобразования одного вида непрерывного движения в другой (соосное исполнение винтовой резьбовой передачи, реечная прямозубая или косозубая передача, фрикционная передача с приводными колесами или в виде сочетания роликов и прокатываемой полосы и др.) представляют интерес принципы действия передач, основанных на следующем: на деформации упругого звена; на взаимодействии винта и рейки; на взаимодействии поступательно движущихся звеньев и рейки; на разделении и суммировании движений; на преимущественном обкатывании сопряженных звеньев, качении друг по другу звеньев винтового механизма.

В механизме с упругой скрученной лентой (рис. 10.2.18) при растягивании концов ленты силами F средняя ее часть вращается в направлении ϕ , при уменьшении величины F

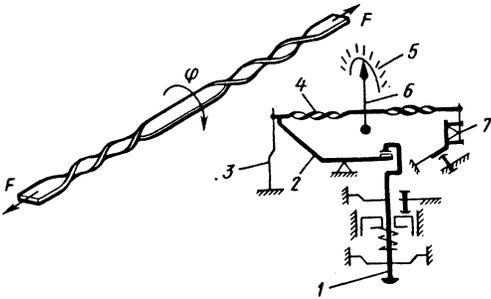


Рис. 10.2.18. Механизм с упругой скрученной лентой

вращение средней части реверсируется. Используют такую ленту в кинематически точных передачах. Средняя часть ленты 4 в измерительном приборе соединена со стрелкой 6, показывающей на шкале 5 угол поворота, соответствующий перемещению толкателя 1. Толкатель 1 через рычаг 2 связан с одним из концов ленты. Лента соединена с корпусом упругой опорой 3 и упругой регулируемой опорой 7.

В червячно-реечной передаче (рис. 10.2.19) одним из звеньев является зубчатая рейка, а другим - червяк (винт). Рейка 2 с неподвижным звеном образует поступательную пару. С рейкой взаимодействует червяк 1. Его вращательное движение преобразуется в поступательное движение рейки. Аналог рейки в червячной передаче - червячное колесо, радиус которого $\rightarrow \infty$. Углы между нормалью к направлению движения рейки и осью червяка 1 (Σ), винтовой линии червяка (γ), наклона зубьев рейки (β) связаны зависимостью $\gamma + \beta + \Sigma = \pi/2$.

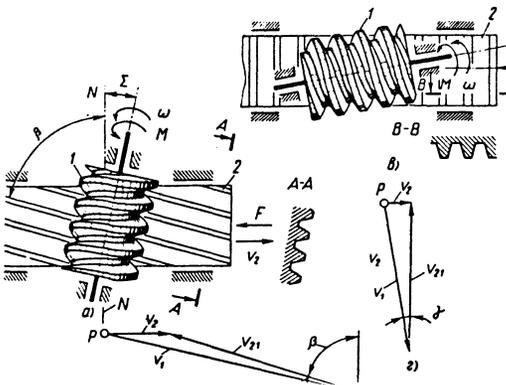


Рис. 10.2.19. Червячно-реечные передачи

Обычно передачу выполняют самотормозящей. При этом ведущим звеном является червяк. На рис. 10.2.19, а - общий случай расположения оси червяка, на рис. 10.2.19, б - частный случай, когда $\beta = 0$. На рис. 10.2.19, б и г даны соответствующие планы скоростей соприкасающихся звеньев: v_1 - окружная скорость точки начальной поверхности червяка; v_2 - скорость точки рейки; v_{21} - скорость скольжения точек относительно друг друга. Для схемы на рис. 10.2.19, а $v_2 = v_1 \sin \gamma / \cos \beta$, для схемы на рис. 10.2.19, б $v_2 = v_1 \sin \gamma$, так как $\cos \beta = 1$. Кроме того, на схеме обозначены: M и ω - соответственно вращающий момент и угловая скорость ведущего звена, а F - сила сопротивления.

Передача, показанная на рис. 10.2.19, в, позволяет получить меньшую скорость и более высокий КПД по сравнению с передачей, показанной на рис. 10.2.19, а, и имеет более технологичный в изготовлении червяк. Но во втором случае удобнее разместить опоры червяка и можно обеспечить их большую жесткость.

В кулачково-реечной передаче преобразование вращательного движения в поступательное осуществляется в результате перемещения ряда толкателей кулачкового механизма, взаимодействующих с зубчатой рейкой (рис. 10.2.20). На ведущем валу 2 установлен ряд одинаковых кулачков 1. Каждый последующий кулачок смещен по фазе относительно предыдущего на один и тот же угол. Кулачок 1 перемещает толкатель 5 в направлении 4. Силовое замыкание механизма осуществляется пружиной 3. Толкатель 5 через ролик 6 взаимодействует с зубом рейки 7. Ролики нескольких толкателей, взаимодействуя с зубьями рейки, перемещают ее за один оборот вала 2 на разность шага p_r рейки и шага p_k размещения толкателей. Число толкателей выбрано из условия получения в любой момент не менее одной контактирующей пары зуб - ролик, передающей нагрузку.

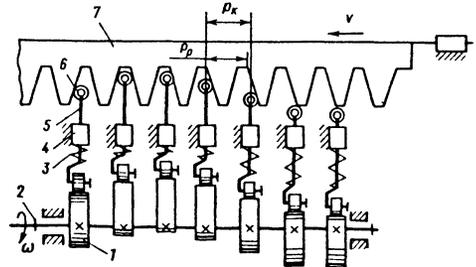


Рис. 10.2.20. Кулачково-реечная передача

Чтобы число контактирующих рабочих пар в процессе вращения вала было постоянным, число толкателей выбрано равным отношению шага рейки к разности шагов, если шаг размещения толкателей больше шага рейки. Кулачково-реечная передача позволяет получать большое передаточное отношение: одному обороту вала 2 соответствует перемещение рейки на один шаг. Она позволяет получать передачи с высокими показателями КПД и кинематической точности.

В несоосных винтовых передачах (рис. 10.2.21) оси взаимодействующих звеньев не совпадают. Они могут быть неподвижными или перемещаемыми. Планетарная винтовая передача имеет перемещающиеся оси. Такая передача может быть преобразована в несоосную винтовую передачу инверсией вращающегося и невращающегося звена. В передаче использованы свойства фрикционной передачи или обычного винтового механизма.

Во фрикционной передаче (рис. 10.2.21, а) гайка 2 расположена несоосно винту 1. Гайка приводится в движение относительно оси винта 1 посредством эксцентрика 3. Ось гайки перемещается. Движение осуществляется благодаря перекатыванию витков гайки по виткам винта и скольжению их в радиальном направлении. При недостаточном сцеплении вдоль витка движение передаваться не будет. Перемещение винта или гайки обусловлено разно-

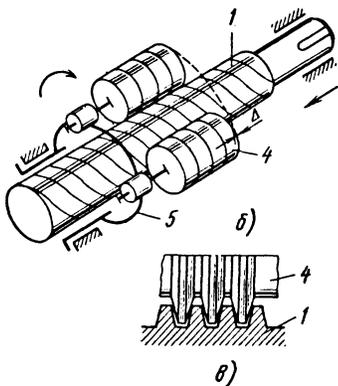
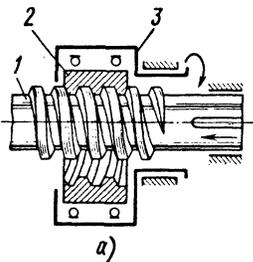


Рис. 10.2.21. Несоосные винтовые передачи

стью длин контактирующих винтовых линий. Без учета проскальзывания перемещение равно произведению этой разности на $\sin \psi$ (ψ - угол подъема резьбы). Канавки на одном из звеньев могут быть кольцевыми. В этом случае за один оборот выходное звено смещается на ход резьбы.

В передаче, показанной на рис. 10.2.21, б, ролики 4 могут иметь винтовую резьбу или кольцевые канавки, как на рис. 10.2.21, в. В первом случае получается фрикционная передача, а во втором - передача, работающая без проскальзывания. Ролики 4 размещены на водиле 5. В осевом направлении ролик смещен по отношению к соседнему на величину $\Delta = P / n_w$, при числе заходов резьбы винта $n=1$ (P - шаг резьбы; n_w - число роликов; $\Delta=0$ при $n_w=n$). Если остановить водило и вращать винт, то он будет вворачиваться как в обычную гайку, перемещаясь за один оборот на величину хода резьбы. Если вращать гайку, т.е. водило 5 с роликами 4, то винт также будет перемещаться за один оборот водила на величину хода резьбы. Несоосная передача обычно имеет высокие показатели жесткости, кинематической точности и КПД.

Волновая винтовая передача (рис. 10.2.22) содержит винтовую пару, у которой гайка или винт представляет собой гибкое звено, а преобразование движения осуществляется в результате его деформирования. Жесткое звено - гайка 3 (рис. 10.2.22, а) - имеет цилиндрическое отверстие с резьбой, а гибкое звено - винт 2 - представляет собой гибкую оболочку с резьбой на наружной поверхности. Гибкое звено имеет средний диаметр резьбы, меньший примерно на две высоты профиля резьбы среднего диаметра резьбы жесткого звена. Резьба гибкого звена вводится во взаи-

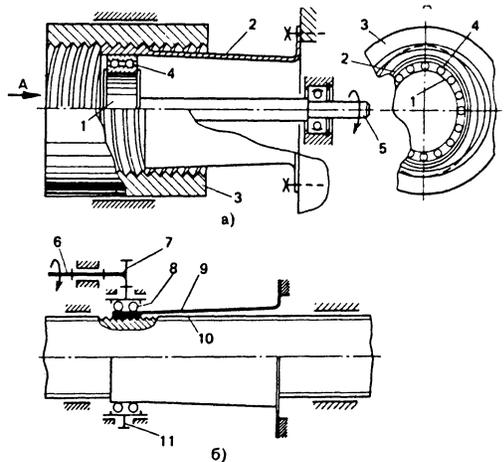


Рис. 10.2.22. Волновые винтовые передачи

модействие с резьбой жесткого звена путем деформирования гибкого звена генератором волн (волнообразователем). Обычно его выполняют в виде кулачка 1 и гибкого подшипника 4, надетого на кулачок. Для симметрии нагружения звеньев передачи выполняют с двумя противолежащими зонами контакта. Такую передачу называют двухволновой.

Ведущим обычно является генератор волн, он соединен с ведущим валом 5. Генератор волн, вращаясь, перемещает зоны контакта резьб по окружности, и вследствие различия параметров резьб осуществляется преобразование движения. В данном случае гибкое звено 2 неподвижно, относительно него перемещается жесткое звено. Возможны два варианта сочетания параметров резьб и соответственно два вида преобразования движения за счет фрикционного взаимодействия и пересопряжения профилей резьб.

В передаче, показанной на рис. 10.2.22, б, гибкое звено - гайка 9 - охватывает жесткое звено - винт 10. Винт при этом может иметь большую длину. Генератор волн 8 охватывает гибкое звено и приводится во вращение от ведущего вала 6 через зубчатую пару 7 - 11.

Волновая винтовая передача обладает высоким КПД ввиду малых перемещений трущихся поверхностей (в основном только радиальные перемещения). Она позволяет получать перемещения в широком диапазоне, обладает высокими точностью и жесткостью. Ее применяют в механизмах подачи станков и манипуляторах. Особенно эффективно ее применение в передачах через непроницаемую стенку.

Ленточная дифференциальная передача осуществляет точное поступательное перемещение за счет разности перемещения лент, наматываемых на цилиндр в два слоя (рис. 10.2.23). Ленты 2 и 3 непосредственно огибают приводной цилиндр 1, а ленты 3' и 2' расположены во втором слое. Первая пара лент соединена со стойкой 5, а вторая - с ползуном 4. Звено 4 при повороте звена 1 на угол φ_1 переместится на величину $S_4 = 2\pi\varphi_1(r_2 - r_1)$. При этом звено 1 переместится на величину

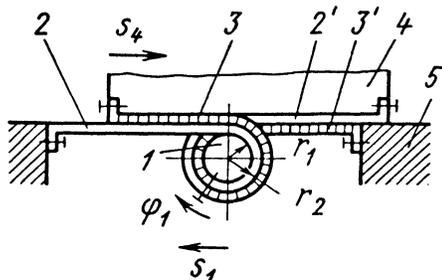


Рис. 10.2.23. Ленточная дифференциальная передача

$S_1 = 2\pi r_1 \varphi_1$. Вследствие малой разности r_2 и r_1 (толщина ленты 2) можно получить малое перемещение S_4 . Передача характеризуется беззорностью и отсутствием относительного скольжения.

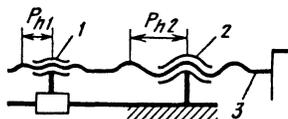


Рис. 10.2.24. Винтовая дифференциальная передача

На рис. 10.2.24 представлен винтовой дифференциальный механизм для поступательных перемещений, обусловленных разностью ходов резьб винтовых пар, которые соединены между собой. Гайки 1 и 2 жестко соединены между собой и неподвижны. Ход резьбы P_{h2} несколько больше хода резьбы P_{h1} . Направления винтовых линий одинаковые. При вращении винта 3 он перемещается в осевом направлении за каждый оборот на величину $P_{h1} = P_{h2}$. Механизм позволяет получать очень малые перемещения и осуществлять, например, точные регулировки перемещений или затяжки.

10.2.5. Механизмы преобразования параметров вращательного движения

Кроме широко распространенных традиционных зубчатых и червячных передач применяют и другие механизмы преобразования параметров вращательного движения. Механизмы, в основу которых положен кривошипно-кулисный механизм (рис. 10.2.25), позволяют передавать движение между валами с параллельными осями, уменьшать в 2 раза скорость выходного звена по сравнению со скоростью входного, передавать движение при изменении расположения осей входного и выходного звеньев.

В механизме для передачи движения через герметичную стенку (рис. 10.2.25, а) входное звено - кривошип 3 - соединено вращательной парой с наконечником 4, который скользит в пазу выходного звена - кулисы 1.

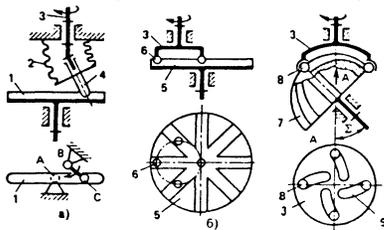


Рис. 10.2.25. Передачи на основе кривошипно-кулисного механизма

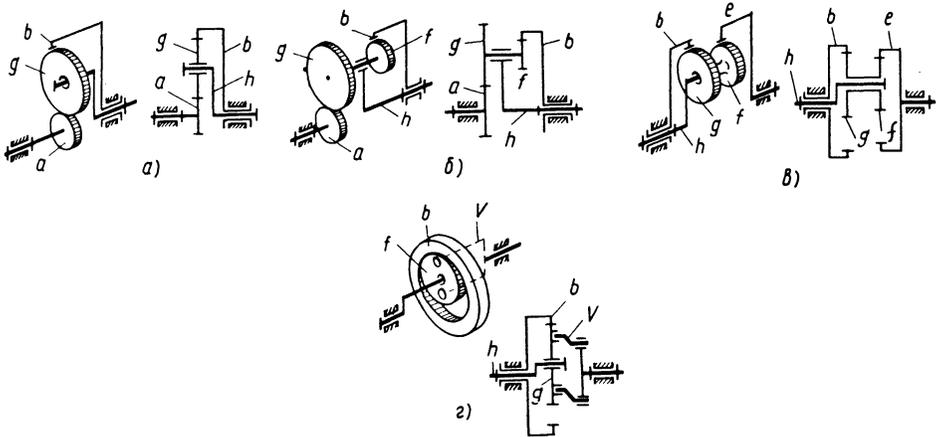


Рис. 10.2.26. Планетарные зубчатые передачи

Наконечник 4 соединен со стойкой сильфоном 2, обеспечивающим герметичность стенки, разделяющей две среды. В такой схеме при выполнении условия $AB=BC$ отношение угловых скоростей звеньев 3 и 1 постоянно и равно двум, но когда точки A и C совпадают, отсутствует возможность передачи момента на звено 1, так как плечо силы равно нулю.

Схема механизма, показанная на рис. 10.2.25, б, лишена такого недостатка. В ней несколько жестко соединенных кривошипов 3 взаимодействуют своими наконечниками 6 (шарами) с несколькими радиальными пазами выходного звена 5.

У пространственного кривошипно-кулисного механизма (рис. 10.2.25, в), ось входного звена - кривошипа 3 - расположена под углом к оси выходного звена - сферической кулисы 7. Пазы звена 7 радиальные. С ними взаимодействуют шары 8; расположенные в спиральных пазах 9 кривошипа 3. При уменьшении угла Σ шары 8 перемещаются по спиральным пазам ближе к оси вращения кривошипа. При этом сохраняется постоянное передаточное отношение, равное двум. Обязательным условием этого является пересечение траектории движения шара 8 и оси вращения звена 7.

Планетарные зубчатые передачи. Наряду с зубчатыми механизмами, имеющими неподвижные оси и составленными из одной или нескольких последовательно соединенных зубчатых пар, в качестве редукторов целесообразно применять планетарные зубчатые передачи. Планетарная зубчатая передача содержит зубчатые колеса с перемещающейся осью вращения хотя бы одного из них (рис. 10.2.26). Передача имеет центральные колеса a, b, e оси которых неподвижны, сателлиты g, f - колеса с перемещаемыми осями и водило h - звено, в

котором установлены сателлиты. Особенность планетарной передачи - многопоточность передачи энергии несколькими зубчатыми парами параллельно. Поэтому у нее малые габаритные размеры и масса.

Свойства планетарной передачи в основном характеризует передаточное отношение $u^{(h)}$ при мысленно остановленном водиле. Это отношение определяют как отношение чисел зубьев z взаимодействующих колес: при входном a и выходном b звеньях $u_{ab}^{(h)} = -\frac{z_b}{z_a}$

(рис. 10.2.26, а), $u_{ab}^{(h)} = -\frac{z_d}{z_a} \frac{z_e}{z_f}$ (рис. 10.2.26, б); при входном b и выходном e звеньях

$u_{be}^{(h)} = \frac{z_d}{z_a} \frac{z_e}{z_f}$ (рис. 10.2.26, в); при входном g и выходном b звеньях $u_{gb}^{(h)} = z_b / z_g$ (рис. 10.2.26, з).

Для схемы, показанной на рис. 10.2.26, а, б, величина $u^{(h)}$ отрицательная, а для схемы рис. 10.2.26, в, з - положительная.

Схемы рис. 10.2.26, а, б используют обычно при выходном водиле и остановленном колесе b , при этом $u_{ah}^{(b)} = 1 - u_{ab}^{(h)}$. В схеме рис. 10.2.26, а можно получить $u_{ab}^{(h)} < 10$, а в схеме рис. 10.2.26, б $u_{ab}^{(h)} < 45$. Передачи по этим схемам имеют КПД=0,97...0,98.

Схемы рис. 10.2.26, в, з, используют при входном водиле, при этом $u_{hb}^{(e)} = \frac{1}{1 - u_{be}^{(h)}}$

(рис. 10.2.26, *в*), $u_{hg}^{(b)} = \frac{1}{1 - u_{gb}^{(h)}}$ (рис. 10.2.26,

г). Так как $u_{be}^{(h)}$ и $u_{gb}^{(h)}$ могут быть близки к 1, то $|u_{hb}^{(e)}|$ и $|u_{hg}^{(b)}|$ могут быть очень большими.

КПД механизмов таких схем меньше, чем КПД схем рис. 10.2.26, *а*, *б*, поэтому для получения большого передаточного отношения при высоком КПД соединяют несколько механизмов по схеме рис. 10.2.26, *а*.

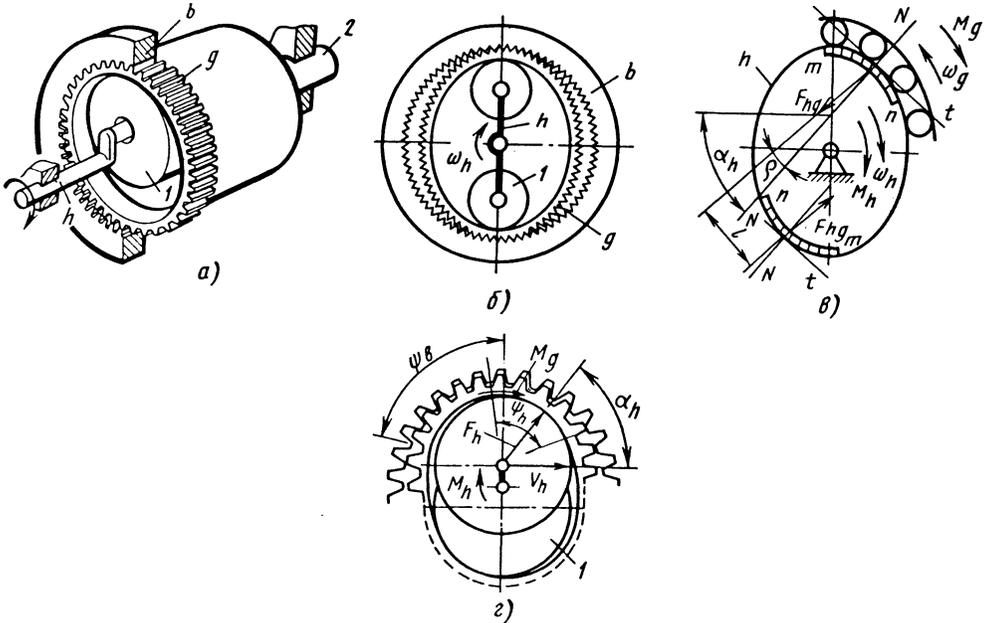


Рис. 10.2.27. Волновая зубчатая передача

Волновая зубчатая передача представляет собой механизм, содержащий зацепляющиеся между собой гибкое и жесткое зубчатые колеса и обеспечивающий передачу и преобразование движения благодаря деформированию гибкого колеса. Она может быть представлена как конструктивная разновидность планетарной передачи с внутренним зацеплением, характерной особенностью которой является сателлит, деформируемый в процессе передачи движения (см. рис. 10.2.26, *г*). При входном звене *h* эта передача позволяет получать большие передаточные отношения. Если выполнить сателлит в виде тонкостенной гибкой оболочки, как показано на рис. 10.2.27, *а*, то получится волновая зубчатая передача. Гибкое колесо *g* при этом поджато к жесткому *b* роликом *1*, расположенным на водиле *h*. Гибкость оболочки обеспечивает передачу движения с сателлита на ведомый вал *2* и приспособление к взаимодвижению с жестким звеном при использовании зубьев с малыми углами давления. Гибкость оболочки позволяет также иметь две зоны зацепления (рис. 10.2.27, *б*, *в*, *г*). В этом

случае обеспечивается симметрия нагружения генератора волн: со стороны вала моментом M_h (рис. 10.2.27, *в*), а со стороны гибкого колеса - силами F_{hg} , которые образуют пару сил, уравновешивающую момент M_h . Водило с роликами или иное устройство, обеспечивающее деформацию гибкого колеса, называется генератором волн (реже волнообразователем).

Для того чтобы задать гибкому колесу определенную начальную форму, генератор волн выполняют в виде симметричного кулачка специального профиля (рис. 10.2.27, *б*) - кулачковый. На кулачок надевают специальный гибкий подшипник, чтобы уменьшить трение между гибким колесом и генератором волн.

На рис. 10.2.27, *в* показаны зоны нагружения mn кулачкового генератора со стороны гибкого колеса и равнодействующие сил F_{hg} , которые отклоняются от нормали NN на угол трения ρ в сторону, противоположную относительно скорости звеньев *h* и *g*. Пара сил F_{hg} с плечом *l* уравновешена моментом.

Роликовый генератор волн (рис. 10.2.26, б) может быть преобразован в дисковый генератор волн (рис. 10.2.26, з) при значительном увеличении диаметров роликов и расположении роликов (дисков) в параллельных плоскостях. Такое исполнение применяют в высоконагруженных передачах.

Для обеспечения симметрии нагружения передачи обычно используют четное число зубьев колес. Разность чисел зубьев сопряженных колес для рис. 10.2.26, б - з равна 2. Независимо от конструкции генератора волн гибкое колесо при его нагружении изменяет свою начальную форму в соответствии с формой генератора волн и жесткого колеса, как показано, например, на рис. 10.2.26, з, благодаря чему в зацеплении участвует большее число пар зубьев (зона ψ_b), а угол давления α_h уменьшается с увеличением нагрузки. Волновая зубчатая передача позволяет получать передаточные отношения 80-400 при стальных гибких колесах.

