От 21.09.05 г.

Лекция -2 – 2005 г.

Скалярный потенциал φ_m и индукция $\vec{B}$ (напряженность $\vec{H}^m$) магнитных полей, создаваемых намагниченными телами

А. *Намагничивание тел; представления о магнетиках, как об объемной совокупности диполей;* ***магнитный момент диполя*** $\vec{P}_i$ ***– основная количественная характеристика диполя;*** *представление процесса намагничивания вещества.*

Как показывает опыт практически все вещества и тела, при помещении их во внешнее магнитное поле ($\vec{H}_e$) изменяя свое состояние – намагничиваются, в результате чего они сами становятся источниками дополнительного магнитного поля $\vec{H}_m$. Более того в природе имеются намагниченные тела – магниты, в их естественном состоянии $\vec{M} = 0$.

Важнейшей количественной характеристикой, намагниченного тела является его вектор намагниченности $\vec{M}$, – т.е. магнитный момент единицы объёма:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{P}}{dV}, \tag{2.1}$$

где $d\vec{P} = \vec{M}dV$ – магнитный момент элемента объёма dV.

Магнитные поля, порождаемые в окружающем пространстве намагниченными телами (напр., постоянными магнитами), а тем самым и действие магнетиков на окружающие их тела, могут быть описаны исходя из представления о них, как о *совокупности магнитных диполей*. «Магнитный диполь» – это система двух равных по величине и противоположных по знаку магнитных зарядов: m^+ и m^-.

Основная количественная характеристика диполя – его магнитный момент

$$\vec{P}_i = m\vec{l}, \tag{2.2}$$

где $\vec{l}$ – радиус-вектор между полюсами диполя. Именно магнитные моменты $\vec{P}_i$ диполей и порождают согласно этой гипотезе магнитные поля вокруг намагниченных тел. Магнитные свойства тел определяются коллективным поведением диполей: в естественных (постоянных) магнитах магнитные диполи самопроизвольно ориентируются параллельно друг другу в других материалах – они могут ориентироваться упорядоченно в направлении внешнего поля $\vec{H}^e$, что и называют процессом намагничивания вещества.

$$\left[P_i^m\right] = \frac{Гн}{м}\frac{A}{м}м^3 = Гн \cdot A \cdot м = Вб \cdot м; \qquad [m] = [Вб];$$

$$\sigma_m = \pm\mu_0 M; \qquad [\sigma_m] = \left[\frac{dm}{dS}\right] = \left[\frac{Вб}{м^2}\right] = [Тл].$$

$$\rho_m = -\mu_0 div\vec{M}; \qquad \frac{dm}{dV} = [\rho_m] = \frac{Гн}{м}\cdot\frac{1}{м}\cdot\frac{A}{м} = \frac{Вб}{м^3} = \left[\frac{Тл}{м}\right].$$

Б. Потенциал (скалярный) φ_i^m ***и индукция*** $\vec{B}$ **(напряженность** $\vec{H}_i^m$**)**
магнитного поля диполя $\vec{P}_i$ **.**

С магнитным моментом $\vec{P}_i = m\vec{l}$ диполя в каждой точке пространства (на больших расстояниях от диполя) можно связать скалярный потенциал $\varphi_i^m(\vec{r})$ – некоторую функцию от координат (x, y, z). Из этой функции затем можно рассчитать напряженность $\vec{H}_i^m$ магнитного поля диполя $\vec{P}_i$. По аналогии с выражением для потенциала φ_i поля $\vec{E}$ электрического диполя $\vec{P}^e$ для потенциала φ_i^m запишем:

$$\varphi_i^m = \frac{1}{4\pi\mu_0}\left[\frac{m}{r_+} - \frac{m}{r_-}\right] = \frac{1}{4\pi\mu_0}\cdot m \cdot \frac{(r_- - r_+)}{r_- \cdot r_+} \approx \frac{1}{4\pi\mu_0}\cdot\frac{1}{r^2}\cdot ml\cos\{\vec{l}\cdot\vec{r}\} \qquad (2.3)$$

$$\varphi_i^m = \frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{(m\vec{l}\cdot\vec{r})}{r^3} = \frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{(\vec{P}_i\cdot\vec{r})}{r^3}; \qquad (2.4)$$

