

В. В. БЛАГОВЕЩЕНСКИЙ

КОМПЬЮТЕРНЫЕ ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ ПО ФИЗИКЕ В ПАКЕТЕ MATHCAD

*РЕКОМЕНДОВАНО
УМО по университетскому
политехническому образованию
в качестве учебного пособия
для студентов вузов,
обучающихся по направлению
подготовки бакалавров
«Техническая физика»*



• САНКТ-ПЕТЕРБУРГ •
• МОСКВА • КРАСНОДАР •
2013

ББК 22.3я73

Б 68

Благовещенский В. В.

Б 68 Компьютерные лабораторные работы по физике в пакете MathCAD: Учебное пособие. — СПб.: Издательство «Лань», 2013. — 96 с.: ил. (+CD). — (Учебники для вузов. Специальная литература).

ISBN 978-5-8114-1528-1

Учебное пособие содержит описание десяти оригинальных компьютерных лабораторных работ по физике. Выбор тем лабораторных работ определялся невозможностью или трудностью реализации их в учебной физической лаборатории. Физические эффекты, на которых построены лабораторные работы, рассматриваются, как правило, в курсах физики, но теоретическое описание их невозможно без привлечения численных методов. Поэтому для их изучения и выбран метод компьютерного моделирования. Пособие дает первичные навыки построения моделей и предназначено для студентов инженерно-технических специальностей вузов. Может также использоваться в качестве лекционных демонстраций.

ББК 22.3я73

Рецензенты:

Д. Е. КАПУТКИН — доктор технических наук, профессор, зав. кафедрой физики Института базового образования НИТУ «МИСиС»;
Е. К. НАИМИ — доктор физико-математических наук, профессор кафедры физики Института базового образования НИТУ «МИСиС».

Обложка
Е. А. ВЛАСОВА

*Охраняется законом РФ об авторском праве.
Воспроизведение всей книги или любой ее части
запрещается без письменного разрешения издателя.
Любые попытки нарушения закона
будут преследоваться в судебном порядке.*

© Издательство «Лань», 2013
© В. В. Благовещенский, 2013
© Издательство «Лань»,
художественное оформление, 2013

ПРЕДИСЛОВИЕ

При изучении курса физики, начиная со школы и заканчивая вузовской программой, все сталкивались с тем, что некоторые эффекты излагались декларативно. Например, эффект дальнобойной пушки, когда наибольшая дальность полета снаряда достигается при выходе его в стратосферу. Или история открытия планеты Нептун, обнаруженной за счет влияния, которое она оказывала на орбитальное движение Урана. Иначе эти эффекты излагаться и не могли. Компьютерное моделирование позволяет исследовать эти эффекты детально. Если раньше, до появления математических пакетов, такие задачи решались исключительно профессионалами, то сейчас подобные исследования могут проводить и начинающие специалисты.

Это пособие является попыткой обобщить материал, накопленный за время работы автора над курсом «Компьютерное моделирование» для студентов специальностей «Информатика и прикладная математика» кафедры прикладной математики и информационных технологий КГУ им. Некрасова. Пособие содержит описание десяти оригинальных лабораторных работ, выполненных в среде MathCAD. При отборе материала для данного пособия автор придерживался точки зрения, высказанной профессором А. Д. Глудуном из МФТИ, которая сводится к тому, что компьютерные модели эффективны при преподавании курса физики, если соответствующие ему лабораторные работы не могут быть реализованы в лаборатории.

Полагаю, что данные лабораторные работы могут быть рекомендованы и школьникам старших классов. Дифференциальное исчисление преподают в школе в 10–11 классах, и правила построения моделей должны быть понятны и для них.

Каждая задача содержит список заданий для самостоятельной работы. Компьютерная работа считается освоенной, если задания из списка будут выполнены.

Особое внимание обращалось на достоверность полученных результатов и приемы, с помощью которых можно в ней убедиться.

Данное пособие может быть полезно при изучении курсов физики и компьютерного моделирования, и рекомендовано учителям физики средней школы, учащимся старших классов, преподавателям вузов и студентам младших курсов инженерно-технических специальностей.

Описание каждой лабораторной работы содержит листинг документа, реализующего данную модель. Поэтому каждый, у кого есть программа MathCAD на компьютере, может испытать модель по своему плану.

Можно отметить и более общие навыки, приобретаемые при работе с данными конкретными моделями. При работе модели выдается масса результатов и, чтобы не потонуть в этом море информации, нужно научиться выделять главное в данной задаче, уметь представить результат в наиболее доступном и наглядном виде. Для начала работы по построению моделей требуется минимальный опыт работы в среде MathCAD. Неплохо при этом начать с пособия С. В. Поршнева [3]. В этом пособии на примере хорошо изученных классических физических задач, решаемых стандартными математическими методами без моделирования, даются методы построения моделей в среде MathCAD. При этом поясняются правила общения с пакетом.

Основная задача при реализации лабораторных состояла в воспроизведении физических эффектов достаточно простым способом. Поэтому вводились упрощающие предположения, особенно в задачах космической динамики. Например, поскольку масса Солнца составляет 99% массы всей Солнечной системы, то задача решалась в гелиоцентрической системе.

Приношу благодарность студентам КГУ им. А. Н. Некрасова — А. Панфилову и А. Смирнову, а также студенту КГТУ Н. Антонову за помощь в работе над пособием.

ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА, БРОШЕННОГО ПОД УГЛОМ К ГОРИЗОНТУ (ДЛЯ НАЧИНАЮЩИХ)

С построения этой простой модели следует приступить, если вы никогда ранее не использовали MathCAD в своей работе. Если же MathCAD в какой-либо степени вам знаком, то эту модель можно пропустить.

Эту задачу подробно разбирают в средней школе, и она имеет точное аналитическое решение. Поэтому и следует с нее начать. Вы знаете, что должно получаться. Эти знания очень полезны для отладки моделей. Поскольку все движения в природе происходят по законам Ньютона, то в основу модели кладем второй закон Ньютона:

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g}. \quad (1.1)$$

Поскольку движение происходит под действием силы тяжести, то в правой части (1.1) поставлено $m\mathbf{g}$ или $\mathbf{a} = \mathbf{g}$. Так как ускорение — это вторая производная радиус-вектора по времени, то приходим к дифференциальному уравнению второго порядка:

$$d^2\mathbf{r}/dt^2 = \mathbf{g}. \quad (1.2)$$

Так как движение тела происходит в плоскости, то выберем для описания движения двумерную декартову систему координат xu , направив ось x горизонтально, а ось y вертикально (рис. 1.1).

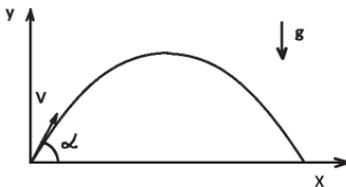


Рис. 1.1
Система координат для
описания движения

Проектируя уравнение (1.2) в выбранной системе координат, получим систему двух дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\begin{aligned}d^2x/dt^2 &= 0; \\d^2y/dt^2 &= -g.\end{aligned}\tag{1.3}$$

В MathCAD такие системы можно решать численными методами. Далее следует выбрать метод решения этой системы. Выберем для решения, например, простую процедуру `rkfixed(y, t1, t2, N, D)` — метод Рунге — Кутты четвертого порядка с фиксированным шагом. Аргументы у функции `rkfixed` имеют следующий смысл. Вектор y задает начальные значения для системы дифференциальных уравнений, решение ищется на интервале от t_1 до t_2 , параметр N определяет число точек решения (за исключением начальной), D — вектор правых частей уравнений, определяющих зависимости первых производных для неизвестных функций.

Понизим порядок системы (1.3). Для этого введением двух новых неизвестных функций y_1 и y_3 понижают порядок системы.

$$\begin{aligned}x &= y_0; \\dx/dt &= y_1; \\y &= y_2; \\dy/dt &= y_3.\end{aligned}\tag{1.4}$$

С учетом (1.4) система (1.3) приводится к системе четырех дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned}dy_0/dt &= y_1; \\dy_1/dt &= 0; \\dy_2/dt &= y_3; \\dy_3/dt &= -g.\end{aligned}$$

Для получения решения требуется также задать начальные условия. В пакете MathCAD они задаются следующим вектором:

$$y := \begin{pmatrix} 0 \\ v \cos(\alpha) \\ 0 \\ v \sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

Листинг 1.1

Задание начальных условий

Здесь в первой и третьей строках — начальные координаты по x и y , во второй и четвертой — проекции начальной скорости (v — начальная скорость, α — угол, под которым бросается тело). Для получения решений модели требуется задать константы. При этом надо помнить о соблюдении систем единиц измерений, тогда и результаты будут в выбранной системе. В данной модели надо задать два параметра, начальную скорость v и начальный угол α .

Постоянную g можно не задавать, она уже «прошита» в MathCAD. Необходимо так же помнить, что встроенные тригонометрические функции имеют аргументом углы в радианной мере, а градусная мера удобнее для восприятия, поэтому необходимо задать формулу перевода углов из градусной меры в радианную. Окончательно листинг модели будет иметь вид

$$\begin{aligned}
 v &:= 10 & \text{alfa} &:= \frac{\pi \cdot 45}{180} \\
 y &:= \begin{pmatrix} 0 \\ v \cos(\text{alfa}) \\ 0 \\ v \sin(\text{alfa}) \end{pmatrix} \\
 D(t,y) &:= \begin{pmatrix} y_1 \\ 0 \\ y_3 \\ -g \end{pmatrix} \\
 z &:= \text{rkfixed}(y, 0, 2, 20, D)
 \end{aligned}$$

Листинг 1.2

Листинг модели движения тела,
брошенного под углом к горизонту

Некоторые параметры вычислительной процедуры `rkfixed` (.....), например конечное время, не всегда известны заранее. В этом случае можно задать их при отладке приближенно, используя какие-либо оценки вплоть до

жизненного опыта. В дальнейшем по результатам работы их всегда можно скорректировать. Какой взять шаг? Эта проблема является очень важной в моделировании. Более подробно она рассматривается в следующей работе.

Результаты

Результатом работы процедуры `rkfixed` является матрица Z размером $(N + 1) \cdot 5$. Строками этой матрицы будут:

- $Z_{i,0}$ — время;
- $Z_{i,1}$ — координата x ;
- $Z_{i,2}$ — проекция скорости на ось x ;
- $Z_{i,3}$ — координата y ;
- $Z_{i,4}$ — проекция скорости на ось y .

Графические возможности пакета MathCAD позволяют построить траекторию полета снаряда (рис. 1.2).

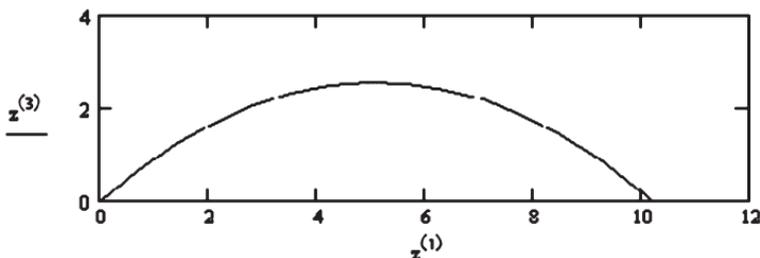


Рис. 1.2
Траектория движения тела, брошенного под углом к горизонту при $\alpha = 45^\circ$, $v = 10$ м/с

Траектория получилась правдоподобной. Окончательно можно убедиться в правильности результатов, проверив их, например, по известной формуле дальности полета (приводится во всех учебниках физики):

$$L = v^2 \sin 2\alpha / g = 10,2 \text{ м.}$$

Список заданий для самостоятельной работы

1. Постройте график зависимости дальности стрельбы от угла и убедитесь в известном свойстве этого движения, что наибольшая дальность достигается при угле 45° .

ПОЛЕТ ТЕЛ В СТРАТОСФЕРЕ (ДАЛЬНОБОЙНАЯ АРТИЛЛЕРИЯ)

В книге «Занимательная физика» Я. И. Перельмана [1] описывается исторический случай о первых опытах стрельбы из дальнобойной пушки, созданной немцами в Первую мировую войну. Было обнаружено, что наибольшая дальность стрельбы достигалась при угле наклона ствола около 60° . Быстро было найдено объяснение этому явлению. При больших углах наклона ствола снаряд значительную часть пути преодолевал в сильно разреженных слоях атмосферы, где испытывал гораздо меньшее сопротивление воздуха.

В этой работе мы покажем, как можно смоделировать данное явление в распространенном математическом пакете MathCAD.

Модель

Движение тела по баллистической траектории можно описать с помощью второго закона Ньютона:

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{F}, \quad (2.1)$$

где m — масса тела; \mathbf{g} — вектор ускорения свободного падения; \mathbf{F} — сила сопротивления воздуха.

В качестве силы F возьмем модельную силу

$$F = kv^2. \quad (2.2)$$

Здесь v — скорость тела; k — коэффициент сопротивления.

Формула (2.2) хорошо выполняется для больших скоростей движения тел, таких, например, какую имеет снаряд дальнобойной пушки. Коэффициент сопротивления k определяется формулой [3]:

$$k = \frac{1}{2} c \rho S. \quad (2.3)$$

Здесь S — площадь лобового сечения снаряда; ρ — плотность воздуха; c — аэродинамический коэффициент сопротивления, который зависит от формы тела.

Подставляя (2.2) и (2.3) в (2.1) получим:

$$m \mathbf{a} = m \mathbf{g} - \frac{1}{2} c \rho S v v. \quad (2.4)$$

Плотность воздуха ρ зависит от высоты над поверхностью Земли. Для моделирования возьмем хорошо известную барометрическую формулу:

$$\rho = e^{-\mu g \frac{h}{RT}}.$$

Здесь μ — молярная масса воздуха; R — универсальная газовая постоянная ($R = 8,3$ Дж/КмольК); T — температура ($T = 300$ К); h — высота над поверхностью земли.

С учетом барометрической формулы уравнение (2.4) примет вид

$$m \mathbf{a} = m \mathbf{g} - \frac{1}{2} c S \rho_0 e^{-\mu g \frac{h}{RT}} v v.$$

Спроектируем это уравнение на оси координат, выбрав систему отсчета так, как принято в этой задаче. Ось x направим горизонтально, ось y вертикально.

$$\begin{aligned} a_x &= -\frac{1}{2m} c S \rho_0 e^{-\mu g \frac{y}{RT}} v v_x, \\ a_y &= -g - \frac{1}{2m} c S \rho_0 e^{-\mu g \frac{y}{RT}} v v_y. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Здесь $v = (v_x^2 + v_y^2)^{1/2}$.

Так как $a_x = d^2x/dt^2$, $a_y = d^2y/dt^2$, т. е. проекции ускорения равны вторым производным по соответствующим

координатам, а $v_x = dx/dt$, $v_y = dy/dt$, то уравнения (2.5) образуют систему дифференциальных уравнений, которую можно решить, используя различные математические пакеты. Надо только освоить правила обращения к соответствующим процедурам. Систему дифференциальных уравнений второго порядка (2.5) методом понижения порядка с заменой

$$\begin{aligned}x &= y_0; \\ dx/dt &= y_1; \\ y &= y_2; \\ dy/dt &= y_3\end{aligned}$$

приводят к системе четырех уравнений первого порядка.

$$\begin{aligned}dy_0/dt &= y_1; \\ dy_1/dt &= -\frac{1}{2m}cS\rho_0 e^{-\mu g \frac{y_2}{RT}} v y_1; \\ dy_2/dt &= y_3; \\ dy_3/dt &= -g - \frac{1}{2m}cS\rho_0 e^{-\mu g \frac{y_2}{RT}} v y_3.\end{aligned}\tag{2.6}$$

Оформление модели в MathCAD

Например, в пакете MathCAD эта система описывается вектор-функцией $D(t,y)$, четыре строки которой являются правыми частями четырех уравнений системы.

$$D(t,y) := \begin{bmatrix} y_1 \\ \frac{-c \cdot S1 \cdot \rho \cdot e^{-\mu g \frac{y_2}{RT}} \cdot \sqrt{(y_1)^2 + (y_3)^2} \cdot y_1}{2 \cdot m1} \\ y_3 \\ - \left[g + \frac{c \cdot S1 \cdot \rho \cdot e^{-\mu g \frac{y_2}{RT}} \cdot \sqrt{(y_1)^2 + (y_3)^2} \cdot y_3}{2 \cdot m1} \right] \end{bmatrix}$$

Листинг 2.1

Вектор-функция $D(t,y)$ системы (2.6)

Здесь $S1$, $R1$, $T1$ — величины S , R , T , упоминаемые выше и переобозначенные, поскольку в MathCAD они уже заняты другими значениями. Первая и третья строки $D(t, y)$ y_1 и y_3 являются с точки зрения математики первыми производными x и y по t соответственно, а физически это проекции скорости на оси координат, y_2 — координата y . Вторая и четвертая строки столбца — правые части уравнений (2.5).

Для получения решения требуется также задать начальные условия. В пакете MathCAD они задаются следующим листингом:

$$y := \begin{pmatrix} 0 \\ v \cos(\alpha) \\ 0 \\ v \sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

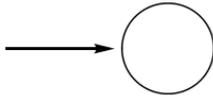
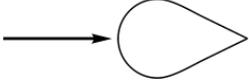
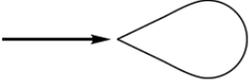
Листинг 2.2

Начальные условия

Здесь в первой и третьей строках — начальные координаты по x и y , во второй и четвертой — проекции начальной скорости (v — начальная скорость, α — угол, под которым снаряд вылетает из ствола). Параметры снаряда были взяты из книги Перельмана. Масса снаряда $m = 120$ кг, ди-

Таблица 2.1

Значения аэродинамического коэффициента сопротивления

Тело	Форма	c
Шар		0,4
Каплевидное тело		0,045
Каплевидное тело		0,1

аметр $d = 21$ см, начальная скорость $v = 2000$ м/с. Величину аэродинамического коэффициента c определяют в зависимости от формы тела (табл. 2.1). Таблица взята из [3].

Коэффициент c в книге [1] естественно не задан. Зато заданы некоторые данные, такие как максимальная дальность полета снаряда — 115 км, время полета — 3,5 мин, которые были воспроизведены при работе описанной модели, если коэффициент c положить равным 0,31.

Система (2.5) решается методом Рунге — Кутта с помощью процедуры, к которой можно обратиться, используя следующую запись:

$$Z = \text{rkfixed}(y, t1, t2, N, D). \quad (2.7)$$

Здесь $t1$ — начальное время, $t2$ — конечное время, N — число интервалов разбиения временного промежутка $(t1, t2)$ для вычислительной процедуры.

Если на вашем компьютере установлен MathCAD, то требуется создать документ, выполнив последовательно следующие действия: ввести постоянные параметры задачи, ввести столбец начальных условий y , ввести столбец $D(t, y)$ и обратиться к процедуре (2.7). Полученную таким путем модель вы можете использовать для исследования полета снаряда по своему плану.

Результаты

Результатом работы процедуры (2.7) является матрица Z размером $(N + 1) \cdot 5$, строки которой будут:

- $Z_{i,0}$ — время;
- $Z_{i,1}$ — координата x ;
- $Z_{i,2}$ — проекция скорости на ось x ;
- $Z_{i,3}$ — координата y ;
- $Z_{i,4}$ — проекция скорости на ось y .

Графические возможности пакета MathCAD позволяют построить траекторию полета снаряда (см. рис. 2.1).

На рисунке видна асимметрия траектории при $\alpha = 30^\circ$. Траектория спуска снаряда более крутая, чем траектория подъема. Подъем снаряда более пологий, чем спуск. Асимметрия не так заметна при углах стрельбы $\alpha = 45^\circ$ и 56° .

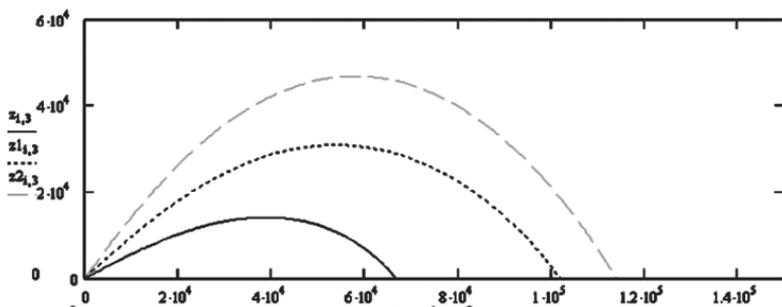


Рис. 2.1
Траектория полета снаряда дальнобойной пушки
при углах стрельбы $\alpha = 30^\circ, 45^\circ$ и 56°

Наибольшая дальность достигается при угле стрельбы $\alpha = 56^\circ$. Перельман приводит значение α для наибольшей дальности 52° [1]. Такое различие может быть связано, например, с применением барометрической формулы, которая имеет приближенное значение. Но в целом описанный эффект неплохо воспроизводится при моделировании.

Проблема достоверности полученных результатов

Проблема достоверности полученных результатов имеет большое значение при моделировании. Так как обычно для вычислений применяются численные методы, дающие приближенные решения с заданной погрешностью, которая зависит от величины шага. Необходимым признаком достоверности является независимость результатов работы модели от величины шага или от числа точек разбиения N в процедуре `rkfixed`. Проиллюстрируем это, просчитав полет снаряда при $N = 500, 30$ и 50 . На рисунке 2.2 видно, что траектория полета при $N = 30$ значительно отличается от траектории при $N = 500$, а дальность отличается на 12 км. Если вместо $N = 30$ в `rkfixed` поставить $N = 50$, то отличие между траекториями уменьшается, а отличие по дальности становится равным 3 км. Результаты работы модели должны совпадать с имеющимися результатами, полученными другими методами.