По сравнению с планетарной передачей (рис. 10.2.26, з) волновая зубчатая передача характеризуется малыми габаритными размерами и массой при одинаковой несущей способности. При передаточных отношениях 100-400 КПД=0,8...0,9.

Многоскоростные зубчатые передачи. В качестве основы многоскоростных передач используют зубчатые механизмы с неподвижными осями и планетарные зубчатые механизмы.

Передача, составленная из планетарных зубчатых механизмов (рис. 10.2.28, а), позволяет получать несколько режимов работы с разными передаточными отношениями. Передача имеет валы I - III, входное звено Д, выходное В, 1 - 5 элементы управления (муфты и тормоза), реверс Р и трехскоростную передачу К. Движение от входного звена Д передается входному звену механизма Р через передачу П. Реверс Р имеет два режима включения: муфта 5 блокирует механизм (рис. 10.2.28, в, д) и тормоз 1 включает в кинематическую цепь механизма с отрицательным передаточным отношением планетарную передачу с парным сателлитом - сателлитом в виде пары зубчатых колес. Режимы включения тормозов 4, 2 и 3 соответствуют рис. 10.2.28, в, г, д.

Замкнутая передача получена на основе суммирующего механизма С1 с тремя последовательно расположенными внешними зацеплениями (рис. 10.2.28, б). Замыкающая ветвь представляет собой передачу с парным сателлитом, входным звеном - водилом - и неподвижным центральным колесом с внутренними зубьями. Замыкание осуществляется на выходное звено В.

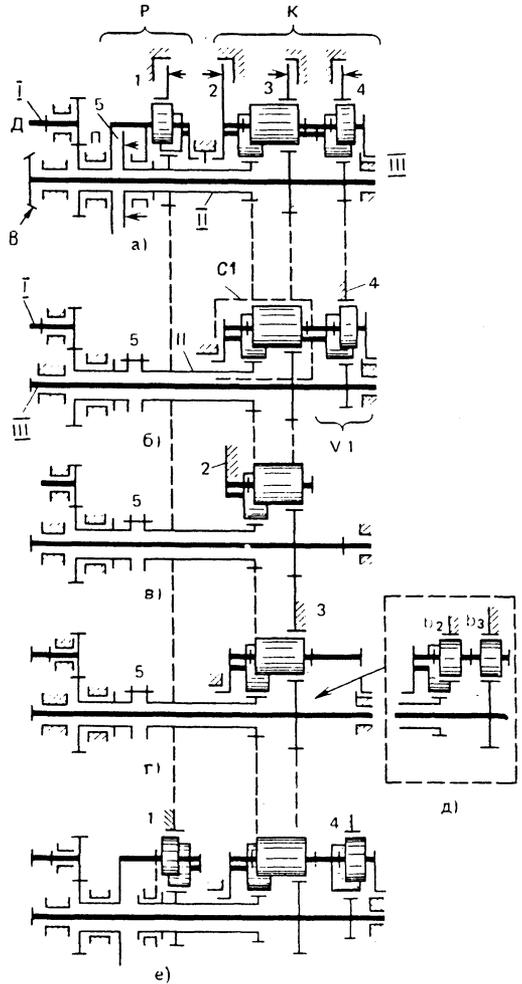


Рис. 10.2.28. Многоскоростная планетарная передача

На режиме включения тормоза 2 (рис. 10.2.28, г) в кинематическую цепь введен механизм с тремя внешними зацеплениями и остановленным водилом. На режиме включения тормоза 3 (рис. 10.2.28, д) в передаче движения участвует четырехзвенный механизм с тремя центральными колесами и парным сателлитом. Данный механизм - конструктивно упрощенное решение схемы последовательного соединения двух планетарных передач (рис. 10.2.28, д), центральные колеса которых b_2 и b_3 совмещены в одном колесе. При включенном реверсе Р предусматривается включение тормоза 4 (рис. 10.2.28, е). Передаточное отношение равно произведению передаточных отношений механизмов Р и К.

Каждый из составляющих механизмов Р и К обладает двумя степенями свободы

(движение задается входным звеном и одним элементом управления - муфтой или тормозом). При последовательном соединении получаются механизмы с тремя степенями свободы.

Варианты скорости (механизмы для непрерывного регулирования передаточного отношения). Непрерывное принудительное регулирование передаточного отношения обеспечивается в гидравлических объемных передачах, фрикционных, пластинчатых и импульсных вариаторах. Вариаторы выполняют по самым различным схемам.

Планетарный механизм (рис. 10.2.29) содержит три центральных колеса a , b , e и сателлиты с рабочими поверхностями c , g , f . Звенья a и g , e и f , b и c взаимодействуют вследствие трения. Сателлит f выполнен конусным и имеет образующую, параллельную оси механизма. Благодаря этому звено e , установленное на ползуне h , может перемещаться вдоль оси. При его перемещении изменяется радиус r_f и поэтому изменяется передаточное отношение. Ведущим обычно выполняют звено 1 , с муфтой 2 , неподвижным - звено 3 , а ведомым - звено 5 . В этом случае передаточное отношение

$$u_{ba}^{(e)} = \left(1 - \frac{r_c}{r_b} \frac{r_e}{r_f} \zeta \right) / \left(1 + \frac{r_e}{r_f} \frac{r_g}{r_a} \zeta \right),$$

где r_a , r_b , r_e - радиусы соответственно колес a , b , e ; r_g , r_c , r_f - соответствующие радиусы контактирующих поверхностей сателлита; ζ - коэффициент относительного скольжения звеньев.

Подбирая параметры в приведенной формуле, можно осуществлять регулирование в широких пределах, вплоть до реверсирова-

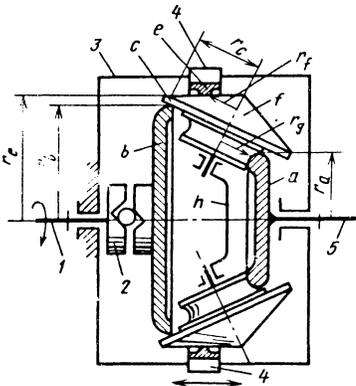


Рис. 10.2.29. Планетарный фрикционный вариатор скорости

ния движения. Достаточно высокий КПД=0,9...0,5 при этом будет иметь место в сравнительно небольшом диапазоне частоты вращения ведомого звена от n_{\max} до $0,1 n_{\max}$ (n_{\max} - наибольшая частота вращения).

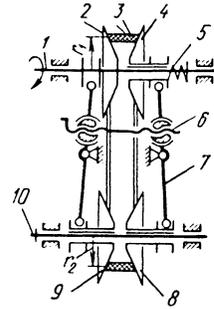


Рис. 10.2.30. Клиноременный вариатор скорости

Во фрикционном клиноременном вариаторе скорости (рис. 10.2.30) на входном валу 1 установлены элементы шкива в виде конусов 2 и 4 . На выходном валу 10 установлены элементы другого шкива в виде конусов 8 и 9 . С конусами взаимодействует гибкий клиновый ремень 3 . Конусы установлены так, что возможно их относительное осевое перемещение. Пружина 5 поджимает конус 4 к ремню 3 . Синхронное перемещение конусов одного и второго шкива обеспечивается посредством винтового механизма 6 и рычагов 7 . В то время как конусы на входном валу сдвигаются, конусы на выходном валу раздвигаются. При этом изменяется отношение радиусов r_1 и r_2 и соответственно передаточное отношение

$$u = \frac{\omega_1}{\omega_{10}} = \frac{r_2}{r_1} \zeta,$$

где ω_1, ω_{10} - частота вращения соответственно входного и выходного валов; ζ - коэффициент относительного скольжения взаимодействующих звеньев; $\zeta = 1,01 \dots 1,02$.

Диапазон регулирования обычно не превышает $3 - 3,5$, а КПД=0,87...0,87.

Замкнутые двухпоточные регулируемые передачи. В замкнутой двухпоточной передаче имеется один замкнутый контур, образованный только подвижными звеньями. Такую передачу применяют для уменьшения установленной мощности непрерывно регулируемой системы, включенной в одну из параллельных ветвей, повышения КПД и увеличения диапазона регулирования. В этой передаче на всех или на отдельных режимах работы часть энергии проходит через механическую ветвь (практически без потерь), а другая часть - через параллельную гидравлическую регулируемую ветвь. Суммирование или разделение движений осуществляется при помощи сум-

мирующего механизма или регулируемой системы. С уменьшением доли энергии в регулируемой системе уменьшается общий диапазон регулирования, поэтому в качестве механической ветви используют многоскоростную передачу для получения диапазонов регулирования.

Обозначения во всех приведенных схемах П, П1, ..., П4 - зубчатые передачи; 1, 2, ... - элементы управления (муфты, тормоза); Д и В соответственно входное и выходное звенья.

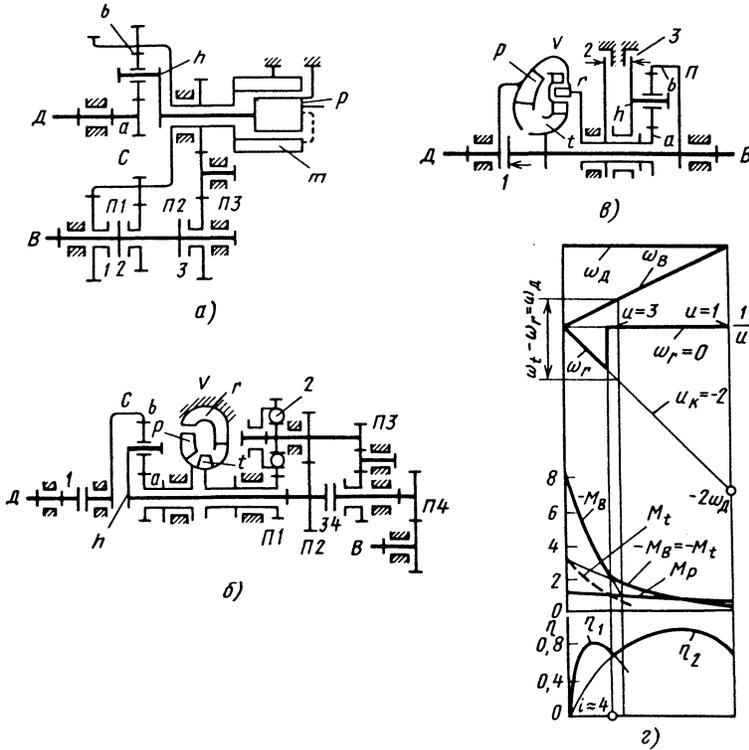


Рис. 10.2.31. Замкнутые гидромеханические передачи

В замкнутой схеме с гидрообъемной передачей (рис. 10.2.31. а) входной вал Д соединен с центральным колесом а дифференциального механизма с, водило h - с насосом р, центральное колесо b - с гидромотором т. Энергия в этой трансмиссии передается через две ветви. Регулируемая ветвь включает в себя звенья а, h, р, т, ..., В. Энергия распределяется по ветвям в соответствии с условием равновесия механизма С. Моменты на его звеньях при установившемся режиме определены однозначно:

$$M_h = -M_a \left(1 + \frac{z_b}{z_a} \right),$$

где M_h и M_a - моменты соответственно на звеньях h и а; z_a, z_b - числа зубьев соответствующих колес.

Момент на выходном звене замкнутой передачи

$$M_B = M_a \frac{z_b}{z_a} - M_h \tilde{u}_v,$$

где \tilde{u}_v - силовое передаточное отношение (отношение моментов) регулируемой ветви.

Последовательно к замкнутой передаче присоединена трехскоростная передача, содержащая передачи переднего хода П1, П2 и заднего хода П3, включаемые муфтами 1, 2 и 3.

В передаче, показанной на рис. 10.2.31. б, разветвление осуществляется в дифференциальном механизме С, соединенном с входным валом муфтой 1. В замыкающей ветви установлен гидротрансформатор V, содержащий насосное р, турбинное т колеса и реактор r. Механизм 2 свободного хода служит для автоматического размыкания замыкающей ветви.

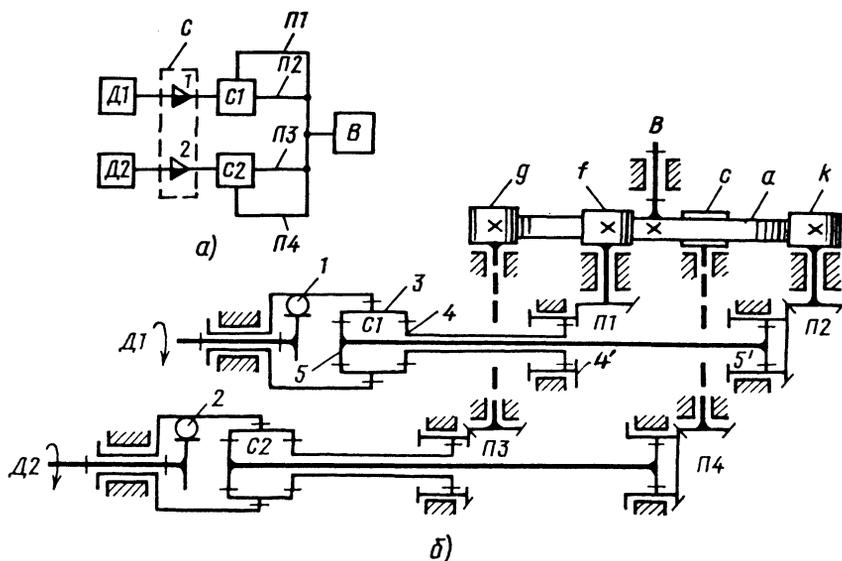


Рис. 10.2.33. Многопоточная передача двухдвигательного привода

В разветвленно-замкнутом механизме движение от двух двигателей $D1$ и $D2$ передается одному выходному звену B (рис. 10.2.33, *a*). Самоуправляемые устройства 1 и 2 обеспечивают передачу движения только в направлении от двигателя к выходному звену. Входное звено устройства 1 или 2 может быть только ведущим, а выходное - только ведомым. При других условиях кинематическая цепь размыкается. Механизмы $C1$ и $C2$ позволяют распределять энергию в равных долях по потокам $П1$ и $П2$, $П3$ и $П4$. Энергия суммируется на выходном звене B .

В приводе несущего винта вертолета (рис. 10.2.33, *b*) в качестве самоуправляемых устройств использованы механизмы (муфты) свободного хода 1 и 2. В совокупности они, по существу, образуют суммирующий механизм C . При поочередном пуске двигателей остановленный двигатель отсоединяется автоматически от кинематической цепи. Остановившийся двигатель тут же отсоединяется от кинематической цепи. Оба двигателя отсоединяются при полете вертолета на режимах самовращения несущего винта. Энергия работающих двигателей без циркуляции передается выходному звену.

В качестве распределительных механизмов $C1$ и $C2$ использованы зубчатые уравнительные муфты, содержащие распределительное звено 3 с двумя внутренними зубчатыми венцами и зубчатые колеса 4 и 5 с внешними зубьями. Зубчатые соединения 1-3, 3-5 и 4-

5 выполнены с возможностью взаимного перекоса сопряженных звеньев. Такая муфта позволяет обеспечить равенство моментов на звеньях 5 и 4 при самоустановке звена 3. Движение звена 4 через муфту 4', коническую зубчатую пару $П1$, шестерню передается зубчатому колесу a , соединенному с выходным звеном B . Движение звена 5 также передается колесу a через муфту 5', коническую пару $П2$ и шестерню k . От двигателя $D2$ движение также разветвляется на передачи $П3$ и $П4$ и через шестерню g и c передается колесу a .

10.3. МАНИПУЛИРУЮЩИЕ МЕХАНИЗМЫ

В общем случае манипулирование - перемещение объекта (выходного звена), образующего кинематические пары только с подвижными звеньями, в соответствии с заданными в плоскости траекториями двух, в пространстве трех точек объекта или траекторий одной его точки (начала осей координат, жестко связанных с объектом) и ориентацией относительно стойки-углами между осями координат стойки и объекта.

В современных машинах - это одна из наиболее распространенных задач. Одну и ту же траекторию и заданную ориентацию объекта можно получить разными путями, например, используя довольно сложный механизм с одной степенью свободы (одним приводом) или сравнительно простой механизм с несколькими степенями свободы (несколькими

приводами). При этом можно копировать какое-либо сложное движение, преобразовать простое движение в сложное заданное или воспроизводить сложное движение как сумму простых движений нескольких приводов.

Механизмы с одной или несколькими степенями свободы, в основу функционирования которых положено копирование (без преобразования или с трансформацией) воспроизводимой траектории по сравнению с задающей), образуют класс копирующих механизмов. Механизмы с одной степенью свободы, в основу которых положено преобразование движения привода в заданное движение, обычно применяют для получения точного простого типового движения или приближенного сложного движения. Используют механизм с одной степенью свободы также для воспроизведения движения промежуточного звена устройства с несколькими степенями свободы. Наиболее распространены следующие механизмы с одной степенью свободы, служащие для получения движения точки по заданному отрезку прямой, дуге окружности и по другим типовым траекториям: прямолинейно-направляющие; направляющие по окружности; направляющие механизмы пересечения поверхности тела вращения плоскостью или поверхностью другого тела вращения.

Механизмы с одной степенью свободы для воспроизведения других кривых [1] применяют все реже в связи с широким распространением точно управляемых приводов в системах с двумя и более степенями свободы. Простоте и экономичности решения задачи с помощью одного привода и одного механизма предпочитают точность воспроизведения траектории, жесткость системы, оптимальные кинематические параметры движения, возможности перепрограммирования и другие преимущества систем с несколькими степенями свободы.

Ориентация объекта в пространстве также достигается в системах с несколькими степенями свободы, а для решения частных задач используют механизмы:

поступательно-ориентирующие (объект или выходное звено не могут вращаться); радиально-ориентирующие (объект или выходное звено могут вращаться вокруг заданной точки, не совпадающей с центром или осью ни одной из кинематических пар механизма) и др.; с изменяемой ориентацией в зависимости от положения точки выходного звена.

И еще одна разновидность задач и механизмов касается самоориентации объекта. К этому классу, прежде всего, относятся подвески транспортных средств, сидений и приборов и другие устройства, обеспечивающие сохранение или изменение ориентации объекта относительно основания (объекта, принятого

за основание) в соответствии с заданным законом.

Ориентирующие механизмы обычно используются в совокупности с направляющими механизмами. Вторые служат для перемещения одной из точек пространства, а первые обеспечивают поступательное или вращательное движение объекта. В совокупности эти механизмы представляют собой общие решения задач манипулирования. В последнее время получили распространение механизмы с несколькими приводами, позволяющие суммировать простые движения и получать любые заданные траектории и ориентации объекта. В этих устройствах не всегда удается выделить направляющие и ориентирующие механизмы.

10.3.1. Копирующие механизмы

Кулачковые копирующие механизмы являются наиболее простыми. Они воспроизводят движение выходного звена в соответствии с профилем кулачка. Кулачковые механизмы могут воспроизводить кривые, точно повторяющие профиль кулачка, или кривые, трансформированные определенным образом (рис. 10.3.1, а). Кулачок 1 и ползун 3 связаны между собой зубчатым механизмом. Кулачок соединен с рейкой 7, зацепляющейся с зубчатым колесом 6, которое одновременно зацепляется с рейкой 5, соединенной с ползуном 3. При вращении колеса 6 кулачок и ползун движутся в противоположные стороны. Через ролик 4 движение передается толкателю 2 и его точке

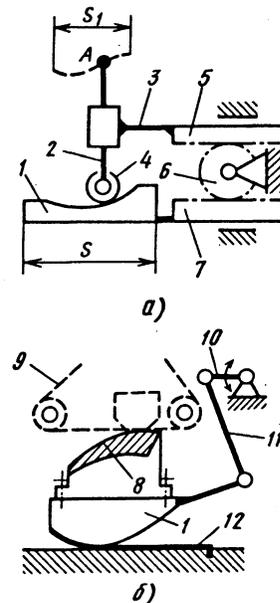


Рис. 10.3.1. Кулачковые копирующие механизмы

А. В неподвижной системе координат точка А опишет траекторию, сокращенную по длине в 2 раза по сравнению с длиной кулачка, т.е. $S=2S_1$.

В устройстве для обработки фасонных поверхностей изделия при его движении осуществляется огибание заданной поверхности рабочей поверхностью инструмента 9 (рис. 10.3.1, б). Изделие 8 закреплено на перекачиваемом рычаге-кулачке 1, соединенном со стойкой лентой 12. Изделие контактирует с абразивной лентой 9. Движение кулачку 1 передается от кривошипа 10 через шатун 11.

10.3.2. Направляющие механизмы

Для воспроизведения плоских кривых могут быть использованы простейшие зубчатые, шарнирные и рычажные, зубчато-рычажные механизмы, а также более сложные механизмы на основе структурных групп высоких классов. Циклоидальные кривые получают в планетарных зубчатых механизмах.

Сателлит d планетарного зубчатого механизма обкатывается по центральному колесу b при вращении водила А0 (рис. 10.3.2, а). Точка В при этом движется по гипоциклоиде KL. При равенстве радиуса начальной окружности сателлита межосевому расстоянию А0 траектории точек D, С, Е, расположенных на этой окружности, из гипоциклоид превращается в прямые лучи, проходящие через точку О (рис. 10.3.2, б). Если с лучом OD совместить направляющую 1, а звено AD связать с ней враща-

тельной и поступательной парами в точке D, то получится кривошипно-ползунный механизм (рис. 10.3.2, в), у которого ползун 2 скользит вдоль направляющей 1 при вращении кривошипа 0А. Точка С, расположенная на шатуне 3, движется по прямой ОС при условии $AD=AC$. Полученная схема является схемой прямолинейно-направляющего механизма.

Двухползунный механизм получен путем совмещения с лучами OD и ОС неподвижных направляющих (рис. 10.3.2, з). На них установлены ползуны 2 и 4, шарнирно связанные

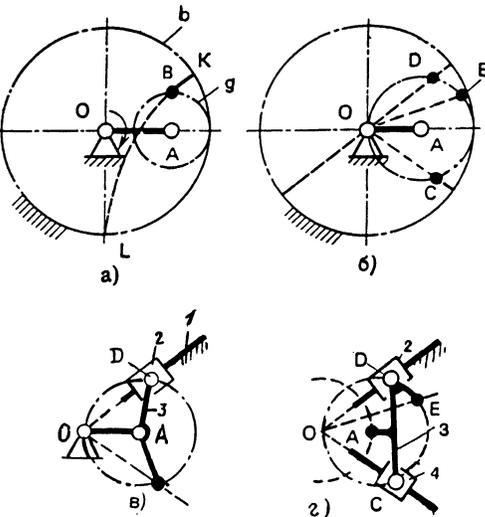


Рис. 10.3.2. Направляющие зубчато-рычажные механизмы

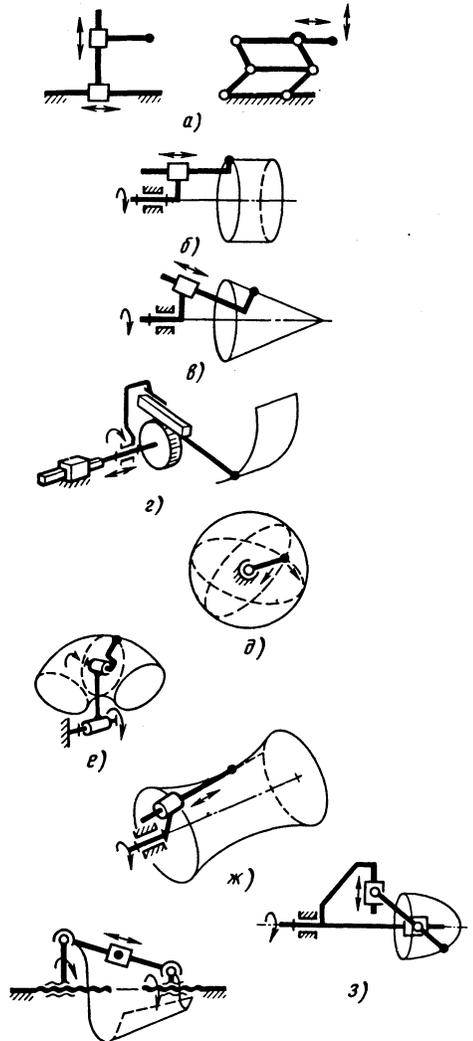


Рис. 10.3.3. Механизмы для воспроизведения поверхностей

с сателлитом-звеном $З$ в точках соответственно D и C . Точка A (центр сателлита) воспроизводит дугу окружности радиусом $0A$, а точка E (любая на начальной окружности сателлита) - прямую линию $0E$.