Это и есть выражение для скалярного потенциала магнитного поля $\vec{H}_i^m$, создаваемого диполем в некоторой точке $A(x, y, z)$; $\vec{r}$ – радиус вектор, проведенный от точки $C(x', y', z')$ в центре диполя (источника поля) к точке наблюдения $A(x, y, z)$ $\vec{P}_i = m\vec{l}$

$$|\vec{r}| = r = [(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{1/2}.$$

$C'(x', y', z')$ - центр диполя; $A(x, y, z)$ - точка наблюдения.

Выражение (2.4) можно переписать в другом виде, для этого вычислим градиент от функции $f(r) = \frac{1}{r}$ *следующим образом*

$$\vec{\nabla}_a r^{-1} = \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\right)\cdot\frac{\vec{r}}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3} \qquad (2.5)$$

$\vec{\nabla}_a$ – *индекс „a” означает, что переменной считаются точка* $A(x, y, z)$ *с координатыами (x,y,z). Тогда, для градиента от функции* $f(r) = \frac{1}{r}$ *по координатам точки* $C(x', y', z')$ *– когда эти координаты считаются переменными, а координаты точки наблюдения (x,y,z) – с постоянными, получим:*

$$-\vec{\nabla}_a\left(\frac{1}{r}\right) = \vec{\nabla}_c\left(\frac{1}{r}\right) = +\frac{\vec{r}}{r^3}. \qquad (2.6)$$

Таким образом, с учётом (2.6), выражение (2.4) для скалярного потенциала φ_i^m магнитного диполя можно представить в виде:

$$\varphi_i^m = \frac{1}{4\pi\mu_0}\left(\vec{P}_i \cdot \vec{\nabla}_c\left(\frac{1}{r}\right)\right) = \frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{\vec{P}_i \cdot \vec{r}}{r^3} \tag{2.7}$$

И наконец, зная потенциал φ_i^m поля магнитного диполя, находим для напряженности $\vec{H}_i^m$ поля в точке *(x,y,z)* с радиусом - вектором $\vec{r}$:

$$\vec{H}_i^m = -grad\varphi_i^m = -\nabla\varphi_i^m = -\vec{\nabla}\left(\frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{\vec{P}_i \cdot \vec{r}}{r^3}\right) = \frac{1}{4\pi\mu_0}\left(\frac{3(\vec{P}_i \cdot \vec{r}) \cdot \vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{P}_i}{r^3}\right) . \tag{2.8}$$

Что, как видим, аналогично формуле для напряженности $\vec{E}$ электрического поля, создаваемого электрическим диполем $\vec{P}_e = q\vec{l}$ в точке пространства x, y,z.
По аналогии с электростатикой

$$\bar{E} = -grad\varphi_e \ ; \qquad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3\left(\vec{P}_e \cdot \vec{r}\right)\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{P}_e}{r^3}\right].$$

B.Скалярный потенциал φ_m и индукция $\vec{B}$ (напряженность $\vec{H}^m$) магнитного поля, создаваемого намагниченным телом в окружающем пространстве (вакууме).

По определению $\vec{M} = \dfrac{d\vec{P}}{dV}$, магнитный момент dP элементарного объема dV вещества с намагниченностью $\vec{M}$ равен: $\qquad d\vec{P} = \vec{M}dV$.

Элементарный магнитный момент $d\vec{P}$ играет ту же роль, что и момент $\vec{P}_i$ диполя ($\vec{P}_i$ можно заменить на $\vec{P}_i \Rightarrow \mu_0\vec{M}dV$). Значит, потенциал φ_i^m создаваемый моментом $d\vec{P}$ элемента тела dV выразиться формулой типа:

$$\varphi_i^m = \frac{1}{4\pi\mu_0}\left(dP_m\vec{\nabla}_c r^{-1}\right) = \frac{1}{4\pi}\left[\vec{M} \cdot \vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right)dV\right] . \tag{2.9}$$