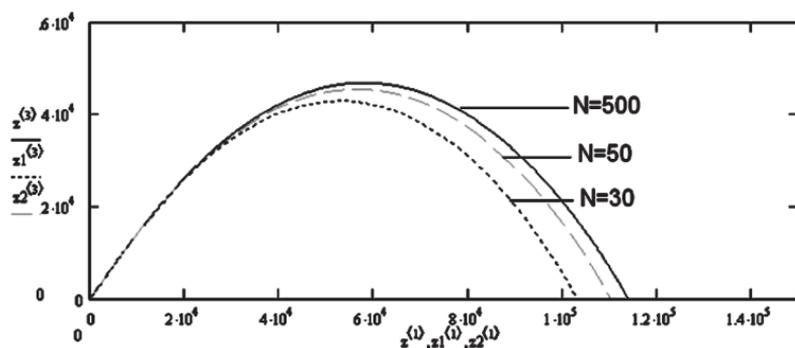


Рис. 2.2
Траектория снаряда при различных N

Список заданий для самостоятельной работы

1. Постройте график зависимости дальности стрельбы от угла.

2. Если начальная скорость снаряда невелика, например 200 м/с, то эффекта дальнбойной артиллерии не будет. Постройте зависимость дальности полета от угла в этом случае.

ВОЗВРАЩЕНИЕ СПУТНИКА НА ЗЕМЛЮ ПО БАЛЛИСТИЧЕСКОЙ ТРАЕКТОРИИ

Одним из используемых способов возвращения искусственных спутников с орбиты на Землю является способ, изображенный на рисунке 3.1. Спутнику, находящемуся на орбите 1 и имеющему скорость v , сообщается тормозной импульс, направленный в сторону, противоположную скорости. При этом его скорость уменьшается на величину Δv и спутник переходит на другую эллиптическую орбиту 2. На новой орбите спутник встречает атмосферу и гасит скорость до незначительной. При этом спутник из-за трения о воздух сильно разогревается. Такой способ называют возвращением спутника по баллистической траектории.

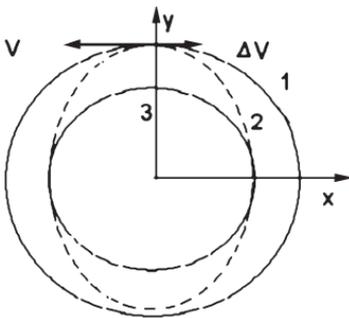


Рис. 3.1

Схема возвращения спутника:
1 — исходная орбита спутника; 2 — орбита спутника после маневра; 3 — поверхность Земли.

импульс, направленный в сторону, противоположную скорости. При этом его скорость уменьшается на величину Δv и спутник переходит на другую эллиптическую орбиту 2. На новой орбите спутник встречает атмосферу и гасит скорость до незначительной. При этом спутник из-за трения о воздух сильно разогревается. Такой способ называют возвращением спутника по баллистической траектории.

Модель

Построим математическую модель такого движения. Движение спутника можно описать с помощью второго закона Ньютона:

$$m\mathbf{a} = -G \frac{mM\mathbf{r}}{r^3} + \mathbf{F}. \quad (3.1)$$

Здесь m — масса спутника; M — масса Земли; G — гравитационная постоянная; \mathbf{r} — радиус-вектор спутника в системе отсчета, начало которой помещено в центр Земли; \mathbf{F} — сила сопротивления воздуха.

В качестве силы F возьмем модельную силу

$$F = kv^2. \quad (3.2)$$

Здесь v — скорость спутника; k — коэффициент сопротивления.

Формула (3.2) хорошо выполняется для больших скоростей движения тел. Коэффициент сопротивления k определяется формулой

$$k = \frac{1}{2} c \rho S. \quad (3.3)$$

Здесь S — площадь лобового сечения спутника; ρ — плотность воздуха; c — аэродинамический коэффициент сопротивления, который зависит от формы тела.

Подстановка (3.2) и (3.3) в (3.1) дает

$$m\mathbf{a} = -G \frac{mM\mathbf{r}}{r^3} - \frac{1}{2} c \rho S v v. \quad (3.4)$$

Плотность воздуха ρ зависит от высоты над поверхностью Земли. Для моделирования возьмем хорошо известную барометрическую формулу:

$$\rho = \rho_0 e^{-\mu g \frac{h}{RT}}.$$

Здесь ρ — плотность воздуха на уровне моря ($\rho_0 = 1,3$ кг/м³); μ — молярная масса воздуха ($\mu = 0,029$ кг/моль); R — универсальная газовая постоянная ($R = 8,3$ Дж/Кмоль); T — температура ($T = 300$ К); h — высота над поверхностью Земли.

С учетом барометрической формулы уравнение (3.4) примет вид

$$m\mathbf{a} = -G \frac{mM\mathbf{r}}{r^3} - \frac{1}{2} c S \rho_0 e^{-\mu g \frac{h}{RT}} v v.$$

Спроектируем это уравнение на оси координат и учтем, что

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

а

$$h = r - R_3.$$

$$\begin{aligned} a_x &= -G \frac{Mx}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{2m} c S \rho_0 e^{-\mu g \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - R_3}{RT}} v v_x; \\ a_y &= -G \frac{My}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{2m} c S \rho_0 e^{-\mu g \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - R_3}{RT}} v v_y. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Здесь $v = (v_x^2 + v_y^2)^{\frac{1}{2}}$.

Так как $a_x = d^2x/dt^2$, $a_y = d^2y/dt^2$, т. е. проекции ускорения равны вторым производным по соответствующим координатам, а $v_x = dx/dt$, $v_y = dy/dt$, то уравнения (3.5) образуют систему дифференциальных уравнений второго порядка.

В барометрической формуле для величины ускорения свободного падения мы взяли g — ускорение свободного падения на поверхности Земли. Это можно оправдать, если иметь в виду, что атмосфера практически заканчивается на высоте порядка 100 км. Следовательно, погрешность модели не будет большой.

Оформление модели в MathCAD

Такую систему в пакете MathCAD следует задать столбцом $D(t, y)$.

Здесь $S1$, $R1$, $T1$ — константы S , R , T , упоминаемые выше и переобозначенные, поскольку в MathCAD они уже заняты другими постоянными.

Первая и третья строки столбца (y_1 и y_3) являются с точки зрения математики первыми производными по x и y соответственно, а физически это проекции скорости на оси координат, y_0 — координата x , а y_2 — координата y .

$$D(t,y) := \begin{bmatrix} y_1 \\ \frac{-G \cdot M \cdot y_0}{\left[\sqrt{(y_0)^2 + (y_2)^2}\right]^3} - \\ -\frac{1}{2 \cdot m} c \cdot S1 \cdot \rho \cdot e^{-\mu g \frac{\left[\sqrt{(y_0)^2 + (y_2)^2} - R_3\right]}{R1 \cdot T1}} \cdot \sqrt{(y_1)^2 + (y_3)^2} \cdot y_1 \\ y_3 \\ \frac{-G \cdot M \cdot y_2}{\left[\sqrt{(y_0)^2 + (y_2)^2}\right]^3} - \\ -\frac{1}{2 \cdot m} c \cdot S1 \cdot \rho \cdot e^{-\mu g \frac{\left[\sqrt{(y_0)^2 + (y_2)^2} - R_3\right]}{R1 \cdot T1}} \cdot \sqrt{(y_1)^2 + (y_3)^2} \cdot y_3 \end{bmatrix}$$

Листинг 3.1

Столбец $D(t,y)$ для модели возвращения спутника

Вторая и четвертая строки столбца — правые части уравнений (3.5).

Чтобы получить решение, необходимо задать начальные условия. В пакете MathCAD они задаются следующим столбцом:

$$y := \begin{bmatrix} 0 \\ -\left(\sqrt{\frac{G \cdot M}{r}} - \Delta v\right) \\ r \\ 0 \end{bmatrix}$$

Листинг 3.2

Начальные условия
для модели возвращения спутника

Спутник, находящийся на круговой орбите, имеет первую космическую скорость, равную

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM}{r}}.$$

Здесь r — радиус орбиты спутника.

Примем начальные координаты спутника равными $x = 0$, $y = r$ (см. рис. 3.1). Проекция начальной скорости $v_x = -v_1$, $v_y = 0$. Малая отрицательная добавка к первой космической скорости Δv дается спутнику тормозным двигателем для перехода его на орбиту 2 (см. рис. 3.1).

Ниже приведен листинг программы, в котором функции $f1(x)$ и $f2(x)$ задают поверхность Земли.

```
G:=6.67·10-11  m:=200  M:=5.98·1024
c:=0,4  S:=π·1  ρ:=1.3
g:=9.8  R3:=6.4·106  T1:=300  R1:=8.3
r:=6.6·106  Δv:=40  μ:=0.029
y:= $\begin{bmatrix} 0 \\ -\left(\sqrt{\frac{G \cdot M}{r}} - \Delta v\right) \\ r \\ 0 \end{bmatrix}$   x:=-6.4·106, -6.3·106...6.4·106
f1(x):=√(R3)2 - x2
f2(x):=-√(R3)2 - x2
```

```
D(t,y):= $\begin{bmatrix} y_1 \\ \frac{-G \cdot M \cdot y_0}{\left[\sqrt{(y_0)^2 + (y_2)^2}\right]^3} - \\ -\frac{1}{2 \cdot m} \cdot c \cdot S \cdot \rho \cdot e^{-\mu g \frac{\left[\sqrt{(y_0)^2 + (y_2)^2} - R_3\right]}{R1 \cdot T1}} \cdot \sqrt{(y_1)^2 + (y_3)^2} \cdot y_1 \\ y_3 \\ \frac{-G \cdot M \cdot y_2}{\left[\sqrt{(y_0)^2 + (y_2)^2}\right]^3} - \\ -\frac{1}{2 \cdot m} \cdot c \cdot S \cdot \rho \cdot e^{-\mu g \frac{\left[\sqrt{(y_0)^2 + (y_2)^2} - R_3\right]}{R1 \cdot T1}} \cdot \sqrt{(y_1)^2 + (y_3)^2} \cdot y_3 \end{bmatrix}$ 
```

```
z:=rkfixed(y,0,2245,2000,D)
```

Листинг 3.3

Листинг, реализующий описанную модель

Далее для работы модели необходимо задать постоянные $G, M, g, R3, T1, R1, \rho, \mu$. Для r примем $r = 6,6 \cdot 10^6$ м. Это соответствует высоте орбиты над поверхностью Земли 200 км. Для массы спутника m возьмем значение $m = 200$ кг, а спутник будем считать шаром радиусом 1 м с коэффициентом аэродинамического сопротивления $c = 0,4$. Эти значения примерно соответствуют космическому кораблю, на котором летал Ю. А. Гагарин.

Модель начнет работать, если обратиться к процедуре `rkfixed(y, t1, t2, N, D)`, здесь $t1, t2$ — начальное и конечное время работы процедуры. N — количество интервалов, на которые разбивается временной промежуток. Обычно N выбирают из компромиссных соображений. Чем больше N , тем точнее результат, но модель требует больших ресурсов, и компьютер дольше вычисляет. И что еще должен знать начинающий вычислитель — результатам работы модели можно доверять, если они не зависят от числа N .

Результаты

Результатом работы процедуры `rkfixed` является матрица Z размером $5 \cdot (N + 1)$. Столбцами которой будут:

- $Z_{i,0}$ — время;
- $Z_{i,1}$ — координата x ;
- $Z_{i,2}$ — проекция скорости на ось x ;
- $Z_{i,3}$ — координата y ;
- $Z_{i,4}$ — проекция скорости на ось y ;
- i — номера шагов, на которые разбивается промежуток времени, заданный в модели.

Следующая проблема, которая возникает у вычислителя, — как использовать огромное количество информации, даваемой матрицей Z .

Это удобно сделать с помощью графиков. На рисунке 3.2 представлена траектория движения спутника при некоторых параметрах, указанных в листинге. Постепенно увеличивая $t2$ в `rkfixed`, следует добиться того, чтобы спутник «зацепился» за атмосферу и начал тормозиться.

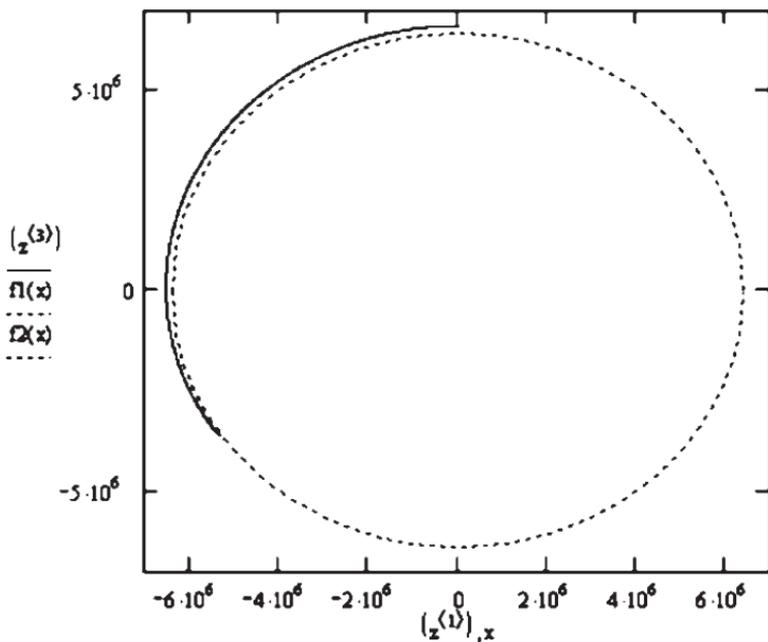


Рис. 3.2
Траектория возвращения спутника
с орбиты на Землю при $\Delta v = 40$ м/с

Место посадки спутника можно увеличить, изменив масштабную сетку на графике. Этот результат представлен на рисунке 3.3, прерывистая линия на котором изображает поверхность Земли. Достигнув верхних слоев атмосферы, спутник быстро теряет скорость и приземляется почти вертикально по отношению к поверхности Земли.

Модель позволяет исследовать различные характеристики посадки по баллистической траектории. В качестве примера рассмотрим зависимости скорости и перегрузки как функции времени. Скорость v вычислим по формуле

$$v := \sqrt{(z^{(2)})^2 + (z^{(4)})^2}.$$

График скорости от времени представлен на рисунке 3.4. Первое время скорость незначительно растет, при-

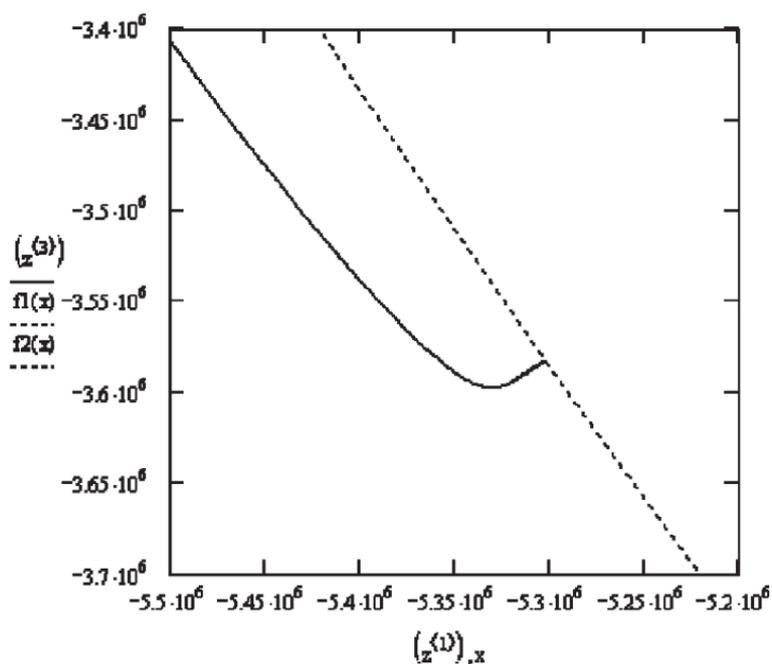


Рис. 3.3
Траектория посадки спутника

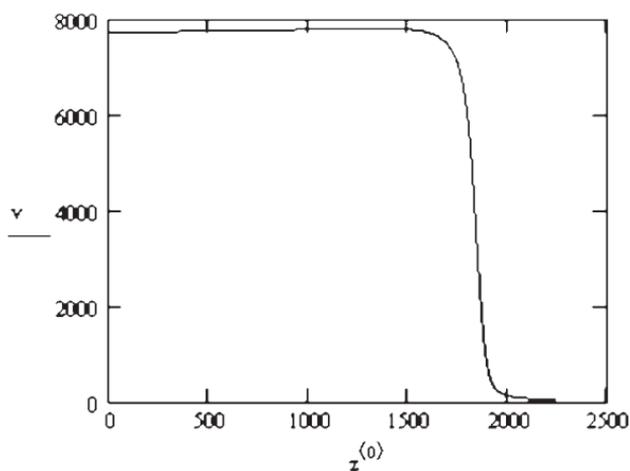


Рис. 3.4
График зависимости скорости v спускаемого аппарата от времени

мерно до 1500 с в соответствии со вторым законом Кеплера, а затем гасится в основном в течение примерно 400 с на последней стадии полета. Поэтому можно ожидать больших перегрузок на этой стадии.

Перегрузку обычно определяют как силу веса, действующую на космонавта. Вес космонавта найдем из уравнения

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{N}, \quad (3.6)$$

здесь m — масса космонавта; \mathbf{a} — его ускорение; \mathbf{N} — реакция опоры; вес $P = N$.

Из (3.6) следует

$$\mathbf{N} = m(\mathbf{a} - \mathbf{g}), \quad \frac{N}{m} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 - 2(a_x g_x + a_y g_y) + g^2}.$$

Проекции ускорения можно найти из матрицы Z , добавив в листинг следующие формулы:

$$i := 1 \dots 1999$$

$$g_{x_i} := -g \cdot \frac{z_{i,1}}{\sqrt{(z_{i,1})^2 + (z_{i,3})^2}} \quad g_{y_i} := -g \cdot \frac{z_{i,3}}{\sqrt{(z_{i,1})^2 + (z_{i,3})^2}}$$

$$a_{x_i} := \frac{(z_{i+1,2} - z_{i,2})}{z_{i+1,0} - z_{i,0}} \quad a_{y_i} := \frac{(z_{i+1,4} - z_{i,4})}{z_{i+1,0} - z_{i,0}}$$

$$N_i := \sqrt{g^2 + (a_{x_i})^2 + (a_{y_i})^2 - 2(a_{x_i} \cdot g_{x_i} + a_{y_i} \cdot g_{y_i})}$$

Листинг 3.4

Формулы для вычисления перегрузки, записанные в MathCAD

Здесь вектор \mathbf{g} представлен в виде

$$\mathbf{g} = -g\mathbf{r}/r.$$

На рисунке 3.5 представлен график зависимости перегрузки N_i в единицах g от времени. До приблизительно 1500 с полета перегрузка равна нулю, как и должно быть при свободном полете. В этот момент спутник «врезается» в плотные слои атмосферы, и перегрузка быстро растет,

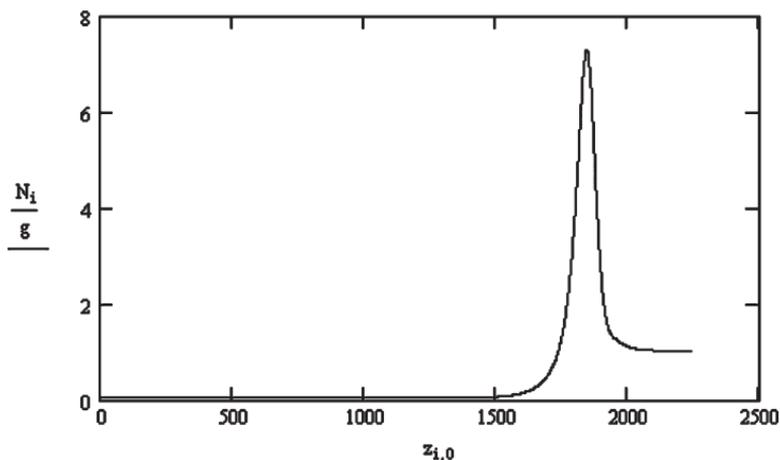


Рис. 3.5
Зависимость перегрузки N_i от времени

достигая величины $7,5g$. Спутник теряет скорость, и перегрузка так же быстро падает, достигая величины g , как и должно быть на Земле к концу полета. Время экстремальных перегрузок длится приблизительно 200 с.

Список заданий для самостоятельной работы

1. Изменяя Δv , найдите его значение, при котором спутник приземляется непосредственно под точкой включения тормозного двигателя.

2. Найдите минимальное значение Δv , при котором возможно возвращение спутника с орбиты.

3. Проведите исследование, зависит ли перегрузка от Δv , и если зависит, то каким образом.

4. Модель позволяет исследовать полет австрийского парашютиста Феликса Баумгартнера с высоты 39 км, совершенный им 14 октября 2012 г. Подберите константы для этой задачи, начальные условия и проведите такое исследование.

СТАБИЛИЗАЦИЯ ПЕРЕВЕРНУТОГО МАЯТНИКА

Работа посвящена не рассматриваемому обычно в школе и в курсах общей физики эффекту стабилизации вынужденных колебаний осцилляторов около неустойчивого положения равновесия. Задача решается на примере математического маятника методом компьютерного моделирования. Метод компьютерного моделирования позволяет исследовать этот эффект для нелинейного маятника, т. е. в области любых углов отклонения маятника.

Модель

Вначале приведем вывод уравнения колебаний свободного математического маятника. Материальная точка массой m движется под действием двух сил: силы тяжести и силы упругости (рис. 4.1).