Особый вид направляющих механизмов представляют устройства, имитирующие пересечения поверхностей тел вращения плоскостью или поверхностями других тел вращения. Механизмы для воспроизведения различных плоских и пространственных кривых используют в оборудовании для разметки, раскроя, резания и сварки стыков труб и резервуаров различной формы. При образовании таких механизмов важно найти схему соединения звеньев, воспроизводящих пересекаемые поверхности (рис. 10.3.3). Такие механизмы обладают двумя или тремя степенями свободы.

Соединяя воспроизводящие поверхности двух механизмов, можно получить механизм, как правило, с одной степенью свободы, который воспроизводит линию пересечения данных поверхностей (рис. 10.3.4). Механизмы для воспроизведения линий пересечения цилиндра или конуса плоскостью получены на основе соединения механизмов, воспроизводящих поверхность цилиндра или конуса и плоскость.

Кривошип 1 радиусом r с ползуном 2 воспроизводят поверхность цилиндра, а ползуны 3 и 2 воспроизводят плоскость (рис. 10.3.4). Поскольку звено 2 одновременно входит в состав обоих механизмов, его точки одновременно движутся в плоскости и по повер-

хности цилиндра, т.е. воспроизводят эллипсы. Ось кривошипа x_1 располагают параллельно оси x_2 воспроизводимой поверхности цилиндра, а оси движения ползунов x_3 и y_2 - параллельно осям x и y воспроизводимой кривой \mathcal{E} . Таким образом образован пространственный четырехзвенный кривошипно-ползунный механизм. Воспроизводимая кривая представляет собой траекторию точки звена 2 .

Схема, показанная на рис. 10.3.4, б, отличается от рассмотренной расположением звена 2 по отношению к оси x_1 вращения кривошипа 1 и наличием двух промежуточных звеньев 2 и 4 , соединенных сферической парой, центр B которой воспроизводит гиперболу Γ . Оси y_2 и x_3 звеньев 4 и 3 расположены параллельно осям x и y воспроизводимой кривой Γ - гиперболы.

Оси u_3 и x_3 на рис. 10.3.4, в, определяющие движение точки B звена 2 в плоскости, расположены параллельно оси u и образующей x_4 воспроизводимой конической поверхности. Ось x_4 параллельна оси воспроизводимой кривой и лежит в плоскости, перпендикулярной к плоскости, определяемой осями x и y . При этом воспроизводится парабола Π .

10.3.3. Ориентирующие механизмы

Наиболее распространены поступательно-ориентирующие механизмы, сравнительно реже применяют радиально-ориентирующие, ориентирующие выходные звено по определенной заданной программе.

Поступательно-ориентирующие механизмы. Распространенный прием обеспечения поступательного перемещения звена - соединение его со стойкой параллелограммом или несколькими последовательно соединенными параллелограммами, из которых каждая пара соседних параллелограммов имеет общее звено. Параллелограммные ориентирующие механизмы целесообразно применять, так как в них используются только низкие пары вращения. Но тем не менее простейшим решением являются механизмы с поступательными парами. Для постоянной ориентации объекта достаточно использовать структурную двухповодковую группу с двумя поступательными последовательно размещенными парами. Находят применение также эквивалентные параллелограммам зубчатые и цепные передачи с передаточным отношением $u=1$.

В поступательно-ориентирующем механизме в копирующем устройстве пантограф в виде параллелограмма 0_1EDF (рис. 10.3.5, а) с шарнирной опорой в точке 0 , копирующей точку M и воспроизводящей точку N , распо-

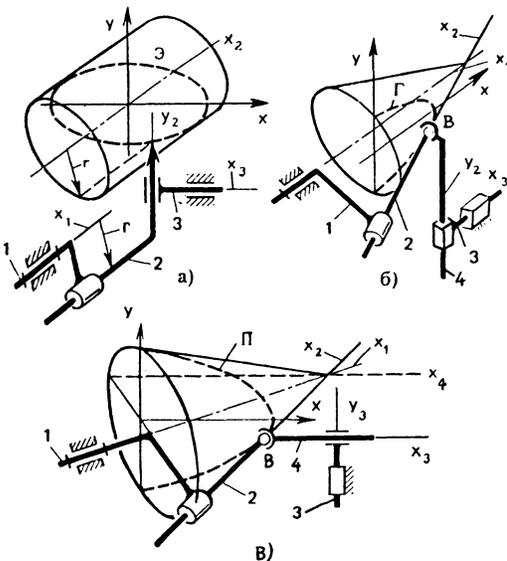


Рис. 10.3.4. Механизмы для воспроизведения линии пересечения поверхностей

ложен на звеньях параллелограмма и на прямой OM . К звену O_1F в точке N шарнирно присоединен поступательно-ориентирующий механизм, связанный со стойкой 3. Механизм содержит ведомое звено 1, которое движется поступательно и воспроизводит заданную траекторию любой из точек, например, точки K . Ведомое звено соединено поступательной парой с ползуном 2.

Другой вариант такого механизма воспроизводит траекторию с многократным уменьшением перемещений ведомого звена по сравнению с перемещениями точки M (рис. 10.3.5, б). Малые расстояния между осями шарниров O_1O и ON позволяют разместить шарнир O внутри шарнира O_1 , а шарнир O_1 - внутри шарнира N . Аналогично этому шарнир N размещен в ползуне 1, а ползун 1 - в ползуне 2, перемещаемом в направляющей - стойке 3. Такое исполнение позволяет обеспечить компактность механизма, большую жесткость системы. Выбор соотношений размеров и пар трения обеспечивает возможность самоторможения в отдельных кинематических парах с целью исключения передачи движения от внешних воздействий на звено 1 (например, при установке на звене 1 инструмента и обработке детали по заданному контуру).

Радиально-ориентирующие механизмы.

Радиально-ориентирующие механизмы обеспечивают вращение относительно неподвижной или перемещаемой точки выходного звена, образующего расположенные вне этой точки кинематические пары с подвижными звеньями. Такие механизмы применяют, когда не удастся разместить опору с центром в точке, вокруг которой задается вращательное движение звена.

В случае применения радиально-ориентирующего механизма в манипуляторе (рис. 10.3.6), манипулятор шарнирно присоединен к основанию AB в точке B . Он выполнен в виде соединенных между собой общим звеном PGR параллелограммов $GBLP$ и

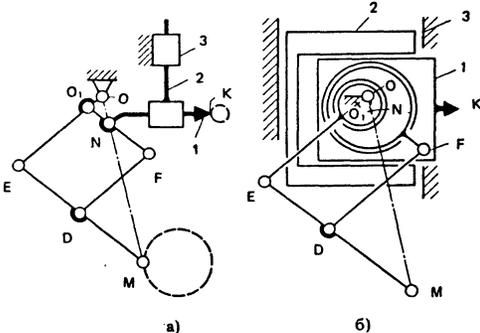


Рис. 10.3.5. Поступательно-ориентирующий механизм в копирующем устройстве

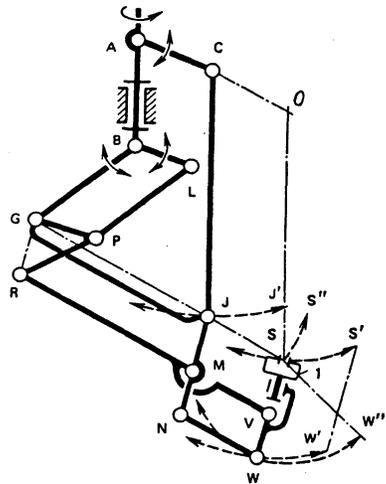


Рис. 10.3.6. Радиально-ориентирующий механизм в манипуляторе

$RGJM$. К звену MJ присоединен еще один параллелограмм $MNWX$, стороны которого параллельны сторонам параллелограмма $RGJM$. К звену VW присоединено захватное устройство 1, с центром S . В точке B установлены две приводные пары, сообщаемые движения звеньям BG и BL . Точка J соединена тягой CJ с приводным звеном AC .

Совместное движение трех звеньев BG , BL и AC позволяет перемещать точку S в плоскости и поворачивать вокруг нее ось захватного устройства SW , т.е. осуществлять радиальную ориентацию. Возможны следующие частные варианты движений. Если звенья BG и BL неподвижны, то неподвижно и звено PGR , а поворот звена AC приводит к повороту звена GJ вокруг точки G , а RV вокруг точки R . Звено VW движется поступательно, точка S - по дуге окружности SS'' с центром в точке O . Если неподвижно звено AB , то точка J движется по дуге окружности JJ' , точка S - по дуге окружности SS' с центром в точке O . Ось SW либо движется поступательно при повороте звена BG и при неподвижном звене BL (положение $S'W'$), либо дополнительно поворачивается вокруг точки S , если подвижны оба звена BG и BL . При этом линия SW все время ориентирована параллельно GR .

При повороте только одного звена BL - входного ориентирующего механизма - звено RPG повернется вокруг точки G , а ось захватного устройства SW - вокруг неподвижной точки S . Точка W будет перемещаться по дуге

окружности WW'' с центром в точке S . Здесь использовано свойство двоянного параллелограмма поворачивать звенья вокруг неподвижной точки при отсутствии в ней шарнира. Манипуляторы по такой схеме могут быть использованы для закручивания гаек, поворота рукояток управления, ориентации сварочной головки по нормали к линии сварочного шва и др.

Самоориентирующиеся механизмы. Важная область применения ориентирующих механизмов - присоединение агрегата (двигателя, редуктора и др.) к раме (корпусу) машины, обеспечивающие восприятие действующих на

раму нагрузок со стороны агрегата. Согласно классическому определению эти устройства не являются механизмами, а представляют собой статически определяемые пространственные фермы. При этом неточности монтажа агрегата и деформации рамы не должны влиять на реакции в местах сопряжений, т.е. в действительности функционирование данных устройств связано с перемещениями, хотя и с небольшими, что свойственно некоторым механизмам.

Обычно рама механизма воспринимает радиальную силу F и момент M (например, рама лебедки, корпус редуктора и др.).

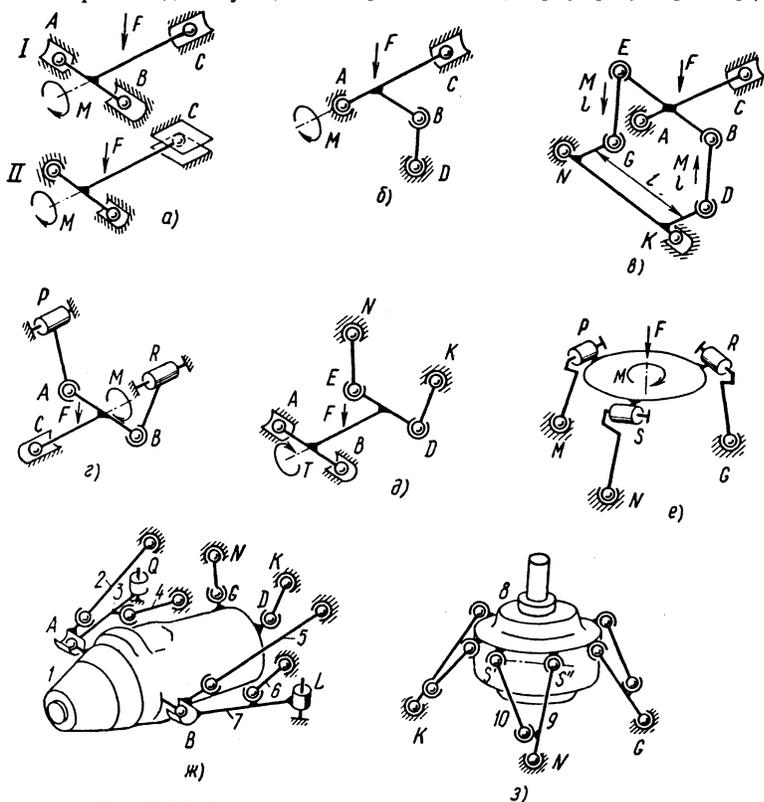


Рис. 10.3.7. Самоустанавливающиеся подвески агрегатов

Опоры могут быть выполнены в виде четырехподвижных кинематических пар (схема I, рис. 10.3.7, а). Все опоры воспринимают силу F , а опоры A и B - также момент M в виде пары сил. Опоры могут быть выполнены и в виде четырех-, трех- и одноподвижной пар (схема II). Несмотря на то что обе схемы формально статически определяемы, схема I имеет ограниченную самоустанавливаемость. В схеме II использована высшая пара с невысокой несущей способностью. В схеме на рис. 10.3.7, б сила F приходится на две опоры A и

C , одна из которых четырехподвижная (C), а другая трехподвижная. Момент M воспринимается в совокупности опорами A , C и тягой BD . Схема, показанная на рис. 10.3.7, в, отличается от предыдущей тем, что агрегат соединен с рамой двумя тягами BD , EG и звеном NK . Момент воспринимается этой кинематической цепью. Звено NK обеспечивает равенство сил, воспринимаемых каждой тягой, определяемых как M/l (l - расстояние между тягами).

Во всех трех схемах отсутствуют избыточные связи, в схеме, показанной на рис. 10.3.7, б, имеется одна лишняя (безвредная) степень свободы - вращение тяги *BD* вокруг оси, а в схеме рис. 10.3.7, в таких степеней свободы две - вращения тяг *EG* и *BD*. На рис. 10.3.7, г - г даны варианты пространственных структурных групп (*P*, *R* и *S* - одноподвижные пары).

Установка двигателя *I* в опорах *A* и *B* и соединение с корпусом машины осуществляется с помощью амортизационных стержней *NG* и *KD* (рис. 10.3.7, ж). В отличие от варианта, приведенного на рис. 10.3.7, д, в ней каждая из опор *A* и *B* соединена с корпусом машины посредством фермы, составленной из звеньев соответственно 2 - 4 и 5 - 7. Опоры *L* и *Q* двухподвижные. Редуктор *8* соединен с корпусом машины посредством регулируемых амортизированных стержней *9* и подкосов *10* (рис.

10.3.7, з). Соединение этих двух звеньев эквивалентно одному звену *NS*, показанному на рис. 10.3.7, е, а пары *S'* и *S''* эквивалентны одной паре *S*. Шарнирная подвеска агрегата в сочетании с упругостью подкосов уменьшает влияние деформаций и его вибрации на корпус машины. Для статической определенности последней системы достаточно иметь шесть стержней со сферическими шарнирами на концах. На практике из компоновочных соображений и стремления к более распределенной нагрузке на корпусе агрегата используют обычно восемь стержней, а погрешности монтажа компенсируют регулировкой длины и упругости стержней.

Условия сопряжения объектов, отличающиеся от идеальных или предусмотренные процессом функционирования, с точки зрения самоуправления практически эквивалентны, и для их учета при конструировании используются одни и те же принципы.

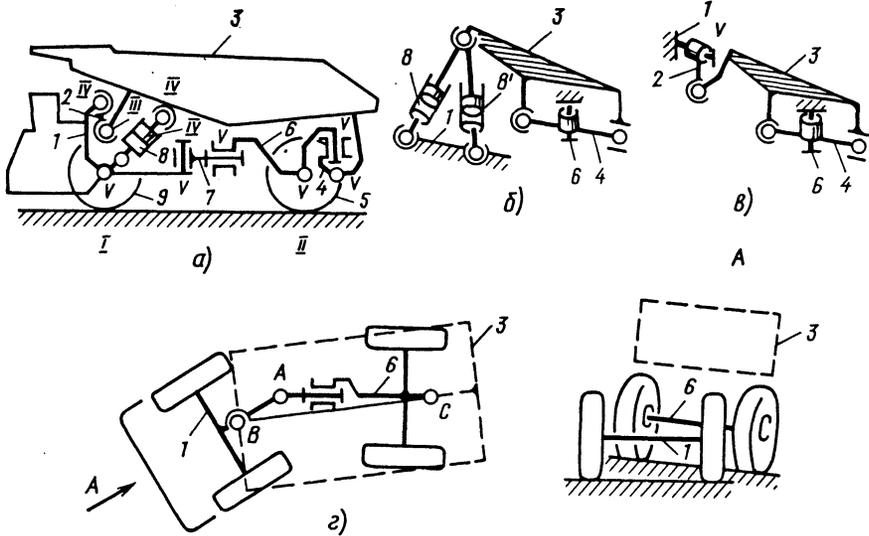


Рис. 10.3.8. Самоустанавливающиеся механизмы самосвала

В самосвале взаимосвязана самоустановка кузова *3* относительно и рамы с колесами *5* и *9* относительно опорной поверхности (рис. 10.3.8, а). Рама выполнена из шарнирно сопряженных частей *1* и *6*. Они соединены между собой посредством двух одноподвижных пар *V* и промежуточного звена *7*, что позволяет им независимо друг от друга поворачиваться вокруг вертикальной и горизонтальной осей (поворот машины и преодоление неодинакового уклона дорожного полотна). Кузов *3* постоянно соединен с частью *6* двумя одноподвижными парами *V* и промежуточным звеном

4, а с частью *1* - трехподвижной парой *III*, промежуточным звеном *2* и двухподвижной парой *IV*. При разгрузке кузова машины трехподвижная пара *III* размыкается, а кузов приводится в движение гидроцилиндром *8*.

На первом этапе анализа полагают заданными произвольное и фиксированное положение частей рамы и рассматривают самоустановку кузова. Если в этом случае принять части *1* и *6* за стойку, то в транспортном положении при числе степеней свободы $w=0$ получается число избыточных связей $q=0$ [7], а в процессе разгрузки, когда $w=1$, число $q=0$.

Кузов 3 самоустанавливается в зависимости от положения ходовых частей 1 и 6.

Недостаток такой конструкции - наличие боковой нагрузки на гидроцилиндр. При наличии двух гидроцилиндров δ и δ' , управляемых автоматически, этот недостаток устранен (рис. 10.3.8, б). Гидроцилиндры образуют статически определимый пространственный механизм. В транспортном режиме (рис. 10.3.8, в) при отсутствии давления в гидроцилиндрах они не участвуют в работе. Для определенности положения кузова 3 звенья 1 и 2 должны быть соединены неподвижной парой V .

Самоприспосабливаемость машины к внешним условиям - к форме опорной поверхности - происходит следующим образом (рис. 10.3.8, г). Передняя часть рамы 1 поворачивается относительно задней части рамы 6 в шарнире A . При этом благодаря шарнирному соединению в точках B и C с обоими частями кузова занимает положение, при котором его центр тяжести несущественно смещается внутри опорного контура. При неодинаковом поперечном уклоне кузовов наклоняется вместе с осью части рамы 6 (вид A).

10.3.4. Общие решения задач манипулирования

Под общими решениями понимается совместное конструктивное обеспечение перемещения и заданной ориентации выходного звена относительно основания (стойки). Манипулирование осуществляют с помощью плоских механизмов с одной, двумя и тремя степенями свободы и с помощью пространственных механизмов с тремя - шестью степенями свободы. Число приводов в плоских и пространственных механизмах может быть больше соответственно трех и шести, что обычно обусловлено требованием повышения маневренности или увеличения отдельных перемещений.

По виду соединения звеньев, кинематических цепей, расположению приводов различают: последовательное соединение звеньев (незамкнутая кинематическая цепь) с замыканием каждой пары звеньев приводным устройством, с размещением одного привода на основании или на первом от основания подвижном звене, второго на первом или втором подвижном звене, третьего на втором или третьем подвижном звене и т. д.; последовательно-параллельное соединение звеньев с размещением приводов на основании и (или) на основании и на подвижных звеньях; параллельное соединение кинематических цепей с размещением приводов на основании и (или) на основании и на подвижных звеньях.

Наиболее распространены манипуляторы, в основе которых имеется незамкнутая кинематическая цепь. Они обладают наиболь-

шей маневренностью подобно руке человека, но имеют небольшую жесткость, как обычная консоль с приложенной на конце рабочей нагрузкой. В связи с этим применяют схемы в виде комбинации замкнутых и незамкнутых кинематических цепей (рис. 10.3.9), а также в виде параллельно соединенных кинематических цепей (см. рис. 10.3.10).

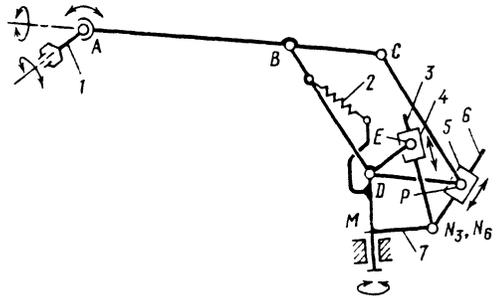


Рис. 10.3.9. Манипулятор для выполнения технологических операций

Манипулятор, предназначенный для проведения сварочных работ и других технологических операций (см. рис. 10.3.9), размещен на вращающейся платформе 7, шарнирно в точке M соединенной с основанием. С платформой шарнирно соединено звено BD . Его наклон осуществляется поступательной приводной парой 4 - 3 (винтовой механизм, приводимый от двигателя вращением). Звено 4 соединено шарнирно со звеном BD в точке E , а звено 3 - с платформой 7 в точке N_3 . Звено AB шарнирно соединено со звеном BD и его поворот вокруг точки B осуществляется аналогичной упомянутой выше приводной парой 5 - 6, воздействующей на звено AB через параллелограмм $BSPD$. Звено 6 присоединено к платформе в точке N_6 . При работе привода 3 - 4 и неподвижной точке P звено AB перемещается поступательно, а при работе привода 5 - 6 и неподвижной точке B звено AB поворачивается вокруг нее.

В точке A к звену AB посредством трех приводных пар с пересекающимися осями присоединено выходное звено 1. Момент от веса подвижных звеньев при наклоне звена BD воспринимается пружиной 2. Чем больше наклон звена, тем больший момент требуется уравновесить, что обеспечивается увеличением деформации пружины, а следовательно, увеличением усилия и плеча линии действия силы относительно точки D .

Параллельное соединение двух приводов и размещение их на платформе 7 в данном примере приводит к повышению жесткости системы и точности перемещения выходного звена. Кроме того, в режиме разгона и тормо-

жения при одновременной работе приводы не оказывают взаимного динамического воздействия, что позволяет иметь несколько меньшую их установленную мощность. Параллельное соединение кинематических цепей означает, что каждая из них соединена с выходным звеном и стойкой. Применение такого решения позволяет получать механизмы с различными функциональными возможностями и качественными показателями. Используя в качестве составляющих рычажные кинематические цепи, можно создавать манипуляционные системы, у которых выходное звено соединено со стойкой пространственной фермой, если затормозить выходные звенья. Такие системы обладают большой жесткостью и грузоподъемностью по сравнению с системой на основе незамкнутой кинематической цепи.

Если в данной кинематической цепи размещать по одной приводной паре, то для механизмов с шестью степенями свободы потребуется шесть кинематических цепей. Если в кинематических цепях увеличивать число приводных пар, то можно соответственно уменьшать число кинематических цепей, соединяющих выходное звено со стойкой.

Выходное звено *GMN* механизма, показанного на рис. 10.3.10, *a*, обладает шестью

степенями свободы. Каждая из цепей имеет шесть степеней свободы. Приводы обозначены на схеме стрелками с указанием сил F_A, F_B, F_D (поступательные пары) и моментов M_A, M_{Ax}, M_D (вращательные пары). Кинематическая цепь *AEG* обеспечивает перемещение точки *C* (в которой, например, расположен центр масс перемещаемого звена m_C) вдоль любой из осей координат x_C, y_C, z_C . Кинематическая цепь *DN* обеспечивает перемещение точки *N* по сферической поверхности с центром в точке *C* (траектории $N_x N_x, N_z N_z$). Звено *GLM* можно вращать вокруг оси *CN* (траектория LL_y с радиусом r), перемещая стержень *L* под действием силы F_B . Конструктивные решения сферических опор *A, B, D* в совокупности с приводами получают на основе суммирующих механизмов.

В зависимости от заданных условий можно аналогично соединять 2, 4, 5, 6 кинематических цепей. Механизм с шестью степенями свободы имеет пять кинематических цепей, и только в цепи *AC* два привода, а в остальных цепях - по одному (рис. 10.3.10, *b*). Цепи *LC* и *NK* дополнительные (по сравнению с рассмотренными выше). Они повышают жесткость системы при восприятии внешней нагрузки, действующей на выходное звено, в частности при восприятии момента M_z силами F_L, F_K . При действии моментов M_x, M_y, M_z стержни механизма работают в основном на сжатие или растяжение.

В качестве приводных пар в рассматриваемых механизмах могут быть использованы приводные кинематические соединения (рис. 10.3.11). Эти соединения могут быть использованы самостоятельно и также представляют собой схемы параллельно-соединенных кинематических цепей. Одно из звеньев соединений принято за стойку. Но в принципе любая из приведенных схем может быть установлена вместо одной из пар внутри кинематической цепи.