Тогда, магнитный потенциал поля, создаваемого в некоторой точке пространства всем объёмом V магнетика, очевидно будет равен интегралу по объёму тела :

$$\varphi_m = \frac{1}{4\pi}\int\limits_V \left(\vec{M}\overrightarrow{\nabla\left(\frac{1}{r}\right)}\right)dV \quad . \tag{2.10}$$

Примечание: $\quad \frac{\vec{r}}{r^3} = -\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right).$

Если также учесть, что:

$$\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\cdot\vec{M}\right) = div\left(\frac{1}{r}\cdot\vec{M}\right) = \vec{M}\left(\vec{\nabla}\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\vec{\nabla}\vec{M} = \vec{M}\vec{\nabla}\frac{1}{r} + \frac{1}{r}div\vec{M} \ ; \tag{2.11}$$

Тогда получаем: $\quad \vec{M}\cdot\vec{\nabla}r^{-1} = div\left(r^{-1}\cdot\vec{M}\right) - \frac{1}{r}div\vec{M}$.

С учётом (2.11), формула (2.10) перепишется в виде:

$$\varphi_m = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{V_N}\frac{\left(-div\vec{M}\right)}{r}dV + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{V_N}div\left(\frac{\vec{M}}{r}\right)dV \quad . \tag{2.12}$$

Последний интеграл преобразуем с помощью формулы Остроградского-Гаусса:

$$\int\limits_V div\left(\frac{\vec{M}}{r}\right)dV = \oint\limits_{S_T}\frac{\vec{M}\cdot d\vec{S}}{r} = \int\limits_{S_T}\frac{M_{2n}-M_{1n}}{r}dS \ ,$$

где: $M_{2n} - M_{1n}$ – разность нормальных составляющих вектора $\vec{M}$ по обе стороны граничной поверхности магнетика. С учетом последнего выражения для потенциала φ_m получаем:

$$\varphi_m = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{V_T}\frac{\left(-div\vec{M}\right)}{r}dV' + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{S_T}\frac{M_{2n}-M_{1n}}{r}dS' \tag{2.13}$$

В последней формуле $dS' = dx'dy'$; $dS' = dy'dz'$ или $dS' = dx'dz'$, а интегрирование по координатам (x', y', z') точек – источников поля внутри тела с намагниченностью $\vec{M} = \vec{M}(x', y', z')$.

По аналогии с электростатикой можно, формально, обозначить:

$$\rho_m = -\mu_0 div\vec{M} \tag{2.14}$$

где ρ_m *– плотность кажущихся объёмных магнитных зарядов в магнетике;*
А также:

$$\sigma_m = \pm\mu_0 \Delta M_n = \pm\mu_0 \left(M_{2n} - M_{1n} \right) , \qquad (2.15)$$

где σ_m *– поверхностная плотность кажущихся магнитных зарядов.*
Тогда, получим формулу для φ_m *в виде:*

$$\varphi_m = \frac{1}{4\pi\mu_0} \int\limits_V \frac{\rho_m}{r} dV' + \frac{1}{4\pi\mu_0} \int\limits_S \frac{\sigma_m}{r} dS' \qquad (2.16)$$

И наконец для напряженности магнитного поля, создаваемого намагниченным телом в окружающем его пространстве, получим:

$$\vec{H}^m = -grad\varphi_m = -\vec{\nabla} \left[\frac{1}{4\pi} \int\limits_{V_T} \frac{-div\vec{M}}{r} dV' + \frac{1}{4\pi} \int\limits_{S_T} \frac{M_{2n} - M_{1n}}{r} dS' \right] . \qquad (2.17)$$

В общих случаях, когда начало системы координат (x, y, z) выбирается произвольным образом (так, как это бывает удобно при расчетах тел произвольной формы), формулы для φ_m и $\vec{H}^m$ будут иметь вид (см. рис. 2.4):

$$\varphi_m = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{x'} \int\limits_{y'} \int\limits_{z'} \frac{-div\vec{M}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dx'dy'dz' + \frac{1}{4\pi} \oint\limits_{S'} \frac{M_{2n} - M_{1n}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS' \qquad (2.18)$$

$$\vec{H}^m(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{V_T} \frac{-div\vec{M}(r')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') dV' + \frac{1}{4\pi} \oint\limits_{S_T} \frac{(M_{2n} - M_{1n})(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dS' \qquad (2.19)$$

…………………………………………………………………………………..