Поэтому второй закон Ньютона для нее будет иметь вид

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{T}.$$

Спроектируем это векторное уравнение на оси координат:

$$\begin{aligned} ma_x &= -mg\sin\varphi; \\ ma_y &= T - mg\cos\varphi. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Проекция a_x является тангенциальной составляющей ускорения точки, движущейся по окружности, а a_y — нормальной составляющей. Подставляя тангенциальное ускорение

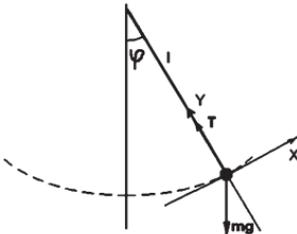


Рис. 4.1
Схема движения
математического
маятника

$$\mathbf{a}_x = dv/dt = ld^2\varphi/dt^2$$

в первое уравнение системы (4.1), получим

$$d^2\varphi/dt^2 + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0. \quad (4.2)$$

Уравнение (4.2) описывает любые колебания маятника без ограничений на их величину. Такой маятник имеет два положения равновесия — устойчивое, нижнее $\varphi = 0$, которое изучают обычно в курсах физики, и неустойчивое, верхнее $\varphi = \pi$, которому уделяется меньше внимания. Возможность стабилизации колебаний в неустойчивом положении приводится в учебнике Л. Д. Ландау «Механика» [2].

Стабилизацию можно получить, если точку подвеса маятника (рис. 4.2) заставить колебаться в вертикальном направлении по закону

$$y = A \sin \omega t,$$

здесь A — амплитуда вынужденных колебаний; ω — частота.

Для того чтобы записать уравнение (4.2) с учетом колебаний точки подвеса, перейдем в неинерциальную систему отсчета, связанную с колеблющейся точкой подвеса. В неинерциальной системе на маятник, кроме силы тяжести, будет дополнительно действовать сила инерции

$$\mathbf{F} = -m\mathbf{a},$$

где \mathbf{a} — ускорение колебательного движения:

$$\mathbf{a} = d^2y/dt^2 = -A\omega^2 \sin \omega t. \quad (4.3)$$

Поэтому для учета колебаний точки подвеса достаточно в уравнение (4.2) к g , отвечающему за силу тяжести, добавить (4.3), отвечающее за колебательную силу инерции:

$$d^2\varphi/dt^2 + \left(\frac{g - A\omega^2 \sin \omega t}{l} \right) \sin \varphi. \quad (4.4)$$

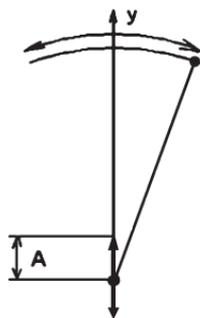


Рис. 4.2
Качание маятника в перевернутом положении

Уравнение (4.4) является нелинейным дифференциальным уравнением второго порядка и описывает движение математического маятника с колеблющейся точкой подвеса. Это уравнение решается в MathCAD с помощью процедуры $\text{rkfixed}(y, t_{\text{нач}}, t_{\text{кон}}, N, D)$. Листинг документа, описывающего вынужденные колебания перевернутого маятника, представлен в листинге 4.1. Начальное отклонение φ взято $3,0$. Это соответствует перевернутому положению маятника, когда $\varphi = \pi$.

```

l:=0.5  a:=0.01  v:=57
ω:=2·π·v
y:= $\begin{pmatrix} 3.0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 
D(t,y):= $\begin{bmatrix} y_1 \\ -(g-a\omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t)) \cdot \frac{\sin(y_0)}{1} \end{bmatrix}$ 
z:=rkfixed(y,0,50,50000,D)

```

Листинг 4.1

Листинг документа,
описывающего вынужденные колебания
перевернутого маятника

Результаты

С помощью описанной выше модели проведено исследование движения перевернутого маятника. Был установлен факт стабилизации вынужденных колебаний около неустойчивого положения равновесия $\varphi = \pi$ (сплошная горизонтальная линия на рис. 4.3) при следующих значениях: частота $\nu = 57$ Гц; начальное отклонение маятника $\varphi_0 = 3,0$; длина $l = 0,5$ м; амплитуда колебаний точки подвеса $A = 0,01$ м.

Существует пороговая частота $\nu_{\text{п}}$, выше которой колебания стабилизируются в перевернутом положении. Если частота колебаний точки подвеса ниже пороговой, то маятник либо переходит во вращательное движение ($\nu = 56$ Гц,

$\varphi = 3,0$), как показано на рисунке 4.4, либо «сваливается» в положение устойчивого равновесия $\varphi = 0$ ($\nu = 26$ Гц, $\varphi = 3,0$) и колеблется вблизи него (рис. 4.5).

Если увеличить масштаб изображения на графике, представленном на рисунке 4.3, то можно обнаружить, что установившиеся колебания содержат две гармоники. На рисунке 4.6 представлены колебания маятника на временном интервале $t = 9,0-10,4$ с.

Расчет показал, что период этих колебаний соответствует частоте колебаний точки подвеса $\nu = 57$ Гц. На рисунке 4.3 можно наблюдать колебания со второй гармоникой, частота которой равна $0,29$ Гц. Эта частота установившихся вынужденных колебаний стабилизированного маятника

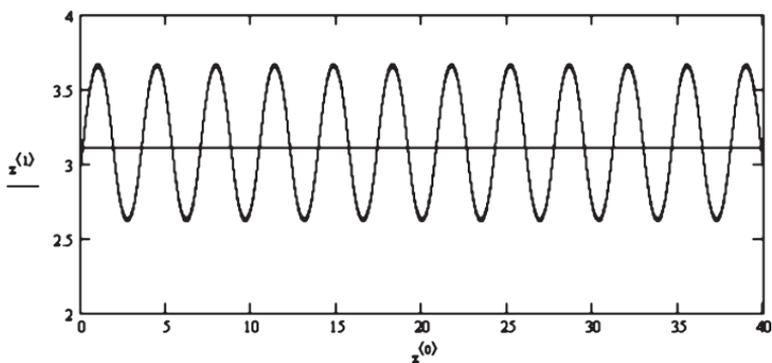


Рис. 4.3
Колебания перевернутого маятника
около неустойчивого положения равновесия $\varphi = \pi$

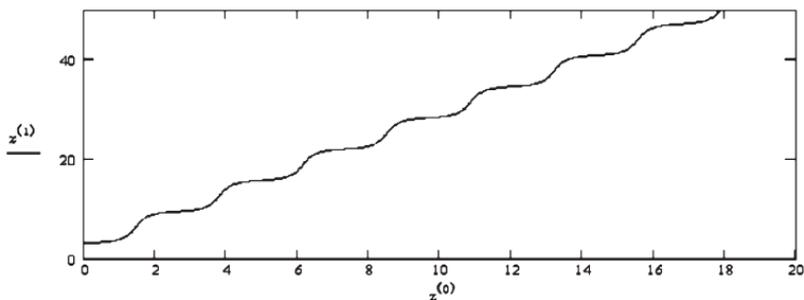


Рис. 4.4
Маятник перешел во вращательное движение

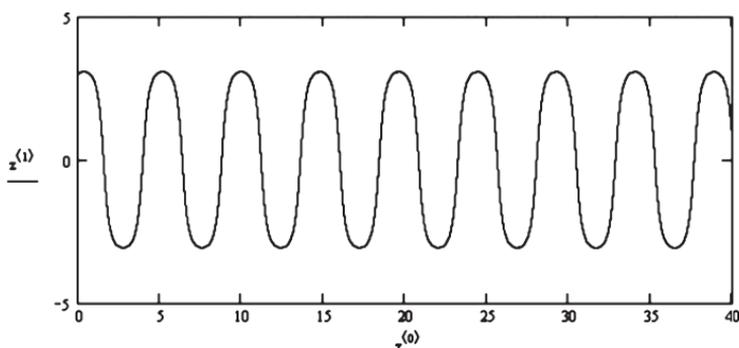


Рис. 4.5

Маятник «свалился» в устойчивое положение равновесия

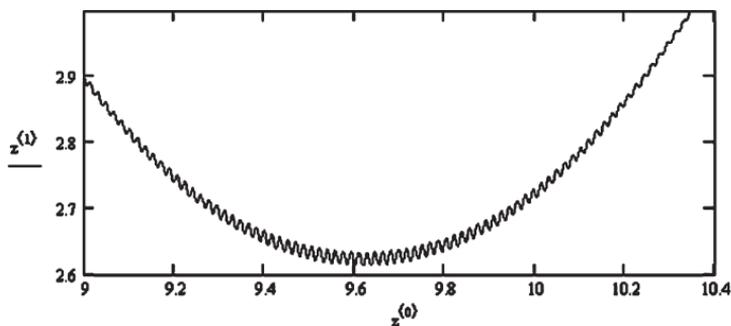


Рис. 4.6

Тонкая структура колебаний перевернутого маятника

при данных начальных условиях. Частота малых колебаний вблизи устойчивого положения равновесия равна

$$\nu_c = \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{1}{g}}} = 0,70 \text{ Гц.}$$

На следующем этапе проведены исследования зависимости частоты вынужденных колебаний стабилизированного маятника от частоты колебаний точки подвеса. Эти данные представлены на рисунке 4.7 и указывают на связь этих частот.

Также была исследована зависимость пороговой частоты стабилизации от начального отклонения маятника

(рис. 4.8). Эта зависимость имеет асимптотический характер. Существует критический угол, при превышении которого колебания перевернутого маятника не стабилизируются ни при каких частотах. Этот угол приблизительно равен 34° .

Следует остановиться на проблеме достоверности полученных результатов.

В системах, где возможны периодические движения, число точек N в вычислительной процедуре `rkfixed` должно быть таким, чтобы на периоде помещалось как минимум десять шагов. Для рассматриваемой задачи минимальный период $T = 1/\nu = 1/56 = 0,018$. Значит, максимальный допустимый шаг должен быть $0,0018$. Поэтому число шагов N , будет $t_{\text{кон}}/0,0018 = 28\,000$.

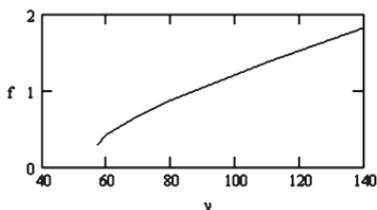


Рис. 4.7
Зависимость частоты вынужденных колебаний стабилизированного маятника от частоты колебаний точки подвеса

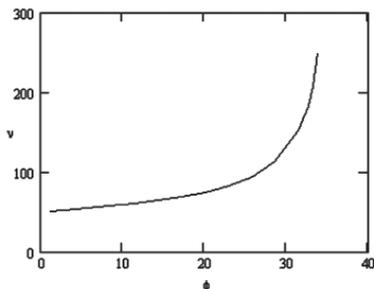


Рис. 4.8
Зависимость пороговой частоты стабилизации $\nu_{\text{п}}$ от величины начального угла отклонения

Список заданий для самостоятельной работы

1. Исследуйте, как зависит амплитуда стабилизированных колебаний перевернутого маятника от частоты колебаний точки подвеса.
2. Снимите кривую зависимости критического начального угла стабилизации от длины маятника.
3. Проведите исследование условий, при которых маятник вращается или колеблется около устойчивого положения равновесия.

ПОД ПАРУСОМ К ЗВЕЗДАМ

Введение

Излучение Солнца оказывает давление на тела, которые оно освещает. Однако величина этого давления столь мала, что на процессы в природе и технике существенно не влияет. Впервые существование светового давления опытным путем доказал и измерил его величину в 1899 г. П. Н. Лебедев. Он сконструировал установку и поставил на ней тонкий опыт, результатом которого и было данное открытие. Из явлений природы, в которых проявляется солнечное давление, следует упомянуть ориентацию хвостов комет. Как известно, хвосты комет направлены всегда в сторону, противоположную Солнцу. Это является следствием давления солнечного света, оказываемого на частицы кометной пыли.

В работе мы построим математическую модель движения искусственных спутников Земли с учетом солнечного давления и покажем, как давление солнечного света можно использовать в практических целях.

Модель

Движение искусственного спутника Земли (ИСЗ) можно описать, применив к нему второй закон Ньютона:

$$m\mathbf{a} = -GmM\mathbf{r}/r^3 + \mathbf{F}. \quad (5.1)$$

Здесь \mathbf{F} — сила солнечного давления.

Сила \mathbf{F} определяется формулой $\mathbf{F} = cS$, где S — площадь поверхности ИСЗ, облучаемой солнечным светом, а

c — давление солнечного света вблизи Земли. Эта величина очень мала и равна $c = 4,3 \cdot 10^{-6}$ Н/м². Проектируя уравнение (5.1) на оси координат (рис. 5.1), получим

$$\begin{aligned} a_x &= -G \frac{Mx}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} - c \frac{S}{m}; \\ a_y &= -G \frac{My}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

На рисунке 5.1 изображен ИСЗ в выбранной системе координат и стрелкой указано направление действия солнечного давления. Будем считать, что сила давления действует в плоскости орбиты спутника. Исследуем, как солнечное давление влияет на орбитальное движение спутников на примере геостационарного спутника. Как известно, угловая скорость геостационарного спутника равна угловой скорости вращения Земли вокруг собственной оси. Орбитальная скорость спутника будет равна

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}.$$

Здесь G — гравитационная постоянная; M — масса Земли; r — радиус геостационарной орбиты.

Радиус r найдем из условия равенства угловых скоростей. После несложных преобразований получим

$$r = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}}.$$

Здесь T — период геостационарного спутника, равный 24 ч.

Отметим, что в системе уравнений (5.2) за солнечное давление отвечает слагаемое $c \frac{S}{m}$, в которое площадь S и масса m входят в виде отношения. По правилам, описанным в предыдущих моде-

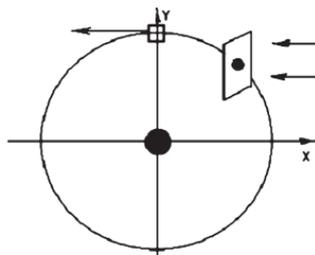


Рис. 5.1
Круговая орбита ИСЗ
в выбранной системе
координат

лях, можно составить листинг модели в пакете MathCAD. Он представлен в листинге 5.1.

$$c := 4.3 \cdot 10^{-6} \quad G := 6.67 \cdot 10^{-11} \quad T := 24 \cdot 60 \cdot 60$$

$$M := 6.018 \cdot 10^{24} \quad m := 1 \quad S := 800$$

$$r := \sqrt[3]{\frac{G \cdot M \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2}} \quad v := \sqrt{G \cdot \frac{M}{r}} \quad y := \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix}$$

$$D(t, y) := \begin{bmatrix} y_1 \\ (-G) \cdot \frac{M \cdot y_0}{\left[\left[\sqrt{(y_0)^2 + (y_2)^2} \right]^3 \right]} - c \cdot \frac{S}{m} \\ y_3 \\ (-G) \cdot \frac{M \cdot y_2}{\left[\left[\sqrt{(y_0)^2 + (y_2)^2} \right]^3 \right]} \end{bmatrix}$$

$$z := \text{rkfixed}(y, 0, 710000, 10000, D)$$

Листинг 5.1

Листинг модели движения ИСЗ
с учетом солнечного давления

Результаты

Следует иметь в виду, что на реальные спутники, которые имеют массу более нескольких десятков килограммов и площадь, освещаемую солнцем, даже с наличием солнечных батарей не более ста квадратных метров, влияние солнечного давления пренебрежимо мало. Для первых опытов, для того чтобы констатировать эффект, возьмем гипотетический спутник массой один килограмм, площадью поверхности сто квадратных метров и посмотрим его траекторию. Она представлена на рисунке 5.2. Под действием солнечного давления (на рисунке его направление отмечено стрелками) траектория спутника постепенно трансформируется. Если на первом витке она еще напоминает

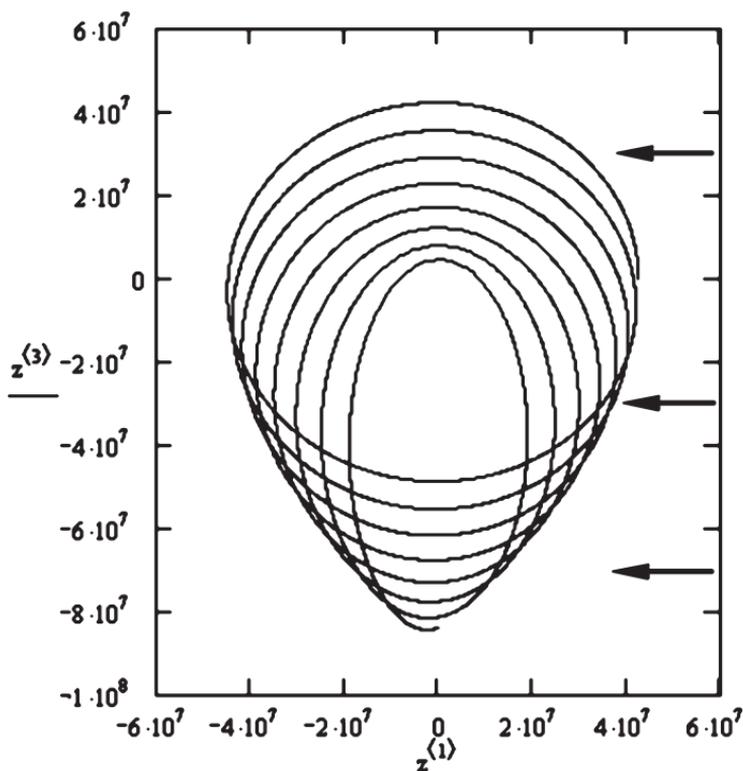


Рис. 5.2
Трансформация траектории ИСЗ
под действием давления солнечного света

окружность, то в дальнейшем ее размеры по оси x уменьшаются, по оси y верхняя сторона приближается к Земле, а нижняя, наоборот, удаляется. Со временем при приближении спутника к Земле произойдет его падение на Землю.

Насколько незначителен этот эффект для реальных ИСЗ можно убедиться на другом опыте, параметры спутника в котором ближе к реальным, чем в предыдущем. Возьмем, например, массу спутника m , равную 50 кг и площадь поверхности, облучаемую солнцем, равную 2 м².

Такой опыт представлен на рисунке 5.3, где показан участок траектории спутника вблизи оси y (см. рис. 5.1).

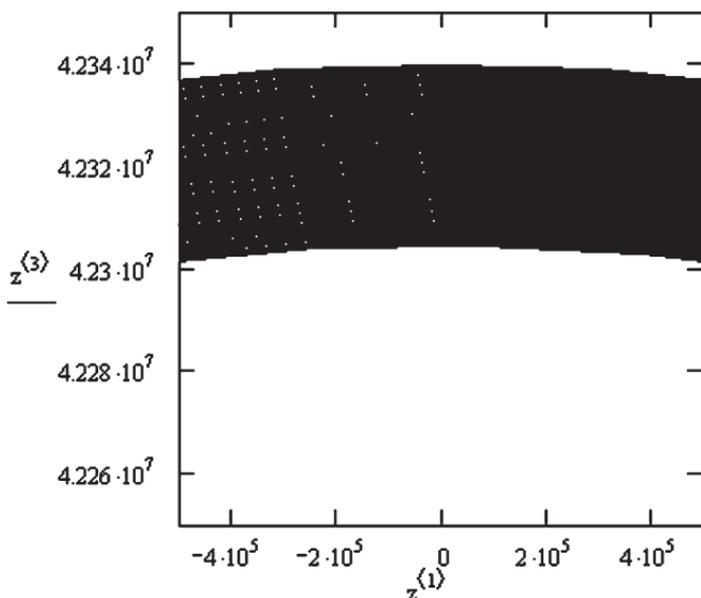


Рис. 5.3
Деформация траектории за 100 суток

Траектория смещается по оси y вниз. Используя масштабную сетку, можно оценить деформацию данной траектории. Относительная деформация составляет порядка $0,1\%$ за четыре месяца.

Солнечный парус

Несмотря на незначительность эффекта, его можно попробовать использовать для полезных целей. Например, для разгона спутника до второй космической скорости, при которой он покидает пределы Земли. Эффект можно усилить, если увеличить площадь, облучаемую Солнцем, развернув специальный парус. Раскрывать его в те моменты времени, когда он увеличивает скорость спутника, и сворачивать в те моменты, когда он тормозит его. Такое использование давления солнечного света очень похоже на использование ветра для мореплавания в Средние века. Для включения и выключения паруса в модели необходимы средства программирования. Такие средства в пакете

MathCAD имеются. Признак, по которому парус раскрывается $v_x < 0$ и сворачивается $v_x \geq 0$.