В качестве основы на рис. 10.3.11, *a* - *г* использован сферический пятизвенный механизм с двумя степенями свободы. Приводные пары (двигатели) обозначены стрелками и моментами M_x и M_y , означающими возможность придания звену *1* вокруг осей соответственно x и y , кинематические пары *A, B, C, D, E*. В схеме, показанной на рис. 10.3.11, *б*, оси пар *B* и *A, D* и *E* выполнены взаимно перпендикулярными, что позволило осуществить элементы пар *B* и *D* в виде прорезей, взаимодействующих со звеном *1*. Звено *1* соединено также со стойкой через пару *D'*, промежуточное звено *5* и пару *E'*. Оси пар

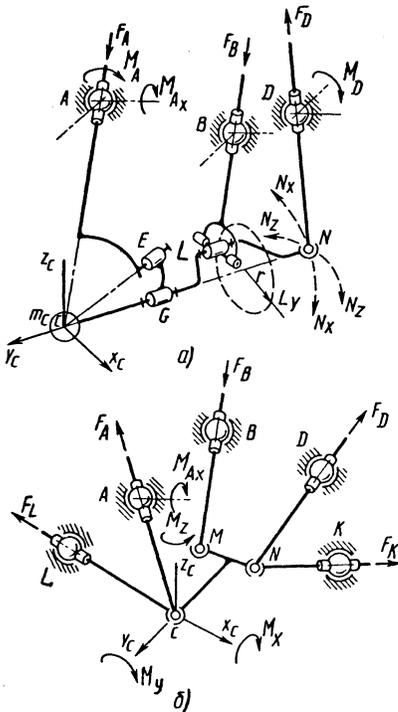


Рис. 10.3.10. Манипуляционные системы на основе параллельно-соединенных кинематических цепей

D' и E' совпадают с осями пар соответственно D и E . Данное решение позволяет независимо передавать движения звеньев 2 и 3 звену 1. Зеркало 3 отражает на экран 7 луч света от

излучателя 6. Развертка луча на экране вдоль оси X_1 осуществляется поворотом звена 2 вокруг оси x , а развертка вдоль оси Y_1 - поворотом звена 3 вокруг оси y .

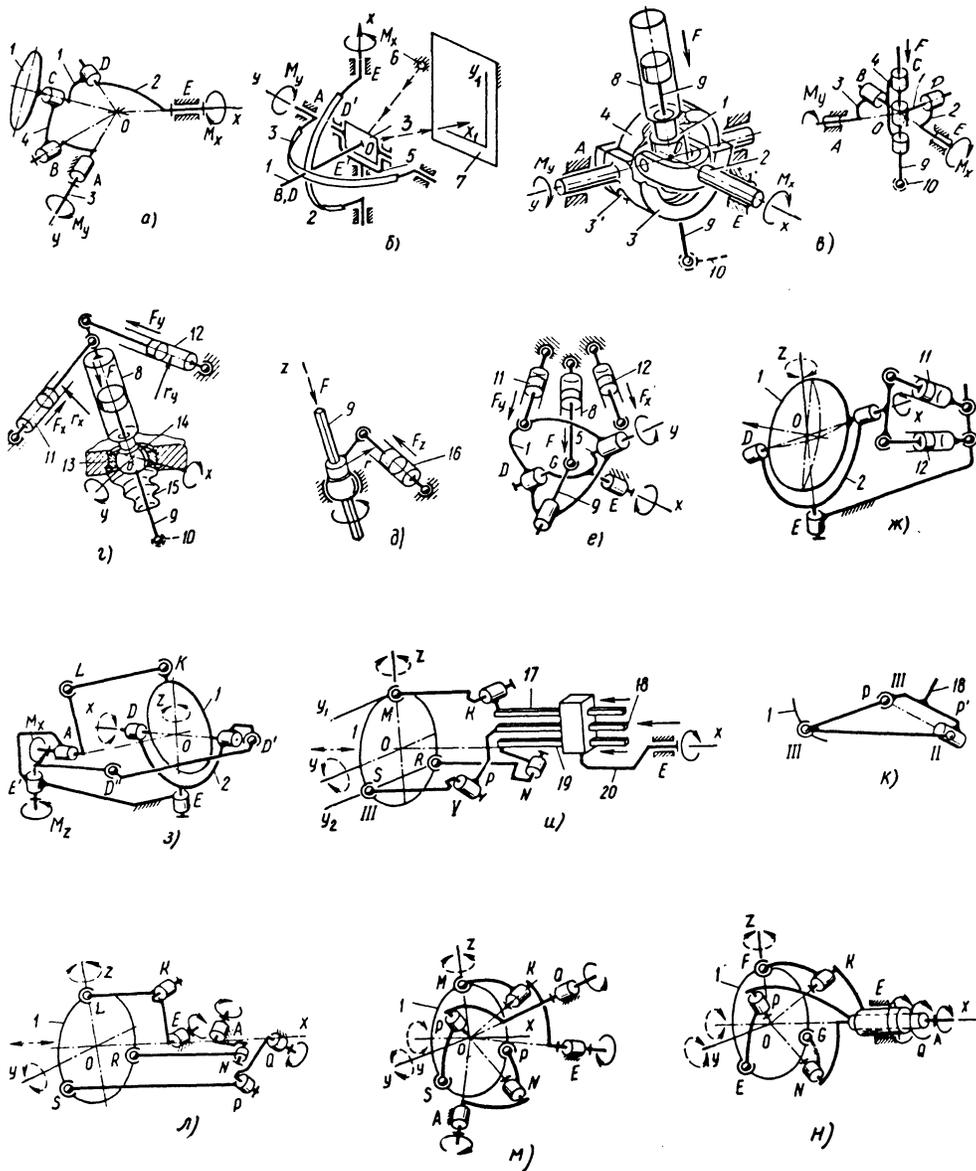


Рис. 10.3.11. Многоподвижные приводные соединения

Схема, показанная на рис. 10.3.11, а, конструктивно может быть выполнена в виде приводной опоры с двумя двигателями на основании (рис. 10.3.11, в). Кроме того, в

звене 1 размещен гидроцилиндр 8, шток 9 которого пересекает оси x и y в точке 0. Помимо независимых вращательных движений осуществляется прямолинейное движение

вдоль оси штока 9. Шток может быть соединен сферической парой, например, со звеном 10 (F - сила, развиваемая в гидроцилиндре).

На рис. 10.3.11, *з* представлено решение для исполнения тех же движений, что и в схемах на рис. 10.3.11, *б*, *в*, но с помощью гидроцилиндров 11 и 12. Сила F_x на плече r_x обеспечивает поворот штока 9 вокруг оси x сферической подшипниковой опоры 14, а сила F_y на плече r_y - поворот вокруг оси y . Сильфон 15 позволяет разделить пространство размещения привода от рабочей среды. Гидроцилиндром 16 может быть осуществлен поворот штока 9 вокруг его оси под действием силы F_z на плече r (рис. 10.3.11, *д*). Особенностью схемы, показанной на рис. 10.3.11, *е*, является выполнение сферической опоры в виде универсального шарнира. Звено 1 поворачивается гидроцилиндрами 11 и 12, а шток 9 движется поступательно относительно звена 1 с помощью гидроцилиндра 8. Гидроцилиндры 11 и 12 можно расположить так, что они будут работать только совместно (рис. 10.3.11, *ж*) при движении их штоков в одну сторону звено 1 поворачивается вокруг оси z , а при движении в разные стороны - вокруг оси x .

В схеме на рис. 10.3.11, *з* использованы вращательные приводы (моменты M_x и M_z). Входные звенья AL и $E'D'$ передают движение выходному звену через шатуны соответственно LK и $D''D'$. При этом образованы два параллелограмма $ALKO$ и $E'D''D'O$, а оси шарниров D, E, E', A пересекают линию, проходящую через точку 0.

В основу следующих схем (рис. 10.3.11, *и*, *к*) положена пространственная трехповодковая структурная группа. Звено 1 (рис. 10.3.11, *и*) соединено тремя параллельными поводками KM, PS и NR с входными звеньями 17, 18 и

19, размещенными в звене 20. Одновременное движение всех входных звеньев с одинаковой скоростью обеспечивает поступательное перемещение звена 1. Перемещая звенья 18 и 19 в разные стороны, можно повернуть звено 1 вокруг оси z , а, например, звенья 18 и 19 вперед, а звено 17 назад с удвоенной скоростью, можно повернуть звено 1 вокруг оси y . Кроме того, всю систему можно вращать вокруг оси x , вращая звено 20. Каждый поводок может быть выполнен в виде жесткой фермы (рис. 10.3.11, *к*), при этом одноподвижная кинематическая пара V заменяется двумя парами: четырехподвижной $II (P')$ и трехподвижной $III (P)$. На рис. 10.3.11, *л* поводки соединены с вращательными приводами с помощью кривошипов KE, NA и PQ . Оси шарниров E, A, Q пересекают ось x . При этом образуются параллелограммы $EKLO$ и $QPSO$.

Приводное соединение может быть выполнено на базе сферических механизмов с тремя степенями свободы (рис. 10.3.11, *м*, *н*). Все оси шарниров пересекаются в точке 0, а в схеме на рис. 10.3.11, *н*, кроме того, оси шарниров E, Q, A совпадают. Схема на рис. 10.3.11, *м* позволяет получать вращательные движения вокруг трех осей координат, а схема на рис. 10.3.11, *н* - вокруг любой из трех осей выходного звена 1.

Механизмы с параллельными кинематическими цепями могут иметь самое разнообразное исполнение и назначение. Наряду с манипуляторами, способными воспринимать большие внешние нагрузки, при больших перемещениях они могут быть использованы для осуществления малых перемещений с высокой точностью, а также в качестве корректирующих устройств, установленных в кинематических цепях или на выходном звене манипулятора грубых перемещений.

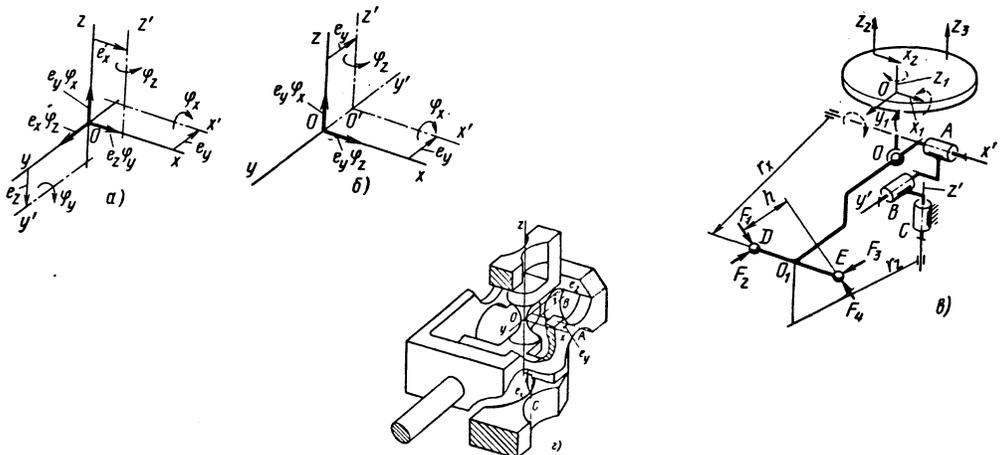


Рис. 10.3.12. Манипулятор для малых перемещений

Малые перемещения во много раз меньше тех, которые могут выполнять непосредственно линейные приводы, могут быть обеспечены следующими решениями. При этом соответственно возрастает дискретность, точность перемещений и грузоподъемность устройства по сравнению с возможными показателями приводов. В основу каждой кинематической цепи положена система со сферическим шарниром O и тремя вращательными одноподвижными парами A, B, C (рис. 10.3.12, θ). Чтобы получить шесть степеней свободы, необходимо оси вращательных пар x', y', z' располагать так, чтобы они были параллельны осям координат соответственно x, y, z и не пересекались между собой (рис. 10.3.12, a). При пересечении хотя бы одной пары из осей x', y' и z' число степеней свободы уменьшается.

В частном случае (рис. 10.3.12, b) все три оси x', y' и z' пересекаются в одной точке O' , а оси y и y' совпадают. Такая кинематическая цепь имеет пять степеней свободы и одну лишнюю степень свободы - вращение соединительного звена вокруг оси OO' , которое не может влиять на движение выходного звена.

В каждой кинематической цепи может быть не более трех приводных кинематических пар (из числа вращательных пар A, B, C). Для передачи движения звеньев цепи (рис. 10.3.12, θ) использован рычаг, малым плечом которого является расстояние между осями e_x, e_y, e_z (см. рис. 10.3.12, a), а большим плечом r_x, r_y, r_z . Вследствие малости перемещений движение точки O по дугам окружности при углах поворота звена $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ можно считать прямолинейными и равными соответственно $e_x \varphi_x, e_y \varphi_y$ и $e_z \varphi_z$. В схеме, показанной на рис. 10.3.12, b , получается только два таких перемещения.

Возможны следующие варианты последовательности соединения осей вращательных пар в кинематической цепи по рис. 10.3.12, a :

$$\begin{aligned} &Ox'y'z', Oy'z'x', Oz'x'y', \\ &Ox'z'y', Oy'x'z', Oz'y'x'. \end{aligned}$$

Для получения шести степеней свободы выходного звена к нему подключают три кинематических цепи через сферические шарниры. При этом одна цепь обеспечивает перемещения x_1, y_1, z_1 (см. рис. 10.3.12, θ), другая - два перемещения x_2 и z_2 , соответственно этому поворот выходного звена вокруг осей z_1 и y_1 , а третья - только одно перемещение z_3 , соответственно поворот вокруг оси x_1 .

Если используются двигатели, способные развивать усилие только в одном направлении

(без реверсирования усилия, но с реверсированием движением), необходимо силовое замыкание кинематической цепи, например, в виде упругого звена или дополнительного двигателя. Действие на рычаг четырех сил F_1, F_2, F_3, F_4 обеспечивает необходимое число приводов (три) и силовое замыкание (рис. 10.3.12, θ). Для точных перемещений или для использования манипулятора в вакууме целесообразно кинематические пары выполнять в виде упругих перемычек (рис. 10.3.12, z). Сферическая пара O представлена в виде двух перемычек, расположенных по оси z , а каждая из остальных пар A, B, C - в виде перемычки, способной изгибаться и обеспечивать поворот связанных с ней жестких элементов вокруг осей x, y, z . Оси перемычек e_x, e_y и e_z смещены относительно осей соответственно x, y и z . Перемычка A раздвоена и ее элементы размещены симметрично относительно осей z и y .

10.4. ЗАЖИМАЮЩИЕ И ДЕФОРМИРУЮЩИЕ МЕХАНИЗМЫ

Зажимающие и деформирующие механизмы обеспечивают движение без нагружения выходных звеньев до соприкосновения с зажимаемым или деформируемым объектом, а затем создают давление на объект практически без перемещения или при незначительном перемещении. На подготовительном этапе функционирования такие механизмы могут быть рассмотрены как передаточные или манипулирующие.

10.4.1. Механизмы относительного перемещения зажимающих элементов

Простейшие решения зажимающего механизма заключаются в обеспечении давления в любой точке хода выходных звеньев передаточного (рис. 10.4.1, a) или манипулирующего (рис. 10.4.1, b) механизма. Губки 4 и 5 первого механизма жестко закреплены на ползунах соответственно 3 и 7. Ползуны установлены на направляющих 2, соединенных с корпусом. Поступательное движение ползуну 7 и соответственно губке 5 сообщается гидроцилиндром 1. Благодаря связи звеньев 7 и 3 равноплечей кулисы 6 обеспечивается встречное движение губок 5 и 4.

У прямолинейно-направляющего механизма (рис. 10.4.1, b) точки C и B звена BCD движутся вдоль направляющих, оси которых пересекаются в точке A . Из свойства механизма точка D должна двигаться по прямой, проходящей через точку A , при условии, что все точки A, B, C и D лежат на одной окружности с центром в точке O_1 . Симметрично первому

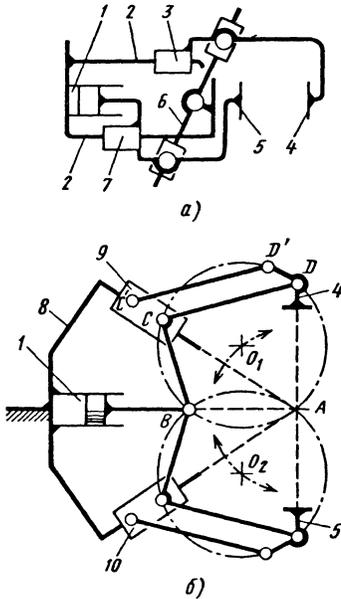


Рис. 10.4.1. Зажимающие механизмы

направляющему механизму установлен второй такой же механизм. Причем точки *A* и *B* у них общие. Точке *B* сообщается прямолинейное движение от гидроцилиндра 1, установленного в корпусе 8. В точке *C* звено *BCD* шарнирно связано с ползуном 9. Аналогичный ползун 10 связан с другим направляющим механизмом. В точке *D* шарнирно к звену *BCD* присоединена губка 4, аналогично губка 8 присоединена к другому направляющему механизму. Для обеспечения поступательного перемещения губка 5 соединена с ползуном 9 дополнительным звеном *CC'D'*, причем *CC'D'D* представляет собой параллелограмм. Также соединена губка 5 с ползуном 10. Рассмотренное устройство обеспечивает возможность захвата и зажатия предметов с широким диапазоном размеров.

Простейшие решения зажимающих и деформирующих механизмов получают, непосредственно присоединяя выходные звенья к приводным устройствам. Механизм всестороннего сжатия (рис. 10.4.2) предназначен для испытания материалов, получения заданной пространственной формы прессуемых изделий. Он обеспечивает сжатие объекта с шести сторон одновременно. Выполнено данное устройство в виде коробки кубической формы с перемещаемыми стенками.

Стенки 1, 3, 6, 7, 9, 11 коробки соединены со стойкой поступательными парами, определяющими их относительное перемещение. Стенка 6 коробки неподвижна, а стенки 1 и 3

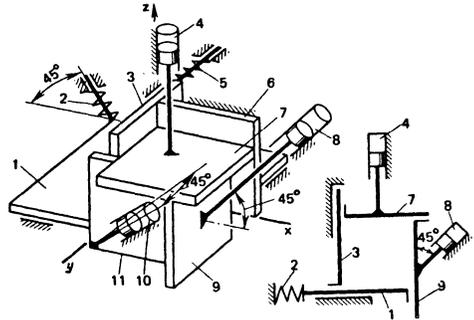


Рис. 10.4.2. Механизмы всестороннего сжатия

установлены с возможностью перемещения в плоскости их установки. Плоскости стенок 6, 1, 3 образуют прямой угол χ_{yz} . Стенка 3 может перемещаться вдоль оси *y*, а стенка 1 - в плоскости *xu* вдоль биссектрисы угла между осями *x* и *y*. Стенку 7 перемещают поступательно вдоль оси *z* гидроцилиндром 4. Стенка 9 перемещается поступательно гидроцилиндром 8 в направлении под углом 45° к оси *x* в плоскости параллельной *xy*. Стенка 11 перемещается поступательно гидроцилиндром 10 в направлении под углом 45° к осям *x*, *y*, *z*. Все стенки перемещаются одновременно таким образом, что сохраняется контакт их торцов со смежными стенками. Силовое замыкание осуществляется пружинами 2 и 5.

10.4.2. Механизмы распорного действия

Для обеспечения значительной силы зажатия объекта используется распорный эффект, возникающий вблизи особого положения зажимающего механизма. Наличие особого положения позволяет исключить самопроизвольное движение выходного звена.

В механизме перемещения и запирания борта формы железобетонных изделий (рис.

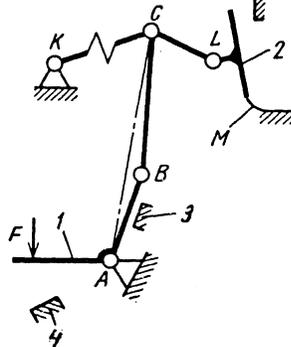


Рис. 10.4.3. Механизм перемещения и запирания борта формы

10.4.3) борт 2 присоединен к основанию с помощью гибкого элемента M и приводится в движение посредством шестизвенного шарнирного механизма, содержащего пружинное звено KC . В положении раскрытия борта, показанном на рис. 10.4.3, звено 1 приведено в положение, ограниченное упором 3. Из этого положения невозможно самопроизвольное закрытие борта, пока центр шарнира B лежит по правую сторону от линии AC . Запирание борта происходит при повороте рычага 1 в направлении действия силы F до упора 4. В этом случае звено CB будет тянуть шарнир C вниз, звенья KC и CL выгнутся в одну линию. Такое положение является особым. Звено KC при этом сжимается. Последующее небольшое перемещение точки C ниже линии KL приведет к устойчивому запиранию борта 2 (звено 1 упрется в упор 4). Раскрытие его происходит при повороте рычага 1 по часовой стрелке.

10.4.3. Механизмы винтового прессования

В ковочных машинах в ряде случаев кроме сжимающего усилия требуется сообщенные поковке крутящего момента. Выходному звену при этом придают винтовое движение с определенным соотношением поступательного и вращательного перемещений.

Ползун 4 (рис. 10.4.4, а) перемещается по направляющей корпуса пресса 5. До соприкосновения с поковкой ползун 1 удерживается упорами C , обеспечивающими начальный угол наклона стоек 2, 3 и 6. При соприкосновении с поковкой усилие через наклонные стойки 2, 3 и 6, соединенные с ползунами 4 и 1 сверчковыми парами, передается ползу-

ну 1 и связанному с ним инструменту 7. Поковка зажимается между инструментами 7 и 8. При последующем давлении в направлении действия силы F , поскольку ползун 4 не вращается, начинает поворачиваться ползун 1 и через инструмент 7 скручивает поковку. Соотношение силы F и крутящего момента определяется наклоном стоек 2, 3 и 6. Он может регулироваться, например, перемещением в вертикальном направлении упоров C . Реактивный момент воспринимается направляющей 5. В восьмизвенном пространственном механизме (рис. 10.4.4, б) вращение ведущего вала 9 преобразуется во вращение и поступательное перемещение инструмента 7 относительно неподвижного инструмента 8. Вал 9 соединен поступательной парой D со звеном 11, которое связано с инструментом 7 карданной передачей, содержащей промежуточные звенья EG , GL , LM . Оси вращательных пар E и G , L и M перекрещиваются под прямым углом, а оси пар E и M , G и L параллельны. Инструмент 7 связан вращательной парой N с ползуном 12, перемещаемым вдоль направляющей корпуса станка, с которой он соединен поступательной парой K .

В этой схеме параметры инструмента (соотношения поступательного движения и вращения) определяются величинами эксцентриситетов e и e_1 . Причем e_1 изменяют, регулируя положение звена 11 перемещением кольцевого упора 10. Через упор 10 воспринимается также осевая составляющая реакции со стороны поковки, сжимаемой инструментами 7 и 8.

10.4.4. Самозажимные механизмы

В различных захватных фрикционных устройствах, фрикционных муфтах, тормозах и передачах имеет существенное значение самоприспособляемость механизма к значению полезной нагрузки. В частности, целесообразно, чтобы усилие прижатия звеньев возрастало пропорционально полезной нагрузке. В некоторых механизмах, передающих нагрузку не за счет фрикционного взаимодействия звеньев, возникает задача компенсации деформации звеньев под действием силы нормальной к направлению движения. В этих случаях используют два пути: повышение жесткости в данном направлении либо направленное противодействие на соответствующие звенья, зависящее от передаваемой нагрузки.

Фрикционная передача (рис. 10.4.5, а) имеет ведущее 1, ведомое 2 и промежуточное 4 фрикционные колеса. Колесо 4, подвешенное на звеньях 3, при направлении вращающих моментов M_1 и M_2 , показанных на схеме, затягивается между колесами 1 и 2. Чем боль-

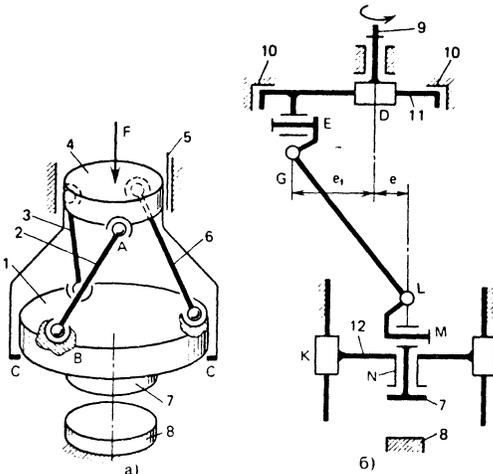


Рис. 10.4.4. Механизмы винтового прессования

ше моменты, тем значительнее сила прижатия звеньев 1 и 4, 4 и 2. Для самозатягивания необходимо, чтобы начальный угол $\gamma < 2\rho$ (где ρ

- угол трения между колесами). Это условие является приближенным, так как не учитывается трение в шарнирах.