$\vec{r}_a = \vec{r} - \vec{r}'$

$r = \left[(x - x')^2 + (y - y'')^2 + (z - z')^2 \right]^{1/2}$;

$dV' = dx'dy'dz'$ $\qquad dS'_0 = dx'dy'$; $dS'_0 = dy'dz'$; $dS'_0 = dx'dz'$

Следует иметь в виду. Что в формулах типа (2.18) и (2.19) интегрирование ведется по координатам (x', y', z') равно как и дифференцирование

$$div\vec{M} = \frac{\partial M_x(x', y', z')}{\partial x'} + \frac{\partial M_y(x', y', z')}{\partial y'} + \frac{\partial M_z(x', y', z')}{\partial z'} \qquad (2.20)$$

Поэтому, формула (2.19) в явном виде записывается, как

$$H_x^m(x,y,z) = \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{x'\,y'\,z'} \frac{-\,divM(x',y',z')(x-x')}{\left[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right]^{3/2}}dx'dy'dz' +$$

$$+\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{y'\,z'} \frac{(M_{2n}-M_{1n})(x-x')}{\left[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right]^{3/2}}dy'dz'; \qquad (2.21)$$

$$H_y^m(x,y,z) = \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{x'\,y'\,z'} \frac{-\,divM(x',y',z')(y-y')}{\left[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right]^{3/2}}dx'dy'dz' +$$

$$+\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{x'\,z'} \frac{(M_{2n}-M_{1n})(y-y')}{\left[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right]^{3/2}}dx'dz'; \qquad (2.22)$$

$$H_z^m(x,y,z) = \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{x'\,y'\,z'} \frac{-\,divM(x',y',z')(z-z')}{\left[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right]^{3/2}}dx'dy'dz' +$$

$$+\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{x'\,y'} \frac{(M_{2n}-M_{1n})(z-z')}{\left[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right]^{3/2}}dx'dy'. \qquad (2.23)$$

Краткое резюме к (2.17); её анализу:

Намагниченное тело порождает в окружающем пространстве (и внутри себя) магнитное поле ($H^m \neq 0$) если:

1) $div\vec{M} \neq 0$, т.е. если намагниченность внутри тела неоднородна $\vec{M} = \vec{M}(x', y', z')$ что равносильно существованию «виртуальных» магнитных зарядов с объемной плотностью $\rho_m = -\mu_0 div\vec{M}$
2) Если тело имеет свободные поверхности, (границы раздела с другой средой), где имеют место скачки (разрывы) намагниченности ΔM_n ,(что равносильно существованию магнитных зарядов) $\sigma_m = \pm\mu_0 \Delta M_n$

Например, если тело с намагниченностью $\vec{M}_2$ скажем постоянный магнит, граничит с воздухом ($M_1 \approx 0$); тогда плотность магнитных зарядов на поверхности тела:

$$\sigma_m = \mu_0 \left(M_{2n} - M_{1n}\right) \approx +\mu_0 M_{2n} \neq 0 .$$

При неоднороднойй намагниченности $\vec{M} = \vec{M}(x, y, z)$, получаем

$$\rho_m = -\mu_0 div\vec{M} \neq 0 .$$

В таких (этих двух) случаях, создаваемое намагниченным телом магнитостатическое поле $\vec{H}^m \neq 0$.

(*Конец лекции.*)

Рис. 2.1 Геометрия задачи -1 к расчету поля $\vec{H}^{m}$*, создаваемого магнитным диполем в произвольной точке пространства* $A(x, y, z)$.

Рис. 2.2 Геометрия задачи -2 к расчету поля $\vec{H}^{m}(x, y, z)$*, создаваемого телом с намагниченностью* $\vec{M}(x, y, z)$ *в произвольной точке пространства* $A(x, y, z)$*, включая любую точку внутри тела.*