Для того чтобы воспользоваться процедурой `rkfixed`, введем промежуток времени Δ , достаточно малый, чтобы максимально эффективно использовать парус (Δ равно времени движения на выбранной орбите, за которое спутник замечает угол 5°), но, с другой стороны, достаточно большой, чтобы экономить ресурсы машины. Листинг программы, реализующей ускорение спутника до второй космической скорости, представлен в листинге 5.2. Результатом работы программы является массив `mas`, образующийся из массивов `Z`, с помощью объединения массивов на всех этапах полета.

$$c := 4.3 \cdot 10^{-6} \quad G := 6.67 \cdot 10^{-11} \quad T := 24 \cdot 60 \cdot 60$$

$$Mz := 6.018 \cdot 10^{24} \quad m := 1 \quad S := 64$$

$$Rz := 6400000 \quad r := \sqrt[3]{\frac{G \cdot Mz \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2}} \quad r = 4.234 \cdot 10^7$$

$$\Delta := \frac{10}{360} \cdot 86400 \quad \Delta = 2.4 \cdot 10^3$$

$$Vc := \sqrt{G \cdot \frac{Mz}{r}}$$

$$Vc = 3.079 \cdot 10^3 \quad y := \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \\ Vc \end{pmatrix}$$

$$D1(t, y) := \begin{bmatrix} y_1 \\ (-G) \cdot \frac{Mz \cdot y_0}{\left[\left[\sqrt{(y_0)^2 + (y_2)^2} \right]^3 \right]} - c \cdot \frac{S}{m} \\ y_3 \\ (-G) \cdot \frac{Mz \cdot y_2}{\left[\left[\sqrt{(y_0)^2 + (y_2)^2} \right]^3 \right]} \end{bmatrix}$$

$$D2(t,y) := \begin{bmatrix} y_1 \\ -G \cdot \frac{M \cdot y_0}{\left[\sqrt{(y_0)^2 + (y_2)^2} \right]^3} \\ y_3 \\ (-G) \cdot \frac{M \cdot y_2}{\left[\sqrt{(y_0)^2 + (y_2)^2} \right]^3} \end{bmatrix}$$

```

z ← rkfixed(y,0,Δ,20,D1)
  for q ∈ 0...225
    y1 ←  $\begin{bmatrix} (z^{(1)})_{19} \\ (z^{(2)})_{19} \\ (z^{(3)})_{19} \\ (z^{(4)})_{19} \end{bmatrix}$ 
    z ← rkfixed[v1,q·Δ,(q+1)·Δ,20,D1] if (z(2))19 < 0
mas := z ← rkfixed[v1,q·Δ,(q+1)·Δ,20,D2] if (z(2))19 ≥ 0
  for i ∈ 0...19
    masi+q,20,0 ← (z(0))i
    masi+q,20,1 ← (z(1))i
    masi+q,20,2 ← (z(2))i
    masi+q,20,3 ← (z(3))i
    masi+q,20,4 ← (z(4))i
  mas

```

Листинг 5.2

Листинг программы, реализующей разгон спутника с помощью паруса до второй космической скорости

Вектор-функции D1 и D2 описывают движение спутника с развернутым и свернутым парусом соответственно. Начальные условия y1 в каждом цикле программы определяются последними значениями в предыдущем

цикле. Результаты работы программы в каждом цикле накапливаются в массиве `mas`, который в дальнейшем используется для построения графиков траекторий. Первый опыт состоял в том, чтобы подобрать такую площадь паруса, которая разгоняла бы спутник массой 1 кг до второй космической скорости в течение первого оборота. Это удалось сделать при площади паруса равной 5000 м^2 . Соответствующая траектория представлена на рисунке 5.4.

Видно, как спутник, совершив половину оборота, не смог вернуться на круговую траекторию, стал удаляться от Земли и покинул ее пределы в направлении действия солнечного давления. Если уменьшать площадь солнечного паруса, спутник будет покидать пределы Земли за большее число оборотов. Несколько таких траекторий представлены на рисунке 5.5.

Естественно ожидать, что при любой площади паруса, какой бы малой она ни была, спутник покинет пределы Земли. Однако время, необходимое для этого, может оказаться очень большим. Можно поставить опыты для исследования зависимости времени, за которое спутник уходит за пределы земного притяжения, от площади паруса. Результаты таких опытов представлены в таблице 5.1 и рисунке 5.5.

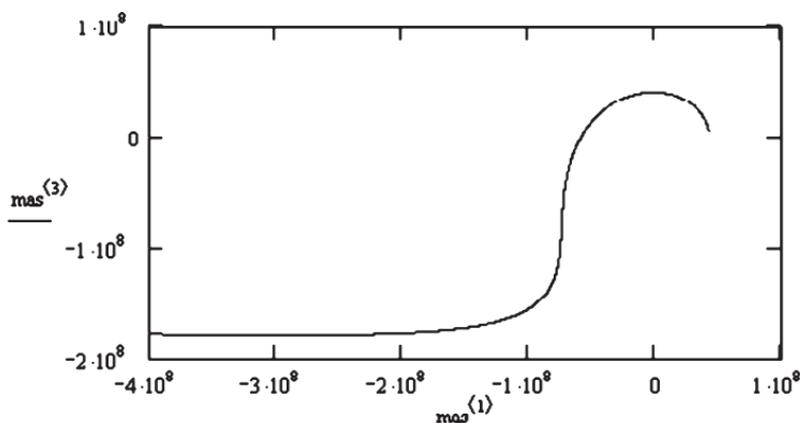


Рис. 5.4

Спутник с площадью паруса $S = 5000 \text{ м}^2$ под действием солнечного давления уходит с круговой орбиты за пределы Земли

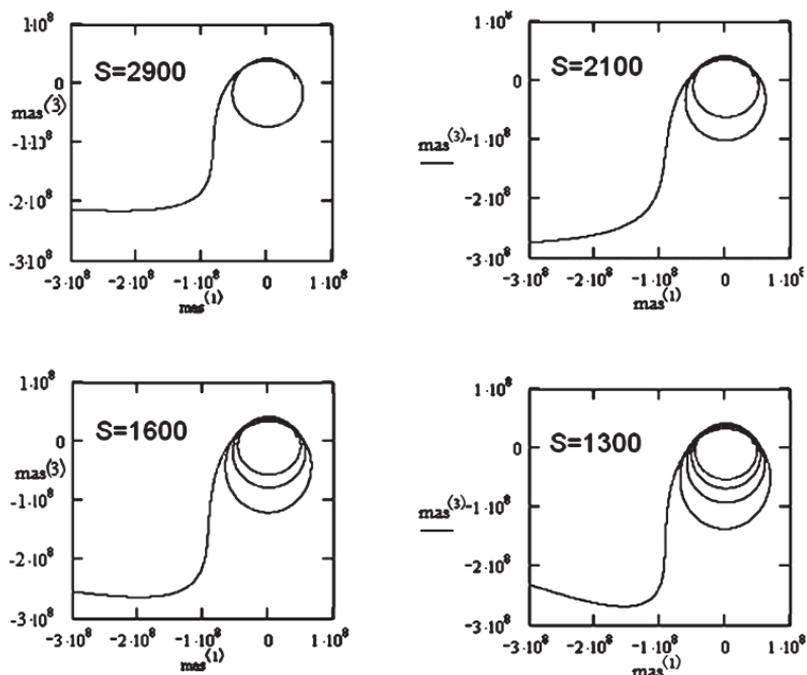


Рис. 5.5
Спутник под парусом покидает пределы Земли
при различных площадях паруса

Т а б л и ц а 5.1

Время ухода ИСЗ за пределы сферы влияния Земли

№	$S, \text{ м}^2$	Число оборотов	$T, \text{ сут}$
1	5000	0	2,85
2	4500	1	4,03
3	2100	2	7,36
4	2000	3	10,42
5	1500	4	12,78
6	1094	5	16,67
7	500	14	45,83
8	100	81	277,78

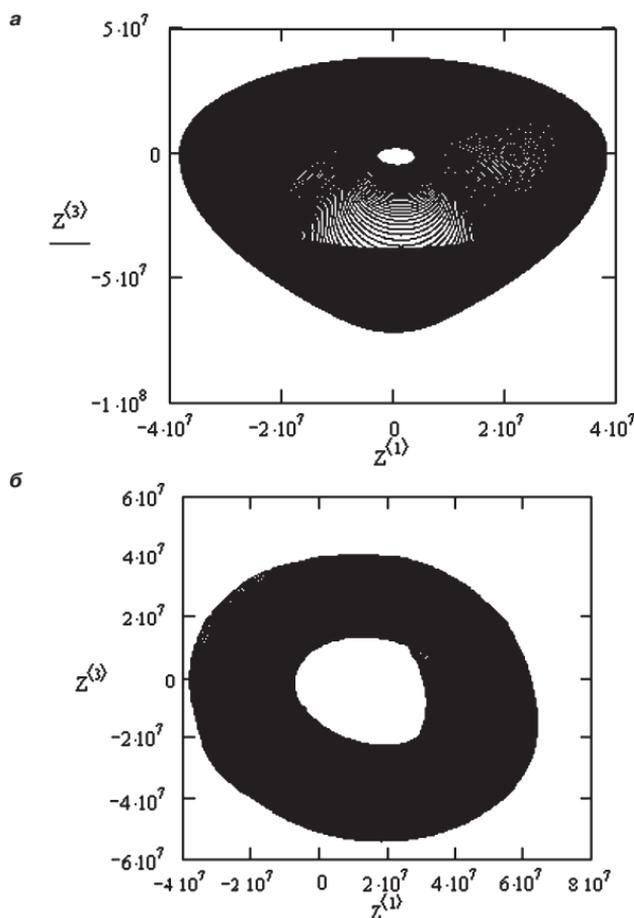


Рис. 5.6
Траектории спутника:

a — спутник падает на Землю через 5 месяцев; *b* — не падает в течение года.

Отметим, что результаты, полученные нами, не учитывают орбитальное вращение Земли вокруг Солнца. Учет этого обстоятельства можно сделать, если в выбранной системе отсчета в слагаемое, отвечающее за силу давления, ввести зависимость от времени, соответствующую орбитальному вращению Земли вокруг Солнца. В этом случае уравнения (5.2) примут вид

$$\begin{aligned} a_x &= -G \frac{Mx}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} - c \frac{S}{m} \cos \frac{2\pi}{T} t; \\ a_y &= -G \frac{My}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} - c \frac{S}{m} \sin \frac{2\pi}{T} t. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Здесь T — период обращения Земли вокруг Солнца.

На рисунке 5.6 представлены траектории спутника в двух случаях. Без учета орбитального движения Земли спутник через пять месяцев падает на землю. С учетом орбитального вращения Земли траектория спутника трансформируется так, что он в течение года при тех же параметрах остается на орбите.

Список заданий для самостоятельной работы

1. Постройте анимационный ролик для этой модели.
2. На рисунке 5.2 траектория спутника смещается в направлении, перпендикулярном силе солнечного давления. Как это объяснить?

ИЗ ИСТОРИИ ОТКРЫТИЯ ПЛАНЕТЫ НЕПТУН

Нептун является последней планетой Большой Солнечной системы по расстоянию от Солнца. Он, подобно Юпитеру, Сатурну и Урану, относится к планетам-гигантам. Его нельзя наблюдать невооруженным глазом, и в древности о существовании этой планеты не было известно. После открытия в конце XVIII в. Урана, астрономы обратили внимание на то, что его орбита не соответствовала законам Кеплера и всемирного тяготения, претерпевая постоянные отклонения. Поэтому была высказана гипотеза, что за орбитой Урана существует еще одна большая планета, гравитация которой и вызывает подобные отклонения. Несколько математиков стали делать расчеты, чтобы вычислить примерное местоположение этой планеты. По результатам этих расчетов в 1846 г. восьмая планета Солнечной системы была найдена. Ее назвали Нептун, в честь еще одного бога из древнегреческой мифологии.

Построим компьютерную модель орбитального движения Урана, учитывающую влияние на него силы притяжения Нептуна. При этом сделаем ряд упрощающих предположений. Будем решать задачу в гелиоцентрической системе координат, поместив начало координат в центр Солнца. Что оправданно, поскольку масса Солнца составляет 99,9% массы всей Солнечной системы. Будем считать орбиты планет плоскими и круговыми.

Модель

Введем декартову систему координат, совместив начало с Солнцем (рис. 6.1).

Уравнения движения Урана и Нептуна с учетом взаимного притяжения будут иметь вид:

$$\begin{aligned} m_1 \mathbf{a}_1 &= -Gm_1 M \mathbf{r}_1 / r_1^3 + Gm_1 m_2 \mathbf{r}_{21} / r_{21}^3; \\ m_2 \mathbf{a}_2 &= -Gm_2 M \mathbf{r}_2 / r_2^3 - Gm_1 m_2 \mathbf{r}_{21} / r_{21}^3. \end{aligned} \quad (6.1)$$

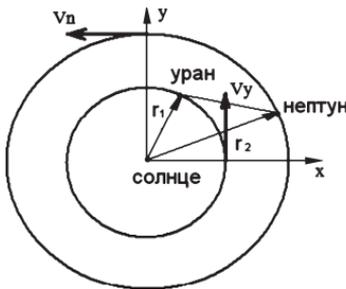


Рис. 6.1
Моделируемая часть
планетной системы

Здесь \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 — радиус-векторы Урана и Нептуна соответственно; $\mathbf{r}_{21} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$; m_1 , m_2 — массы Урана и Нептуна соответственно; M — масса Солнца.

Проектируя уравнения (6.1) на оси координат, получим систему четырех уравнений второго порядка:

$$\begin{aligned} a_{1x} &= -G \frac{Mx_1}{(x_1^2 + y_1^2)^{\frac{3}{2}}} + G \frac{m_2(x_2 - x_1)}{((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2)^{\frac{3}{2}}}; \\ a_{1y} &= -G \frac{My_1}{(x_1^2 + y_1^2)^{\frac{3}{2}}} + G \frac{m_2(y_2 - y_1)}{((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2)^{\frac{3}{2}}}; \\ a_{2x} &= -G \frac{Mx_2}{(x_2^2 + y_2^2)^{\frac{3}{2}}} - G \frac{m_1(y_2 - y_1)}{((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2)^{\frac{3}{2}}}; \\ a_{2y} &= -G \frac{My_2}{(x_2^2 + y_2^2)^{\frac{3}{2}}} - G \frac{m_1(x_2 - x_1)}{((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned} \quad (6.2)$$

По правилам, описанным в предыдущих моделях, можно составить листинг модели в пакете MathCAD. Он представлен в листинге 6.1. Начальные условия зададим в соответствии с рисунком 6.1.

$$G := 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 3600 \quad M := 2 \cdot 10^{30}$$

$$m_y := 8.7 \cdot 10^{25} \quad m_n := 10^{26}$$

$$R_y := 2.86 \cdot 10^{12} \quad R_n := 4.5 \cdot 10^{12}$$

$$y := \begin{pmatrix} R_y \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{G \frac{M}{R_y}} \\ 0 \\ -\sqrt{G \frac{M}{R_n}} \\ R_n \\ 0 \end{pmatrix} \quad 2 \cdot \pi \cdot \frac{R_y}{\sqrt{G \frac{M}{R_y}}} = 4.385 \cdot 10^7 \quad 4.385 \frac{10^7}{525600} = 83.428$$

$$D(t,y) := \begin{pmatrix} y_1 \\ -G \cdot M \cdot \frac{y_0}{[(y_0)^2 + (y_2)^2]^{\frac{3}{2}}} + G \cdot m_n \cdot \frac{(y_4 - y_0)}{[(y_4 - y_0)^2 + (y_6 - y_2)^2]^{\frac{3}{2}}} \\ y_3 \\ -G \cdot M \cdot \frac{y_2}{[(y_0)^2 + (y_2)^2]^{\frac{3}{2}}} + G \cdot m_n \cdot \frac{(y_6 - y_2)}{[(y_4 - y_0)^2 + (y_6 - y_2)^2]^{\frac{3}{2}}} \\ y_5 \\ -G \cdot M \cdot \frac{y_4}{[(y_4)^2 + (y_6)^2]^{\frac{3}{2}}} - G \cdot m_y \cdot \frac{(y_4 - y_0)}{[(y_4 - y_0)^2 + (y_6 - y_2)^2]^{\frac{3}{2}}} \\ y_7 \\ -G \cdot M \cdot \frac{y_6}{[(y_4)^2 + (y_6)^2]^{\frac{3}{2}}} - G \cdot m_y \cdot \frac{(y_6 - y_2)}{[(y_4 - y_0)^2 + (y_6 - y_2)^2]^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix}$$

$$D1(t,y) := \begin{bmatrix} y_1 \\ -G \cdot M \cdot \frac{y_0}{[(y_0)^2 + (y_2)^2]^{\frac{3}{2}}} \\ y_3 \\ -G \cdot M \cdot \frac{y_2}{[(y_0)^2 + (y_2)^2]^{\frac{3}{2}}} \\ y_5 \\ -G \cdot M \cdot \frac{y_4}{[(y_4)^2 + (y_6)^2]^{\frac{3}{2}}} \\ y_7 \\ -G \cdot M \cdot \frac{y_6}{[(y_4)^2 + (y_6)^2]^{\frac{3}{2}}} \end{bmatrix}$$

$z := \text{rkfixed}(y, 0, 10 \cdot 10^7, 3000, D)$ $z1 := \text{rkfixed}(y, 0, 10 \cdot 10^7, 3000, D1)$

Листинг 6.1

Листинг модели движения Урана и Нептуна

Здесь $D(t,y)$ и $D1(t,y)$ — вектор-функции, описывающие движения Урана и Нептуна соответственно; R_y, R_n — радиусы орбит; m_U, m_N — массы Урана и Нептуна соответственно.

Естественно ожидать, что возмущение орбиты Урана Нептуном будет весьма малым. Для того чтобы зафиксировать влияние Нептуна на орбитальное движение Урана, в листинг программы включены уравнения, описывающие движение планет без учета взаимодействия между ними $D1(t,y)$. На рисунке 6.2 представлены орбиты Урана и Нептуна. Этот рисунок не позволяет зафиксировать отличия в орбите Урана с учетом взаимодействия планет.

На рисунке 6.3 показан участок траектории Урана, выделенный на рисунке 6.2 слева прямоугольником, с учетом взаимодействия планет и без учета. Используя масштаб, можно оценить расстояние между траекториями. Оно составляет порядка миллиона километров.

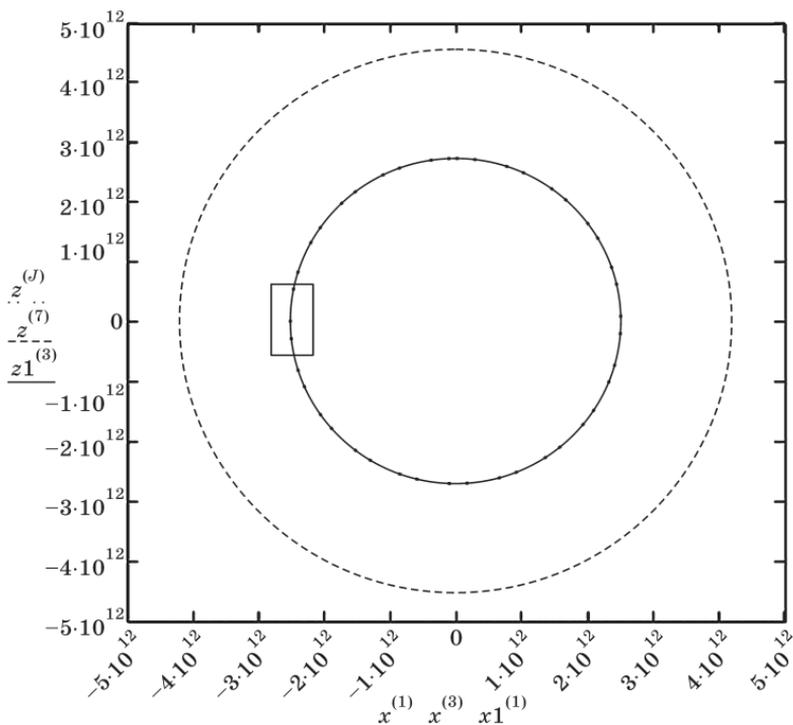


Рис. 6.2
Орбиты Урана и Нептуна

В качестве меры различия можно взять разность углов видимого положения планеты Уран относительно Солнца с учетом взаимодействия планет и без учета. Если обозначить через a угол положения Урана с учетом влияния Нептуна, через b угол положения его же но без учета влияния Нептуна, тогда

$$a_i := a \tan\left(\frac{z_{i,3}}{z_{i,1}}\right); \quad b_i := a \tan\left(\frac{z_{1,3}}{z_{1,1}}\right).$$

На рисунке 6.4 представлен график зависимости разности $\alpha = a - b$ от времени. Из графика следует, что когда Уран догоняет Нептун, разность α увеличивается за счет силы притяжения.

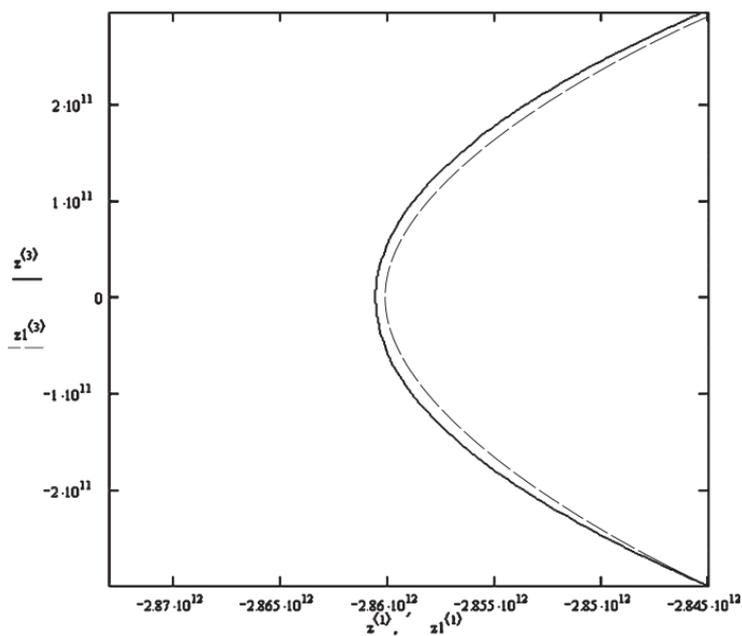


Рис. 6.3
Участок траектории Урана

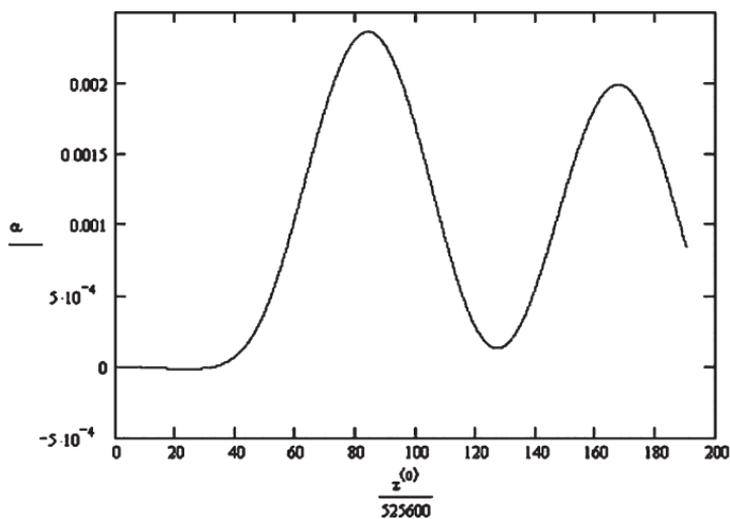


Рис. 6.4
График зависимости разности углов видимого положения планет

Разность достигает максимума при таком положении планет, когда они находятся на одном радиусе. В дальнейшем, когда Уран опережает Нептун, сила притяжения притормаживает Уран и разность начинает уменьшаться. Это циклически повторяется.