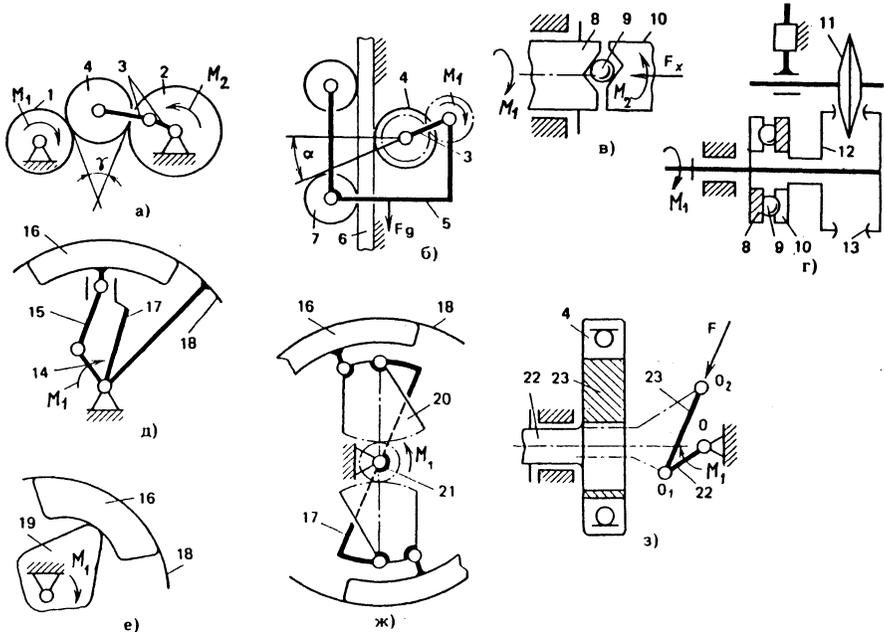


Рис. 10.4.5. Самозатягиваемые нажимные механизмы

В поступательной фрикционной передаче (рис. 10.4.5, б) тележка 5 перемещается относительно рельса 6, который зажат между роликами 7 и колесом 4. Колесо 4 вращается под действием момента M_1 . Чем больше сила тяжести F_g тележки, тем значительнее расклинивается звено 3 и прижимается колесо 4 к рельсу 6. Момент M_1 находится в прямой зависимости от силы F_g . Угол α выбирают в первом приближении меньше угла трения ρ между рельсом и колесом 4. На условие самозатягивания так же, как в рассмотренном выше механизме, влияет трение в шарнирах.

В устройстве для осевого нажатия во фрикционных передачах (рис. 10.4.5, в, з) под действием моментов M_1 и M_2 звенья 8 и 10 стремятся повернуться относительно друг друга. Скосы, имеющиеся на звеньях, взаимодействуют через шарик 9 и приводят к относительному осевому перемещению звеньев до тех пор, пока не уравниваются моменты на звеньях 8 и 10 и соответственно не будет обеспечена необходимая сила прижатия, например, дисков 12 и 13 к дискам 11. Осевая сила F_x (рис. 10.4.5, в) воспринимается подшипником звена 8 или (рис. 10.4.5, з) замыкается на звене 11. Угол скоса α определяет соотношение между окружной силой F , приведенной к точке ка-

сания шарика и скоса, и осевой силой $F_x = F/\operatorname{tg}\alpha$.

Во фрикционных колодочных муфтах (тормозах) (рис. 10.4.5, д - ж) сила прижатия колодок 16 определяется значением момента M_1 . Барабан 18 не может передать движение звену 14, если отсутствует или недостаточен момент M_1 и, следовательно, колодки 16 недостаточно прижаты к барабану 18. Движение в передачах (рис. 10.4.5, д, ж) может быть передано лишь при направлении момента M_1 , показанном стрелкой. Устройства, показанные на рис. 10.4.5, д - ж, работают, как некоторые разновидности механизма свободного хода.

В механизме, который может быть представлен как кривошипно-ползунный механизм относительно звена 17 (рис. 10.4.5, д), роль ползуна выполняет колодка 16. Кривошип 14 воздействует на колодку через шатун 15. В кулачковом механизме (рис. 10.4.5, е), кулачок 19 при повороте в любом направлении прижимает колодку 16 к барабану 18. С увеличением момента сила прижатие колодки возрастает по определенному закону. При повороте шестерни 21 (рис. 10.4.5, ж) поворачиваются зубчатые секторы 20 и колодки 16 прижимаются к барабану 18. Секторы 20 шарнирно связаны со звеном 17.

Механизм, показанный на рис. 10.4.5, з, используется в саморегулируемых дисковых генераторах волновых зубчатых и фрикционных передач. На эксцентриковом валу 22 установлен эксцентрик 23 с подшипником 4. Сила F воздействия гибкого колеса на генератор волн направлена вдоль линии центров O_1O_2 (без учета трения). Чем больше момент M на звене OO_1 , тем больше сила F . Применение такого механизма позволяет исключить относительный проворот гибкого и жесткого колес.

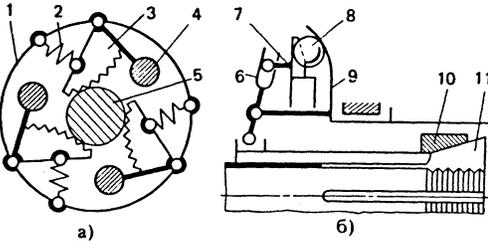


Рис. 10.4.6. Центрирующий самозажимной патрон станка

Кроме фрикционного взаимодействия используют и другие принципы для самозажатия. Например, центрирующий патрон станка (рис. 10.4.6) служит для зажатия заготовки под действием центробежных сил при вращении патрона с определенной угловой скоростью. В корпусе 1 (рис. 10.4.6, а) установлены шарнирно грузы 4, жестко соединенные с кулачками 3, которые зажимают заготовку 5. При неподвижном корпусе 1 кулачки 3 разжаты под действием пружин 2. При вращении корпуса 1 грузы 4 расходятся и поворачивают кулачки 3 до соприкосновения с заготовкой и ее зажатия.

В качестве грузов могут быть использованы шары 8 (рис. 10.4.6, б). При вращении корпуса 9 шары перемещаются под действием центробежных сил по криволинейной поверхности корпуса. Шары 8 при этом воздействуют на звено 7 и через кулису 6 смещают в осевом направлении конус 10, который сжимает упругие элементы цанги 11. Звено 7 центрируется благодаря симметричному расположению трех кулис 6. В плоскости осевого сечения звенья 7, 6 и 10 относительно звена 9 образуют последовательно соединенные ползунно-кулисный и кулисно-ползунный механизмы.

10.4.5. Механизмы, самоприспосабливающиеся к положению и форме зажимаемого предмета

Одна из задач, решаемых в зажимающих механизмах, - самоприспосабливаемость к месту расположения захватываемого предмета. В случаях, когда нельзя сдвигать захватываемый

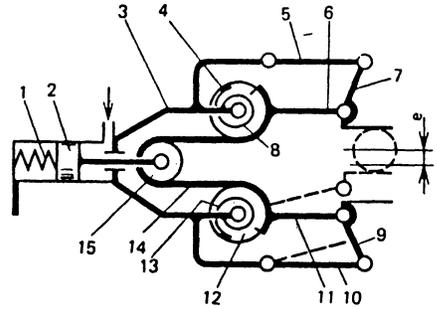


Рис. 10.4.7. Захватное самоустанавливаемое устройство

мый предмет, пока он не зажат с обеих сторон, нужно отслеживать его перемещение или смягчить динамические нагрузки при смещении захватываемого предмета, используют дифференциальные механизмы или упругие элементы.

В манипуляторе, выполненном в виде сходящихся и расходящихся губок, ориентирующихся относительно захватываемого предмета (рис. 10.4.7), губки 7 и 9 соединены между собой дифференциальным механизмом. В частном случае он выполнен в виде ленточной передачи с двумя степенями свободы. Передача имеет натяжной ролик 15, ось которого перемещается поршнем 2 влево и пружиной 1 вправо. При движении ролика влево перемещается лента 14 и поворачиваются шкивы 4 и 12, связанные с губками соответственно 7 и 9. Каждая губка соединена с корпусом 3 двумя параллельными звеньями (звенья 5, 6 для губки 7 и 10, 11 для губки 9), чем обеспечивается ее поступательное перемещение. Каждый из рычагов 6 и 11 жестко соединен со шкивом соответственно 4, 12 и лентой 14.

При сближении губок та из них, которая первой коснется захватываемого предмета (на рис. 10.4.7, губка 7), останавливается. При этом шкив 4 неподвижен, ролик 15 при перемещении влево начинает вращаться, а лента 14 поворачивает шкив 12 и губка 9 перемещается до соприкосновения с захватываемым предметом. Затем губки зажимают предмет с одинаковым усилием с обеих сторон. Таким образом обеспечивается захват предмета, смещенного относительно оси корпуса 3 на величину e . Разжимаются губки с помощью ленточных пружин 8 и 13 при перемещении ролика 15 вправо.

Еще одной задачей, решаемой в зажимающих механизмах, является самоприспосабливание к форме захватываемых предметов. В частном случае требуется обеспечить одинаковое прижатие губок ко всем граням захватываемого предмета. Например, можно зажимать жесткий предмет с четырех сторон при неточ-

ном размещении его граней (рис. 10.4.8). Звенья 1 - 4 соединены так, что обеспечивается примерное равенство сил, с которыми они прижимаются к граням предмета 7. Звенья 1 и 2, 3 и 4 попарно соединены между собой и с гидроцилиндром 6 равноплечими рычагами соответственно *AE* и *FC*. Звенья *DE* и *FG* введены в кинематические цепи для обеспечения подвижности выходных звеньев. Гидроцилиндр 5 самоустанавливается между рычагами *AE* и *FC*. Для безопасности работы можно обеспечить нормально замкнутое состояние зажимного устройства с помощью пружины 6. При отсутствии давления в гидроцилиндре звенья 1 - 4 зажимают предмет 7.

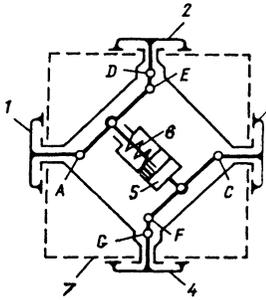


Рис. 10.4.8. Захватное устройство с четырьмя самоустанавливающимися губками

Искусственная кисть (рис. 10.4.9, а) и захватное устройство (рис. 10.4.9, б) имеют захватные элементы, приспособляющиеся к форме захватываемого предмета благодаря соединению элементов, аналогичному рассмотренному выше. Большой палец кисти жестко связан с рычагом 2, а внутри каждого из четырех других пальцев встроен двухкоромысловый механизм (звенья 6 - 8 и стойка), у которого шатун 8 и коромысло 6 приводят в движение фаланги пальцев. Механизмы, встроенные в пальцы, связаны между собой попарно тягами 5 и равноплечими рычагами-балансирами 4 и 5. Рычаги связаны между собой рычагом-балансиром 3, которому сообщается движение от гайки-ползуна 11. Ползун приводится в движение винтом 12. Через тягу 1 передается движение рычагу 2, а через рычаг 3 - четырем пальцам руки.

Дифференциальная связь пальцев обеспечивает равную нагрузку на них. При захвате пальцы равномерно прилегают к его поверхности. Одна пара пальцев (рычаг 9) связана со стойкой пружиной 10. Если эти пальцы не встречают сопротивления, то они под действием пружины 10 сжимаются, а захват происходит указательным, средним и большим пальцами. При захвате ручки портфеля и т.п. предметов пружина 10 обеспечивает постоянную составляющую усилия, удерживающего предмет.

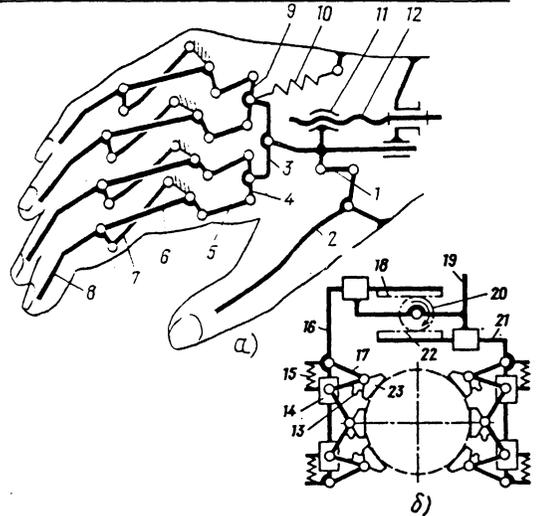


Рис. 10.4.9. Искусственная кисть и захватное устройство, полученные на основе рычажных дифференциальных механизмов

Губки адаптивного захватного устройства выполнены в виде направляющих 16 и 21, на которых смонтированы элементы 23, имеющие между собой уравнительную связь. Крайние элементы соединены шарнирно с помощью одного звена 17 с направляющей 16, а с помощью другого звена - с ползуном 14. Средние элементы соединены с двумя соседними элементами. Элементы самоустанавливаются по поверхности захватываемого объекта. Если поверхности объекта параллельны направляющим, то нагрузка на элементы распределяется равномерно. В нерабочем положении захватного устройства вес элементов воспринимается пружинами 15, а ползуны удерживаются пружинами 13. Направляющие 16 и 21 соединены с корпусом 19 поступательными парами, сдвигаются и раздвигаются вращением зубчатого колеса 20, зацепляющегося с рейками 18 и 22. Имеются и другие варианты аналогичных устройств [6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Артоболовский И. И. Механизмы в современной технике. Т. 2. Рычажные механизмы. М.: Наука, 1971. 1008 с.
2. Бансевичус Р. Ю., Рагульскис К. М. Вибродвигатели. Вильнюс: Мокслас, 1981. 193 с.
3. Волков Д. П., Крайнев А. Ф. Трансмиссии строительных и дорожных машин. М.: Машиностроение, 1974. 424 с.
4. Джолдасбеков У. А. Графоаналитические методы анализа и синтеза механизмов высоких классов. Алма-Ата: Наука, 1983. 256 с.
5. Кожевников С. Н., Есипенко Я. И., Раскин Я. М. Механизмы: Справочник / Под

ред. С. Н. Кожевникова. М.: Машиностроение, 1976. 784 с.

6. **Крайнев А. Ф.** Словарь-справочник по механизмам. М.: Машиностроение, 1987. 560 с.

7. **Решетов Л. Н.** Самоустанавливающиеся механизмы: Справочник. М.: Машиностроение, 1985. 272 с.

8. **Getriebetechnik - Leitfaden.** Herausgegeben von J. Volter // 2. Aufl., Berlin: VEF Verlag Technik, 1978. 383 S.

9. **S. Hildebrand.** Feinmechanische Bauelemente // 4 Aufl. Berlin: VEF Verlag Technik, 1980. 747 S.

Глава 11

ОСОБЕННОСТИ МЕХАНИЗМОВ ШАГАЮЩЕГО ТИПА ДЛЯ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ИХ В НЕТРАДИЦИОННОМ ТРАНСПОРТЕ

Спецификой шагающего транспортного средства является то, что его опора не постоянно находится на земле, как это имеет место, например, у колесных машин, а только часть времени. В цикле работы движителя выделяют две характерные фазы: опоры и переноса. Такая организация работы движителя порождает, по крайней мере, две проблемы: выбор числа ног шагающей машины и согласование фаз работы и последовательности работы ног (аллюр) у разных движителей (выбор походки). Число ног шагающей системы зависит от длительностей опорной фазы и фазы переноса движителей и от заданного минимального числа ног, которое должно оставаться в опоре. Соотношение длительностей фаз оценивается коэффициентом режима ходьбы

$$\gamma = t_{\text{оп}} / (t_{\text{оп}} + t_{\text{пер}}),$$

где $t_{\text{оп}}$ и $t_{\text{пер}}$ - длительности фаз соответственно опоры и переноса.

При ходьбе машины, имеющей N ног, на земле в разные моменты ходьбы будет разное число опорных ног, но можно добиться, что это число будет не менее γN . Отсюда, например, следует, что если создается шагающая система, постоянно находящаяся в режиме статического равновесия при наличии в опоре не менее трех ног, то при коэффициенте режима ходьбы каждой ноги, равном 0,5 (одинаковые длительности фаз опоры и переноса), получим, что машина должна иметь не менее шести ног.

Однако это только необходимый признак. Неудачным согласованием фаз работы

статическое равновесие может не сохраниться. Для обеспечения устойчивого статического равновесия требуется не только наличие не менее трех ног на земле, но и такое расположение опорных точек на грунте относительно корпуса, при котором центр масс проектировался на землю внутри опорного многоугольника - многоугольника, проведенного по концам опорных ног.

Различают походки регулярные, когда длительность шагового цикла у каждой ноги одинаковая, и свободные. Регулярные походки можно определить набором $2N - 1$ параметров (N коэффициентов режимов ходьбы γ и $N - 1$ параметров δ , оценивающих сдвиг начала шагового цикла каждой из ног по отношению к началу цикла одной из ног). При одинаковом режиме ходьбы у всех ног число параметров, однозначно определяющих регулярную походку, составляет N .

Трудность выбора походки связана с их многочисленностью. При ходьбе ногами по одиночке имеется $(N - 1)!$ возможных порядков работы ног. С учетом возможности ходьбы также парами, тройками и т.д. это число значительно возрастает. Расчеты показывают, что число таких последовательностей работы $W_6 = 1082$ для $N = 6$ и $W_8 = 94585$ для $N = 8$. Для ходьбы в статически устойчивом режиме число возможных походок чуть меньше $W_{6\text{ст}} = 1030$, $W_{8\text{ст}} = 94493$.

По аналогии с биомеханикой выделяют группу симметричных походок, в которых начало работы ног одного пояса (например передних, средних или задних) сдвинуто на $1/2$ шагового цикла. Различают также волновые походки, при которых сдвиг начала работы соседних ног одного борта машины у всех ног одинаков. Иногда среди волновых походок выделяют ползучие походки, отличающиеся тем, что сдвиг δ соседних ног равен относительно времени переноса, т.е. $\delta = 1 - \gamma$. Число симметричных походок существенно меньше полного их числа, для шестиногих $W_{6\text{с}} = 24$, из которых шесть возможны только теоретически при $\gamma = 1$.

При рассмотрении класса статически устойчивых походок и сравнении различных регулярных походок между собой по запасу статической устойчивости (минимальному за цикл ходьбы расстоянию от проекции центра тяжести машины до границ опорного многоугольника) выявлено, что при массе ног, существенно меньшей массы корпуса, симметричные походки имеют преимущество перед всеми остальными. При этом в подклассе шестиногих симметричных наибольшим запасом

устойчивости обладают волновые походки, а среди волновых - ползучие. Анализ показывает, что широко известная походка шестиногих - "трешки" (синхронная работа передней и задней ног одного борта и средней ноги другого борта) обладает наихудшей устойчивостью по сравнению с другими походками с тем же коэффициентом режима ходьбы.

Как известно, симметричные волновые походки характерны для насекомых, восьминогие членистоногие также имеют волновую ходьбу. Однако по запасу устойчивости это не оптимальная походка. Увеличением задержки в начале работы средних ног одного борта для восьминогих механизмов шагающего типа по сравнению со сдвигом фаз δ между крайними и средними ногами можно добиться увеличения запаса устойчивости. Так, при $\gamma = 0,5$ и $\delta_{21} = \delta_{43} = 1/3$, $\delta_{32} = 1/6$ (индексы у δ - последовательные номера ног одного борта начиная с задней правой) запас устойчивости может быть

$$z = (2/3)D,$$

где D - расстояние между точками подвеса ног.

Наилучшая волновая походка с $\gamma = 0,5$ дает запас $z = 0,5D$.

Еще большее различие наблюдается при увеличении числа ног. Изменением геометрических размеров машины при том же режиме ходьбы и фазовом сдвиге можно достичь некоторых преимуществ. Введя понятие размаха S - длины трека (трек - геометрическое место проекций опорной точки на корпус), можно связать длину трека с расстоянием между точками подвеса ног D и походкой для получения ходьбы "след в след". Для волновых походок $S = D(1 - \gamma) / (1 - \delta)$. При этом в одном следе некоторое время будут стоять одновременно две ноги. При $S = D(1 - \gamma) / (2 - \delta)$ получается ходьба "через след", так что в некоторые моменты цикла между соседними ногами одной стороны будет незанятый след, но одновременное стояние ног в одном следе не происходит. Рассмотренные особенности походок справедливы для шагающих машин с любыми движителями.

В настоящее время намечилось три основных подхода к созданию движителей: 1) движители с использованием замкнутых рычажных механизмов (рис. 11.1, а); 2) движители на основе управляемых открытых кинематических цепей (рис. 11.1, б); 3) ортогональные движители (рис. 11.1, в)

Задача движителя - обеспечение шагового цикла, т.е. воспроизведение относительной траектории I опорной точки, причем эта тра-

ектория имеет явно выраженную опорную часть и участок переноса. Относительная длительность опорной фазы, оцениваемая коэффициентом режима γ , оказывает влияние на статическую устойчивость ходьбы, причем для увеличения последней величина γ должна возрастать. Наличие прямолинейного участка опорной части траектории порождает по крайней мере два полезных свойства движителя: при нахождении опорной точки на таком участке точка подвеса движется относительно уровня земли горизонтально и, следовательно, центр масс машины не поднимается, что не создает приводу дополнительной работы; при организации прямолинейного движения опорной точки путем использования прямолинейно направляющего механизма вертикальная реакция со стороны грунта на опорную точку механизма не передается на ведущее звено, т.е. таким образом механизм движителя на этом участке находится в режиме самоторможения.

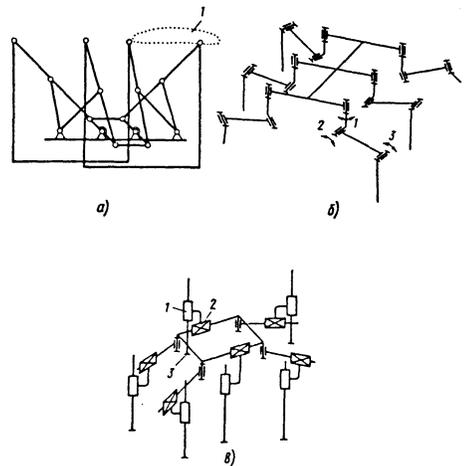


Рис. 11.1. Примеры шагающих движителей: а - стопоходящая машина конструкции П. Л. Чебышева; б - инсектоморфный движитель; в - ортогональный движитель

Особенностью кинематики движителей является требование одинаковости относительной скорости всех опорных точек, так как в противном случае неизбежно возникнут взаимные подвижки опорных точек, дополнительные эволюции горизонтального положения корпуса и проскальзывание ног по земле. При несинхронной работе ног, т.е. при работе со сдвигом фаз, что определяется выбранной походкой, это требование сводится к требованию постоянства скорости опорной точки на опорной фазе.

Каждый из трех перечисленных выше подходов к созданию движителей имеет свои преимущества и недостатки. Так, в методе использования рычажных механизмов для

двигателей можно выделить три главных достоинства (рис. 11.1, а): простота организации шагового цикла; экономичность с точки зрения затрат энергии на поддержание машины; экономичность организации циклической работы двигателя, при которой в отличие от других подходов накопленная кинетическая энергия одних звеньев не пропадает при их остановке внутри цикла, а переходит в кинетическую энергию других, связанных с ними звеньев. Описываемый подход имеет два принципиальных недостатка, существенно сужающих возможности применения механизмов в качестве двигателей и связанных, главным образом, с жестким циклом механизма, в частности, с неизменностью положения траектории опорной точки двигателя относительно корпуса. Во-первых, это невозможность варьирования точки постановки ноги на горизонтале, что может потребоваться по условиям местности, и, во-вторых, что наиболее существенно, это невозможность варьирования вертикальным расположением опорной части траектории относительно корпуса, т.е. невозможность смещать возможную точку постановки ноги по вертикали.

Отсюда следует, что шагающие системы с двигателями такого типа могут нормально перемещаться только по ровной поверхности. При попытке наступить на препятствие, расположенное выше уровня дороги, точка подвеса корпуса поднимается на высоту этого препятствия, поднимая центр масс корпуса. Этот подъем приводит к отрыву от поверхности части ног, уже стоящих на земле, и к дополнительной работе приводов. Одновременно с этим происходит вертикальный удар опорной точки двигателя о грунт и горизонтальное скольжение (проскальзывание) опоры по грунту вследствие несовпадения горизонтальной проекции скорости опорной точки в момент касания ее препятствия со скоростью движения остальных (уже стоящих на земле) ног.

Прямые попытки изменить точку постановки ноги по вертикали путем перемещения воспроизводящей точки по шатуну, как правило, не приводят к успеху, так как у прямолинейно направляющих механизмов имеется только одна точка шатуна, которая воспроизводит прямую линию наилучшим образом. В ее окрестностях прямолинейность обычно резко ухудшается, хотя и известны несколько успешных решений задачи направленного синтеза прямолинейно направляющего механизма, воспроизводящего семейство параллельных прямых достаточной точности, однако скорость движения воспроизводящей точки на разных прямых семейства разная, что требует дополнительной регулировки скорости кривошипа, чем собственно и обесценивается предложенное решение.

Шагающие машины с механическими двигателями могут быть эффективно использованы, например, при ходьбе по мягкому, но ровному грунту поля дождевальная машина или по выровненной поверхности карьера шагающего экскаватора, т.е. при ходьбе машин с малым числом ног, статическое равновесие которых обеспечивается увеличенной поверхностью опор-льж.

Значительно лучшим решением является применение в качестве двигателя механизма с поступательно движущимся звеном, траектории точек которого тождественны траектории точки, воспроизводящей прямую линию. Поступательно движущееся звено можно организовать искусственно: добавить к прямолинейно направляющему механизму ряд механизмов - трансляторов, или провести синтез его непосредственно. Оба решения без особых усложнений позволяют решить проблему адаптации для увеличения профильной проходимости шагающих машин.

Преимущества второго подхода к проектированию двигателей с использованием открытых кинематических цепей и независимым управлением по каждой степени свободы 1 - 3 отдельно для каждой ноги являются следствием, главным образом, гибкости управления (рис. 11.1, б). И хотя такие двигатели называют инсектоморфными и антропоморфными, эти названия отражают только некоторую внешнюю схожесть ног машин с лапками насекомых и ног человека, так как ни по числу звеньев и пар, ни по виду используемых кинематических пар совпадения не наблюдается.

При таком подходе появляется возможность варьирования точки постановки ноги относительно корпуса и отработки практически любой относительной траектории опорной точки. Это существенно расширяет профильную проходимость шагающего аппарата и в принципе позволяет даже, например, ставить ноги выше точек подвеса, реализуя вариант лазающей машины. Выбор точек постановки ноги может осуществляться водителем или специализированным управляющим устройством. Однако следует иметь в виду, что при многоногих аппаратах человек, как правило, не в состоянии своевременно выбрать точки постановки каждой ноги, а при использовании автоматического устройства управления возникает проблема создания устройства сбора информации о местности, по крайней мере, в точках предполагаемой постановки ног.

Основные недостатки этого подхода связаны со следующим. Приводы открытой кинематической цепи дополнительно нагружены для удержания массы машины, и вертикальные реакции на опорные точки двигателей порождают дополнительные силы или моменты во всех приводах двигателя. Следствием этого является существенная дополнительная

работа всех приводов при перемещении машины, причем система приводов движителя обладает внутренней диссипацией энергии, проявляя диссипативные свойства приводов, характерные для робототехнических конструкций. В данном случае это проявляется в том, что приводы работают "друг против друга" и сумма модулей работ всех приводов намного больше работы внешних сил и изменения энергии корпуса машины. Следует также отметить, что поскольку для отработки программного движения опорных точек требуется реализовать достаточно сложные функциональные зависимости моментов приводов от перемещения, то традиционная реализация их с помощью автоматических систем с обратными связями, имеющими, как правило, невысокий КПД, существенно снижает общий КПД системы.

Кроме того, при ходьбе, при переходе от фазы опоры к фазе переноса, и наоборот, приводы движителя реверсируются, проходя при этом через полную остановку звеньев движителя. В результате этого кинетическая энергия звеньев, например, на фазе переноса при остановке полностью теряется (рассеивается) и новую фазу (опоры) движитель начинает с начальными нулевыми скоростями всех звеньев. При такой двухкратной за шаговый цикл потере энергии требуемая мощность приводов резко возрастает с увеличением скорости ходьбы (примерно пропорционально скорости в кубе), соответственно возрастает масса приводов, что требует более прочной и тяжелой металлоконструкции и соответственно больших моментов в приводах для удержания массы корпуса, а для более массивных ног требуется еще большая мощность привода для восполнения потерь энергии при остановках и т.д. Следствием этого являются весьма невысокие скорости реализованных устройств и теоретические их оценки.

Применение такого подхода построения движителей возможно, если профильная проходимость и гибкость в выборе программного движения превалируют над экономичностью, массой и скоростью шагающих машин, например при создании автоматических роботов для сбора информации в труднодоступных или невозможных для пребывания человека местах со сложным рельефом, но достаточной несущей способностью.

В ортогональном типе движителя (рис. 11.1, в) шаговый цикл реализуется совместным движением двух приводов - вертикального 1 и горизонтального 2, перемещающих в поступательных парах соответственно ногу относительно каретки и каретку относительно корпуса. Для ортогонального движителя характерно наличие сенсора в опоре 3, подающего сигнал о контакте с грунтом и тормозящего вертикальный привод 1, опускающий ногу, тем

самым прекращающим ее дальнейшее опускание. Другой особенностью ортогонального движителя является постоянство скорости его приводов. При этом, например, привод горизонтального перемещения каретки имеет одну и ту же постоянную скорость на фазах опоры, опускания и подъема ноги и, возможно, другую противоположного направления, но также постоянную скорость на фазе переноса ноги. Вертикальный привод 1 работает только на фазе опускания ноги до контакта с грунтом и на фазе подъема до прихода ноги в ее верхнее положение, тогда как на фазе опоры и в крайнем верхнем положении ноги он заторможен.

При такой организации шагового цикла отсутствуют затраты энергии на поддержание массы машины, так как в отличие от машин предыдущего типа вес корпуса воспринимается не двигателями, а тормозом. Постоянство скоростей приводов на всех фазах позволяет отказаться от неэкономного функционального привода, что значительно повышает КПД и исключает соответствующие системы управления приводами. Ортогональный движитель обладает наиболее рациональной траекторией опорной точки - относительно земли на фазах опускания и подъема ноги она движется вертикально.

Среди недостатков ортогонального привода нужно отметить два основных. В ортогональном приводе, как и в движителе с открытыми кинематическими цепями, дважды за цикл происходит полная остановка звеньев с соответствующим рассеянием кинетической энергии, и поэтому скорость ходьбы машины с ортогональным приводом также вряд ли может быть значительной. Хотя, с другой стороны, прямолинейное возвратно-поступательное движение основных элементов движителя позволяет организовать рекуперацию энергии.

Автоматический выбор длины выдвигания опускающейся ноги по сигналу опорного сенсора связан с проблемой накопления ошибки сенсоров. В результате некоторой податливости грунта и упругостей в конструктивных элементах движителя происходит некоторое уменьшение вертикальной осадки движителей по мере перемещения их относительно корпуса вследствие переменности нагрузки на них при изменении положения проекции центра масс корпуса относительно опорного многоугольника. Одновременно с этим происходит и некоторое малое изменение угловой ориентации положения корпуса в пространстве (девиация). В то же время вновь опускающаяся нога ставится в свободном ненапряженном состоянии на недеформируемый грунт. Последующее увеличение нагрузки на эту ногу и соответствующая осадка точки ее подвеса обуславливают дополнительную осадку всего корпуса. Процесс повторяется при

каждой постановке очередной ноги и приводит к прогрессивному опусканию корпуса и наклону его назад (сползание). Предварительным нажимом ноги на грунт после ее постановки можно существенно уменьшить сползание, однако исключить его не удастся, главным образом, из-за неодинаковости свойств грунта под опорами разных ног. Следовательно, для фиксации ориентации положения корпуса в пространстве требуется дополнительная периодическая коррекция положения и соответствующая система датчиков абсолютного положения корпуса.

Кроме того, наличие значительной вер-

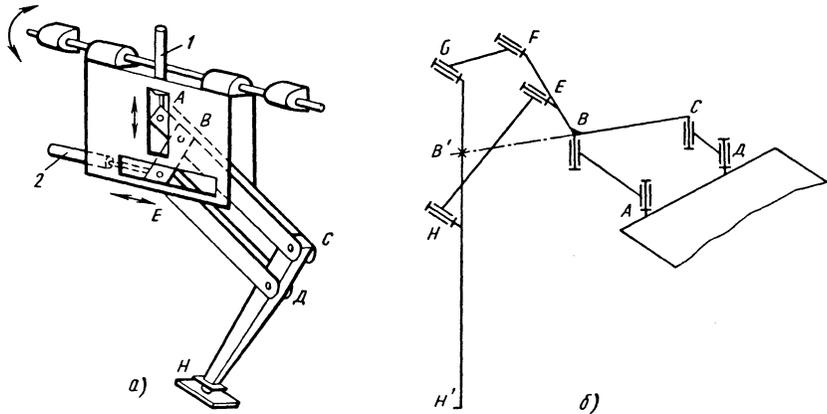


Рис. 11.2. Модификация ортогонального движителя:

a - с пантографным механизмом; *б* - с прямолинейно-направляющими механизмами

Конструктивный недостаток ортогонального движителя вызван наличием длинных поступательных пар, что порождает жесткость системы от продольных сил, требует защиты поверхности пары от грязи и уменьшает скорость ходьбы при непосредственном применении традиционных приводов поступательного перемещения. Известны по крайней мере два способа решения этой проблемы: сочетание небольших по размерам направляющих поступательных пар (иногда даже совмещение их с гидроцилиндром 1 и 2 привода), и механизмов пантографа того или иного типа (например, *ABCDEH*), геометрически увеличивающих траекторию опорной точки (рис. 11.2, *a*); получение двух взаимно перпендикулярных движений в ортогональном движителе с помощью двух прямолинейно-направляющих механизмов *ABCD* (λ -образного Чебышева) и *EFGH* (Уатта), соответственно расположенных в пространстве (рис. 11.2, *б*), что позволяет выбрать в качестве привода горизонтального движения кривошипный механизм и исключить потери энергии при реверсе.

Поскольку адаптация ортогонального движителя к неровностям, по существу, огра-

дательной скорости ноги в момент контакта ее с грунтом сопровождается ударными явлениями. Для исключения ударов усложняют сенсор, оснащая его свойствами предкапания, однако это увеличивает ошибку фиксации положения ноги и величину сползания.

Следует отметить, что явление сползания наблюдается и в движителях с открытыми кинематическими цепями в случае, если они оснащены сенсором в опорной точке ноги, информация которого используется для перехода движителя из работы в фазе переноса в фазу опоры.

ничена только размером ноги и может быть весьма значительной, то область применения шагающих систем с движителями этого типа могут быть транспортные средства значительной грузоподъемности для ходьбы по сильно пересеченному грунту, сохраняющие при этом практически неизменным положение корпуса. Следует, конечно, отметить, что по профильной проходимости ортогональный движитель уступает движителям с открытыми кинематическими цепями, но по грузоподъемности и экономичности превосходит их.

Вопросы маневрирования машины решаются также по-разному в зависимости от типа движителя. Так, в движителях с направляющими механизмами поворот машины чаще всего совершается "тракторным" способом путем изменения скорости или даже затормаживания всех или части ног на одном борту по сравнению со скоростями ног другого борта. При этом неизбежно возникают проскальзывания ног по земле с соответствующими потерями и возможностями их заклинивания и поломки. Известны решения, когда в цикле ходьбы имеются фазы, при которых корпус опирается на землю непосредственно днищем с поворотным кругом. Однако ввиду потерь энергии на остановки - разгон корпуса и на

его подъем - опускание эффективность такого решения незначительна.

При применении движителей с открытыми управляющими кинематическим цепями при маневрировании дополнительной проблемы не возникает совсем, так как движитель такого типа позволяет в принципе воспроизводить любую программную траекторию опорной точки, в том числе и ту, которая необходима для поворота машины без проскальзывания ног. Для этого в относительном движении опорные точки должны воспроизводить отрезки концентричных дуг, причем линейные скорости движения опорных точек по траекториям пропорциональны радиусам дуг.

В ортогональном движителе, в котором прямолинейность относительной траектории положена в основу его действия, поворот решают приближенными способами. Для этого дополнительным приводом весь механизм поворачивают так, чтобы прямолинейный отрезок опорной части (трек), оставаясь горизонтальным, был наклонен под углом к продольной оси корпуса. Соответствующим выбором углов всех треков (их можно расположить примерно по многоугольнику) можно добиться малого отклонения движения ног машины от прямолинейного. При таком решении неизбежно возникновение проскальзывания ног. Для его исключения в систему вводят дополнительные степеней свободы или путем связи приводов разных движителей через дифференциальные механизмы, или путем оснащения системы дополнительными звеньями (компенсаторами), число и расположение которых выбирают так, чтобы полное число степеней свободы системы корпус - механизмы движителей, находящихся в опоре, было равно числу приводов опорных движителей.

При построении ортогональных движителей с использованием пантографов необходимое отклонение от траектории опорной точки от прямолинейной к дуговой можно получить, перестраивая пантограф, перемещая, например, его шарнир, связанный с корпусом, в направлении, перпендикулярном к треку.

Если ортогональный движитель составлен из двух прямолинейно-направляющих механизмов, то, располагая механизм, реализующий продольное движение опорной точки (каретки), в горизонтальной плоскости и перестраивая его параметры, т.е. меняя, например,

взаимное расположение кинематических пар, связанных со стойкой, можно получить искривление его трека. Известны прямолинейно-направляющие рычажные механизмы, которые при такой перестройке параметров воспроизводят кроме прямой линии также дуги разного радиуса и разной кривизны (λ -образный механизм Чебышева). Применение такого перестраиваемого механизма в принципе решает задачу реализации системы маневрирования, хотя необходимо отметить, что вследствие заметной погрешности воспроизведения дуг в механизме для исключения проскальзывания ног обязательно наличие дополнительных звеньев-компенсаторов, что вместе с дополнительными механизмами для перестройки механизмов движителей приводит к достаточно громоздкой многозвенной системе.

Грунтовая проходимость шагающих машин не зависит от способа построения движителя. Улучшение проходимости при шагании связано, главным образом, с уменьшением работы приводов на образование колеи и несколько отличного от колесных движителей принципа получения тягового усилия. Однако при мягких липких грунтах возникает необходимость предупреждения налипания грунта на движители, что затрудняет их перенос, и создания увеличенного усилия отрыва опоры от грунта из-за ее прилипания.

Поэтому сейчас представляется наиболее перспективной областью применения шагающих систем достаточно пересеченная местность с твердым грунтом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бессонов А. П., Умнов Н. В. К вопросу о систематике походок шагающих машин // *Машиноведение*. 1975. № 6. С. 23-30.
2. Охомицкий Д. Е., Голубев Ю. Ф. *Механика и управление движением автоматического шагающего аппарата*. М.: Наука, 1984. 312 с.
3. Умнов Н. В. Волновые походки восьминогих шагающих машин // *Машиноведение*, 1977. № 6. С. 41-47.
4. *International journal of Robotic Research*. 1984. № 2. P. 144.
5. Todd D. *Walking machines* // Kogan Page. 1985. 186 p.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ К КНИГЕ 1

А

- Автоколебания** - Маятниковая автоколебательная система 354 - Модель для исследования флаттера крыла 356 - Особенности 354-357 - Принципиальная схема автоколебательной системы 354 - Энергетические соотношения 355 - см. также *Системы автоколебательные* - фрикционные 377-379 - Примеры определения амплитуды, периода и размахов 379-381
- Алгоритмы шаговые и итерационные** 255-262
- Амортизатор упругопластический** 410, 411
- Амплитуда колебаний** 319
- Аналог механический поведения материала вязкоупругого** 242
- упруговязкопластического 239
- Анизотропия криволинейная** 38
- цилиндрическая 38
- Антирезонанс** 325, 327

Б

- Балка** - Схема нагружения внешними силами 340
- на упругом основании 333
- Бимодальность** 287, 288
- Бифуркация** - Понятие 475
- форм равновесия упругопластических стержней 497, 498

В

- Варьирование по Гриффитсу** 485, 486
- Вектор перемещения материальной точки** 18
- Вероятность** - Связь с понятием "устойчивость" 525
- опасного состояния 528
- Ветвление форм равновесия** - Понятие 475
- систем 495, 496
 - точки 475-477
- Виброактивность внешняя** - Источник 422
- Виброизоляторы** - Колебания машины на виброизоляторах 428-431 - Силовые, ударные характеристики 415
- с нелинейными характеристиками 439-442
 - с упругими упорами 440, 443
- Виброизоляция** - Модель виброизолированного электродвигателя 427 - Принципы 422, 423 - Простейшая расчетная модель виброизолированной машины 423 - Эффективность 436
- Возбудитель колебаний** - Взаимодействие с колебательной системой 389-392
- Возбуждение колебаний параметрическое** 359 - Области 360 - Поперечные колебания однородной балки под действием продольной сжимающей силы 360 - Схемы 359
- Возмущения случайные** - Влияние на равновесие консервативных систем 525-527

- Волны акустические** - Взаимодействие механических систем 513-515
- ударные - Взаимодействие механических систем 515, 516

- Выпучивание стержней вязкопластических** 501, 502
- вязкоупругих 500, 501
 - упругопластических 499, 500
- Вязкость разрушения** 144
- Вязкость линейная** 109

Г

- Галопирование** 521
- Гаситель колебаний динамический** - Амплитудно-частотные характеристики 327-329 - Схемы 327
- Гипотеза Ньютона** 405, 408, 409
- Рауса 409
 - Фурье 196
- Годографы неустойчивые** - Графики полиномов 468
- устойчивые 467 - Графики полиномов 468
- Градиент температуры** 196
- Графики свободных движений** 320
- ударных воздействий типовые 415

Д

- Движение асимптотически устойчивое в целом** 458
- возмущенное 457
 - невозмущенное 457
 - неустойчивое по Ляпунову 458
 - устойчивое по Ляпунову 457
- Девiator деформации** 23
- напряжений 33, 34
- Декремент колебаний** 320
- логарифмический 320
- Дельта-функция Дирака** 49, 50, 395, 405
- Демпфирование большое** 320
- критическое 320
 - малое 319
- Дестабилизация равновесия вследствие трения** - Эффекты 481-483
- Деформации главные** 22
- ползучести 17
 - сдвига максимальные 22
- Деформация плоская** 67, 68 - Основные зависимости в декартовых координатах 68, 69 - Основные зависимости в полярных координатах 69, 70
- Деформирование** - Методы экспериментального определения сопротивления деформированию 135
- Деформируемость материала** 17
- Диаграмма Айнса-Стретта** 371, 483
- Давиденкова - Фридмана 178
 - длительной прочности материала 179, 180
 - предельных состояний хрупкого материала 176
 - растяжения 84

- трещиностойкости 163, 164, 171
 - устойчивости 483, 484
 - Диаграмма деформирования** материала 95
 - "сила P - смещение v " 161
 - сплава с памятью формы 248, 249
 - упругого образца с трещиной 154
 - Диаграммы деформирования** - Влияние конструкторско-технологических и эксплуатационных факторов 131-135 - Методы аппроксимации 129-131 - Схемы аппроксимации 129
 - в относительных координатах 130
 - низкоуглеродистой конструкционной стали при растяжении 136
 - Дивергенция** 521 - Скорость 521 - Формулы для аэро- и гидродинамических сил при расчете дивергенции 517, 518
 - Диск турбины** - Диаграммы деформирования материала диска 260, 263
 - Конечно-элементная дискретизация осевого сечения 263
 - Пример ползучести в зонах концентрации напряжений 265, 266
 - Программа нагружения 259, 263
 - Расчет деформаций в зоне болтовых отверстий 267
 - Дисперсия случайной величины** 394
 - Диссипация** неполная 477
 - полная 477
 - энергии при необратимых термомеханических процессах 194, 195
 - Добротность линейной системы** 320
- 3
- Задача Гриффитса** 152
 - Коши 383, 488, 489
 - Задача плоская** - Плоское напряженное состояние (обобщенное) 71, 72 - Решение для прямоугольной пластины в полиномах 75, 76 - Решение для прямоугольной пластины в тригонометрических рядах 76, 77 - Решение в полярных координатах 77-81
 - Задача термоупругости осесимметричная** 220
 - Задачи динамические термовязкоупругости** 187-190
 - механики твердого деформируемого тела - Классификация 38
 - термовязкоупругости - Вариационные формулировки 192-194
 - теплопроводности - Аналитические методы решения 202-207 - Численные методы решения 207-210
 - термомеханики тел переменного состава 190-192
 - термопластичности - Методы решения задач деформационной теории 232-234 - Методы решения задач теории пластического течения 234-236 - Прикладные методы решения 231-236
 - Закон Амонтона** - Кулона 365
 - Гука 37, 40, 130, 146, 149, 220
 - Гука обобщенный 36, 37, 68-70, 72, 73
 - парности касательных напряжений 29
 - сохранения массы 182
 - сохранения энергии 183
 - термодинамики второй 183
 - термодинамики нулевой 182
 - течения ассоциированный 88, 89
 - Запасы прочности** - Расчетно-экспериментальное обоснование 172, 173 - Схема анализа местных напряжений и деформаций 165
 - по номинальным напряжениям 164, 165
 - Запуск жесткий** 389
 - Затягивание** по амплитуде 389
 - по частоте 388
 - Звукоизоляция машин** - Методы 431, 432
- И
- Импульс ударный** 404
 - ускорения 405
 - Инварианты тензора** деформации 22
 - напряжения 33
 - Интеграл Мора** 124
 - Фурье 401
 - Интенсивность деформации** 23
 - напряжений 33, 34
 - сил 27
- К
- Колебание системы** главное 322
 - Колебания вынужденные** - Системы с нелинейной восстанавливающей силой 370, 371 - Системы с нелинейным трением и нелинейной упругой характеристикой 371
 - диссипативных упругих систем 340-342
 - при гармоническом возмущающем воздействии 320, 321
 - при действии произвольного периодического возбуждения 322
 - при произвольных возмущениях 321,322
 - установившиеся 321
 - установившиеся недиссипативных упругих систем 338-340
 - Колебания гидромеханической системы** 350
 - Колебания жидкости** в баке - Механическая модель 347
 - свободные - Вариационный метод решения задач 347, 348
 - Колебания линейной системы без учета сил сопротивления** вынужденные установившиеся 325, 326 - Использование нормальных координат 325
 - свободные (собственные) 322, 323 - Нормальные координаты 323, 324
 - Колебания линейной диссипативной системы с конечным числом степеней свободы** вынужденные 326, 327
 - свободные 325, 326 - Нормальные координаты 326