**Список заданий
для самостоятельной работы**

1. Построить модель и исследовать влияние Венеры на орбитальное движение Меркурия.
2. Определить возмущение орбиты Урана можно и по другим параметрам, например по расстоянию от Урана до Нептуна. Введите в листинг модели, необходимые для этого изменения, и постройте соответствующий график.

СТАБИЛИЗАЦИЯ ПЕРЕВЕРНУТОГО ДВОЙНОГО МАЯТНИКА

Работа посвящена обычно не рассматриваемому в школе и в курсах общей физики эффекту стабилизации вынужденных колебаний осцилляторов около неустойчивого положения равновесия. Возможность стабилизации колебаний одинарного математического маятника в неустойчивом положении исследуется в учебнике Л. Д. Ландау «Механика» [2].

В представляемой работе исследуется возможность стабилизации колебаний перевернутого двойного математического маятника методом компьютерного моделирования.

Модель

Двойной маятник состоит из двух материальных точек, соединенных между собой и с точкой опоры (подвеса) двумя невесомыми стержнями (рис. 7.1).

В начале приведем вывод уравнения колебаний двойного маятника. В качестве координат возьмем углы φ_1 и

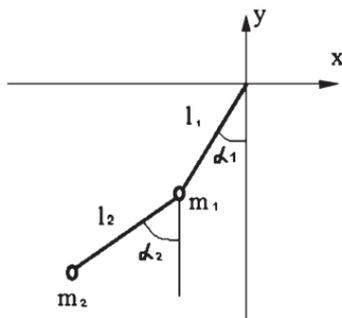


Рис. 7.1
Двойной маятник
возле положения
устойчивого равновесия

φ_2 , стержни которых l_1 и l_2 образуют с вертикалью. Тогда для кинетической и потенциальной энергий материальной точки 1 имеем:

$$T_1 = \frac{m_1(l_1\dot{\varphi}_1)^2}{2};$$

$$U_1 = -m_1gl_1 \cos\varphi_1.$$

Чтобы найти кинетическую энергию второй точки, выразим декартовы координаты x_2 , y_2 через углы φ_1 и φ_2 (начало координат поместим в точку опоры, ось ou направлена вверх, рис. 7.1):

$$x_2 = l_1 \sin\varphi_1 + l_2 \sin\varphi_2;$$

$$y_2 = l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2;$$

$$\dot{x}_2 = \dot{\varphi}_1 l_1 \cos\varphi_1 + \dot{\varphi}_2 l_2 \cos\varphi_2;$$

$$\dot{y}_2 = -\dot{\varphi}_1 l_1 \sin\varphi_1 - \dot{\varphi}_2 l_2 \sin\varphi_2.$$

Откуда кинетическая и потенциальная энергия второго тела:

$$T_2 = -\frac{m_2}{2}(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) = \frac{m_2}{2}(l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + 2l_1 l_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2);$$

$$U_2 = -m_2g(l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2).$$

Подставим найденные значения U и T в функцию Лагранжа:

$$L = T - U = \frac{m_1 + m_2}{2} l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + (m_1 + m_2) g l_1 \cos\varphi_1 + m_2 g l_2 \cos\varphi_2.$$

Для $m_1 = m_2 = m$ и $l_1 = l_2 = l$:

$$L = ml^2 \dot{\varphi}_2^2 + \frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}_2^2 + ml^2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + 2mgl_1 \cos\varphi_1 + mgl_2 \cos\varphi_2.$$

Зная функцию Лагранжа, составим уравнения движения:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} = \frac{\partial L}{\partial \varphi_1}; \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} = \frac{\partial L}{\partial \varphi_2}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2l\dot{\varphi}_1 + l\dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + l\dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + 2g \sin \varphi_1 = 0; \\ l\dot{\varphi}_2 + l\dot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - l\dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + g \sin \varphi_2 = 0. \end{cases}$$

Выразим $\ddot{\varphi}_1$ и $\ddot{\varphi}_2$

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}_1 = \frac{g \sin \varphi_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - l\dot{\varphi}_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - \\ - l\dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) - 2g \sin \varphi_1}{2l - l \cos^2(\varphi_1 - \varphi_2)}; \\ \ddot{\varphi}_2 = \frac{l\dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + 2g \sin \varphi_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \\ + 2l\dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) - 2g \sin \varphi_2}{2l - l \cos^2(\varphi_1 - \varphi_2)}. \end{cases} \quad (7.1)$$

Стабилизацию можно получить, если точку подвеса маятника (рис. 7.2) заставить колебаться в вертикальном направлении по закону:

$$y = A \sin \omega t.$$

Здесь A — амплитуда вынужденных колебаний; ω — частота колебаний.



Рис. 7.2
Колебание точки опоры в вертикальном направлении

Для того чтобы записать уравнение (7.1) с учетом колебаний точки подвеса, перейдем в неинерциальную систему отсчета, связанную с колеблющейся точкой подвеса. В неинерциальной системе на маятник, кроме силы тяжести, будет действовать дополнительная сила инерции

$$\mathbf{F} = -m\mathbf{a},$$

где \mathbf{a} — ускорение колебательного движения

$$a = \ddot{y} = -A\omega^2 \sin \omega t. \quad (7.2)$$

Поэтому для учета колебаний точки подвеса достаточно в уравнение (7.1) к g , отве-

чающему за силу тяжести, добавить (7.2), отвечающее за силу инерции.

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{\varphi}_1 = \frac{(\mathbf{g} - A\omega^2 \sin \omega t)(\sin \varphi_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - 2\sin \varphi_1) - l \sin(\varphi_1 - \dot{\varphi}_2)(\varphi_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - l\dot{\varphi}_2^2)}{2l - l \cos^2(\varphi_1 - \dot{\varphi}_2)}; \\ \ddot{\varphi}_2 = \frac{\sin(\varphi_1 - \varphi_2)(l\varphi_2^2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + 2l\dot{\varphi}_1^2) + 2(\mathbf{g} - A\omega^2 \sin \omega t)(\sin \varphi_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - \sin \varphi_2)}{2l - l \cos^2(\varphi_1 - \varphi_2)}. \end{array} \right. \quad (7.3)$$

Уравнение (7.3) является нелинейным дифференциальным уравнением второго порядка и описывает движение двойного линейного маятника с колеблющейся точкой подвеса. Это уравнение решается в MathCAD с помощью процедуры rkfixed:

i:=1 g:=10 v:=102 a:=0.01 $\omega:=2 \cdot \pi \cdot v$ G(t):=g-a $\cdot\omega^2\sin(\omega \cdot t)$

$$y := \begin{pmatrix} 3.24 \\ 0 \\ 3.04 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$D(t,y) := \begin{pmatrix} y_1 \\ (\sin(y_2) \cdot \cos(y_0 - y_2) \cdot G(t) - 1(y_1)^2 \sin(y_0 - y_2) \cdot \cos(y_0 - y_2) - 1(y_3)^2 \sin(y_0 - y_2) - G(t) \cdot \sin(y_0)) / 1[2 - (\cos(y_0 - y_2))^2] \\ y_3 \\ (1(y_3)^2 \cdot \cos(y_0 - y_2) \cdot \sin(y_0 - y_2) + 2G(t) \cdot \sin(y_0) \cdot \cos(y_0 - y_2) + 2 \cdot 1 \cdot (y_1)^2 \cdot \sin(y_0 - y_2) - 2G(t) \cdot \sin(y_2)) / 1[2 - (\cos(y_0 - y_2))^2] \end{pmatrix}$$

rkfixed (y, 0, 30, 300000, D)

Листинг 7.1

Листинг программы для двойного перевернутого маятника

Результаты

С помощью описанной выше модели были проведены исследования движения перевернутого двойного маятника. Исследования были проведены для маятников длиной $l_1 = l_2 = 1$ м, с амплитудой колебания точки подвеса $a = 0,01$ м. Был установлен факт стабилизации вынужденных колебаний. Это следует из рисунков 7.3 и 7.4. Начальные значения:

- рисунок 7.3 — $\varphi_1 = 3,24$; $\varphi_2 = 3,04$; $l = 1$ м; $\nu = 102$ Гц;
- рисунок 7.4 — $\varphi_1 = 3,04$; $\varphi_2 = 3,04$; $l = 1$ м; $\nu = 102$ Гц.

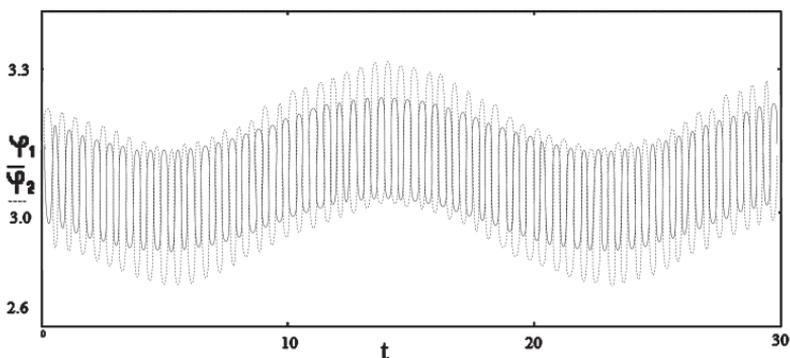


Рис. 7.3

Колебания перевернутого маятника стабилизированы около неустойчивого положения равновесия $\varphi = \pi$

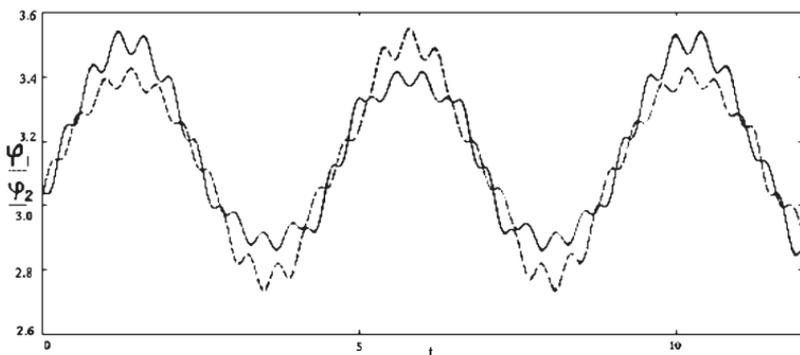


Рис. 7.4

Колебания перевернутого маятника стабилизированы около неустойчивого положения равновесия $\varphi = \pi$

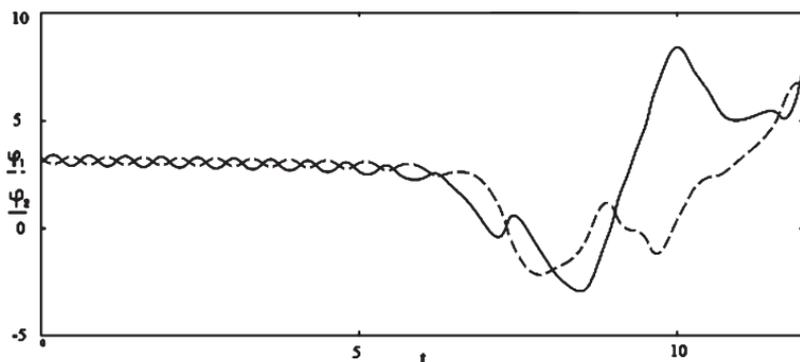


Рис. 7.5

«Сваливание» маятника из положения неустойчивого равновесия:

Начальные значения — $\varphi_1 = 3,04$; $\varphi_2 = 3,24$; $l_1 = l_2 = 1$ м; $\nu = 100$ Гц

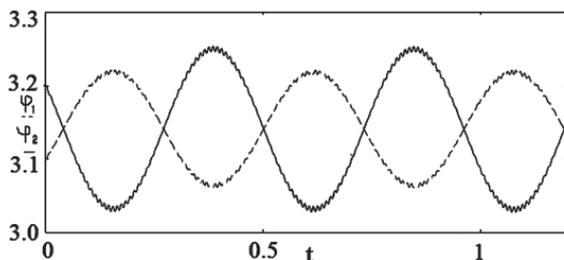


Рис. 7.6

Тонкая структура колебаний перевернутого двойного маятника

Существует пороговая частота $\nu_{п}$, выше которой колебания стабилизируются в перевернутом положении. Если частота колебаний точки подвеса ниже пороговой, то маятник переходит в сложное вращательно-колебательное движение (рис. 7.5).

Если увеличить изображение на графике, представленном на рисунке 7.3, то можно обнаружить что установившееся колебания содержат три гармоники. На рисунке 7.6 представлены колебания маятника на временном интервале $t = 0,0-1,2$ с.

Расчеты показали, что период этих колебаний соответствует частоте 102 Гц, это частота колебаний точки опоры. Вторая гармоника (колебания с частотой порядка

2 Гц) колебания маятников около положения неустойчивого равновесия. На рисунке 7.3 можно наблюдать колебания с третьей гармоникой, частота которых равна 0,05 Гц. Эта частота установившихся вынужденных колебаний центра тяжести стабилизированного маятника при данных начальных условиях.

Отметим еще одно обстоятельство. Сравним пороговые частоты одинарного и двойного маятника, имеющего суммарную длину такую же, как у одинарного. Пороговая частота одинарного маятника длиной 2 м $\nu_{\text{п}} = 114$ Гц, что превышает значение 102 Гц, полученное выше для двойного.

Список заданий для самостоятельной работы

1. Исследуйте зависимость пороговой частоты стабилизации двойного маятника от величины начального отклонения.
2. Постройте модель двойного перевернутого линейного маятника.

ПОЛЯРНОЕ СИЯНИЕ

Полярные сияния возникают вследствие бомбардировки верхних слоев атмосферы заряженными частицами, движущимися к Земле вдоль силовых линий геомагнитного поля из области околоземного космического пространства. В очень ограниченном участке верхней атмосферы сияния могут быть вызваны низкоэнергичными заряженными частицами солнечного ветра, попадающими в полярную ионосферу. При столкновении энергичных частиц плазменного слоя с верхней атмосферой происходит возбуж-

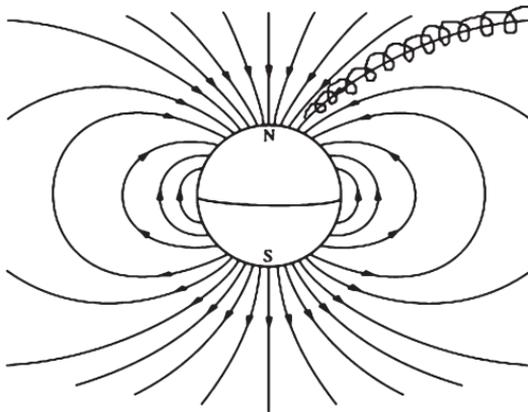


Рис. 8.1
Возникновение полярного сияния

дение атомов и молекул газов, входящих в ее состав. Излучение возбужденных атомов в видимом диапазоне и наблюдается как полярное сияние.

Возникновение полярного сияния можно пояснить — заряженная частица, двигаясь по спирали вдоль силовой линии, «врезается» в атмосферу, вызывая свечение молекул (рис. 8.1).

Спиральный характер движения заряженных частиц в магнитном поле описывается во всех учебниках физики в разделе электромагнетизм.

Модель

В этой работе построим модель движения заряженной частицы солнечного ветра в магнитном поле Земли. На заряженную частицу в магнитном поле действует сила Лоренца

$$\mathbf{F} = q\mathbf{V} \cdot \mathbf{B}.$$

Здесь q — величина заряда; \mathbf{V} — скорость заряженной частицы солнечного ветра; \mathbf{B} — индукция магнитного поля Земли.

Поэтому уравнение движения частицы солнечного ветра вблизи Земли будет иметь вид

$$m\mathbf{a} = q\mathbf{V} \cdot \mathbf{B}. \quad (8.1)$$

Проектируя это векторное уравнение на координатные оси, получим систему трех дифференциальных уравнений второго порядка. Ось z направим вдоль земной оси, оси x и y расположим в плоскости экватора.

$$a_x = q/m(V_y B_z - V_z B_y);$$

$$a_y = q/m(V_z B_x - V_x B_z);$$

$$a_z = q/m(V_x B_y - V_y B_x).$$

С заменой, понижающей порядок, эта система преобразуется в систему шести дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned}
 x &= y_0; \\
 dx/dt &= y_1; \\
 y &= y_2; \\
 dy/dt &= y_3; \\
 z &= y_4; \\
 dz/dt &= y_5,
 \end{aligned}$$

поэтому

$$\begin{aligned}
 dy_0/dt &= y_1; \\
 dy_1/dt &= q/m(y_1B_z - y_5B_y); \\
 dy_2/dt &= y_3; \\
 dy_3/dt &= q/m(y_5B_x - y_1B_z); \\
 dy_4/dt &= y_5; \\
 dy_5/dt &= q/m(y_1B_y - y_3B_x).
 \end{aligned} \tag{8.2}$$

Для магнитного поля Земли B используем формулу поля магнитного диполя. Ее можно найти в разделе «Электромагнетизм» учебников физики.

В принятых нами обозначениях эти формулы имеют вид

$$\begin{aligned}
 B_x &= 3py_0y_4/r^5; \\
 B_y &= 3py_2y_4/r^5; \\
 B_z &= p(2y_4^2 - y_0^2 - y_2^2)/r^5.
 \end{aligned} \tag{8.3}$$

Здесь p — дипольный магнитный момент,

$$r = (y_0^2 + y_2^2 + y_4^2)^{5/2}.$$

Величину p следует поискать в справочной литературе. Например в Википедии в статье «Магнитное поле Земли» приводится значение магнитного момента Земли $\mu = 7,8 \cdot 10^{22} \text{ Ам}^2$, что для $p = \mu/4\pi\mu_0$ дает $p = 6,2$.

Для работы модели требуется задать начальные условия. Список начальных условий для этой модели состоит из трех начальных координат и трех значений проекций

начальной скорости. Этот список в MathCAD выглядит следующим образом

$$x := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \cdot 10^7 \\ -V_0 \\ 2 \cdot 10^7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Листинг 8.1

Начальные условия движения заряженной частицы
в магнитном поле Земли

Здесь принято, что частица в начальный момент находится в плоскости yz ($x = 0$) и имеет начальную скорость, направленную в сторону против оси y .

Начальные значения примем такие, что без взаимодействия с магнитным полем Земли частица пролетела бы мимо. А для величины скорости примем типичное значение скорости частиц солнечного ветра $v = 5 \cdot 10^5$ м/с.

С учетом вышесказанного листинг модели в MathCAD будет иметь вид

$$\begin{aligned} q &:= 1.6 \cdot 10^{-19} & p &:= 5 \cdot 10^{15} \\ M &:= 1.7 \cdot 10^{-27} & V_0 &:= 5 \cdot 10^5 \\ N &:= 80000 & R_z &:= 6.4 \cdot 10^6 \end{aligned}$$

$$x := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \cdot 10^7 \\ -V_0 \\ 2 \cdot 10^7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$D(t,x) := \begin{array}{c} x_1 \\ \frac{q}{M} \\ x_3 \\ \frac{q}{M} \\ x_3 \\ \frac{q}{M} \\ x_5 \\ \frac{q}{M} \\ x_5 \end{array} \left[\begin{array}{c} p \cdot \left[3 \cdot (x_4)^2 - \left[\left[(x_0)^2 + (x_2)^2 + (x_4)^2 \right]^{0.5} \right]^2 \right] \\ \left[\left[(x_0)^2 + (x_2)^2 + (x_4)^2 \right]^{0.5} \right]^5 \\ (3 \cdot p \cdot x_2 \cdot x_4) \\ \left[\left[(x_0)^2 + (x_2)^2 + (x_4)^2 \right]^{0.5} \right]^5 \\ x_5 \cdot \frac{(3 \cdot p \cdot x_0 \cdot x_4)}{\left[\left[(x_0)^2 + (x_2)^2 + (x_4)^2 \right]^{0.5} \right]^5} \\ p \cdot \left[3 \cdot (x_4)^2 - \left[\left[(x_0)^2 + (x_2)^2 + (x_4)^2 \right]^{0.5} \right]^2 \right] \\ \left[\left[(x_0)^2 + (x_2)^2 + (x_4)^2 \right]^{0.5} \right]^5 \\ x_1 \cdot \frac{(3 \cdot p \cdot x_2 \cdot x_4)}{\left[\left[(x_0)^2 + (x_2)^2 + (x_4)^2 \right]^{0.5} \right]^5} \\ -x_3 \cdot \frac{(3 \cdot p \cdot x_0 \cdot x_4)}{\left[\left[(x_0)^2 + (x_2)^2 + (x_4)^2 \right]^{0.5} \right]^5} \end{array} \right]$$

$$y := -6.4 \cdot 10^6, -6.3 \cdot 10^6 \dots 6.4 \cdot 10^6$$

$$z := \text{rkfixed}(x, 0, 61, N, D) \quad f2(y) := -\sqrt{Rz^2 - y^2}$$

$$f1(y) := \sqrt{Rz^2 - y^2}$$

$$p = 5 \cdot 10^{15}$$

Листинг 8.2

Листинг модели движения частицы
в магнитном поле Земли

Функции f1 и f2 задают поверхность Земли.