- Колебания малые** 316
- машины на виброизоляторах 428-431
 - нелинейные 360
 - нелинейные упругоподвешенных твердых тел 371-373
 - пластины изгибные 333
 - пространственные 371
- Колебания плоские поперечные жесткого бака с жидкостью** - Главный вектор и главный момент гидростатических и гидродинамических сил 345
- Механическая модель колебаний жидкости в баке 346, 347
 - Потенциал абсолютных скоростей жидкости в баке в форме прямоугольного параллелепипеда 345, 346
 - Потенциал абсолютных скоростей жидкости в круговом цилиндрическом баке 343-345
 - Уравнения возмущенного движения 346
 - Частота свободных колебаний бака 347
- Колебания роторов вынужденные нелинейные** - Гибкий ротор с ограничителем деформаций 376, 377
- Ротор на опорах специального типа 376
 - Ротор на подшипниках качения 375, 376
 - Ротор на подшипниках с большими зазорами 373-375
 - Шаровой ротор в электромагнитном подвесе 377
- Колебания свободные** - Аналитическое решение 334, 335 - Балка на упругом основании 335 - Метод начального параметра 336 - Метод последовательных приближений 335 - Метод Ритца 336, 337 - Метод Рэлея 337 - Разделение переменных 334 - Определение частот и форм 334-337 - Свойства частот и форм 337, 338
- затухающие систем с нелинейным трением при линейной упругой характеристике - Законы затуханий 369 - Трение пропорционально n -й степени скорости 369 - Частотно-независимое трение 370
 - линейной системы - Понятие 319
 - систем с нелинейной восстанавливающей силой 365-369
 - системы без трения 319
 - системы при наличии вязкого трения 319, 320
- Колебания сжимаемой жидкости** одномерные в жесткой прямой трубе - Бегущие волны 352 - Граничные и начальные условия 350 - Уравнения колебаний 350
- в прямой упругой трубе - Двумерная задача 353 - Сравнение эквивалентных скоростей звука жидкости в одномерной и двумерной задачах 354 - Учет упругости трубы в одномерной задаче 352
- Колебания случайные** вынужденные 399, 400
- нестационарные 400
 - свободные 398, 399
 - систем с распределенными параметрами 403, 404
 - стационарные 400-403
- Колебания стержня** поперечные при наличии продольных сил 333
- прямого 330
 - прямого призматического 331, 332
 - свободные поперечные - Собственные значения и формы 334
- Колебания струны** поперечные 330
- субгармонические 371
 - упругих систем - Методы составления дифференциальных уравнений 330
 - упругого бака с несжимаемой жидкостью 349, 350
- Композиты** - Понятие, свойства 273,274
- слоистые - Диссипативные свойства 310, 311
 - Термоупругие свойства 306-310
- Компоненты деформации** 20 - Преобразование при переходе от одних координатных осей к другим 21, 22 - Упрощение выражений, возможные при малых удлинениях, углах сдвига и углах поворота 22, 23
- напряжений 28 - Преобразование при переходе от одних координатных осей к другим 29
- Координаты** криволинейные 25 - Основные зависимости теории деформаций 25, 26
- лагранжевы 18
 - эйлеровы 18
- Косинусы направляющие** векторов - Значения 20
- ортов - Значения 21
 - осей - Значения 22
- Коэффициент** восстановления - Решение задач о соударениях твердых тел 408, 409
- восстановления скорости 405
 - динамичности - Зависимость от коэффициента расстройки 321
 - диссипации 305, 306, 311
 - запаса прочности - Выбор 166-169
 - интенсивности напряжений 150
 - Ляме 211
- Коэффициент** объемного расширения (сжатия) 37
- Прандтля 517
 - Пуассона 36-38, 72
 - расстройки 321
 - редуccionный поясков широкополых балок 77
 - снижения прочности 167
 - теплопроводности 175
 - формы для профиля 172
- Кривые** деформирования 133
- длительной прочности и пластичности для сталей 138
 - накопленных циклических повреждений при мягком нагружении 141
 - ползучести 110, 111, 115, 117-119
 - с последствием 110
 - резонансные 372
 - релаксации 110, 114
 - усталости при жестком нагружении 141
 - циклического деформирования 266, 267

Критерий Био 198

- Зубова 466, 467, 489-491
- Ишлинского - Хилла 85
- Коши - Михайлова - Найквиста 467, 468
- Коши - Сильвестра 474
- Максвелла - Хубера 85-88
- Мизеса 155, 156
- Мора 86
- начала распространения трещины 143, 158
- Писаренко - Лебедева 86

Критерий пластичности - Общий вид 84

- для изотропного тела, одинаково сопротивляющегося растяжению и сжатию 84-86
- для изотропного тела, различно сопротивляющегося растяжению и сжатию 86
- для ортотропного тела 86
- для плоского напряженного состояния 85
- для уплотняемых тел 87, 88

Критерий плотности энергии деформации 158

- разрушения деформационный 135-137
- разрушения изотропного материала 158
- разрушения материала теплонапряженных конструкций 176-180
- разрушения при наличии пластических зон у трещины 158-160
- разрушения силовой 135-137
- разрушения энергетический 135-137
- Рауса - Гурвица 464-466, 509, 531
- Треска - Сен-Венана 86, 88
- устойчивости при ударных нагрузках 510, 511

К-тарировка Ирвина 152

Круги Мора 176, 177

М

Макромеханика монослоя 274-276 - Закон деформирования в осях упругой симметрии 274 - Закон деформирования в произвольных осях 274-278 - Расчетная схема монослоя 274

Мартенсит 247 - Термоупругие переходы 247

Материал линейно-упругий - Связь между компонентами напряжения и деформации 36

Материалы композиционные - см. *Композиты*
- конструкционные - Особенности теплофизических и механических свойств 175, 176

Матрица квадратная 57, 58

- квазидиагональная 57
- монодромии 470
- оператора перехода 470
- податливости 96
- прямоугольная 64

Матрицы переноса элементов виброизолирующих устройств 437

Машина виброизолированная - Нелинейные колебания 444 - Нелинейные явления 440-444 - Субгармонические резонансы в системе с нелинейным упругим элементом 443, 444 - Эффект Зоммерфельда 444-446

- упругая - Определение динамических характеристик 434-436

Метод Адамса 210

- анализа устойчивости 478, 479
- Бубнова - Галеркина 47-49, 205
- взвешенных невязок 49, 50
- вычислительного эксперимента 494, 495
- граничных элементов 65-67, 102-105, 22-226
- дихотомии - Алгоритм 491
- дополнительных деформаций 231, 232
- Зубова - Численная реализация 489-491
- конечных разностей 226

Метод конечных элементов 54-65, 99-102, 215-222, 255, 257, 259

- Выбор основных неизвестных 56
- Дискретизация области 55, 56
- Интерполирующие полиномы - см. *Полиномы интерполирующие*
- Использование вариационных принципов 63-65
- Краевая задача и ее вариационная формулировка 55
- Определение "выходных" параметров краевой задачи 58
- Получение основной системы разрешающих уравнений 57, 58
- Построение интерполирующего полинома и условия сходимости МКЭ 56, 57
- Совместное решение системы алгебраических уравнений 58

Метод Лагранжа II рода 330

- линеаризации при введении хордального метода кривой деформирования - Итерационная схема 234
- Майзеля 213, 215
- матриц монодромии 492, 493
- Монте-Карло 210
- начального параметра 336
- начальных деформаций 98
- начальных напряжений 97, 98
- Ньютона - Канторовича 232, 234, 258

Метод обобщенных определителей Хилла 493, 494

- переменных параметров упругости 97, 231, 258
- Ритца 192, 336, 337, 348 - Выбор координатных функций 45, 46 - Основные положения 44 - Расчетный алгоритм 44, 45
- Рунге - Кутта 210, 488
- Рэлея 337
- Треффца 49
- упругих решений Ильюшина 103
- Эйлера - Коши 210

Методы возмущений 213

Методы корреляционные исследования случайных колебаний вынужденных 399, 400

- нестационарных 400
- свободных 398, 399
- систем с распределенными параметрами 403, 404
- стационарных 400-403

- Методы** последовательных приближений 96-99, 335, 336
- прямые вариационные 41
 - расчета виброударных систем 383-387
 - расчета численные термоупругих напряжений в элементах конструкций 215-226
 - смешанные вариационные 53
 - теории функций комплексного переменного 213
 - численного построения областей неустойчивости 491, 492
 - экспериментального определения сопротивления деформированию 135
- Методика математического моделирования теплонапряженных конструкций** 250-254
- Механика разрушения линейная** 143, 144
- Механика разрушения тел с трещинами** - Линейная механика разрушения 143, 144
- Линии и траектории главных напряжений 147
 - Напряженное состояние в окрестности конца разреза 145-150
 - Пластическая поправка Ирвина 157
 - Распределение напряжений в упругопластической зоне у вершины трещины 154-156
 - Расчет коэффициента интенсивности напряжений 150-152
 - Схема образования вторичных трещин от максимальных напряжений 148
 - Типы смещений берегов трещины и принцип суперпозиции 144, 145
 - Три области идеально-упругого тела с трещиной 149, 150
 - Устойчивые и неустойчивые состояния тела с трещиной 153
 - Формула податливости Ирвина 154
- Микромеханика кратковременной прочности монослоя** - Критерии прочности монослоя при комбинированном нагружении 297, 298 - Напряженное состояние компонентов 291-295
- гибридного 298-301
 - при одноосном растяжении 295, 296
 - при одноосном сжатии 296, 297
 - при продольном сдвиге 296
- Микромеханика ползучести монослоя** - Вязкоупругие свойства компонентов 288, 289
- при поперечном нагружении 290, 291
 - при продольном нагружении 289, 290
 - при продольном сдвиге 290
- Микромеханика упругих свойств пластика, армированного тканью** - Диаграмма деформирования тканепластика 287, 288 - Расчетная модель пластика 283, 284 - Упругие характеристики 284-287
- Модели** динамические виброзащитных систем, содержащих подвижные массы 432-434
- линейно-упругого тела - Изотропное тело 37 - Ортотропное тело 36 - Ортотропный материал с цилиндрической анизотропией 37, 38 - Трансверсально-изотропное (монотропное) тело 36, 37
 - неупругого конструкционного материала в неизотермических условиях 242-246
 - обобщенные в расчетах нестационарно нагруженных конструкций 125-127
 - структурные 226
 - структурные термопластичности и термоползучести 236-242
 - упругопластические 410, 411
 - физические термопластичности и термоползучести 236
- Моделирование** математическое теплонапряженных конструкций - Методика 250-254
- Шаговые и итерационные алгоритмы и принципы построения программных комплексов 255-268
 - процессов неизотермического упругопластического деформирования 262-268
- Модель** абсолютно твердого тела 405-407
- Ван-дер-Поля 365
 - Герца нелинейная упругая 409, 410
 - математическая материала 226
 - механическая системы с одной степенью свободы 474
 - структурная материала 236, 237
- Модуль** продольной упругости 36, 38
- секущий 89, 90
 - сдвига 37, 72
 - Юнга 36, 37, 72
- Момент** вибрационный 391
- корреляционный системы двух случайных величин 394
- Монослой** - Диссипативные свойства 304-306 - Макромеханика - см. *Макромеханика монослоя* - Микромеханика кратковременной прочности - см. *Микромеханика кратковременной прочности монослоя* - Микромеханика ползучести монослоя - Расчетная модель при поперечном сжатии 296 - Расчетная модель при продольном сдвиге 293
- Мощность** пластическая 94
- Мультипликаторы** 470-472
- Муфты упругие** - Конструкция 446 - Механические характеристики 446, 447
- в двухмассовой системе - Эффективность 451, 452
 - в машине с идеальным двигателем - Параметрический резонанс в системе с идеальным двигателем 449, 450 - Переходные процессы 450, 451 - Расчетная модель системы 447
- Н**
- Нагружение** жесткое 133
- материала активное 226
 - мягкое 133
 - простое 226
- Нагрузки** ударные - Возможные виды 510 - Устойчивость при действии нагрузок 510,

- 511 - **Формы потери устойчивости** 511, 512
- Напряжение полное** 27
- Напряжения** 27, 28
- главные 32, 33
 - касательные экстремальные 33
 - предельные - Зависимость от температуры 175
 - разрушающие - Зависимость от длины трещины 167
 - термоупругие - Типовые расчетные схемы 211, 212 - Численные методы расчета в элементах конструкций 215-226
- неизохронность свободных колебаний** 388
- Нелинейность** - Типы 361
- геометрическая 38 - Учет 502
 - физическая 38
- О**
- Области неустойчивости** - Методы численного построения 491, 492
- параметрического возбуждения 360
 - упругопластического деформирования 498
 - устойчивости в пространстве параметров 468, 469
- Область двумерная** - Построение интерполирующего полинома 60-62
- Образ процесса нагружения** 91
- Образец с кольцевым надрезом** - Диаграмма деформирования материала 258 - Расчетная схема 258
- Ожидание математическое случайной величины** 393
- Оператор Лапласа** 39, 333
- Органостеклопластик** - Кривые прочности монослоя 301 - Упругие характеристики компонентов 301
- Оргы** - Положения в недеформированном и деформированном состояниях тела 21
- Оси анизотропии главные** 86
- П**
- Память формы** 247 - Диаграммы деформирования сплавов 248, 249 - Соединительные муфты 249 - Эффект 247-250
- Параллелепипед прямоугольный** - Построение интерполирующего полинома 62, 63
- Параметры структурные** 115, 116
- Пары ударные** 382, 383
- Переменные активные** 182
- реактивные 182
- Перемещение точки сплошной среды** 18
- Перемещения** - Определение по заданным компонентам деформации 24, 25
- обобщенные 41
- Период колебаний** 319
- Пластик армированный тканью** - см. *Микромеханика упругих свойств пластика, армированного тканью*
- гибридный - Структура 282
 - тканевый - Модель структуры 283
- Пластики армированные** - Микромеханика длительной прочности 301-304
- Плотность спектральная** 396
- Площадки главные** 32
- Поверхность длительной прочности полимерного связующего** 302
- материала термомеханическая 226
 - нагружения 228
 - пластины срединная 71
 - пластического деформирования 228
 - пластичности 84 - Проекция на девиаторную плоскость 85
 - ползучести по теории старения 112
- Поверхности текучести для двух этапов нагружения** 235
- Подвес упругий** - Примеры расчета 427, 428 - Статический расчет 423-427 - Типовые схемы подвесов 424-427
- Поле температурное** 196
- Ползучесть** - Обобщенные модели в расчетах нестационарно нагруженных конструкций 125-127 - Понятие 109, 110
- неустановившаяся 122, 123 - Методы решения задач 124, 125
 - обратная 110
 - пластическая 110
 - при одноосном напряженном состоянии - Основные зависимости 110, 111
 - упругая 109, 110
 - установившаяся 122, 123 - Методы решения задач 123, 124
- Полиномы интерполирующие** - Двухмерная область 60-62 - Одномерная область 58-60 - Пространственная область 62, 63
- Положение равновесия асимптотически устойчивое** 458
- устойчивое по Ляпунову 458, 474
 - устойчивое при постоянно действующих возмущениях 459
- Поправка Ирвина пластическая** 157, 158
- Постоянная времени** 320
- Больцмана 175
 - Ляме 102
- Потенциал Жуковского** 344
- перемещений термоупругий 213
 - пластический 88, 89
 - упругий 35
 - упругий для изотропного материала 37
 - упругий для линейно-упругого тела 36
- Предел уплотнения** 87
- Принцип возможных напряжений** 50, 51
- возможных перемещений (Лагранжа) 43, 44, 232
 - Васидзу вариационный 54
 - взаимной связи 182
 - возможных перемещений модифицированный 53
 - Гамильтона 214
 - Гамильтона - Остроградского 347, 348
 - Даламбера 330
 - допустимости 182

- затухающей памяти 182
- Кастелиано 213, 214
- Куранта 324
- Лагранжа 43, 213
- локальности 182
- Принцип Мазинга** 133, 134, 238, 241
- минимума дополнительной работы 96
- минимума полной энергии 95, 96
- объективности 182
- Онзагера 195
- причинности 182
- равноприсутствия 182
- Рейсснера - Хеллингера вариационный 54, 213
- Рэлея 324
- Сен-Венана 68
- Принципы вариационные** 213
- нелинейной теории упругости 53, 54
- смешанные 51, 52
- Приспособляемость** 106, 107
- Прогиб балки** 42, 48
- Процесс нагружения активный** 228
- термодинамический 181
- Процессы случайные** - Линейные преобразования случайных функций 397, 398 - Характеристики 393, 394 - Числовые характеристики комплексных случайных функций 395-397
- Псевдоупругость** 249

Р

- Распределение вероятностей для критических параметров** 527, 528
- Расчет** на прочность графоаналитический с учетом трещин - Схема 167
- на прочность по местным напряжениям и деформациям 165, 166
- на трещиностойкость 169 - Критерии начала быстрого распространения трещины в цилиндрических сосудах давления и трубопроводах 169-172 - Расчетно-экспериментальное обоснование запасов прочности 172, 173
- Резонансы комбинационные** 372
- параметрические 360, 472
- Решение Рибьера** 76, 77
- Файлона - Белзецкого 76, 77
- Роторы** - Закритическое поведение 506-508 см. также *Колебания роторов вынужденные нелинейные*
- анизотропные и изотропные - Амплитудные зависимости 510
- обладающие анизотропными свойствами - Области неустойчивости 509 - Устойчивость 508-510

С

- Свойство деформируемости** 17
- сплошности 17
- упругости 17
- Связующее** полимерное - Схема ориентации компонент напряжений 292

- эпоксидное - Предельная кривая прочности 293
- Силы аэро- и гидродинамические** - Вычисление 517-519
- внешние 26, 27
- граничные на боковой поверхности 68
- диссипативные 365
- нелинейные - Характеристики 362-365
- обобщенные 41, 42
- отрицательного трения 365
- смешанной природы 365
- трения позиционные 365
- ударные 404, 405
- циркуляционные - Устойчивость роторов 504-506
- Символ Кронекера** 37, 89, 94, 226
- Система двухмассная** - Расчетная модель 451
- координат сферическая 26
- координат цилиндрическая 25, 26
- линейная дифференциальных уравнений 462
- одномассная с тремя степенями свободы 372
- с одной степенью свободы 365
- термодинамическая 180
- Системы автоколебательные** при внешнем гармоническом воздействии 357, 358
- релаксационные 357
- с запаздыванием 358, 359
- Системы аэроупругие** - Послекритическое поведение 523, 524 - Эффекты дестабилизации 524
- Системы виброзащитные** - Двухмассные модели 433-435 - Динамические модели 432-434
- при ударе - Модель 414
- с одной степенью свободы - Схемы 440
- Системы виброизолирующие** - Нелинейные характеристики 439, 440
- виброударные - Влияние диссипативных факторов 389 - Гипотезы удара 381, 382 - Методы расчета 383-387 - Модели 382, 383 - Нелинейные эффекты 388, 389 - Понятие 381 - Режимы движения 387, 388
- гидроупругие - Эффекты дестабилизации 524
- колебательные - Схемы 389
- колебательные с электромагнитным возбудителем 391
- консервативные распределенные - Устойчивость равновесия 477-479
- линейно и нелинейно деформируемые упругие 41
- Системы линейные** - Дифференциальные уравнения 316-319 - Понятие 316
- с двумя степенями свободы 319
- с одной степенью свободы - Фазочастотная характеристика 321
- с периодическими коэффициентами 470-473
- с постоянными параметрами 463, 464
- с тремя степенями свободы 317, 318
- Системы механические** - Взаимодействие с акустическими волнами 513-515 - Взаимодействие с ударными волнами 515,

- 516 - Поведение при случайных колебаниях 528, 529
- одномерные - Расчет 436-439
 - с односторонними связями - Классификация форм равновесия 485
 - ударозащитные с одной степенью свободы 414-419
- Скорость деформирования** - Зависимость механических свойств конструкционных сталей 139
- диссипации энергии удельная 94
- Случай сомнительный (критический) по Ляпунову** 459, 460
- Смещение статическое** 321
- Сопrotивление нагружениям** 137-142
- разрушению - Методы определения характеристик разрушения 142
- Состояние тела естественное** 17
- тела предельное 105
 - термодинамического равновесия 181
- Соударения твердых тел** - Решение задач с помощью коэффициента восстановления 408, 409
- с линейными амортизаторами 409
- Спектр собственных частот** 323
- Сплошность материала** 17
- Способ гармонического анализа** 322
- Дуффинга 322
 - описания деформируемой среды 18
- Стабилизация равновесия параметрическая** 483, 484
- Стеклопластик** - Кривая прочности 297 - Кривая длительного предельного состояния монослоя 303
- Стержни** - Диаграммы потери устойчивости 496 - Задача аэро- и гидроупругости 519, 521
- вязкопластические - Выпучивание 501, 502
 - вязкоупругие - Выпучивание 500, 501
 - упругопластические - Бифуркация форм равновесия 497, 498 - Выпучивание 499, 500
- Супергармоники** 370
- Т**
- Тело односвязное** 25
- ортотропное 86
 - пластическое уплотняемое - Определяющие соотношения 93-95
 - плохообтекаемое - Устойчивость 521, 522
 - трехсвязное 24
 - уплотняемое 87 - Регулярная поверхность пластичности 87 - Сингулярная поверхность пластичности 88
- Температура** однородная по объему тела - Нагрев и охлаждение конструкции 201, 202
- равновесия - График для определения 199
- Тензор единичный** 89
- деформации 22 - Главные направления 22
 - деформации шаровой 23
 - напряжения 29 - Главные значения и главные направления в линейной теории упругости 32, 33
 - напряжения шаровой 33
- Теорема Гаусса - Остроградского** 193
- Генки 108
 - Кастильяно 42
 - кинематическая 105, 106
 - Лагранжа 42, 474, 477
 - Леви 75
 - Мелана 106
 - об изменении момента количества движения 183
 - о взаимности работ для линейно деформируемой системы 43
 - о наименьшей работе 43
 - статическая 105, 106
 - Ху-Вашицу 193
- Теория пластичности анизотропного упрочнения** 90
- пластичности изотропного упрочнения 89, 90
 - ползучести - Общий метод разделения деформации 117-119 - обобщение теорий с анизотропным упрочнением 120, 121 - Обобщение теорий с изотропным упрочнением 119, 120 - Определение времени разрушения 121 - Понятие 111
 - ползучести простейшие 111-114
 - фазовых переходов Ландау 249
 - феноменологические 236
- Теория деформаций** - Основные зависимости в криволинейных координатах 25, 26
- деформационная 226
 - деформационная термопластичности изотропных и анизотропных материалов 226, 227
 - идеальной пластичности 105
 - неизотермического пластического течения с изотропным и анизотропным упрочнением 227-231
 - пластичности 17, 18
 - пластичности упрочняющегося ортотропного тела 92, 93
- Теория плоской деформации** 107, 108
- плоского напряженного состояния 108, 109
 - ползучести 17, 18
 - прочности Мора 296
 - течения 226
 - трансляционного упрочнения 90
 - малых упругопластических деформаций - Вариационные принципы 95, 96
 - упругопластических процессов 90, 91
- Теория упругости** 17, 18 - Общие теоремы теории упругости и строительной механики 41-43
- геометрически линейная - Основные зависимости 40
 - моментная 28
- Теплоемкость удельная** 175
- Теплопроводность** - Аналитические методы решения задач 202-207 - Основные уравнения 185 - Типовые расчетные схемы и

- постановка инженерных задач 195-201 -
Численные методы решения задач 207-210
- нестационарная в круглой трубе 200
- Термовязкоупругость** - Вариационные формулировки задач 192-194 - Динамические задачи 187-190 - Основные уравнения 185-187
- Термодинамика** необратимых процессов деформирования 180-184
- упругих деформаций 35, 36
- Термомеханика тел переменного состава** - Задачи 190-192
- Термопрочность** - Структурная схема программного комплекса для решения задач 262
- Термоупругость** - Основные уравнения 185-187 - несвязанная - Аналитические методы решения задач 212-215
- Тетраэдр** - Построение интерполирующих полиномов 63
- элементарный, выделенный из деформированного тела - Уравнения равновесия 29
- Тожество Кельвина** - Сомильяны 102
- Сомильяны 65, 66
- Точки ветвления форм равновесия** 475-477
- Трение "внешнее" 326
- "внутреннее" 326
- Трещина усталостная исходная** - Схема изменения длины 162
- Трещины** - см. *Механика разрушения тел с трещинами*
- Трещиностойкость** - Понятие 144 - Экспериментальное определение характеристик 160-164
- Трубопроводы** - Устойчивость 521
- У**
- Углестеклопластик** - Кривая прочности монослоя 300
- Углы сдвига** 20
- Удар** - Действие на абсолютно твердое тело 407, 408 - Схемы закрепления тел 405
- в пространственной системе виброзащиты 419-422
- гидравлический 413, 414
- квазипластический 387, 409
- неупругий 408
- поперечный по упругой балке 414
- по свободному телу 407
- по телу с неподвижной осью 408
- по телу с неподвижной точкой 407, 408
- прямой 408
- стержней о деформируемые основания 412, 413
- упругий 408
- упругих стержней продольный 411, 412
- Удлинение относительное** - Определение 19, 20
- Упоры ограничительные** 440
- Упрочнение трансляционно-изотропное** 90
- Упругая постоянная Ляме** 37
- Уравнение Ван-дер-Поля** 378
- закона сохранения количества движения 182
- интегральное граничное 66, 103, 104
- Кастильяно вариационное 50
- Матье 360, 371
- Навье-Ляме 102
- неразрывности 182
- Пуассона 213
- совместности деформации 68, 69
- состояния со структурными параметрами 114-116
- Фурье 198
- Эйлера 194, 479
- Уравнения Бельтрами** - Митчела 39, 40
- возмущенного движения 458
- Гейрингер 108
- Генки - Ильюшина 89
- Уравнения дифференциальные в линейной теории упругости** в напряжениях для изотропного тела 39, 40
- в перемещениях 38, 39
- Уравнения кинетические** 114, 115
- Коши 24
- Лагранжа 316
- линейные элемента тела 32
- Лапласа 342, 344, 348, 413
- Уравнения метода Бубнова** - Галеркина 47, 48
- взвешенных невязок 49
- коллокаций 50
- Треффиа 49
- Уравнения первого приближения** 459
- Прандтля - Рейсса 89
- Уравнения равновесия** 68, 69
- в перемещениях 69, 70
- дифференциальные объемного элемента в ортогональных криволинейных координатах 34
- элементарных тетраэдра и параллелепипеда, выделенных из деформированного тела 29, 30
- элементарных тетраэдра и параллелепипеда в декартовых координатах, определяющих положение точек до деформации 30, 31
- элемента тела при малых удлинениях и сдвигах 31
- элемента тела при малых удлинениях, сдвигах и углах поворота 32
- Уравнения Сен-Венана** 24
- совместности деформаций 23, 24
- сплошности 23, 24, 70, 71
- сплошности линейной теории упругости 24
- Условия граничные** 32, 198, 199
- краевые 198
- начальные 198
- однозначности 198
- пластичности Грина 93
- пластичности Максвелла - Хубера 107, 108
- пластичности Треска-Сен-Венана 109
- полноты 214
- Усталость** 179
- Устойчивость** - Влияние волновых эффектов 513 - Влияние диссипативных и гиро-