Результаты

Построенная модель требует значительных ресурсов компьютера. Дело в том, что движение частицы будет иметь спиральный характер. А в моделях с периодичностью временной шаг, как показывает опыт, должен быть таким, чтобы на периоде помещалось как минимум десять шагов. Поэтому для расчета необходимого цикла движения в данной модели требуется как минимум $N = 300\,000$ шагов.

На рисунке 8.2 показано, как частица солнечного ветра, двигаясь вдоль силовой линии магнитного поля, попадает в полярную область. Хотя прицельное расстояние частицы в три раза больше радиуса Земли, частица, двигаясь вдоль силовой линии, попадает в атмосферу Земли. Начальная скорость частицы в этом опыте направлена по направлению силовой линии в данной точке пространства. Поэтому радиус спиральной траектории невелик и не разрешается даже при увеличении.

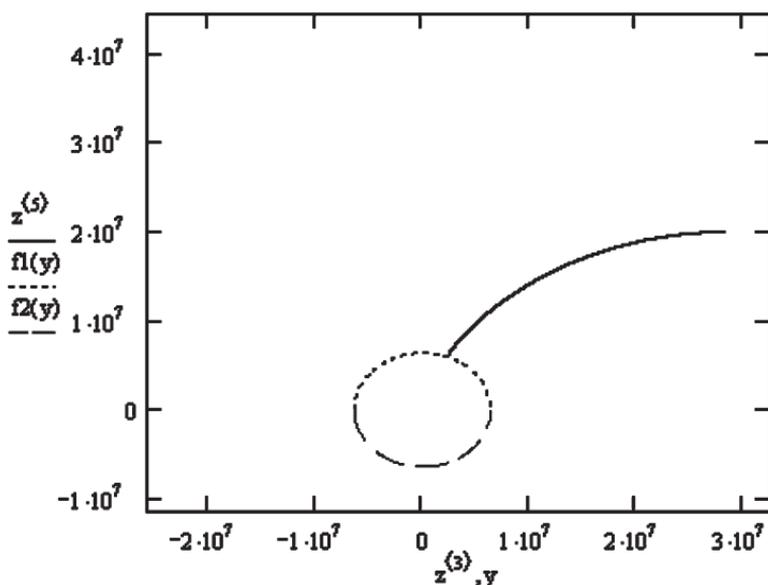


Рис. 8.2

Траектория движения частицы солнечного ветра в координатах yz

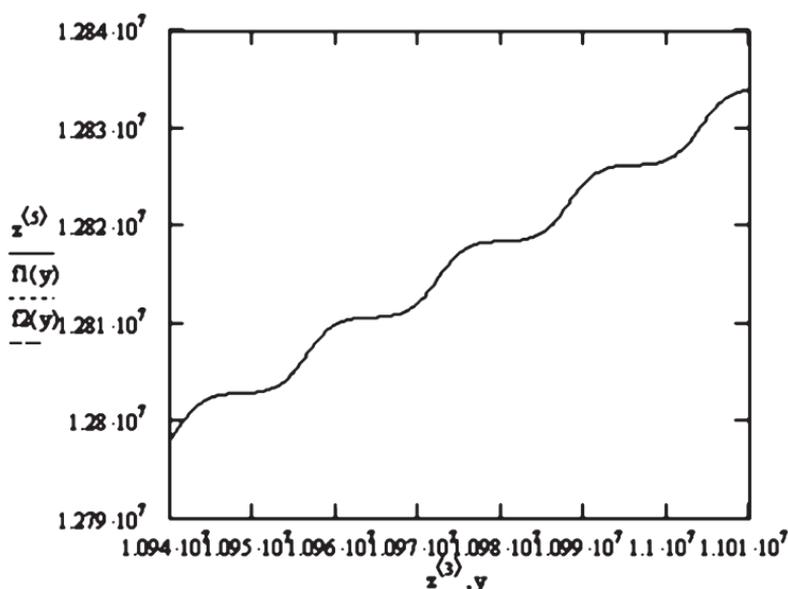


Рис. 8.3

Увеличенный участок траектории в проекции на плоскость xz

В спиральной форме траектории частицы можно убедиться, если начальную скорость частицы направить под углом к силовой линии поля и сделать увеличение участка траектории. Увеличение можно сделать соответствующей кнопкой в панели «Граф». Увеличенное изображение траектории представлено на рисунке 8.3. Если увеличить траекторию на ее разных участках, то можно проследить трансформацию винтовой спирали, как меняется шаг спирали и ее радиус.

При некоторых начальных условиях происходит «отражение» частицы в местах сгущения силовых линий, направление движения в этих местах меняется на противоположное. На рисунке 8.4 увеличен участок траектории с прямым и обратным движением частицы.

Явлением «отражения» объясняется еще одно геомагнитное явление — образование радиационных поясов. Заряженные частицы солнечного ветра совершают спиральное движение между полюсами, отражаясь от участков

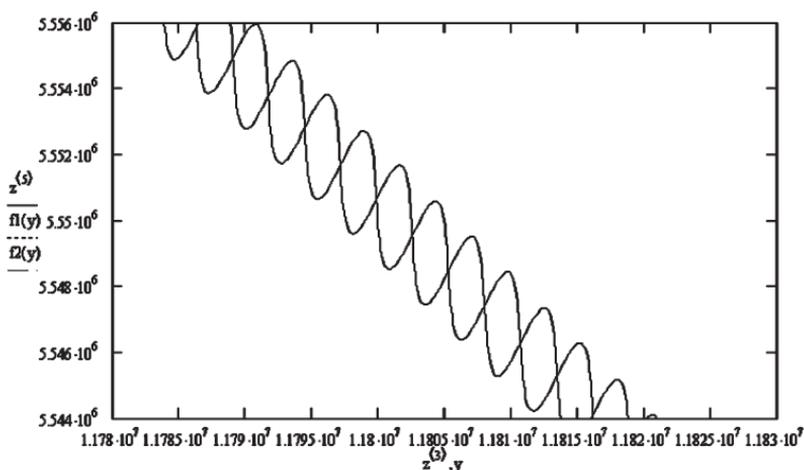


Рис. 8.4

Прямой и обратный ходы частицы вдоль силовой линии

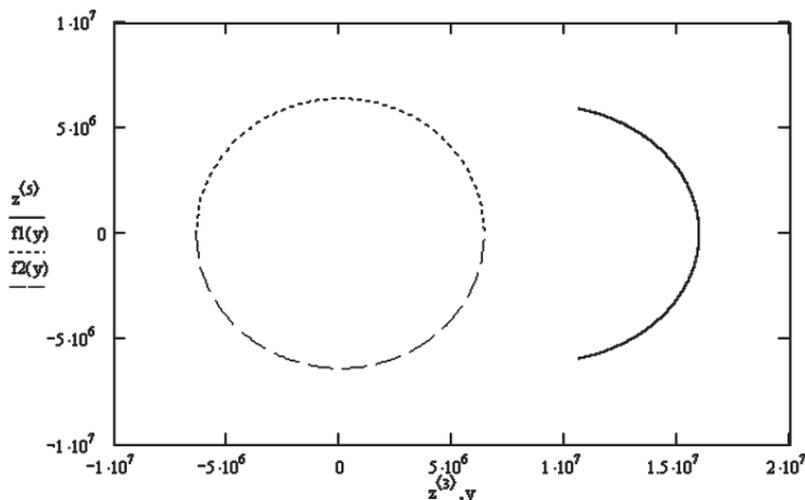


Рис. 8.5

Образование радиационного пояса

сгущения силовых линий вблизи полюсов. Траектория такого движения представлена на рисунке 8.5.

Прямой и обратный ходы совпадают вследствие недостаточного разрешения.

Быстрые заряженные частицы из космоса (главным образом от Солнца) «захватываются» магнитным полем Земли и образуют так называемые радиационные пояса (рис. 8.5). В этих поясах частицы, как в магнитных ловушках, перемещаются туда и обратно по спиралеобразным траекториям между северным и южным магнитными полюсами за времена порядка долей секунды. Лишь в полярных областях некоторая часть частиц вторгается в верхние слои атмосферы, вызывая полярные сияния. Радиационные пояса Земли простираются от расстояний порядка 500 км до десятков земных радиусов.

**Список заданий
для самостоятельной работы**

1. Найдите прицельное расстояние «захвата» частиц солнечного ветра магнитным полем Земли.

МАГНИТНАЯ «БУТЫЛКА»

Если скорость частицы v имеет составляющую v_{\parallel} вдоль направления магнитного поля, то такая частица будет двигаться в однородном магнитном поле по спирали. При этом радиус спирали R зависит от модуля перпендикулярной магнитному полю составляющей v_{\perp} вектора скорости, а шаг спирали p_c — от модуля продольной составляющей (рис. 9.1).

Таким образом, траектория заряженной частицы как бы навивается на линии магнитной индукции. Это явление используется в технике для магнитной термоизоляции высокотемпературной плазмы, т. е. полностью ионизированного газа при температуре порядка 10^6 К. Вещество в таком состоянии получают в установках типа «Токамак» при изучении управляемых термоядерных реакций. Плазма не

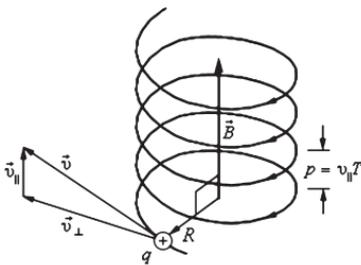


Рис. 9.1
Движение заряженной частицы в магнитном поле

должна соприкасаться со стенками камеры. Термоизоляция достигается путем создания магнитного поля специальной конфигурации. В качестве примера на рисунке 9.2 изображена траектория движения заряженной частицы в магнитной «бутылке» (или ловушке). Заряженные частицы не выходят за пределы «бутылки».

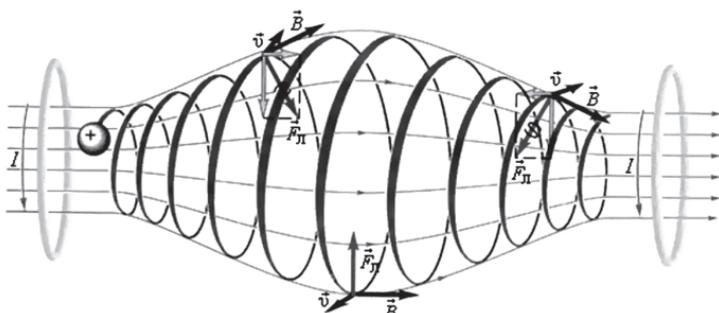


Рис. 9.2
Магнитная «бутылка»

Модель

Поле нужной для магнитной ловушки конфигурации можно получить с помощью двух катушек с током (рис. 9.2). В пространстве между катушками и возникнет поле нужной конфигурации. Поле отдельной катушки опять будем вычислять по формулам (8.3). Пусть оси катушек совпадают и направлены по z . Расстояние между центрами катушек обозначим $2B$. Тогда магнитное поле, создаваемое двумя катушками, будет вычисляться по формулам

$$B_x = 3py_0(y_4 + B)/r^5 + 3py_0(y_4 - B)/r^5$$

$$B_y = 3py_2(y_4 + B)/r^5 + 3py_2(y_4 - B)/r^5 \quad (9.1)$$

$$B_z = p(2(y_4 + B)^2 - y_0^2 - y_2^2)/r^5 + p(2(y_4 - B)^2 - y_0^2 - y_2^2)/r^5.$$

Здесь p — дипольный магнитный момент катушки; $r = ((y_0 + B)^2 + y_2^2 + y_4^2)^{5/2}$.

Знак «+» перед B в слагаемых формул (9.1) соответствует вкладу в полное поле одной катушки, а знак «-» вкладу другой. MathCAD позволяет изобразить магнитное поле двух катушек с током. В MathCAD нет инструмента для построения силовых линий поля, но есть инструмент, который может заменить его. На панели «Граф» есть кнопка, при нажатии которой изображаются вектора в узлах заданной сетки. Ниже приведен листинг документа, который надо создать для этого.

```

p:=6·1015  R0:=4  B:=40
x2:=-6.4,6.3...6.4  x4:=-6.4,6.3...6.4
By2(x2,x4):=  $\frac{[3 \cdot p \cdot x2 \cdot (x4 - B)]}{[[x2]^2 + (x4 - B)^2]^{0.5}^5}$ 
Bz2(x2,x4):=  $\frac{p \cdot [3 \cdot (x4 - B)^2 - [[x2]^2 + (x4 - B)^2]^{0.5}]^2}{[[x2]^2 + (x4 - B)^2]^{0.5}^5}$ 
By1(x2,x4):=  $\frac{[3 \cdot p \cdot x2 \cdot (x4 + B)]}{[[x2]^2 + (x4 + B)^2]^{0.5}^5}$ 
Bz1(x2,x4):=  $\frac{p \cdot [3 \cdot (x4 + B)^2 - [[x2]^2 + (x4 + B)^2]^{0.5}]^2}{[[x2]^2 + (x4 + B)^2]^{0.5}^5}$ 
By(x2,x4):=By1(x2,x4)+By2(x2,x4)
Bz(x2,x4):=Bz1(x2,x4)+Bz2(x2,x4)
N1:=14  ymin:=-10·R0  ymax:=10·R0
zmin:=-10·R0  zmax:=10·R0
i:=0...N1  j:=0...N1
x2i:=ymin+ $\frac{(ymax-ymin) \cdot i}{N1}$   x4j:=zmin+(zmax-zmin)· $\frac{j}{N1}$ 
Bi,j:=By(x2i,x4j)+i·Bz(x2i,x4j)  Mi,j:= $\frac{B_{i,j}}{|B_{i,j}|}$ 

```

Листинг 9.1

Листинг программы,
реализующей построение поля магнитной «бутылки»

На рисунке 9.3 представлено поле, построенное данной программой. В узлах квадратной сетки с координатами x_2 и x_4 изображены единичные вектора $M_{i,j}$, направленные по направлению поля в соответствующих точках плоскости. Данный рисунок дает полное представление о поле, поскольку оно симметрично относительно оси катушек и оси z .

При составлении листинга программы расчета движения заряженной частицы в магнитной «бутылке» используем уравнения (8.2), подставив в них вместо формул маг-

нитного поля Земли (8.3) формулы магнитного поля магнитной «бутылки» (9.1). В первом опыте пустим частицу из начала координат $x = 0, y = 0, z = 0$. Начальную скорость направим в плоскости yz под небольшим углом наклона к оси z . Эта модель, как и предыдущая, является весьма емкой по ресурсам.

Дело в том, что движение частицы будет иметь спиральный характер. А в моделях с периодичностью временной шаг, как показывает опыт, должен быть таким, чтобы на периоде помещалось как минимум десять шагов. Поэтому для расчета необходимого цикла движения в данной модели требуется как минимум $N = 300\,000$ шагов. Процедура `rkfixed`, примененная к данной модели, справляется при $N < 10^6$. И не забывайте проверить результаты на достоверность. Необходимый признак сходимости состоит в том, что результат не должен зависеть от количества шагов вычислительной процедуры N . Ниже приведен листинг программы движения протона в поле магнитной «бутылки», расстояние между центрами катушек — 8 м.

На рисунке 9.4 изображен цикл движения частицы. Частица вылетела из начала координат и двигается по спирали с уменьшающимся радиусом к верхней катушке по линии поля. Радиус спирали уменьшается, поскольку поле увеличивается при приближении к верхней катушке. Шаг спирали уменьшается, так как сила Лоренца, действующая на заряд, имеет в месте сгущения силовых линий вертикальную составляющую, направленную вниз.

В некоторой точке частица разворачивается и начинает движение в обратном направлении. Происходит как бы отражение частицы. Затем при обратном движении частица проходит середину расстояния между катушками и,

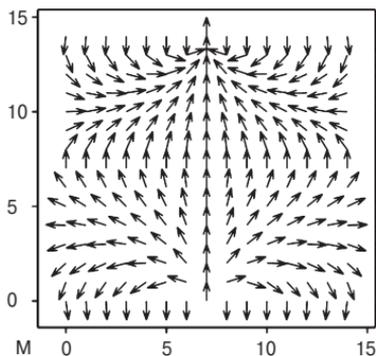


Рис. 9.3
Магнитное поле
двух катушек с током

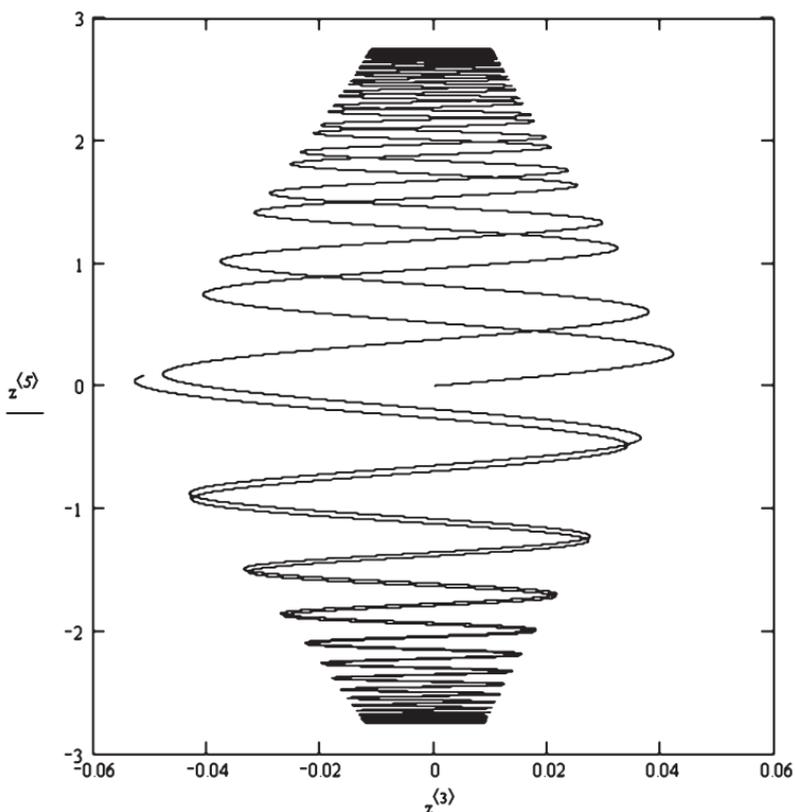


Рис. 9.4

Заряженная частица совершает полный цикл движения
в магнитной «бутылке»

$$p := 0.01 \quad V_0 := 10^5 \quad M := 1.7 \cdot 10^{-27}$$

$$q := 1.6 \cdot 10^{-19} \quad N := 300000 \quad B := 4$$

$$x := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.25 \cdot V_0 \\ 0 \\ V_0 \end{pmatrix}$$

$$D(t, x) := \begin{array}{c} x_1 \\ \frac{q}{M} \cdot \left[\begin{array}{c} x_3 \left[\frac{p \cdot [2(x_4 + B)^2 - (x_0)^2 - (x_2)^2]}{[[(x_0)^2 + (x_2)^2 + (x_4 + B)^2]^{0.5}]^5} + \right. \\ \left. + \frac{p[2(x_4 - B)^2 - (x_0)^2 - (x_2)^2]}{[[(x_0)^2 + (x_2)^2 + (x_4 - B)^2]^{0.5}]^5} \right] \\ - x_5 \left[\frac{[3 \cdot p \cdot x_2 \cdot (x_4 + B)]}{[[(x_0)^2 + (x_2)^2 + (x_4 + B)^2]^{0.5}]^5} + \right. \\ \left. + \frac{[3 \cdot p \cdot x_2 \cdot (x_4 - B)]}{[[(x_0)^2 + (x_2)^2 + (x_4 + B)^2]^{0.5}]^5} \right] \end{array} \right] \\ x_3 \\ \frac{q}{M} \cdot \left[\begin{array}{c} x_5 \left[\frac{[3 \cdot p \cdot x_0 \cdot (x_4 + B)]}{[[(x_0)^2 + (x_2)^2 + (x_4 + B)^2]^{0.5}]^5} + \right. \\ \left. + \frac{[3 \cdot p \cdot x_0 \cdot (x_4 - B)]}{[[(x_0)^2 + (x_2)^2 + (x_4 - B)^2]^{0.5}]^5} \right] \\ - x_1 \left[\frac{p \cdot [2(x_4 + B)^2 - (x_0)^2 - (x_2)^2]}{[[(x_0)^2 + (x_2)^2 + (x_4 + B)^2]^{0.5}]^5} + \right. \\ \left. + \frac{p[2(x_4 - B)^2 - (x_0)^2 - (x_2)^2]}{[[(x_0)^2 + (x_2)^2 + (x_4 - B)^2]^{0.5}]^5} \right] \end{array} \right] \\ x_5 \\ \frac{q}{M} \cdot \left[\begin{array}{c} x_1 \left[\frac{[3 \cdot p \cdot x_2 \cdot (x_4 + B)]}{[[(x_0)^2 + (x_2)^2 + (x_4 + B)^2]^{0.5}]^5} + \right. \\ \left. + \frac{[3 \cdot p \cdot x_2 \cdot (x_4 - B)]}{[[(x_0)^2 + (x_2)^2 + (x_4 - B)^2]^{0.5}]^5} \right] \\ - x_3 \left[\frac{[3 \cdot p \cdot x_0 \cdot (x_4 + B)]}{[[(x_0)^2 + (x_2)^2 + (x_4 + B)^2]^{0.5}]^5} + \right. \\ \left. + \frac{[3 \cdot p \cdot x_0 \cdot (x_4 - B)]}{[[(x_0)^2 + (x_2)^2 + (x_4 - B)^2]^{0.5}]^5} \right] \end{array} \right] \end{array}$$

$z := \text{rkfixed}[x, 0, (1.35 \cdot 10^{-4}), N, D]$

Листинг 9.2

Листинг программы движения протона
в поле магнитной «бутылки»

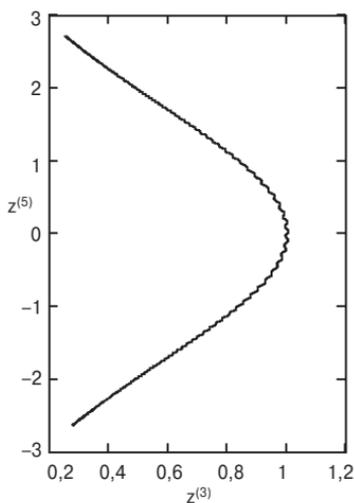


Рис. 9.5
Циклическое движение
частицы при других
начальных условиях

двигаясь к нижней катушке, отражается и от нее. Поэтому иногда говорят о зеркалах магнитной «бутылки». В конце цикла частица возвращается в плоскость $z = 0$. Такое движение циклически повторяется и при других начальных условиях.

На рисунке 9.5 изображено движение частицы при других начальных условиях. Стартовое значение начальной координаты y равно 1 м. Можно убедиться, что при любых начальных условиях, откуда бы ни стартовала частица и какую бы скорость по величине и направлению она ни имела,

характер ее движения не меняется. Частица движется по спирали от одного магнитного зеркала к другому.

Движение частиц в магнитной «бутылке» подобно движению частиц в магнитосфере Земли. И там тоже может происходить отражение от областей сгущения магнитного поля у полюсов (рис. 8.5).

Список заданий для самостоятельной работы

1. Найдите максимальную скорость протонов, удерживаемых в магнитной «бутылке».

ПОЛЕТ НА МАРС

Полет на Марс сейчас стал актуальной проблемой космонавтики. В данной работе мы построим модель одного из возможных вариантов такого перелета. При этом сделаем ряд допущений, упрощающих задачу. Будем считать, что орбиты планет плоские. Взаимодействие космического аппарата с другими планетами Солнечной системы и с Луной учитывать не будем.

Введем в модель также учет влияния солнечного паруса на движение космического аппарата. Предположим, что космический аппарат (КА) совершает перелет с одной планеты Солнечной системы на другую, например с Земли на Марс (рис. 10.1).

При анализе подобных задач традиционно используют некоторые предположения. Будем считать, что если заданный переход с орбиты на орбиту осуществляется при минимальном приращении энергии, то он соответствует переходу, требующему минимального расхода горючего. Кроме того, изменение состояния происходит в результате мгновенного приложения силы тяги. Фактически, конечно, ввиду инерции любой физической системы состояние ее движения невозможно изменить мгновенно. Всегда при маневре космический аппарат подвергается действию тяги в течение некоторого конечного интервала времени. Но в сравнении с общим временем полета время действия силы тяги обычно очень мало.

Пусть переход осуществляется с исходной круговой орбиты на конечную круговую орбиту, лежащую в той же плоскости. В некоторой точке A на исходной орбите к КА прилагают импульс, направленный по касательной к орбите и по ходу движения станции. Приобретаемая дополнительная скорость увеличивает энергию движения, и оно происходит далее по эллипсу. Станция движется так до точки B , совпадающей с афелием промежуточного эллипса, где КА сообщают другой импульс. Энергия движения опять увеличивается, и КА движется далее по круговой траектории конечной орбиты. Такая траектория касается обеих орбит и носит название гомановской по имени немецкого астронома Гомана (*W. Hohman*) (рис. 10.1), изучавшего в начале прошлого века проблему межпланетных перелетов. Если бы мы хотели перевести станцию с орбиты большего радиуса на орбиту меньшего радиуса, то ее следовало бы дважды притормаживать, т. е. направления импульсов должны быть противоположными направлению движения.

Выполним более детальный анализ траектории перелета к Марсу и обсудим возможности превращения КА в спутник Марса.

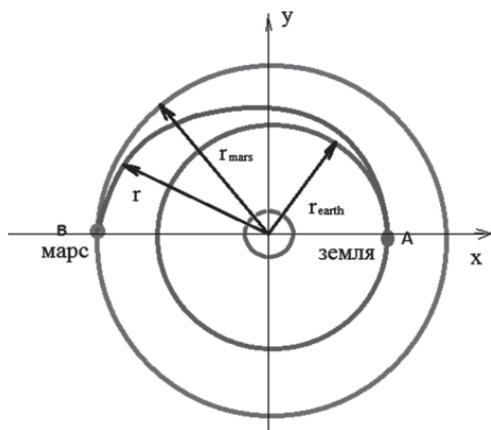


Рис. 10.1

Схема расположения планет с гомановской траекторией полета

Задачу полета КА с орбиты Земли на орбиту Марса в системе трех тел (Солнце, Земля, Марс), можно разбить на три основных фазы:

1. Движение и старт КА в сфере влияния Земли.
 2. Движение КА в сфере влияния Солнца.
 3. Движение и торможение КА в сфере влияния Марса.
- Рассмотрим подробнее все фазы полета.

1. Полет в сфере действия Земли

Рассмотрим начальный участок перелета в пределах действия поля тяготения Земли. Будем считать, что сначала КА движется на геоцентрической орбите под действием притяжения одной только Земли. Движение КА в системе отсчета Земли можно описать, воспользовавшись вторым законом Ньютона:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}_{\text{earth}},$$

где $\mathbf{F}_{\text{earth}}$ — сила притяжения Земли.

По закону тяготения Ньютона:

$$\mathbf{F}_{\text{earth}} = -G \frac{mM_{\text{earth}}}{r_{\text{earth}}^3} \mathbf{r}_{\text{earth}},$$

где G — гравитационная постоянная; M_{earth} — масса Земли; m — масса КА; $\mathbf{r}_{\text{earth}}$ — радиус-вектор КА в системе отсчета, связанной с Землей.

Следовательно,

$$m\mathbf{a} = -G \frac{mM_{\text{earth}}}{r_{\text{earth}}^3} \mathbf{r}_{\text{earth}}.$$

В декартовой гелиоцентрической системе координат это уравнение запишется так:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} x &= G \frac{M_{\text{earth}} (x_{\text{earth}} - x)}{(\sqrt{(x - x_{\text{earth}})^2 + (y - y_{\text{earth}})^2})^3}; \\ \frac{d^2}{dt^2} y &= G \frac{M_{\text{earth}} (y_{\text{earth}} - y)}{(\sqrt{(x - x_{\text{earth}})^2 + (y - y_{\text{earth}})^2})^3}. \end{aligned} \quad (10.1)$$

Здесь x и y координаты КА в гелиоцентрической системе.

2. Перелет после старта с геостационарной орбиты

В этой фазе полета на КА будут действовать силы — это притяжение Солнца, Земли, Марса и сила солнечного давления на парус. Движение КА в системе трех тел можно описать, воспользовавшись вторым законом Ньютона, как и в первом случае:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}_{\text{sun}} + \mathbf{F}_{\text{earth}} + \mathbf{F}_{\text{mars}}, \quad (10.2)$$

где \mathbf{F}_{sun} — сила притяжения к Солнцу; $\mathbf{F}_{\text{earth}}$ — сила притяжения к Земле; \mathbf{F}_{mars} — сила притяжения к Марсу.

По закону тяготения Ньютона:

$$\mathbf{F}_{\text{sun}} = -G \frac{mM_{\text{sun}}}{r_{\text{sun}}^3} \mathbf{r}_{\text{sun}};$$

$$\mathbf{F}_{\text{earth}} = -G \frac{mM_{\text{earth}}}{r_{\text{earth}}^3} \mathbf{r}_{\text{earth}};$$

$$\mathbf{F}_{\text{mars}} = -G \frac{mM_{\text{mars}}}{r_{\text{mars}}^3} \mathbf{r}_{\text{mars}},$$

где G — гравитационная постоянная; M_{sun} , M_{earth} , M_{mars} — массы Солнца и планет; m — масса КА; \mathbf{r}_{sun} , $\mathbf{r}_{\text{earth}}$, \mathbf{r}_{mars} — радиус-векторы КА в системе отсчета Солнца и планет соответственно.

Следовательно,

$$m\mathbf{a} = -G \frac{mM_{\text{sun}}}{r_{\text{sun}}^3} \mathbf{r}_{\text{sun}} - G \frac{mM_{\text{earth}}}{r_{\text{earth}}^3} \mathbf{r}_{\text{earth}} - G \frac{mM_{\text{mars}}}{r_{\text{mars}}^3} \mathbf{r}_{\text{mars}}.$$

В декартовой гелиоцентрической системе координат это уравнение запишется так:

$$\frac{d^2}{dt^2} x = -G \frac{M_{\text{sun}} x}{(\sqrt{(x^2 + y^2)})^3} + G \frac{M_{\text{earth}} (x_{\text{earth}} - x)}{(\sqrt{(x - x_{\text{earth}})^2 + (y - y_{\text{earth}})^2})^3} + G \frac{M_{\text{mars}} (x_{\text{mars}} - x)}{(\sqrt{(x - x_{\text{mars}})^2 + (y - y_{\text{mars}})^2})^3};$$

$$\frac{d^2}{dt^2}y = -G \frac{M_{\text{sun}}y}{(\sqrt{x^2 + y^2})^3} + G \frac{M_{\text{earth}}(y_{\text{earth}} - y)}{(\sqrt{(x - x_{\text{earth}})^2 + (y - y_{\text{earth}})^2})^3} + G \frac{M_{\text{mars}}(y_{\text{mars}} - y)}{(\sqrt{(x - x_{\text{mars}})^2 + (y - y_{\text{mars}})^2})^3}. \quad (10.3)$$

Далее необходимо учесть солнечный парус. Для этого нужно в (10.2) добавить силу солнечного давления на парус \mathbf{F}_{sail} :

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}_{\text{sun}} + \mathbf{F}_{\text{earth}} + \mathbf{F}_{\text{mars}} + \mathbf{F}_{\text{sail}}. \quad (10.4)$$

Сила солнечного давления на парус КА равна:

$$\mathbf{F}_{\text{sail}} = pS,$$

где S — площадь паруса; p — солнечное давление.

Солнечное давление вычисляется по формуле

$$p = \frac{I}{v},$$

где I — количество лучистой энергии, попадающей на единицу площади паруса в единицу времени; v — скорость света.

Так как количество лучистой энергии уменьшается пропорционально квадрату расстояния, то ее можно записать в виде формулы

$$I = \left(\frac{R}{r}\right)^2 \sigma T^4,$$

где R — радиус Солнца; r — расстояние КА от Солнца; σ — постоянная Стефана — Больцмана; T — эффективная температура Солнца.

Следовательно,

$$\mathbf{F}_{\text{sail}} = \frac{\left(\frac{R}{r}\right)^2 \sigma T^4 S}{v}.$$

В конечном виде уравнение (10.4) с использованием солнечного паруса выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} m\mathbf{a} = & -mG \frac{M_{\text{sun}}}{r^3} \mathbf{r} + mG \frac{M_{\text{earth}}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_e|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_e) + \\ & + mG \frac{M_{\text{mars}}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_m|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_m) + \frac{r\sigma T^4 S}{vR^2} \mathbf{r}. \end{aligned}$$

Следовательно, в гелиоцентрической системе координат уравнение выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} x = & -G \frac{M_{\text{sun}} x}{(\sqrt{(x^2 + y^2)})^3} + G \frac{M_{\text{earth}} (x_{\text{earth}} - x)}{(\sqrt{(x - x_{\text{earth}})^2 + (y - y_{\text{earth}})^2})^3} + \\ & + G \frac{M_{\text{mars}} (x_{\text{mars}} - x)}{(\sqrt{(x - x_{\text{mars}})^2 + (y - y_{\text{mars}})^2})^3} + \frac{R^2 \sigma T^4 S x}{(\sqrt{x^2 + y^2})^3 c}; \\ \frac{d^2}{dt^2} y = & -G \frac{M_{\text{sun}} y}{(\sqrt{(x^2 + y^2)})^3} + G \frac{M_{\text{earth}} (y_{\text{earth}} - y)}{(\sqrt{(x - x_{\text{earth}})^2 + (y - y_{\text{earth}})^2})^3} + \\ & + G \frac{M_{\text{mars}} (y_{\text{mars}} - y)}{(\sqrt{(x - x_{\text{mars}})^2 + (y - y_{\text{mars}})^2})^3} + \frac{R^2 \sigma T^4 S y}{(\sqrt{x^2 + y^2})^3 c}. \end{aligned} \quad (10.5)$$

Эффект влияния солнечного давления на полет КА определяется двумя параметрами S и m через отношение S/m .

3. Полет в окрестности Марса

И наконец, третий этап состоит в описании движения станции в окрестности Марса. Если в процессе сближения станция попадает в область влияния Марса, то будем считать, что в этой области она движется под воздействием одного только Марса. Из анализа параметров гомановской траектории перелета становится ясно, что к моменту встречи станции с планетой скорость Марса больше скорости станции и, следовательно, он догоняет станцию.

Фаза 3 аналогична фазе 1, за исключением того, что вместо параметров Земли необходимо подставить параметры Марса, т. е.:

$$m\mathbf{a} = -G \frac{mM_{\text{mars}}}{r_{\text{mars}}^3} \mathbf{r}_{\text{mars}},$$

где \mathbf{r}_{mars} — радиус-вектор КА в системе отсчета, связанной с Марсом.

В гелиоцентрической системе координат это уравнение запишется так:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} x &= G \frac{M_{\text{mars}}(x_{\text{mars}} - x)}{(\sqrt{(x - x_{\text{mars}})^2 + (y - y_{\text{mars}})^2})^3}; \\ \frac{d^2}{dt^2} y &= G \frac{M_{\text{mars}}(y_{\text{mars}} - y)}{(\sqrt{(x - x_{\text{mars}})^2 + (y - y_{\text{mars}})^2})^3}. \end{aligned} \quad (10.6)$$

Чтобы затормозить спутник около Марса, для его перехода на орбиту планеты необходимо сообщить КА импульс. Однако нужно учесть, что скорость станции в момент сразу после торможения должна быть равна скорости на круговой орбите Марса. В противном случае спутник может рухнуть на Марс или пролететь мимо. Если мы найдем благоприятный момент для торможения, то тормозной импульс сообщает КА изменение скорости, которое можно получить по формуле

$$\Delta v = v_T - v_0, \quad (10.7)$$

где v_T — текущая скорость спутника; v_0 — орбитальная скорость спутника Марса на текущем расстоянии до Марса.

Текущую скорость спутника можно получить из проекций скоростей по осям x и y , которые были получены в предыдущих вычислениях:

$$v_0 = \sqrt{v_x^2 + v_y^2},$$

а орбитальная вычисляется по формуле

$$v_0 = \sqrt{\frac{GM_{\text{mars}}}{R}}.$$

Рассмотрим реализацию движения планет. Уравнения движения планеты относительно Солнца в полярной системе координат (r, λ) имеют вид

$$r = \frac{p}{1 - e \cos(\lambda)}, \quad (10.8)$$

где $p = a(1 - e^2)$ — фокальный параметр эллипса; e — эксцентриситет.

Заменим λ в уравнении (10.8) произведением угловой скорости на время, получим уравнение орбиты планеты от времени

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\omega t)},$$

где $\omega = 2\pi/T_0$; T_0 — период обращения планеты вокруг Солнца.

Представим конечные формулы в декартовой системе координат

$$x = \frac{p \cos(\omega t)}{1 + e \cos(\omega t)}; \quad y = \frac{p \sin(\omega t)}{1 + e \cos(\omega t)}.$$

Теперь, когда модель описана с точки зрения физики, можно приступить к написанию листинга в MathCAD.

Оформление модели в MathCAD

При написании листинга в первую очередь определим все переменные, функции и начальные условия, необходимые для проведения всех расчетов. Основными вектор-функциями, по которым будет проводиться большая часть расчетов, являются:

1. Вектор-функция, описывающая движение КА в сфере притяжения Земли. Она составлена по уравнениям (10.1) и представлена в листинге 10.1.

2. Вектор-функция, описывающая движение КА при перелете от Земли до Марса. Она составлена по уравнениям (10.5) и представлена в листинге 10.2.

$$DE(t, bE) := \begin{bmatrix} bE_1 \\ Gp \cdot \frac{mE \cdot (xE(0) - bE_0)}{[\sqrt{(xE(0) - bE_0)^2 + (yE(0) - bE_2)^2}]^3} \\ bE_3 \\ Gp \cdot \frac{mE \cdot (yE(0) - bE_2)}{[\sqrt{(xE(0) - bE_0)^2 + (yE(0) - bE_2)^2}]^3} \end{bmatrix}$$

Листинг 10.1

Вектор-функция, описывающая движение КА
в сфере притяжения Земли

$$DK(t,bK) := \begin{bmatrix} bK_1 \\ -Gp \cdot \frac{mS \cdot bK_0}{[\sqrt{(bK_0)^2 + (bK_2)^2}]^3} + Gp \cdot \frac{mE \cdot (xE(t) - bK_0)}{[\sqrt{(xE(t) - bK_0)^2 + (YE(0) - bK_2)^2}]^3} + \\ -Gp \cdot \frac{mS \cdot bK_2}{[\sqrt{(bK_0)^2 + (bK_2)^2}]^3} + Gp \cdot \frac{mE \cdot (YE(t) - bK_2)}{[\sqrt{(xE(t) - bK_0)^2 + (YE(t) - bK_2)^2}]^3} + \\ bK_3 \\ + Gp \cdot \frac{mM \cdot (xM(t) - bK_0)}{[\sqrt{(xM(t) - bK_0)^2 + (yM(t) - bK_2)^2}]^3} + \left[\frac{RS^2 \cdot W \cdot Sail \cdot 1 \cdot 10^{12}}{[(bK_0)^2 + (bK_2)^2]^{3/2}} \cdot vL \cdot mSat \right] \cdot bK_0 \\ + Gp \cdot \frac{mM \cdot (yM(t) - bK_2)}{[\sqrt{(xM(t) - bK_0)^2 + (yM(t) - bK_2)^2}]^3} + \left[\frac{RS^2 \cdot W \cdot Sail \cdot 1 \cdot 10^{12}}{[(bK_0)^2 + (bK_2)^2]^{3/2}} \cdot vL \cdot mSat \right] \cdot bK_2 \end{bmatrix}$$

Листинг 10.2

Вектор-функция, описывающая движение КА при перелете от Земли до Марса

3. Вектор-функция, описывающая движение КА в сфере притяжения Марса. Она составлена по уравнениям (10.6) и представлена в листинге 10.3.

Переменные во всех трех листингах переобозначены в соответствии с правилами использования процедуры `rkfixed`.

При обозначении переменных и констант задачи использовалось правило. Переменные, относящиеся к Земле, помечались символом E , к Марсу — символом M , к КА — символом K . С помощью функции `rkfixed` решаем уравнения и строим графики. Функция `rkfixed` предназначена для решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно производной. Особенностью данной функции является то, что решение возвращается в виде массива с запрошенным при ее вызове количеством строк (рассчитанных точек). Каждая строка содержит значение аргумента и значения рассчитанных в этой точке искомых функций.

Приступим к программированию. Каждая программа в рабочем документе MathCAD реализуется в виде отдельного блока или модуля. В данной модели парус будет использоваться в фазе 2, т. е. когда спутник покинет сферу влияния Земли, мы распустим солнечный парус, а когда

$DM(t, bM) \leftarrow$

$$\left[\begin{array}{c} bM_1 \\ \text{Gr} \cdot \frac{mM \cdot (rM \cdot \cos(\lambda AMC) - bM_0)}{[\sqrt{(rM \cdot \cos(\lambda AMC) - bM_0)^2 + (rM \cdot \sin(\lambda AMC) - bM_2)^2}]^3} \\ bM_3 \\ \text{Gr} \cdot \frac{mM \cdot (rM \cdot \sin(\lambda AMC) - bM_2)}{[\sqrt{(rM \cdot \cos(\lambda AMC) - bM_0)^2 + (rM \cdot \sin(\lambda AMC) - bM_2)^2}]^3} \end{array} \right]$$

Листинг 10.3

Вектор-функция, описывающая движение КА
в сфере притяжения Марса

он попадет в сферу влияния Марса, свернем. Следовательно, наилучшим способом будет организовать три модуля, по одному для каждой фазы.

Алгоритм программы выглядит следующим образом.

Этап 1

Вводим начальные данные, задаем вектор-функции $DE(t, bE)$ и $DK(t, bK)$. Вектор-функция $DE(t, bE)$ используется, когда спутник летит в сфере влияния Земли, а вектор-функция $DK(t, bK)$ — когда в сфере влияния Солнца.

Этап 2

На этом этапе создаем массив значений zE , содержащий данные о движении спутника на орбите Земли до придания ему стартового импульса и после, вплоть до выхода его из сферы влияния Земли. На данном этапе спутник вращается на геостационарной орбите Земли в течение трех дней, по прошествии которых ему дается стартовый импульс. Если стартовый импульс был достаточно сильным, спутник покидает сферу влияния Земли.

Листинг программы, реализующий первый и второй этапы полета, представлен в листинге П1 в Приложении.

Этап 3

На данном этапе спутник раскрывает солнечный парус и продолжает свое движение в сфере влияния Солнца.

Листинг программы, реализующий третий этап полета, представлен в листинге П2 в Приложении.

Этап 4

На четвертом этапе проверяется достижение спутником Марса и, если спутник находится на ГСО планеты, осуществляется торможение.

Листинг программы, реализующий четвертый этап полета, представлен в листинге П3 в Приложении.