- скопических сил 477 - Основные понятия 455, 456 - Постановка задачи 456, 457 - Связь с понятием "вероятность" 525
- асимптотическая 457
 - аэро- и гидродинамическая - Задачи 516, 517
 - неупругих систем - Концепция 495-497
 - плохообтекаемых тел в потоке 521, 522
 - по Ляпунову 457-459
 - по первому приближению 459, 460
 - при многопараметрическом нагружении 479, 480
 - при стохастическом параметрическом возбуждении 530, 531
- Устойчивость** при ударных нагрузках - Формы потери 511
- равновесия консервативных систем 473, 474
 - равновесия консервативных распределенных систем 477-479
 - равновесия неконсервативных систем 480, 481
 - распределенных систем 460, 461
 - роторов - Силы, возникающие при взаимодействии со средой 503, 504
 - роторов, обладающих анизотропными свойствами 508-510
 - роторов при действии циркуляционных сил 504-506
 - систем с односторонними связями 484-486
 - стохастическая - Определение 529, 530
- Ф**
- Фаза колебаний начальная** 319
- Ферма Мизеса** 122, 475, 476 - Диаграмма состояний равновесия 476
- из вязкоупругих стержней 502
- Формы главных колебаний** 322
- пластических зон 155
 - поперечных колебаний свободной поверхности жидкости 345
- Флаттер** - Формулы для аэро- и гидродинамических сил 518, 519
- криволинейных панелей 523
 - плоских панелей 522
- Формула Гаусса** 236
- Грина 35
 - Кастильяно 35, 36
 - Кастильяно вариационная 50
 - Клапейрона 36
 - податливости Ирвина 154
 - Рэлея 337
 - тангенса 152
- Формула Коши** 68, 70, 99, 102
- преобразования компонентов напряжений и деформаций при повороте координатных осей 68
- Функционал** Васидзу 51, 52
- Лагранжа 214
 - Рейсснера - Хелингера 52, 53
- Функционалы смешанные** 53
- Функции** Бесселя 344, 348, 353
- координатные 44
 - Лежандра 348
 - напряжений 215- случайные комплексные - Линейные преобразования 397, 398 - Числовые характеристики 395-397
- Функция** Вагнера 413
- Грина 206
 - Дирака 206, 381
 - Крылова 403
 - Лагранжа 348
- Функция напряжения** 213
- в декартовых координатах 72, 73 - Граничные условия 74, 75
 - в полярных координатах 73, 74, 77-81
- Функция** пластичности Максвелла - Хубера 89, 90
- работы внешних сил 44
 - случайная - Понятие 393 - Реализация 393
 - случайного процесса корреляционная 394, 395
- Ч**
- Частота** гасителя колебаний парциальная 327
- круговая (циклическая) 319
- Число Маха** 486, 487
- Э**
- Элемент** балки конечный - Построение интерполирующего полинома 59, 60
- прямоугольный - Построение интерполирующего полинома 60, 61
 - структурный 237
 - треугольный конечный - Построение интерполирующего полинома 61, 62
- Элементы конечные** - Понятие 54
- высокоточные 56
 - двухмерные 55
 - объемные 56
- Элемент линейный** - Определение положения в деформированном состоянии тела 20, 21
- Энергия Гельмгольца свободная** 35
- Энергия деформации** дополнительная 35, 36
- потенциальная 36
- Энтропия** S 35
- Эпюры** безразмерных напряжений и деформаций 156
- напряжений 143
 - напряжений и деформаций перед вершиной трещины 159
- Эффект** Баушингера 90, 116, 133, 241
- Зоммерфельда при разбеге виброизолированной машины 444-446
 - Пуассона 309, 310
- Эффекты** волновые - Влияние на устойчивость 513
- дестабилизации равновесия вследствие трения 481-483
 - нелинейные 388, 389
 - памяти формы 247-250

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ К КНИГЕ 2

А

- Алгоритм анализа единый** 411
Амортиза закон 486
Ассура группа 450 - Анализ 413 - Сборки 399
 - двухзвенная плоская - Анализ 405
 - одноконтурная - Анализ 451
 - трехпроводковая - Определение вариантов сборки 413
 - четырехзвенная второго порядка 414
 - принцип - Строение рычажных механизмов 403

Б

- Балансировка** - Общие сведения 529 - Точность 536
 - жесткого ротора 530
 - по собственным формам изгиба 534
 - статическая 531 - Динамический режим 531
Балансировочный станок 531
 - для автоматической балансировки 533
 - для динамической центровки 533
 - общего назначения 532
 - специальный 532
 - для статической центровки 533
 - центровальный 532
 - стенд 536
Балка - Деформация сдвига при малом прогибе 18 - Изгиб 58, 67 - Инерционная характеристика при колебаниях 71 - Краевой эффект деформации 23 - Метод Максвелла - Мора определения малых прогибов 19 - Модель основания Винклера 21 - Нагрузка предельная 60, 61 - Несущая способность 59 - Универсальная формула для определения малых прогибов 19 - Уравнение изгибных колебаний 72, равновесия 69 - Функция собственных колебаний 100
 - композитная - Теория изгиба 69, расслоения 70 - Уравнение динамики 71
 - короткая - Расчет 23
 - на упругом основании 21
Бимомент в сечениях стержня 35, 40, 43
Болла точка 435
Бубнова - Галеркина метод - Определение собственных частот колебаний оболочек 218
Бурместера кривая 434

В

- Вариатор скорости** - Функциональное назначение 580
 - замкнутый двухпоточный 580
 - разветленно-замкнутый, разветвленный 582
Вибрация - Приборы измерения параметров 351
Воздействие на двигатель 552

Г

- Гауссова кривизна** 119
Гидромотор 549
Гидропривод 539
 - с дроссельным управлением - Статическая характеристика 540, 549
 - с объемным управлением - Статическая характеристика 548
Голограф силы в механизме 524
Группа структурная - Двумерная задача при неосесимметричной нагрузке 403

Д

- Датчик** - Характеристика 266
 - давления - Регистрация профилей ударных волн 306
 - диэлектрический 307
 - индуктивный 267
 - кварцевый 306
 - манганиновый 306
 - оптический 267
 - основанный на методе эффекта магнитных шумов 267
 - перемещений 274
 - пьезоэлектрический 267
 - сил 275
 - температуры 275
Движение - Преобразование видов 562
Демпфирующая способность - Влияющие факторы 325 - Методика оценки 324 - Определение характеристик 324
Деформация - Измерение методом голографической интерферометрии 269, муаровых полос 269, рентгенографическим методом 268, хрупких покрытий 268
 - мембранная - Определение 139
 - осесимметричная 145
 - пластическая - Метод линий скольжения 268, переменных параметров упругости 199, сеток 269
 - пластичности и ползучести - Алгоритм расчета 202
Диаграмма многоциклового усталости - Испытания 294
 - усталостного разрушения - Испытания элементов конструкции 295
Диада - Алгоритмы анализа 405 - Геометрические и кинематические параметры 405 - Синтез по методу квадратического приближения 448
Динамика машин - Моделирование 485
Динамические характеристики конструкции - Методы определения 367
Дисбаланс удельный 537
Диск 75 - Основные уравнения растяжения 260
 - Системы 76

Ж

- Жесткость** - Матрицы определения 80, 94
 - двигателя 542

- динамическая 101
Журавского формула - Определение касательных напряжений 44

З

Звено - Внутренние силы 521 - Кинетическая энергия 494 - Векторный метод определения положения 420 - Задача положения 419 - Метод матриц определения положения 424 - Ошибки положения 468, вероятностные 472, скорости и ускорения 471 - Перемещение 429, 443 - Управление положением 557 - Учет упругости звеньев 497
 - бинарное 437 - Синтез 434
 - входное, выходное 401
 - приведения сил и масс - Динамика машин 490

И

Измерения - Измерительная техника 266 - Измерительные приборы и системы 276
Инерционность привода 552
Испытания вибрационные - При случайных нагрузках 457 - Установки и стенды 319 - Характеристика 706
 - в газовых потоках 330
 - образцов с плоскими гранями 312
 - на ползучесть и длительную прочность при высоких температурах - Оборудование 281
 - на прочность - Средства для измерения 271 - плоских образцов 310
 - при сложном напряженном состоянии 310
 - статические при высоких температурах - Особенности 278
 - стендовые 334
 - тонкостенных трубчатых образцов 309
 - на ударное сжатие 308
 - при ударных нагрузках - Характеристика 303
 - на усталость при механических повторно-переменных нагрузках 289
 - нагревом 296
 - программируемые 297
Исследования при низких температурах 334
 - трещиностойкости конструкций - Характеристика 283
Источник питания пневмопривода 551
 - усталости рабочих лопаток турбин и компрессоров ГТД 300

К

Камера холодильная 335
Кейли план 442
Кирхгофа-Лява гипотеза - Теория тонких оболочек 117
Клебша решение 127
Колебания - Возбудители при испытаниях 300
 - Метод максимальной резонансной амплитуды 318, нарастающих резонансных

колебаний 317, резонансной кривой 316, фазовый определения декремента 317 - Определение гидродинамических параметров 370 - Экспериментальные исследования 314
 - механических систем - Определение характеристик демпфирования 314 - Особенности исследования 329
 - собственные - Измерение частот и форм 353
Кольцо - Пространственная деформация 158 - Физические уравнения 158 - Характеристика энергетическая 159
Копер вертикальный с падающим грузом - Испытания стержневых образцов 305
Кривизны поверхности главные 119
Криокамера - Получение низких температур 336
Крылова функция - Расчет балки на винклеровом основании 21, 100, 102

Л

Лагранжа уравнение вариационное 236
Леви решение - Изгиб пластин 126
Ляме параметры 118, 130

М

Манипулятор - Уравновешивание 511 - Функциональное назначение 583
Манипуляционные устройства высоких классов 464
Машина - Уравновешивание 512
 - двухцилиндровая 513
 - для испытания на изгиб и кручение - Характеристика 301
 - осевого нагружения 303
 - четырехцилиндровая 513
 - шестидицилиндровая 514
Материалы - Деформирование 58 - Испытания в обоймах и камерах высокого давления 312 - Исследования механических свойств 308 - Модель нелинейно-упругая 182
 - композиционные - Нелинейные уравнения 228 - Уравнения термоупругости 227 - Усталость 291
 - тепловой защиты 342
Мембрана - Уравнения равновесия 186
 - плоская 185
Мертвое положение механизма некривошипных сборок 399
Механизм - Динамическое уравновешивание 516 - Задачи 562 - Координаты обобщенные 395 - Метод нуль-вектор статического уравновешивания 502, оптимизации неуравновешенных сил 519, подобия 502, приведения сил и масс к начальному звену 489, расчленения 505, статических испытаний 479, точечных масс 503, функциональных цепей 506 - Надежность 477 - Реакция в

- кинематических парах 401 - Трения
 уравновешивания 500 - Точность 468
 - винтового прессования 596
 - высокого класса - Анализ динамики 567,
 кинематики 452 - Графо-аналитическое
 определение скорости звеньев 454 - Ки-
 нетостатика 457 - Ме-
 год условных обращенных координат 452
 - Сборки 453 - Син-
 тез 459
 - дезаксиальный - Уравновешивание 509
 - зажимающий 595
 - с качающимся цилиндром - Алгоритм анали-
 за 410
 - копирующий - Функциональное назначение
 584
 - кривошипно-ползунный - Алгоритм анализа
 410 - Уравновешивание 508, 510
 - кулисный - Алгоритм анализа 410
 - манипулирующий 583
 - многоцилиндровых машин - Уравновешива-
 ние 512
 - направляющий - Синтез 440
 - с одной степенью свободы - Уравнения дви-
 жения 489
 - одноподвижный 402
 - с несимметричными звеньями - Метод урав-
 новешивания 503
 - с несколькими степенями свободы - Дина-
 мика 491 - Синтез 443
 - с одной степенью свободы 489
 - с переменной массой звеньев - Динамика
 494
 - преобразования параметров вращательного
 движения 576
 - поступательного движения 573
 - прерывистого движения 567
 - пространственный - Алгоритм анализа по-
 ложения звеньев 420 - Ки-
 нетическая энергия 490 - Метод матриц
 424 - Определение положения звеньев
 422
 - распорного действия 595
 - рычажно-зубчатый - Уравновешивание 507
 - рычажный - Анализ 402 - Задача кинемати-
 ческого анализа 402 - Кла-
 ссификация задач синтеза 430 - Крите-
 рий качества передачи движения 400 -
 Метод проектирования замкнутых век-
 торных контуров на оси координат 404 -
 Положение звеньев 403 - Сборки 402 -
 Уравновешивание 511 - Функция поло-
 жения 395
 - пространственный - Анализ с помощью ме-
 тода матриц 424 - Оп-
 ределение положения звеньев 419, ско-
 рости звеньев 427 - Па-
 раметризация 417 - Угловая скорость зве-
 ньев 429
 - самозажимной 596
 - самоприспосабливающийся 598
 - самоустанавливающийся - Выбор кинемати-
 ческих пар 384
 - слоистый 72 - центральный
 с несимметричным шатуном 510
 - шарнирно-зубчатый - Уравновешивание 507
 - шарнирный четырехзвенник - Алгоритм ана-
 лиза 409
Модель динамическая машин 485
Мора интеграл 78
 - метод 77
- Н**
- Навье задача** - Изгиб пластин 126
Нагрев индукционный 296
 - лучевой 296
Напряжения - Метод гальванических покрытий
 268, ультразвуковой 268, ускорений 290,
 фотоупругости 270
 - при низких температурах 322
Неуравновешенность 531
 - динамическая 531
 - моментная 531
 - ротора 530
 - статическая 531
Нить гибкая 23
- О**
- Обечайка** - Напряжения в ребрах 165 - Сила
 сопротивления 165
Оболочка 117 - Безмоментное состояние 153 -
 Геометрия 117 - Деформация 134, 137,
 срединной поверхности 128, эквиди-
 стантного слоя 129, эквидистантной по-
 верхности 139 - Диаграмма равновесных
 состояний 209 - Задача комбинированно-
 го нагружения 288 - Изгиб 137 - Колеба-
 ния 214 - Кра-
 евой эффект решения моментной теории
 153 - Линейная теория 128 - Метод ко-
 нечных разностей 172, матричный на-
 чальных параметров 168, Релея-Ритца
 218 - Оптимальное проектирование 233 -
 Расчет нагрузки 152, устойчивости 214 -
 Температурные напряжения 196 - Угол
 поворота 138 - Уравнения динамики 215,
 сопряжения 159, устойчивости 239, фи-
 зические 196, эластичи 139
 - армированная сосудов давления 232
 - цилиндрическая гладкая - Математическое
 программирование 234
 - подкрепленная многослойная 236
 - вращения 144 - Осесимметричная деформа-
 ция 145
 - из композиционного материала - Уравнения
 прикладной теории 223
 - переменной толщины 227
 - коническая 149
 - мягкая 180 - Теория больших деформаций
 185
 - при неосесимметричной деформации 150

- непологая 142
- оптимальная - Проектирование 230
- пологая 155
- с продольными ребрами - Расчет 163
- равнонапряженная 231
- составная 157 - Граничные условия 158
- сферическая 149 - Колебания 221
- тонкая упругая - Критическая нагрузка 211 - Модель 160 - Теория 117
- упругих конструкций с жидкостью - Колебания 369 - Условия подобия 369
- цилиндрическая 148 - Задача о тепловых напряжениях 164 - Колебания 216 - Осесимметричная деформация 206 - Устойчивость при внешнем давлении 212, при сжатии в осевом направлении 212
- полубезмоментная 154
- Оборудование вибротестовое** - Характеристика 344

П

- Пара кинетическая** - Выбор 384 - Действие сил 521 - Определение реакций 401
- Разгрузка 520
- Передача зубчатая планетарная** 577
- Пирсона критерий** 484
- Пластина** 117 - Граничные условия 124 - Изгиб 126 - Температурные напряжения 192 - Однородное линейризованное уравнение 210 - Ползучесть 202 - Предельное состояние при изгибе 205, 206 - Теория 119 - Устойчивость 208, 214
- Кармана 120
- из композиционного материала 223
- круглая - Осесимметричное растяжение 203
- прямоугольная - Силовые факторы 205
- тонкая упругая - Критические нагрузки 209
- Пневмопривод с дроссельным управлением** - Статическая характеристика 550
- с пластинчатым пневмомотором 551
- Погрузчик** 465
- Податливость** - Матрица 79
- Подшипники** - Режимы работы 521
- Подъемная площадка** 465
- Подъемник шарнирно-рычажный** 464
- Привод машин** - Изменение движущих сил и момента двигателя 552 - Инерционность 552 - Линейная модель 554 - Сравнение 559 - Статическая характеристика 545 - Управление 556 - Уравнения динамики 541, устойчивости 423 - Элементы 538
- с импульсным управлением 541
- с релейным управлением 541
- Протез механизма плеча** 467

Р

- Рама пространственная** 78
- Распределитель** - Статическая характеристика 556
- Рейсснера уравнение** 141

- Реллея - Ритца формула** 101
- Роберта - Чебышева теорема** 441
- Рычажный механизм** - Кинематический анализ 395

С

- Сборки** - Идентификация 416 - Признаки 399
- кривошипная 398
- некривошипная 398
- Связь избыточная** 81
- обратная управления 558
- сдвига 51
- Семизвеньевик** - Задача синтеза 431
- Система** - Диссипативные свойства 497 - Определение характеристик демпфирования 314 - Особенности исследования 329
- нелинейно деформируемая 110
- подчиненного регулирования 558
- статически определяемая - Деформация элементов 78 - Матрица жесткости 105 - Метод свободных затухающих колебаний 315 - Определение сил 76 - Энергия деформации 80
- управления приводом 556
- Соединение прессовое** 248
- Стенды** - Изучение прочности и надежности 330 - Исследование несущей способности элементов при низких температурах 340
- Степень свободы механизма** 443
- шарнирной системы 84
- Стержень** - Взаимный угол поворота концевых сечений 15 - Геометрическая характеристика 16, 35 - Деформация сечения 42 - Жесткость динамическая обобщенная 101, геометрическая при кручении 32, 60, сдвиговая секториальная 35 - Изгиб 17 - Деформация оси 74 - Деформирование при растяжении и сжатии 58 - Кручение 33, 62 - Линейные уравнения 49 - Межслоевой сдвиг 70 - Метод дополнительных нагрузок при расчете изгиба 120, сечений 76, сил и перемещений 81, 84, 102 - Момент изгибающий в условиях ползучести 59, 65, инерции 38, 65, крутящий 63, сопротивления сечения при изгибе 17 - Напряжения касательные в заполнителе 56, максимальные 26, нормальные 15, 44, в поперечных сечениях 44 - Ползучесть 69 - Равновесие 46, - Силовые факторы в сечении 15, - Теория стесненного кручения Власова 34 - Уравнения равновесия 48, 52 - Устойчивость 95
- Гопкинсона разрезной - Испытания 304
- замкнутого профиля - Расчет угла закручивания 43
- с заполнителем 55 - Граничные условия 57 - Средняя линия 55
- кривой - Радиус кривизны 45 - Энергия 46
- круглый - Кручение 62 - Расчет 24
- переменной жесткости - Метод 101
- постоянной жесткости 95

- призматический - Кручение 64
- прямой 24 - Кручение в условиях ползучести 68
- прямоугольного сечения - Крутильная жесткость 72
- сжато-изогнутый и растянуто-изогнутый 20
- составной 54 - Напряжения в продольных волокнах 55
- тонкостенный 32 - Гипотеза балансировочной теории 72 - Жесткость крутильная 75 - Изгиб 74 - Кручение 37,42 - Напряжения касательные 33 - Углы закручивания 34, 39
- упругий - Граничные условия равновесия 96 - упругопластический - Кручение 62
- Стержневая система** - Канонические уравнения 82 - Расчет в условиях ползучести 112, при конечных перемещениях 112 - Смешанный метод расчета 87 - Статическая неопределимость 81 - Уравнения равновесия стержней и узлов 89, механики 89 - Условия подобия 89 - Устойчивость 96 - Энергия линейной деформации 80
- мгновенно изменяемая 76
- нелинейно деформируемая 108
- плоская 89 - Расчет 79
- статически определяемая 75

Т

- Твердое тело** - Воспроизведение закона движения 432 - Энергия деформации 182
- Тензомеры** - Характеристика 266
- емкостные 266
- механико-оптические 266
- струнные 266
- Тензорезисторы** - Характеристика 271
- Точность** - Алгоритм анализа 478
- Трещина развивающаяся** - Испытания 286
- стационарная - Испытания 285
- Торможение и остановка 287

У

- Управление приводом** 556
- Уравновешивание динамическое** - Принципы 516
- статическое - Методы 502
- Установка пневмопороховая** - Ударное сжатие при испытании 305
- экспериментальная - Автоматизация 323 - Возбуждение колебаний 320 - Регистрация колебаний 321, 323 - Система нагрева и охлаждения 322
- Устройство грузоподъемное** 464

Ц

- Цепь кинематическая** - Синтез 459
- Цилиндр** - Двумерная задача при неосесимметричной нагрузке 258 - Метод конечных разностей 255 - Температурные напряжения 244 - Уравнения упругости 244
- биметаллический - Напряжения в стенках 246
- длинный ортотропный - Напряжения 247
- с дополнительными деформациями 244
- изотропный - Напряжения 244
- с переменными параметрами упругости 245
- составной - Напряжения 249
- толстостенный 242

Ч

- Четырехзвенник** - Анализ 409 - Положение звеньев, угловая скорость, ускорение 415
- шарнирный - Алгоритм анализа 409
- Воспроизведение трехкратное шатунной кривой 441
- Число степеней свободы** 395

Ш

- Шатун** 501
- Шестизвенник плоский** - Анализ 415
- пространственный - Определение угловой скорости, ускорения звеньев 417
- Штабелер промышленный** 465
- Штурма метод** 414

Э

- Эйлера уравнение равновесия** 184
- Электродвигатель** - Статические характеристики 545
- асинхронный 545
- постоянного тока 547
- синхронный 546
- Элемент** - Испытания на усталость 295 - Исследования сопротивления усталости 302
- Матрица жесткости 80 - Метод конечных разностей 195 - Целенаправленное нарушение баланса 552
- Энергия** - Метод термический определения рассеяния 318, энергетический 318
- диссипации 498
- кинетическая звена 496
- тела 495
- упругости 184

СПРАВОЧНОЕ ИЗДАНИЕ

Александров Анатолий Васильевич, Алфутов Николай Анатольевич,
Астанин Вячеслав Валентинович и др.

МАШИНОСТРОЕНИЕ. ЭНЦИКЛОПЕДИЯ

Том I-3

**Динамика и прочность машин.
Теория механизмов и машин**

Книга 2

ИБ № 7338

Лицензия ЛР № 080003 от 15.08.91

Редактор З. М. Рябкова

Переплет художника Т. Н. Погореловой

Технический редактор Е. П. Смирнова

Инженеры по компьютерному макетированию М. А. Евсейчева, С. И. Крючков, М. Н. Рыжкова

Сдано в набор 30.10.94 г.

Подписано в печать 1.03.95 г.

Формат 70×100/16.

Бумага офсетная.

Гарнитура Times ET.

Печать офсетная.

Усл.печ.л. 50,7

Уч.-издл. 60,37

Тираж 3000 экз.

Заказ 936.

Цена договорная.

Издательство "Машиностроение",
107076, Москва, Б-76, Стромынский пер., 4

Оригинал макет подготовлен в издательско-полиграфическом центре
Тамбовского государственного технического университета
392032, г. Тамбов, Мичуринская, 112, корп. Б

Отпечатано в типографии № 4 Комитета Российской Федерации по печати. 129041,
Москва, Б. Переяславская ул., 46