Этап 5

Финальная часть, в процессе ее происходит сборка результирующего массива из массивов данных, полученных на предыдущих этапах.

Листинг программы, реализующий пятый этап полета, представлен в листинге П4 в Приложении.

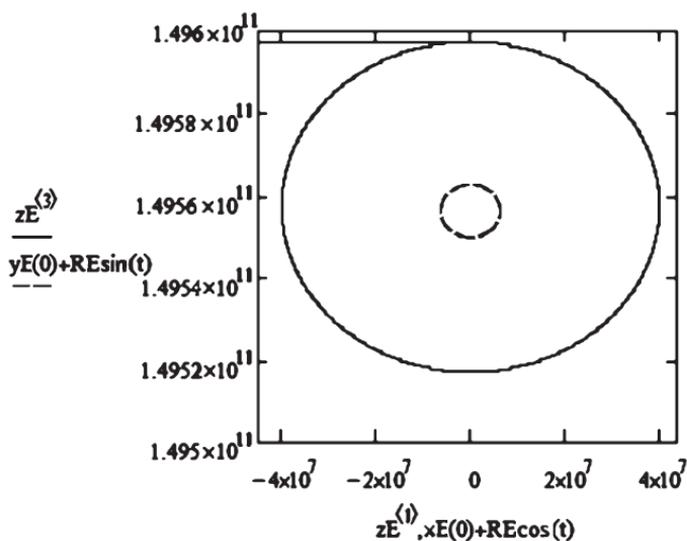


Рис. 10.2
Старт КА с круговой орбиты вокруг Земли

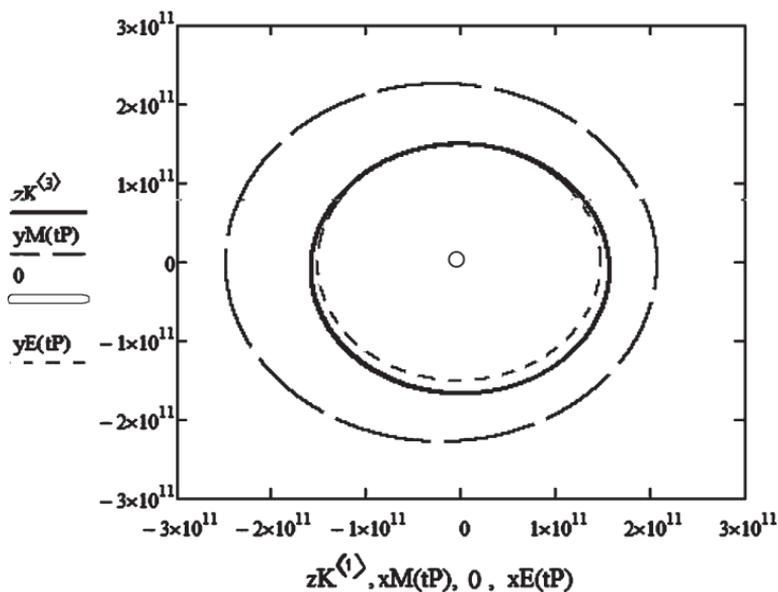


Рис. 10.3
Траектория полета КА
при стартовой скорости 31 000 м/с относительно Солнца

Результаты

Придадим КА, находящемуся на круговой орбите вокруг Земли, стартовую скорость 31 000 м/с относительно Солнца. Начальный участок стартовой траектории представлен на рисунке 10.2. Прямолинейный отрезок в верхнем углу слева на рисунке изображает начальный участок стартовой траектории.

КА переходит на эллиптическую орбиту (рис. 10.3). При такой стартовой скорости афелий эллипса не достигает орбиты Марса и полет не состоялся (рис. 10.3).

Если сообщить КА стартовую скорость 34 000 м/с относительно Солнца, то эллипс будет более вытянут и его траектория выйдет за пределы орбиты Марса (рис. 10.4). Варьируя значения стартовой скорости, можно подобрать такую ее величину, что траектория перелета станет гомаоновской (см. рис. 10.5).

Когда КА достигает сферы притяжения Марса, ему сообщается дополнительный импульс для перехода на

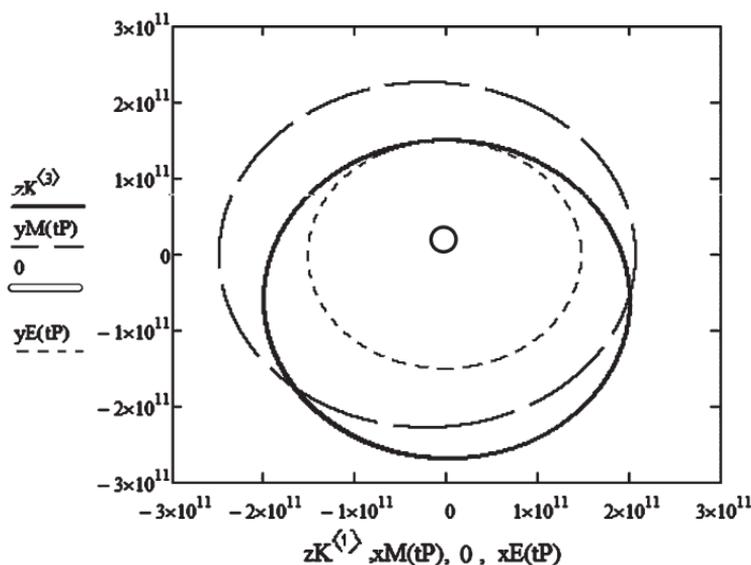


Рис. 10.4
Траектория полета КА
при стартовой скорости 34 000 м/с относительно Солнца

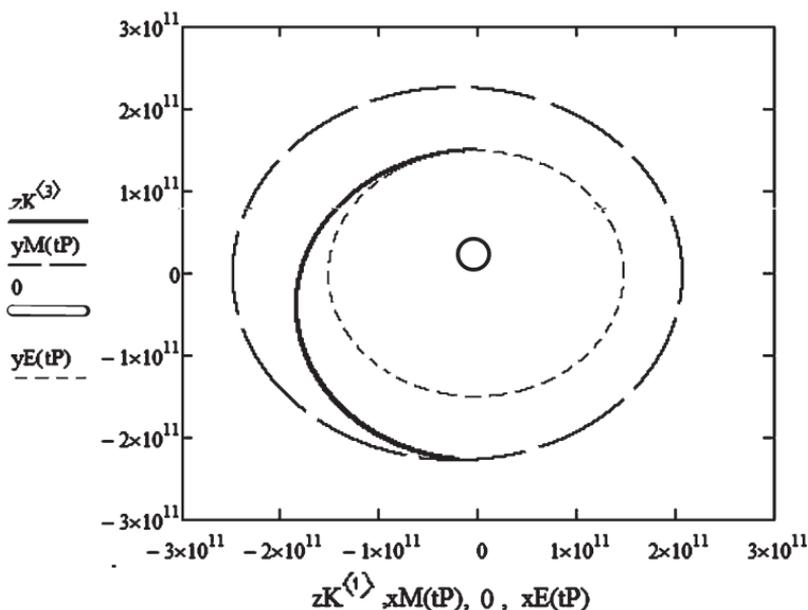


Рис. 10.5
Гомановский переход.
Стартовая скорость 33 005 м/с относительно Солнца

круговую орбиту вокруг Марса. Этот импульс приводит к изменению скорости по формуле (10.7). На этом заканчивается полет и завершается работа программы (рис. 10.6).

Прямолинейный отрезок траектории в верхнем левом углу соответствует моменту перед получением дополнительной скорости, переводящей КА на круговую траекторию около Марса.

В примере гомановского перехода видно, как спутник стартует с орбиты Земли, достигает Марса и тормозит для перехода на орбиту вокруг него.

После того как программа написана и отлажена, можно провести некоторый анализ, а именно эффективность солнечного паруса при полете на Марс. Использование солнечного паруса позволяет уменьшить стартовый импульс для выхода КА на гомановскую орбиту.

Были проведены опыты по изменению площади паруса и наблюдали, как влияет «ветер» на полет КА, изменение времени полета и уменьшение стартовой скорости спутника. При проведении этого опыта были получены следующие результаты для КА массой 1 кг (см. табл. 10.1).

В построенной модели все эксперименты проводились с КА массой 1 кг. При площади паруса 10 м^2 мы получили уменьшение стартовой скорости на 120 м/с . Данное уменьшение стартовой скорости достаточно мало, чтобы парус был эффективен при полете на Марс, так как при реальных массах КА потребуются значительная площадь паруса для достижения данного результата. Например, при массе 300 кг потребуются площадь паруса 3000 м^2 для уменьшения стартовой скорости на

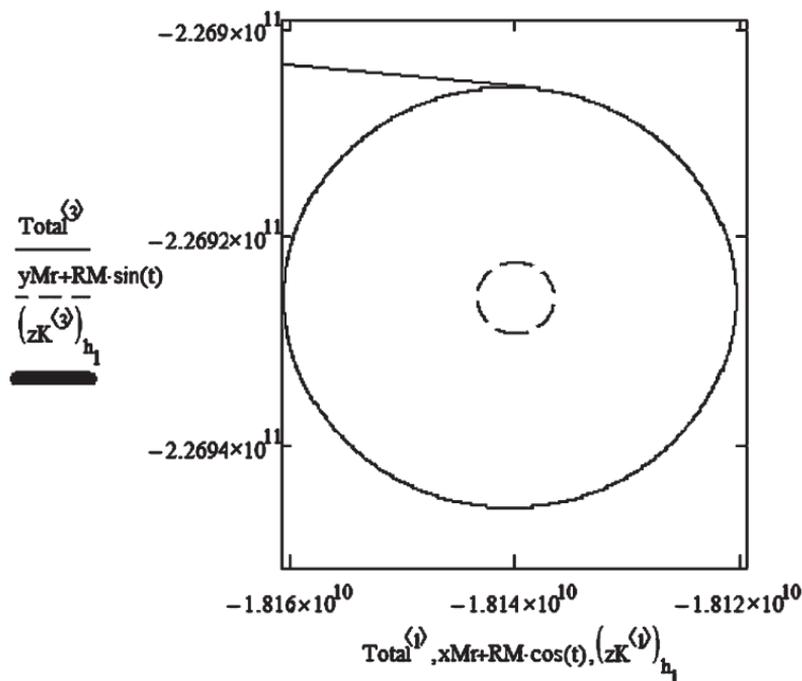


Рис. 10.6
КА получил дополнительный импульс и перешел на круговую орбиту около Марса

Таблица 10.1

Таблица данных о влиянии паруса на характеристики перелета

№	Площадь, м ²	Начальная скорость, м/с	Изменение стартовой ско- рости, м/с	Время, сут
1	0	33 020	0	263,76
2	10	32 900	120	264,34
3	20	32 780	240	264,99
4	30	32 660	360	265,44
5	40	32 540	480	265,54
6	50	32 410	610	268,51
7	60	32 290	730	268,57
8	70	32 160	860	270,95
9	80	32 040	980	271,92
10	90	31 920	1100	271,18
11	100	31 790	1230	273,37
12	110	31 660	1360	275,39
13	120	31 540	1480	275,22
14	130	31 410	1610	277,21
15	140	31 290	1730	276,86
16	150	31 160	1860	278,58

120 м/с. Следовательно, при полете на Марс использование паруса малоэффективно. Но не стоит забывать и о других возможных использованиях паруса, таких как маневрирование с его использованием. Данное свойство позволит, например, проводить точную калибровку орбиты.

Список заданий для самостоятельной работы

1. Варьируя величину λ_{start} , определите диапазон стартовых значений углов, при которых КА попадает на Марс.

2. Варьируя величину v_{start} , стартовой скорости, определите диапазон стартовых скоростей для попадания КА на Марс.

ПРИЛОЖЕНИЕ

```

      
$$bE \leftarrow \begin{pmatrix} xE(0) + gsoE \cdot \cos(\lambda E) \\ vOrbit \cdot \cos(\lambda Start) \\ yE(0) + gsoE \cdot \sin(\lambda E) \\ vOrbit \cdot \sin(\lambda Start) \end{pmatrix}$$

      zE ← rkfixed(bE,0,tO,nO,DE)
ModE := temp ← 0
for i ∈ 0..nO
  if  $(zE^{(0)})_i < 3 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60$ 
    rAMC ←  $\sqrt{[(zE^{(1)})_i]^2 + [(zE^{(3)})_i]^2}$ 
    if rAMC ≥ msxR - 1000
      msxR ← rAMC
      h ← i
      Arrayi,0 ←  $(zE^{(0)})_i$ 
      Arrayi,1 ←  $(zE^{(1)})_i$ 
      Arrayi,2 ←  $(zE^{(2)})_i$ 
      Arrayi,3 ←  $(zE^{(3)})_i$ 
      Arrayi,4 ←  $(zE^{(4)})_i$ 
    otherwise
      
$$bE \leftarrow \begin{pmatrix} Array_{h,1} \\ vStart \cdot \cos(\lambda Start) \\ Array_{h,3} \\ vStart \cdot \sin(\lambda Start) \end{pmatrix}$$

      zE ← rkfixed(bE,0,tE,nE,DE)
      for j ∈ 0..nE
        if  $\sqrt{[(zE^{(1)})_j - xE(0)]^2 + [(zE^{(3)})_j - yE(0)]^2} < 925000000$ 
          Arrayj+h+1,0 ←  $(zE^{(0)})_j + Array_{h,0}$ 
          Arrayj+h+1,1 ←  $(zE^{(1)})_j$ 
          Arrayj+h+1,2 ←  $(zE^{(2)})_j$ 
          Arrayj+h+1,3 ←  $(zE^{(3)})_j$ 
          Arrayj+h+1,4 ←  $(zE^{(4)})_j$ 
        break

```

П1

Листинг программы, реализующий первый и второй этапы полета

```

|      
$$bK \leftarrow \begin{bmatrix} (zE^{(1)})_{h_0} \\ (zE^{(2)})_{h_0} \\ (zE^{(3)})_{h_0} \\ (zE^{(4)})_{h_0} \end{bmatrix}$$

|      zK ← rkfixed(bK,0,tK,nK,DK)
ModK := flag ← 0
|      for i ∈ 0..nK
|      |      rAMC ←  $\sqrt{[(zK^{(1)})_i]^2 + [(zK^{(3)})_i]^2}$ 
|      |      λAMC ← angle[(zK(1))i, (zK(3))i]
|      |      rM ←  $\frac{pM}{1 + eM \cos(\lambda_{AMC})}$ 
|      |      if (|rM - rAMC < gsoM) ∧
|      |      |       $\left[ \left( \lambda_{AMC} > \lambda E + \pi - 5 \cdot \frac{\pi}{180} \right) \wedge \left( \lambda_{AMC} < \lambda E + \pi + 5 \cdot \frac{\pi}{180} \right) \right] \wedge$ 
|      |      |      (|rM - rAMC > 4 · 106)
|      |      |      flag ← 1
|      |      |      1 ← i + h0 + 1
|      |      |      for j ∈ 0..i
|      |      |      |      Arrayj,0 ← (zK(0))j
|      |      |      |      Arrayj,1 ← (zK(1))j
|      |      |      |      Arrayj,2 ← (zK(2))j
|      |      |      |      Arrayj,3 ← (zK(3))j
|      |      |      |      Arrayj,4 ← (zK(4))j
|      |      |      |      break
|      |      |      otherwise
|      |      |      |      Arrayi,0 ← (zK(0))i
|      |      |      |      Arrayi,1 ← (zK(1))i
|      |      |      |      Arrayi,2 ← (zK(2))i
|      |      |      |      Arrayi,3 ← (zK(3))i
|      |      |      |      Arrayi,4 ← (zK(4))i

```

П2

Листинг программы, реализующий третий этап полета

```

error("Slip") if (rM > gsoM) + (rM < 1 · 107)
ModM := otherwise
λ_S ← angle[(zK(2))h1, (zK(4))h1]
ΔV ← √[(zK(2))h1]2 + [(zK(4))h1]2 - √(Gp · mM / rM)
b_Mars ← [
    (zK(1))h1
    [ √[(zK(2))h1]2 + [(zK(4))h1]2 - ΔV ] · cos(λ_S)
    (zK(3))h1
    [ √[(zK(2))h1]2 + [(zK(4))h1]2 - ΔV ] · cos(λ_S)
]
D_Mars(t, b_Mars) ← [
    b_Mars1
    mM · (xMr - b_Mars0)
    Gp · (xMr - b_Mars0) / [ √[(xMr - b_Mars0)2 + (yMr - b_Mars2)2 ]3
    b_Mars3
    mM · (yMr - b_Mars2)
    Gp · (yMr - b_Mars2) / [ √[(xMr - b_Mars0)2 + (yMr - b_Mars2)2 ]3
]
Temp ← rkfixed(b_Mars, 0, tM, 10000, D_Mars)

```

П3

Листинг программы, реализующий четвертый этап полета

```

Assembly :=
  for i ∈ 0..h0
    Arrayi,0 ← (zE(0))i
    Arrayi,1 ← (zE(1))i
    Arrayi,2 ← (zE(2))i
    Arrayi,3 ← (zE(3))i
    Arrayi,4 ← (zE(4))i
  for i ∈ 0..h1
    Arrayi+h0+1,0 ← (zK(0))i
    Arrayi+h0+1,1 ← (zK(1))i
    Arrayi+h0+1,2 ← (zK(2))i
    Arrayi+h0+1,3 ← (zK(3))i
    Arrayi+h0+1,4 ← (zK(4))i
  for i ∈ 0..h2
    Arrayi+h0+h1+1,0 ← (zM(0))i + (zK(0))(h1)
    Arrayi+h0+h1+1,1 ← (zM(1))i
    Arrayi+h0+h1+1,2 ← (zM(2))i
    Arrayi+h0+h1+1,3 ← (zM(3))i
    Arrayi+h0+h1+1,4 ← (zM(4))i

```

П4

Листинг программы, реализующий пятый этап полета

ЛИТЕРАТУРА

1. *Перельман, Я. И.* Занимательная физика. Кн.1. — М. : Наука, 1986.
2. *Ландау, Л. Д.* Теоретическая физика : Механика. Т. 1. / Л. - Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. — М. : Наука, 1988.
3. *Поршнеv, С. В.* Компьютерное моделирование физических процессов с использованием пакета MathCAD : Учебное пособие. — М. : Горячая линия-Телеком, 2002. — 252 с.
4. Компьютерное моделирование межпланетных перелетов в солнечной системе. — Режим доступа: http://window.edu.ru/resource/362/20362/files/0009_103.pdf

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
1. Движение тела, брошенного под углом к горизонту (для начинающих)	5
2. Полет тел в стратосфере (Дальнобойная артиллерия)	9
3. Возвращение спутника на Землю по баллистической траектории	16
4. Стабилизация перевернутого маятника	26
5. Под парусом к звездам	32
6. Из истории открытия планеты Нептун	43
7. Стабилизация перевернутого двойного маятника	50
8. Полярное сияние	57
9. Магнитная «бутылка»	66
10. Полет на Марс	73
Приложение	89
Литература	94

Владимир Валерьевич БЛАГОВЕЩЕНСКИЙ

КОМПЬЮТЕРНЫЕ ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ ПО ФИЗИКЕ В ПАКЕТЕ МATHCAD

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Зав. редакцией физико-математической
литературы *Н. А. Макарова*
Технический редактор *С. В. Макаров*
Корректор *Т. А. Кошелева*
Подготовка иллюстраций *А. П. Маркова*
Верстка *М. И. Хетерели*
Выпускающие *Т. С. Симонова, Е. П. Королькова*

ЛР № 065466 от 21.10.97
Гигиенический сертификат 78.01.07.953.П.007216.04.10
от 21.04.2010 г., выдан ЦГСЭН в СПб

Издательство «ЛАНЬ»
lan@lanbook.ru; www.lanbook.com
192029, Санкт-Петербург, Общественный пер., 5.
Тел./факс: (812) 412-29-35, 412-05-97, 412-92-72.
Бесплатный звонок по России: 8-800-700-40-71

ГДЕ КУПИТЬ

ДЛЯ ОРГАНИЗАЦИЙ:

*Для того чтобы заказать необходимые Вам книги, достаточно обратиться
в любую из торговых компаний Издательского Дома «ЛАНЬ»:*

по России и зарубежью
«ЛАНЬ-ТРЕЙД». 192029, Санкт-Петербург, ул. Крупской, 13
тел.: (812) 412-85-78, 412-14-45, 412-85-82; тел./факс: (812) 412-54-93
e-mail: trade@lanbook.ru; ICQ: 446-869-967
www.lanpbl.spb.ru/price.htm

в Москве и в Московской области
«ЛАНЬ-ПРЕСС». 109263, Москва, 7-я ул. Текстильщиков, д. 6/19
тел.: (499) 178-65-85; e-mail: lanpress@lanbook.ru

в Краснодаре и в Краснодарском крае
«ЛАНЬ-ЮГ». 350072, Краснодар, ул. Жлобы, д. 1/1
тел.: (861) 274-10-35; e-mail: lankrd98@mail.ru

ДЛЯ РОЗНИЧНЫХ ПОКУПАТЕЛЕЙ:

интернет-магазины:

Издательство «Лань»: <http://www.lanbook.com>
«Сова»: <http://www.symplex.ru>; «Ozon.ru»: <http://www.ozon.ru>
«Библион»: <http://www.biblion.ru>

Подписано в печать 12.09.13.
Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Формат 84×108^{1/32}.
Печать офсетная. Усл. п. л. 5,04. Тираж 1000 экз.

Заказ № _____

Отпечатано в полном соответствии
с качеством предоставленных диапозитивов
в ОАО «Издательско-полиграфическое предприятие «Правда Севера».
163002, г. Архангельск, пр. Новгородский, д. 32.
Тел./факс (8182) 64-14-54; www.iprps.ru